Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah le tout son bonte pour la foi qu'il a mise dans nos coeurs.

Je tenais à remercier vivement mon encadreur, Dr Nawal Hechemi pour sa gentillesse,

sa disponibilité et contribution générale à l'élaboration de ce travail

Je tiens aussi mes jury qui présenter à cet entretien pour ceux on vous dit "Merci"

Mais remerciements s'étendent également à tous les professeurs et docteurs

qui nous ont enseigné durant les années des études .

À la fin nous tenons à remercier tous nos collègues d'étude .

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

- *A la mémoire de mon frère Faycel que dieu bénisse son ame*
- *Mes chers parents, que nulle dédicace ne puisse exprimer mes sincères sentiments, pour leur patienceillinitée, leur encouragement contenu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et resped pour leurs grands sacrifices.*
- *Ama très chère soeur Fatima , son mari et leurs enfants*
- *Aes chers frères Habibe, Ali, Djamel , Laid .*
- *Ames petites soeur chérie Khadidja, Bouchra .*
- *Ames chères amies Hiba , Somia , Chahrazad , Bakhta , Bouchra .*
- *Ama cher collègue Fatima .*

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Statistique non paramétrique fonctionnelle	9
1.2	Modèles conditionnelles	9
1.3	Objectifs	11
1.4	Notations et définitions	12
1.5	Outils	13
1.6	Cas d'une variable explicative fonctionnelle	13
1.6.1	Présentation des Modèles	13
2	Estimation de la fonction de régression	15
2.1	convergence presque complète uniforme	15
2.1.1	Hypothèses	15
2.1.2	Résultats	16
2.1.3	Démonstration des résultats techniques	16
3	La fonction de répartition conditionnelle	23
3.1	Propriétés asymptotique	23
3.1.1	Hypothèses	23
3.1.2	Démonstration	24
4	Estiamtion de la densité conditionnelle	27
4.1	Hypothèses	27
4.1.1	Résultats	28
5	Application	33
5.1	Estimation de la fonction de Hasard	33
5.1.1	Hypothèses	33

5.1.2	Démonstration	34
5.2	Estimation du point à haut densité	35
5.2.1	Hypothèses	35
5.2.2	Résultats	35

Chapitre 1

Introduction

L'étude d'une variables Y conditionnée par une variable X est un sujet très important en statistique. En stat non paramétrique, la régression est l'outil principal pour répondre à cette question. Cependant, cet outil n'est pas très adapté à certaines situations. Citons par exemple, le cas où la densité conditionnelles de la variable réponse est dissymétrique ou encore le cas où elle est multimodales. Le but de ce mémoire est d'étudier certains models conditionnels dans le cas où la variable explicative est fonctionnelle ou infiniment dimensionné.

1.1 Statistique non paramétrique fonctionnelle

Depuis plusieurs décennies, nombreux sont les staticiens qui ont développé des applications permettent le traitement de variables aléatoires fonctionnelles. Ce développement technologique a exigé la modernisation des méthodes statistiques comme outils d'analyse et de contrôle. L'étude de modèles non paramétriques liés à la distribution conditionnelle a été largement considérée en statistique non paramétrique.

1.2 Modèles conditionnelles

Les premiers résultats sur ces modèles ont été obtenus par Roussas (1969,[34]). Il a traité l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle par la méthode à noyau en utilisant des observations markoviennes. Il a établi la convergence en probabilité de l'estimateur construit. Stute (1986,[33]) a ajouté des résultats sur la convergence presque complète de l'estimateur à noyau de la fonction de répartition

10

une variable aléatoire vectorielle conditionnellement à une variable explicative vectorielle. L'estimation de cette dans un cadre fonctionnel a été introduite par Ferraty et al. (2006,[14]). Ils ont construit un estimateur à double noyau pour la fonction de répartition conditionnelle et ils ont précisé la vitesse de convergence presque complète de cet estimateur lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Le cas des observations α -mélangeantes a été étudié par Ferraty et al. (2005,[18]). Plusieurs auteurs ont traité l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle comme une étude préliminaire de l'estimation des quantiles conditionnels. Citons par exemple, Ezzahrioui et Ould-Saïd (2005,2006,[12],[13]) qui ont étudié la normalité asymptotique de cet estimateur dans les deux cas (i.i.d. et α -mélangeant). Ferraty et Vieu (2000,[15]) ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle non paramétrique dans le cas i.i.d. En s'inspirant des développements récents de la théorie des probabilités de petites boules, Ferraty et Vieu (2004,[19]) ont généralisé ces derniers résultats au cas α -mélangeant. Dans le cadre d'observations fonctionnelles α -mélangeantes, Masry (2005,[28]) a montré la normalité asymptotique de l'estimateur de Ferraty et Vieu (2004,[22]) pour la fonction de régression. nous renvoyons à Ferraty et Vieu (2011,[17]) ainsi qu'à Delsol (2011,[7]). Des résultats sur l'uniforme intégrabilité ont été établis par Delsol (2007,2009,[8],[9]) et Delsol et al. (2011,[7]). D'autres travaux se sont intéressés à l'estimation de la fonction de régression en utilisant différentes approches : la méthode des k plus proches voisins par Burba et al. (2008,[4]), les techniques robustes par Azzidine et al. (2008,[2]), Attouch et al. (2009,[1]) et Crambes et al. (2008,[6]), l'estimation par la méthode simplifiée de polynôme locaux par Barrientos-Marin et al. (2010,[3]). L'estimation de la fonction de densité conditionnelle et ses dérivées, en statistique fonctionnelle, a été introduite par Ferraty et al. (2006,[14]). Ces auteurs ont obtenu la convergence presque complète dans le cas i.i.d. Ferraty et al. (2005,[18]) ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau du mode conditionnel défini par la variable aléatoire maximisant la densité conditionnelle. Alternativement, Ezzahrioui et Ould-Saïd (2005, 2006,[12],[13]) ont estimé le mode conditionnel par le point qui annule la dérivée de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. Ces derniers se sont concentrés sur la normalité asymptotique de l'estimateur proposé dans les deux cas (i.i.d. et mixing). La précision des termes dominants de l'erreur quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle a été obtenue par Laksaci (2007,[24]). Nous renvoyons à Laksaci et al. (2010,[25]) pour la question du choix du

1.3. OBJECTIFS 11

paramètre de lissage dans l'estimation de la densité conditionnelle à variable explicative fonctionnelle. Ali laksaci et al. (2013,[23]) ont utilisés la méthode du polynôme locaux. Ferraty et al. (2008,[21]) ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard conditionnelle, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Dans le même contexte, Ezzahrioui (2007,[10]) a étudié la normalité asymptotique. Le cas α -mélangeant a été traité par Quintela-Del-Rio (2010,[31]). Ce dernier a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al. (2008,[21]). Laksaci et Mechab (2010,[23]) ont fait sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle pour des données fonctionnelles spatialement dépendantes. Collomb et al.(1987,[5]) ont établi la convergence uniforme de l'estimateur du mode conditionnel de cet estimateur. Dans cet article, Collomb a donné un exemple d'un processus α -mélangeant où le mode conditionnel prévoit mieux que la régression. Samanta et Thavaneswaran (1990) ont étudié la normalité asymptotique. Motivé par sa supériorité sur la régression en prévision, le mode conditionnel a fait l'objet de plusieurs travaux : Quintela-Del-Rio et Vieu (1997,[32]) sur le processus α -mélangeant, Ould-Saïd (1997,[29]) pour le cas ergodique, Louani et Ould-Saïd (1999,[26]) pour la normalité asymptotique dans le cas des observations fortement mélangeantes. Loannides et Matzner-Løber (2004,[27]) proposent un estimateur pour le mode conditionnel lorsque les variables sont entachées d'erreurs.

1.3 Objectifs

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier l'estimateur de certains modèles conditionnelles dans le cadre non paramétrique fonctionnelle. Plus précisément, on liste en bref les notations utilisées ainsi que les résultats asymptotiques obtenus. Dans le deuxième chapitre, on considère le problème de l'estimation du modèles conditionnels, dont on traite sa convergence presque complète, sous des conditions assez générales, on étudions la convergence uniforme pour l'estimateur à noyau de quatre différentes en considérons le cas indépendant. de la régression, de la fonction de répartition conditionnelle ainsi de la densité conditionnelle. En suite, nous dérivons des résultats portant sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnelle ou bien celle du mode conditionnelle. A la fin, on donne quelques commentaires générale.

1.4 Notations et définitions CHAPITRE 1. INTRODUCTION

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $\{\Delta_i\}_{i \in \mathcal{Z}}$ une famille des variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace probabilisable $(\mathbb{E}, \xi)$. On note $(\sigma_i^j)_{i \neq j}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la tribu engendrée par $\{\Delta_k, i < k < j\}$ et par $L_2(\sigma_i^j)$ l'espace des variables aléatoires σ_i^j -mesurable et de carrée sommable.

Définition 1.4.1 Soit $\{\Delta_i\}_{i \in \mathcal{Z}}$ une famille des variables aléatoires définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un espace probabilisable $(\mathbb{E}, \xi)$. On dit que la famille $\{\Delta_i, i \in \mathcal{Z}\}$ est α -mélangeante si la suite

$$\alpha_n = \sup_{\{k \in \mathcal{Z}, A \in \sigma_{-\infty}^k, B \in \sigma_{n+k}^{+\infty}\}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infinie. La suite α_n est appelée coefficient de mélange forte.

Définition 1.4.2 On dit que qu'une famille $\{\Delta_i, i \in \mathcal{Z}\}$ de variables aléatoire à valeurs dans un même espace probabilisable $(\mathbb{E}, \varepsilon)$ est algébriquement α -mélangeante, s'il existe deux constantes $c \in \mathbb{R}^{*+}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+}$ telles que les coefficients de mélange vérifient

$$\alpha(n) \leq cn^{-a}.$$

Définition 1.4.3 On dit que qu'une famille $\{\Delta_i, i \in \mathcal{Z}\}$ de variables aléatoire à valeurs dans un même espace probabilisable $(\mathbb{E}, \varepsilon)$ est géométriquement α -mélangeante, s'il existe deux constantes $s \in \mathbb{R}^{*+}$ et $t \in]0, 1[$ telles que les coefficients de mélange vérifient

$$\alpha(n) \leq st^n.$$

Définition 1.4.4 Une fonction K de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est dite noyau d'ordre k , $k \in \mathbb{N}^*$, si :

$$T_{i_1, \dots, i_p}(K) = 0, \quad \forall (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{R}_*^p \quad \text{vérifiant } i_j < k, \quad 1 \leq j \leq p.$$

et

$$T_j(K) \neq 0, \quad \forall j \leq k.$$

où

$$T_{i_1, \dots, i_p}(K) = \int_{\mathbb{R}} u_1^{i_1}, \dots, u_p^{i_p} K(u_1, \dots, u_p) du_1, \dots, du_p.$$

et

$$T_j(K) = \int_{\mathbb{R}} u_j^k K(u_1, \dots, u_p) du_1, \dots, du_p.$$

Lemme 1.5.1 ([25],2004) Soit $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ des variables aléatoires réelles centrées, indépendantes et identiquement distribuées, telles qu'il existe deux réels positifs d et δ vérifiant :

$$|\Delta_1| \leq d \text{ et } E\Delta_1^2 \leq \delta^2.$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{\delta^2}{d}[$ on a

$$p \left[n^{-1} \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i \right| > \varepsilon \right] \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4\delta^2}}.$$

cette inégalité a été donnée par W.Hoeffding en ([25],1963).

1.6 Cas d'une variable explicative fonctionnelle

1.6.1 Présentation des Modèles

On s'intéresse à des modèles non-paramétrique fonctionnel de Y en X , où Y est une variable aléatoires réelle et X est une variable aléatoire à valeurs dans un espace semi-métrique qui sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dans un tel cadre, nous cherchons à estimer l'opérateur fonctionnel φ défini par

$$m_\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(y) / X = x]$$

où φ une fonction des valeurs réelles. Notons que cette fonction peut prendre plusieurs modèles non-paramétrique, lorsque $\varphi = Id$ on trouve la regression. L'estimateur de la fonction de la régression est notée par $\hat{m}_\varphi(x)$ tel que

$$\hat{m}_\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{d(x, X_i)}{h}\right) \varphi(Y_i)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{d(x, X_i)}{h}\right)}, \quad \forall x \in \mathcal{F}$$

Tel que K est un noyan et $h_K = h_{K,n}$ est un nombres de paramètre réel strictement positif, et on adopte la convention $0/0=0$.

Ainsi, si $\varphi = \mathbb{I}_{]-\infty, y]}(t)$ avec $(y \in \mathbb{R})$, on trouve la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, notée F^x est défini par

$$F^x(y) = \mathbb{P}(Y \leq y / X = x)$$

On estime la fonction de répartition conditionnelle par

$$\hat{F}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{d(x, X_i)}{h}\right) \mathbb{I}_{(Y_i \leq y)}}{\sum_{i=1}^n \left(K\left(\frac{d(x, X_i)}{h}\right)\right)}$$

On suppose que cette distribution conditionnelle de Y sachant X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dont, on désigne par f^x la densité conditionnelle et $f^{x(j)}$ la dérivée d'ordre j de cette densité conditionnelle.

De $\hat{F}^x(y)$, on déduit un estimateur de la densité conditionnelle, noté $\hat{f}^x$, défini par

$$\hat{f}^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i)) H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{h_H \sum_{i=1}^n (K(h_K^{-1}d(x, X_i)))}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{F}$$

Où H est noyau et h_H est suite de réels positifs.

Apartir de ces derniers estimateurs, on peut trouver la fonction de Hasard qui est défini par :

$$h^x(y) = \frac{f^x(y)}{1 - F^x(y)}, \quad \forall y, \quad F^x(y) < 1, \quad \forall x \in \mathcal{F}$$

et son estimateur

$$\hat{h}^x(y) = \frac{\hat{f}^x(y)}{1 - \hat{F}^x(y)}$$

Pour l'estimateur du mode conditionnel, on suppose qu'il existe un compact S où le mode est unique. On note par $\theta(x)$ ce mode. L'estimateur de ce dernier est obtenu par la maximisation de l'estimateur de la densité conditionnelle. Plus précisément, on estime $\theta(x)$ par $\hat{\theta}(x)$ tel que

$$\hat{f}^x(\hat{\theta}) = \sup_{y \in S} \hat{f}^x(y)$$

Chapitre 2

Estimation de la fonction de régression

Le but principale de ce chapitre est d'étudier la convergence uniforme d'un estimateur à noyau pour la fonction de régression d'une variable aléatoire fonctionnelle. Nous donnons avec précision la vitesse de convergence de cet estimateur. Ces résultats ont été obtenues lorsque les observations sont indépendants et identiquement distribuées.

2.1 convergence presque complète uniforme

2.1.1 Hypothèses

Dans ce qui suit x désigne un point fixe dans $\mathcal{F}$, S_R être un compact fixe de $\mathbb{R}$.

H1 Sur la variable explicative

$$\forall x \in S_{\mathcal{F}}, \quad 0 < C\phi(h) \leq \mathbb{P}(X \in \mathbf{B}(x, h)) \leq C'\phi(h) < \infty$$

H2 Sur le modèle non paramétrique

$$\exists b > 0, \quad \text{tel que } \forall x_1, x_2 \in S_{\mathcal{F}}, \quad |m_{\varphi}(x_1) - m_{\varphi}(x_2)| \leq cd^b(x_1, x_2)$$

H3 Sur la variable de réponse

$$\forall m \geq 2, \quad \mathbb{E}(|\varphi(Y)|^m / X = x) < \delta_m(x) < C < \infty$$

avec $\delta_m(x)$ continue sur $S_{\mathcal{F}}$

Le noyau K est liptishitzienne à support compact sur $[0, 1]$ tel que $K(0) = 1$ et $-\infty < C < K(t) < C' < 0$

H5 Les fonction ϕ et ψ_{S_F} sont tel que :

- i) $\exists C > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \phi'(\eta) < C$
- ii) $\exists C > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall 0 < \eta < \eta_0, \int_0^\eta \phi(u) du > C\eta\phi(\eta)$
- iii) pour n suffisamment large, $\frac{(\log n)^2}{n\phi(h_K)} < \psi_{S_F}\left(\frac{\log n}{n}\right) < \frac{n\phi(h_K)}{\log n}$

H6 La fonction d'entropie vérifié $\sum_{i=1}^{\infty} \exp\left((1 - \beta)\psi_{S_F}\left(\frac{\log n}{n}\right)\right) < \infty$, pour $\beta > 1$

Remarque 2.1.1 (H1) est la fonction de concentration qui controle la régularité de notre modèle fonctionnel (H2)-(H4) des conditions standars pour le modèle non paramétrique (H5i,ii) est la dérivé de ϕ qui tend vers zero et joue le role de la fonction lipshizienne lorque le noyau $K(0)=1$ où le noyau est continue et l'autre cas lorsque le noyau n'est pas continue H5iii est la condition topologique qui controle la fonction d'entropie de S_F , tel que ψ_{S_F} n'est pas ni large ni petit

2.1.2 Résultats

On établit le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 sous les hypothèses **(H1) – (H6)**, et pour $S_F \subset \mathcal{F}$ on a

$$\sup_{x \in S_F} |\hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x)| = O(h_K^b) + O\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_F}\left(\frac{\log n}{nh}\right)}{n\phi(h_K)}}\right), \quad p.co$$

2.1.3 Démonstration des résultats techniques

La démonstration de ce théorème est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \hat{m}_\varphi(x) - m_\varphi(x) &= \frac{1}{\hat{f}(x)} [\hat{g}_\varphi(x) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x)] + \frac{1}{\hat{f}(x)} [\mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x) - m_\varphi(x)] \\ &+ \frac{m_\varphi(x)}{\hat{f}(x)} [1 - \hat{f}(x)] \end{aligned}$$

$$\hat{g}_\varphi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}K(h_K^{-1}d(x, X_1))} \sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))\varphi(Y_i)$$

et

$$\hat{f}_\varphi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}K(h_K^{-1}d(x, X_1))} \sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))$$

Ainsi, ce théorème est une conséquence directe des lemmes suivants :

Lemme 2.1.1 *sous les hypothèses (H1), (H4) – (H6) on a :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x) - 1| = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \left(\frac{\log n}{n} \right)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Corollaire 2.1.1 *sous les hypothèses de lemme 2.1.1 on a :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \hat{f}(x) < \frac{1}{2} \right) < \infty$$

Lemme 2.1.2 *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H4)-(H6) on a :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x) - m_\varphi(x)| = O(h_K^b)$$

Lemme 2.1.3 *Si les hypothèses du théorème sont satisfait, alors :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{g}_\varphi(x) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x)| = O_{p.co} \left(\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \left(\frac{\log n}{n} \right)}{n\phi(h_k)} \right)$$

preuve du lemme (2.1.1) On note pour tout $i = 0, \dots, n$, avec

$$K_i(x) = \frac{K(h_K^{-1}d(x, X_i))}{\mathbb{E}[K(h_K^{-1}d(x, X_i))]}$$

Soit $k(x) = \arg \min_{k \in \{1, 2, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} d(x, x_k)$. On considère la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x) - \mathbb{E}\hat{f}(x)| &\leq \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x) - \hat{f}(x_{k(x)})|}_{A_1} + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x_{k(x)}) - \mathbb{E}\hat{f}(x_{k(x)})|}_{A_2} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\mathbb{E}\hat{f}(x_{k(x)}) - \mathbb{E}\hat{f}(x)|}_{A_3} \end{aligned}$$

En ce qui concerne A_1 , on a,

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]} K_i(x) - \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_{k(x)})]} K_i(x_{k(x)}) \right| \\ &\leq \frac{c}{\phi(h_K)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |K_i(x) - K_i(x_{k(x)})| \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cup B(x_{k(x)}, h_K)}(X_i) \end{aligned}$$

La condition (H4) de Lipschitz sur K nous permet d'écrire directement

$$A_1 \leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

avec

$$Z_i = \frac{\epsilon}{h_K \phi(h_K)} \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cup B(x_{k(x)}, h_K)}(X_i)$$

Donc, $Z_1 = O\left(\frac{\epsilon}{h_K \phi(h_K)}\right)$, $\mathbb{E}(Z_1) = O\left(\frac{\epsilon}{h_K}\right)$ et $Var(Z_1) = O\left(\frac{\epsilon^2}{h^2 \phi(h_K)}\right)$

D'après l'hypothèse (H5), on a

$$A_1 = o\left(\frac{\epsilon}{h_K}\right) + O_{p.co}\left(\frac{\epsilon}{h_K} \sqrt{\frac{\log n}{n \phi(h_K)}}\right)$$

Donc il suffit de prendre les hypothèses (H5i) et (H5ii) pour obtenir

$$A_1 = O_{p.co}\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n \phi(h_K)}}\right)$$

De la même manière, la condition (H4) nous permet d'écrire

$$A_1 \leq c \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} (A_{11} + A_{12} + A_{13})$$

Maintenant, pour évaluer ces termes, nous appliquons une inégalité norme pour des sommes de variables aléatoires bornées de telle sorte que :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{n \phi(h_K)} \sum_{i=1}^n |K_i(x) - K_i(x_{k(x)})| \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cap B(x_{k(x)}, h_K)}(X_i) \\ A_{12} &= \frac{1}{n \phi(h_K)} \sum_{i=1}^n K_i(x) \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cap \overline{B(x_{k(x)}, h_K)}}(X_i) \\ A_{13} &= \frac{1}{n \phi(h_K)} \sum_{i=1}^n K_i(x_{k(x)}) \mathbb{I}_{\overline{B(x, h_K)} \cap B(x_{k(x)}, h_K)}(X_i) \end{aligned}$$

De toute évidence, nous avons pour le premier cas :

$$A_{11} = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

la même idée pour démontrer A_{12} , donc on peut écrire :

$$A_{12} \leq \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n W_i, \quad \text{tel que } W_i = \frac{1}{\phi(h_K)} \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cap \overline{B(x_k(x), h_K)}}(X_i)$$

D'après **(H5)**, on a

$$A_{12} = O \left(\frac{\epsilon}{\phi(h_K)} \right) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\epsilon \log n}{n\phi(h_K)^2}} \right)$$

On obtient le même résultat pour A_{13}

$$A_{13} = O \left(\frac{\epsilon}{\phi(h_K)} \right) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\epsilon \log n}{n\phi(h_K)^2}} \right)$$

$$A_1 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

• pour A_2 , on a pour $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(A_2 > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{k \in \{1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} |\hat{f}(x_k(x)) - \mathbb{E}\hat{f}(x_k(x))| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \\ &\leq N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{k \in \{1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(|\hat{f}(x_k) - \mathbb{E}\hat{f}(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \end{aligned}$$

On pose

$$\Delta_{ki} = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_k)]} (K_i(x_k) - \mathbb{E}[K_i(x_k)])$$

Sous les hypothèses (H1) et (H4) et $\forall k = 1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}), \forall i = 1, \dots, n$,

$$\Delta_{ki} = O(\phi(h_K)^{-1}), \quad \text{et aussi } \text{var}(\Delta_{ki}) = O(\phi(h_K)^{-1})$$

On applique maintenant l'inégalité de Bernstein (2.1.1, [25]), on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}(x_k) - \mathbb{E}\hat{f}(x_k) \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) &= \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n \Delta_{ki} \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \\ &\leq 2 \exp \{ -c\eta^2 \psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon) \} \end{aligned}$$

Le fait que $\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon) = \log N_{\epsilon}(S_{\mathcal{F}})$ et de choisir $\eta > 0$ tel que $c\eta^{\beta} = \beta$ on a :

$$N_{\epsilon}(S_{\mathcal{F}}) \max_{k \in \{1, \dots, N_{\epsilon}(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(|\hat{f}(x_k) - \mathbb{E}\hat{f}(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \leq cN_{\epsilon}(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta}$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} N_{\epsilon}(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta} < \infty$, on obtient

$$A_2 = O_{a.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

• Pour A_3 , il est claire que

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x) - \hat{f}(x_{k(x)})| \right) \\ &\leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\mathbb{E}\hat{f}(x_{k(x)}) - \mathbb{E}\hat{f}(x)| \end{aligned}$$

La preuve est similaire à A_1 , pour obtenir

$$A_3 = O \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Preuve de corollaire(2.1.1)

$$\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2} \implies \exists x \in S_{\mathcal{F}}, \quad \text{tel que} \quad 1 - \hat{f}(x) \geq \frac{1}{2} \implies \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |1 - \hat{f}(x)| \geq \frac{1}{2}$$

Donc, on déduit par le lemme précédente que

$$\mathbb{P} \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x)| \leq \frac{1}{2} \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |1 - \hat{f}(x)| > \frac{1}{2} \right)$$

par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{f}(x)| < \frac{1}{2} \right) < \infty$$

Preuve de lemme(2.1.2) On a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x)| &= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n K_i(x)\varphi(Y_i) \right] - m_{\varphi}(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]} \mathbb{E} [K_1(x)\varphi(Y_1)] - m_{\varphi}(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]} [\mathbb{E}(K_1(x)) |m_{\varphi}(X_1) - m_{\varphi}(x)|] \end{aligned}$$

par conséquent, on a

$$\forall x \in S_{\mathcal{F}}, |\mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x)| \leq \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]} [\mathbb{E}(K_1(x)) |m_{\varphi}(X_1) - m_{\varphi}(x)|]$$

Ainsi, avec les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in S_{\mathcal{F}}, \quad |\mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x) - m_{\varphi}(x)| &\leq C \frac{1}{\mathbb{E}(K_1(x))} [\mathbb{E}(K_1(x)) \mathbb{I}_{B(x, h_K)}(X_1) d^b(X_1, x)] \\ &\leq Ch_K^b \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité donne la preuve puisque C ne dépend pas de x **Preuve de lemme(2.1.3)**

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{g}_{\varphi}(x) - \mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x)| &\leq \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{g}_{\varphi}(x) - \hat{g}_{\varphi}(x_{k(x)})|}_{B_1} + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\hat{g}_{\varphi}(x_{k(x)}) - \mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x_k)|}_{B_2} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x_{k(x)}) - \mathbb{E}\hat{g}_{\varphi}(x)|}_{B_3} \end{aligned}$$

Sous **(H1)** on a :

$$\begin{aligned} B_1 &= \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} K_i(x)\varphi(Y_i) - \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]} K_i(x_k)\varphi(Y_i) \right| \\ &\leq \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n\phi(h_K)} \sum_{i=1}^n |\varphi(Y_i)| |K_i(x) - K_i(x_k)| \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cup B(x_k, h_K)} \end{aligned}$$

Maintenant, pour le terme $A1$, on considère K est lipshitzienne sur $[0, 1]$:

$$B_1 \leq \frac{c}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \quad \text{avec} \quad Z_i = \frac{\epsilon\varphi(Y_i)}{h_K\phi(h_K)} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \mathbb{I}_{B(x, h_K) \cup B(x_k, h_K)}$$

D'après l'inégalité exponentielle([25]), on note

$$\mathbb{E}[|\varphi^m(Y)|] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(|\varphi(Y)|^m | X)] = \int \delta_m(x) dP_X < C < \infty, \quad (2.1)$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{E}(|Z_1|^m) \leq \frac{c\epsilon^m}{h_K^m\phi(h_K)^{m-1}}$$

Alors on applique le corollaire de Ferraty et Vieu (, 2006) avec

$$a^2 = \frac{\epsilon}{h_K\phi(h_K)}, \quad \text{on obtient} \quad B_1 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\epsilon \log n}{nh_K\phi(h_K)}} \right)$$

L'hypothèse **(H5)** permet de déduire que

$$B_1 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

On suit les mêmes étapes pour obtenir

$$B_3 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Pour B_2 , la même preuve de lemme(2.1.1), nous avons $\forall \eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(B_2 > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{\{k \in 1 \dots N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} |\hat{g}_\varphi(x_k) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \\ &\leq N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{k \in \{1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(|\hat{g}_\varphi(x_k) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est basé sur l'inégalité exponentielle par Ferraty et Vieu (2006)

En effet :

$$\Gamma_{k_i} = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_k)]} [K_i(x_k)\varphi(Y_i) - \mathbb{E}(K_i(x_k)\varphi(Y_i))]$$

Alors

$$\mathbb{E}|\Gamma_{k_i}|^m = O(\phi(h_k)^{-m+1})$$

pour tous $\eta > 0$

$$\mathbb{P} \left(|\hat{g}_\varphi(x_k) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right) \leq 2N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{-c\eta^2}$$

Par conséquent, par un choix approprié de $\eta > 0$

$$N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{K \in \{1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(|\hat{g}_\varphi(x_k) - \mathbb{E}\hat{g}_\varphi(x_k)| > \eta \sqrt{\frac{\log N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})}{n\phi(h_k)}} \right) \leq cN_\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta}$$

comme $\sum_{n=1}^{\infty} N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta} < \infty$, nous obtenons que

$$B_2 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Chapitre 3

La fonction de répartition conditionnelle

Le but principale de ce chapitre est d'étudier la convergence uniforme de l'estimateur à noyau de la fonction de répartition conditionnelle. Sous des conditions assez générale, nous établissons la convergence presque complète d'un estimateur à noyau. On abordera également le cas indépendant

3.1 Propriétés asymptotique

3.1.1 Hypothèses

On garde les mêmes hypothèses du cas précédent et on ajoute les conditions suivantes :

(B2) $\forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}}, \forall (x_1, x_2) \in S_F \times S_F$

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq c (d(x_1, x_2)^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2})$$

(B6) Pour la fonction d'entropie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2b_2}} \exp \left\{ (1 - \beta) \psi_{S_F} \left(\frac{\log n}{n} \right) \right\} < \infty$$

pour $\beta > 1$

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèse (H1) – (H6) et (B2), (B6), on a*

$$\sup_{x \in S_F} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} |\widehat{F}^x(y) - F^n(y)| = O(h_K^{b_1}) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_F}(\frac{\log n}{n})}{n\phi(h_K)}} \right)$$

3.1.2 Démonstration

Preuve de théorème(3.1.1) Le preuve est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\hat{F}^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{\hat{F}_D} \left[\left(\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) \right) + \left(\mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) - F^x(y) \right) \right] \\ &+ \frac{F^x(y)}{\hat{F}_D} \left(\mathbb{E}\hat{F}_D - \hat{F}_D \right)\end{aligned}$$

où

$$\hat{F}_N^x(y) = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))\mathbb{I}_{(Y_i \leq y)}}{n\mathbb{E}(K(h_K^{-1}d(x, X_1)))}$$

et

$$\hat{F}_D = \frac{\sum_{i=1}^n K(h_K^{-1}d(x, X_i))}{n\mathbb{E}(K(h_K^{-1}d(x, X_1)))}$$

Ainsi, ce théorème est une conséquence directe des lemmes suivantes :

Lemme 3.1.1 *Sous les hypothèses (H2) et (H4), on a*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| F^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) \right| = O(h_K^{b_1})$$

Lemme 3.1.2 *Sous les hypothèses du théorème, on a*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) \right| = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\frac{\log n}{n})}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Preuve de lemme(3.1.1)

$\forall (x, y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}},$

$$\mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) - F^x(y) = \frac{1}{\mathbb{E}K_1(x)} \mathbb{E} \left[(K_1(x)\mathbb{I}_{B(x, h_K)}(X_1)) (F^{X_1}(y) - F^x(y)) \right]$$

et si la condition (B2) est satisfant on a,

$$\forall (x, y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{I}_{B(x, h_K)} \left| F^{X_1}(y) - F^x(y) \right| \leq Ch_K^{b_1}$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}, \quad \left| \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) - F^x(y) \right| &\leq \frac{C}{\mathbb{E}K_1(x)} \mathbb{E}K_1(x)h_K^{b_1} \\ &\leq Ch_K^{b_1}\end{aligned}$$

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| F_x(y) - \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y) \right| = O(h_K^{b_1})$$

Preuve de lemme (3.1.2) Soit S un compact, il existe un recouvrement fini tel que :
 $t_1, \dots, t_{z_n} \in S_{\mathbb{R}}$, avec

$$S_{\mathbb{R}} \subset \bigcup_{j=1}^{Z_n} (t_j - l_n, t_j + l_n)$$

avec $l_n = n^{-\frac{1}{2b_2}}$ et $Z_n \leq n^{\frac{1}{2b_2}}$, on prendre

$$j(y) = \arg \min_{j \in \{1, 2, \dots, Z_n\}} |y - t_j|$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y) \right| &\leq \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}_N^x(y) - \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \right|}_{D_1} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) - \mathbb{E} F_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) \right|}_{D_2} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) - \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) \right|}_{D_3} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) - \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \right|}_{D_4} \\ &+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) - \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y) \right|}_{D_5} \end{aligned}$$

En ce qui concerne D_1 et D_5 , on utilise la même preuve de A_1 et A_3 , hypothèse (H5i)

$$D_1 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right), \quad \text{et} \quad D_3 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

- Pour le terme D_2 , pour tout $j \leq Z_n$ et $x \in S_{\mathcal{F}}$

$$\mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j - l_n) \leq \sup_{y \in (t_j - l_n, t_j + l_n)} \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \leq \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j + l_n)$$

et

$$\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j - l_n) \leq \sup_{y \in (t_j - l_n, t_j + l_n)} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \leq \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j + l_n) \quad (3.1)$$

En suite, on utilise la condition de type Hölder sur F^x et montrons que pour tout $y_1, y_2 \in S_{\mathbb{R}}$ et pour tout $x \in S_{\mathcal{F}}$

$$\left| \mathbb{E} \hat{F}_N^x(y_1) - \mathbb{E} \hat{F}^x(y_2) \right| = \left| \frac{1}{\mathbb{E} K_1(x)} \mathbb{E} (K_1(x) F^{X_1}(y_1)) - \frac{1}{\mathbb{E} K_1(x)} \mathbb{E} (K_1(x) F^{X_1}(y_2)) \right| \leq C |y_1 - y_2|^{b_2}$$

Par (3.1) et (3.1.2) et la condition $l_n = n^{-\frac{1}{2b_2}}$ implique

$$D_2 \leq D_4 + O \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

avec $D_4 = \max_{k \in (1, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}))} \max_{1 \leq j \leq Z_n} \max_{S_j = [t_j - l_n, t_j + l_n]} \left| \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(S_j) - \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(S_j) \right|$

Ainsi, il reste à étudier D_4 . Pour les démontrer, on utilise les mêmes arguments de A_2 et la condition **(B2)**

$$D_4 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(x)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

donc

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(S_{j(y)}) - \mathbb{E} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(S_{j(y)}) \right| = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(x)}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Chapitre 4

Estiamtion de la densité conditionnelle

Dans cette contribution on se propose d'étudier la convergence uniforme d'un estimateur à noyan pour la densité conditionnelle dans le cadre non paramétrique pour une variable fonctionnelle dans le cas indépendant.

4.1 Hypothèses

On grade les mêmes hypothèses de théorème précédente et ajoute les conditions suivantes :

(H7) La fct H est continue et liptishitzienne tel que :

$$\begin{cases} \int |t|^{b_2} H(t) dt < 0 \\ \int H(t) dt < \infty \end{cases}$$

$$(H8) \sum_{n=1}^{\infty} n^{(3r+1)/2} \exp\left((1-\beta)\psi_{\mathcal{F}}\left(\frac{\log n}{n}\right)\right) < \infty \text{ pour } \beta > 1$$

$$(H9) \forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}}, \forall (x_1, x_2) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathcal{F}}$$

$$|f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2)| \leq C \left(d^{b_1}(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|^{b_2} \right)$$

(H10) pour $r \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r h_H = \infty$ pour $n > 0$ lorsque

$$\frac{(\log n)^\epsilon}{n^{1-r}\phi(h_K)} < \psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right) < \frac{n^{1-r}\phi(h_K)}{\log n}$$

(H11) K est un noyau et lipschitzienne de $[0, 1]$, $K(1) = 0$, tel que :

$$-\infty < C < \dot{K}(t) < C' < \infty$$

1. $\exists x > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \phi(\eta) < C$, si $K(1) = 0$
2. tel que : $\exists C > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall 0 < \eta < \eta_0, \int_0^\eta \phi(u) du > C\eta\phi(\eta)$
3. $\forall x \in S_{\mathcal{F}}, 0 < C\phi(h) \leq \mathbb{P}(X \in B(x, h)) \leq C'\phi(h) < \infty$

Remarque 4.1.1 *les hypothèses (H7)-(H10) de régularité qui caractérisant l'espace fonctionnel de notre modèle. Tandis que les autre hypothèses sont des conditions techniques, elles sont nécessaire pour prouver les théorème.*

4.1.1 Résultats

On établit le résultat suivant :

Théorème 4.1.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H4), on a :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{f}^x(y) - f^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \frac{\log n}{n}}{n^{1-r} \phi(h_K)}} \right)$$

Preuve de théorème(4.1.1) le preuve est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{\hat{f}_D(x)} \left[\left(\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right) - \left(f^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right) \right] \\ &\quad + \frac{f^x(y)}{\hat{f}_D} \left[1 - \hat{f}_D \right] \end{aligned}$$

avec

$$\hat{f}_N^x(y) = \frac{1}{nh_H \mathbb{E} \left(K \left(\frac{d(x, X_1)}{h_K} \right) \right)} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{d(x, X_i)}{h_K} \right) H \left(\frac{y - Y_i}{h_H} \right)$$

Lemme 4.1.1 *Sous les hypothèses (H4)-(H7), et (H9) on a :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| f^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2})$$

Lemme 4.1.2 *Sous les hypothèse du théorème, on a*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N^x(y) \right| = O_{p.co} \left(\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \left(\frac{\log n}{n} \right)}{n^{1-r} \phi(h_K)} \right)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\hat{f}_N^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{nh_H\mathbb{E}K_1(x)}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n K_i(x)H_i(y)\right] - f^x(y) \\ &= \frac{1}{h_H\mathbb{E}K_1(x)}\mathbb{E}[K_1(x)(\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y))]\end{aligned}$$

L'intégrale par parties donne :

$$h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) = \frac{1}{h_H}\int_{\mathbb{R}} H(h_H^{-1}(y-z))f^{X_1}(z)dz$$

par le changement de variable $t = (y-z)/h_H$, on arrive à :

$$h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) = \int_{\mathbb{R}} H(t)f^{X_1}(y-h_H t)dt$$

Donc

$$|h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} H(t)|f^{X_1}(y-h_H t) - f^x(y)|dt$$

L'hypothèse **(H7)**, nous permet d'écrire

$$|h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y)| \leq C \int_{\mathbb{R}} H(t)(h_K^{b_1} + |t|^{b_2}h_H^{b_2})dt$$

Par conséquent, pour $(x, y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}$ et **(H7)** implique le résultat du lemme. **Preuve de lemme 4.1.2**

La démonstration est très similaire à celle du lemme. En effet, on considère le recouvrement $S \subset (t_{j(y)} - l_n, t_{j(y)} + l_n)$ avec $l_n = n^{-\frac{3}{2}r - \frac{1}{2}}$ et $Z_n \leq Cn^{\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}}$. On a la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y)\right| &\leq \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left|\hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y)\right|}_{L_1} + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left|\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)})\right|}_{L_2} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left|\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)})\right|}_{L_3} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left|\mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_{j(y)}) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y)\right|}_{L_4} \\ &\quad + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left|\mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y)\right|}_{L_5}\end{aligned}$$

De même que pour l'étude de A_1 terme, nous obtenons en suit les même étapes de A_1 pour L_1 et **(H5)** on obtient

$$L_1 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-r}\phi(h_K)}} \right), \quad L_5 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-r}\phi(h_K)}} \right) \quad (4.1)$$

Concernant le terme L_2 , en utilisant la condition lipshiezienne sur le noyau H , on pent écrire

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \right| &\leq C \frac{1}{nh_H\phi(h_K)} \sum_{i=1}^n K_i(x_{k(x)}) |H_i(y) - H_i(t_j(y))| \\ &\leq \frac{C}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \end{aligned}$$

avec

$$Z_i = \frac{1}{h_H^2\phi(h_K)} (l_n K_i(x_{k(x)}))$$

D'après l'inégalité des sommes exponentielle([25]), on peut écrire

$$\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) = O\left(\frac{l_n}{h_H^2}\right) + O_{p.co} \left(\frac{l_n}{h_H^2} \sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Ainsi, en utilisant les faits que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r h_H = \infty$ et $l_n = n^{-3/2-1/2}$, nous obtenons

$$L_2 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-r}\phi(h_K)}} \right), \quad \text{et} \quad L_4 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-r}\phi(h_K)}} \right) \quad (4.2)$$

Enfin, pour toute $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P} \left(L_3 > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{j \in \{1, 2, \dots, Z_n\}} \max_{k \in \{1, 2, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \left| \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) - \mathbb{E} \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}} \right) \\ &\leq Z_n N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{j \in \{1, 2, \dots, Z_n\}} \max_{k \in \{1, 2, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) - \mathbb{E} \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}} \right) \end{aligned}$$

Cette dernière peut être traitée à l'aide de l'inégalité de Bernstein ([25]).

On pose

$$\Delta_i = \frac{1}{h_H\phi(h_K)} [K_i(x_k)H_i(t_j(y)) - \mathbb{E}(K_i(x_k)H_i(t_j(y)))]$$

On obtient

$$\mathbb{E}(|\Delta_i|) \leq C (h_H \phi(h_K))^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(|\Delta_i|^2) \leq \frac{C}{h_H \phi(h_K)}$$

$$\begin{aligned} \forall j \leq Z_n, \quad \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}_N^{x_k}(t_{j(y)}) - \mathbb{E} \hat{f}_N^{x_k}(t_{j(y)}) \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n h_H \phi(h_K)}} \right) \\ \leq 2 \exp \{ -C \eta^2 \psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon) \} \end{aligned}$$

par conséquent $Z_n = O(l_n^{-1}) = O(n^{\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}})$. Pour $C\eta^2 = \beta$, on a

$$\begin{aligned} Z_n N_\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{j \in \{1, 2, \dots, Z_n\}} \max_{k \in \{1, 2, \dots, N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathbb{P} \left(\left| \hat{f}_N^{x_k}(t_{j(y)}) - \mathbb{E} \hat{f}_N^{x_k}(t_{j(y)}) \right| > \eta \sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n h_H \phi(h_K)}} \right) \\ \leq C Z_n N_\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1 - C\eta^2} \end{aligned}$$

Le fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^r h_H = \infty$ et **H8**, on obtient

$$L_3 = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-r} \phi(h_K)}} \right) \quad (4.3)$$

On combine (4.1), (4.2) et (4.3) pour achever le lemme

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{f}_N(y) - \mathbb{E} \hat{f}_N(y) \right| = O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\frac{\log n}{n})}{n^{1-r} \phi(h_K)}} \right)$$

Chapitre 5

Application

5.1 Estimation de la fonction de Hasard

Ce chapitre est porte essentiellement sur l'étude de la convergence presque complète d'un estimateur à noyau dans le même cas indépendant à partir des estimateurs de la densité et la fonction de répartition conditionnelle.

5.1.1 Hypothèses

On a les mêmes hypothèses du théorème (4.1.1) et si **(H 12)** et **(H 13)** :

$$\text{(H12)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{(3r+1)/2} \exp\left\{(1-\beta)\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\} < \infty \text{ pour } \beta > 1$$

$$\text{(H13)} \quad \exists \delta_1 > 0, \delta_2, \text{ tel que } \forall x \in S_{\mathcal{F}}, \forall y \in S_{\mathbb{R}}, F^x(y) < \delta_1 < 1 \text{ et } f^x(y) \leq \delta_2$$

Théorème 5.1.1 *Sous les hypothèses de théorème (4.1.1) et **(H 12)**-**(H 13)**, on a :*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{h}^x(y) - h^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O(h_K^{b_2}) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n^{1-r} \phi(h_K)}} \right)$$

Preuve de théorème(5.1.1)

On considère la décomposition suivante :

$$|\hat{h}^x(y) - h^x(y)| \leq \frac{1}{|1 - \hat{F}^x(y)|} \left(|\hat{f}^x(y) - f^x(y)| + \frac{|f^x(y)|}{|1 - F^x(y)|} |\hat{F}^x(y) - F^x(y)| \right)$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{h}^x(y) - h^x(y) \right| &\leq \frac{C}{\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} (1 - \hat{F}^x(y))} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left[\hat{f}(y) - f(y) \right] \\ &\quad + \frac{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} [h^x(y) (\hat{F}^x(y) - F^x(y))]}{\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} (1 - \hat{F}^x(y))} \end{aligned}$$

Finalement, ce théorème est une conséquence des résultats suivants

Lemme 5.1.1 *Sous les hypothèses (H1)-(H6) et (B2)-(B6), on a*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}^x(y) - F^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\frac{\log n}{n})}{n\phi(h_K)}} \right)$$

Lemme 5.1.2 *Sous les conditions (H1)-(H4), on a*

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| f^x(y) - \mathbb{E} \hat{f}^x(y) \right| = O(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + O_{p.co} \left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \frac{\log n}{n}}{n^{1-r} \phi(h_K)}} \right)$$

Lemme 5.1.3 *Sous les hypothèses du théorème (5.1.1), on a*

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que : } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| 1 - \hat{F}^x(y) \right| < \delta \right\} < \infty$$

5.1.2 Démonstration

La preuve des lemmes (5.1.1) et (5.1.2) sont identique à celle des théorèmes (3.1.1) et (4.1.1) pour cela il suffit de démonstration seulement le lemme (5.1.3)

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| 1 - \hat{F}^x(y) \right| &\leq \left(1 - \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y) \right) / 2 \\ \implies \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}^x(y) - F^x(y) \right| &\geq \left(1 - \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y) \right) / 2 \end{aligned}$$

En terme de probabilité, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} \inf_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| 1 - \hat{F}^x(y) \right| \leq \left(1 - \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y) \right) / 2 \right) \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{F}^x(y) - F^x(y) \right| \geq \left(1 - \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y) \right) / 2 \right) < \infty \end{aligned}$$

Il suffit, donc, de prendre $\delta = \left(1 - \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} F^x(y) \right) / 2$ et appliquer les résultats des lemmes pour achever la démonstration du lemme.

Le but est d'étudier une autre alternatif est le mode conditionnelle qui est la valeur qui maximise la densité conditionnelle sur un compact fixe. Dans notre contexte fonctionnel, on suppose qu'il existe un point unique $\theta(x)$ dans S vérifiant

$$f^x(\theta(x)) = \max_{y \in S} f^x(y)$$

Ce modèle a un grand intérêt en statistique, notamment dans l'analyse de la densité. L'estimateur naturel de ce dernier, noté $\hat{\theta}(x)$, est tel que

$$\hat{f}^x(\hat{\theta}) = \sup_{y \in S} \hat{f}^x(y)$$

5.2.1 Hypothèses

Afin d'étudier la convergence presque complète de l'estimateur $\hat{\theta}(x)$. On garde les hypothèses du théorème (4.1.1) et on ajoute (H14) et (H15)

(H14) $\forall \epsilon_0 > 0, \exists \eta > 0, \forall r : S \rightarrow S_{\mathbb{R}},$

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |\theta(x) - r(x)| \geq \epsilon_0 \implies \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} |f^x(r(x)) - f^x(\theta(x))| \geq \eta$$

(H15) Pour $j > 1, \forall x \in S_{\mathcal{F}},$ la fct f^x est fct continue et différentiable d'ordre j sur $y \in S_{\mathbb{R}}$ et vérifier la condition suivante :

$f^{x(l)}(\theta(x)) = 0$ si $1 \leq l < j$ et $f^{x(j)}(\cdot)$ est continue uniformément sur $S_{\mathbb{R}}$ tel que

$$|f^{x(j)}(\theta(x))| > C > 0$$

avec $f^{x(j)}$ est la fonction de la densité conditionnel d'ordre j

5.2.2 Résultats

Corollaire 5.2.1 *Sous les hypothèses du théorème (4.1.1) et si la densité conditionnelle f^x satisfait (H14) et (H15)*

$$\left[\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \left(\hat{\theta}(x) - \theta(x) \right)^j \right] = O(h_K^{b_1}) + O(h_H^{b_2}) + O_{p.co} \left(\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}} \left(\frac{\log n}{n} \right)}{n^{1-r} \phi(h_K)} \right)$$

On considère le développement de Taylor pour la fonction f^z au voisinage du point θ , ceci est possible car la fonction f^x est de classe C^j alors

$$f^x(\hat{\theta}(x)) - f^x(\theta(x)) = \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(\hat{\theta}(x) - \theta(x))^{l-1}}{l!} f^{x(l)}(\theta) + \frac{(\hat{\theta}(x) - \theta(x))^j}{j!} f^{x(j)}(\theta^*)$$

où θ^* est un point entre θ et $\hat{\theta}$. L'hypothèse (b) nous permet de conclure,

$$f^x(\hat{\theta}(x)) - f^x(\theta(x)) = \frac{(\hat{\theta}(x) - \theta(x))^j}{j!} f^{x(j)}(\theta^*)$$

Ceci implique que,

$$(\hat{\theta}(x) - \theta(x))^j = \frac{j!(f^x(\hat{\theta}(x)) - f^x(\theta(x)))}{f^{x(j)}(\theta^*)}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| f^x(\hat{\theta}(x)) - f^x(\theta(x)) \right| &\leq \left| f^x(\hat{\theta}(x)) - \hat{f}^x(\hat{\theta}(x)) \right| + \left| \hat{f}^x(\hat{\theta}(x)) - f^x(\theta(x)) \right| \\ &\leq \sup_{y \in S} \left| f^x(y) - \hat{f}^x(y) \right| + \sup_{y \in S} \left| \hat{f}^x(y) - f^x(y) \right| \\ &\leq 2 \sup_{y \in S} \left| f^x(y) - \hat{f}^x(y) \right| \end{aligned}$$

Alors,

$$\left| (\hat{\theta}(x) - \theta(x))^j \right| \leq \frac{j! 2 \sup_{y \in S} \left| f^x(y) - \hat{f}^x(y) \right|}{f^{x(j)}(\theta^*)}$$

Donc,

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \left| \hat{\theta}(x) - \theta(x) \right|^j \leq C \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} f^{x(j)}(\theta^*(x)) \right)^{-1} \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \left| \hat{f}^x(y) - f^x(y) \right|$$

Il suffit de montrer que,

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P} \left(\inf_{x \in S_{\mathcal{F}}} f^{x(j)}(\theta^*(x)) < \tau \right) < \infty \quad (5.1)$$

La démonstration de (5.1) est identique à celle du (2.1.1). En combinant ce résultat avec le théorème(4.1.1) pour obtenir le résultat du corollaire.

Conclusion

En considérant ces modèle, on peut mentionner les remarques suivants :

1. Ce modèle est insensible à l'effet de la dimension, parce qu'il nous permet de transformer le problème de prévision à partir d'une variable fonctionnelle de dimension infinie à une prévision avec variable explicative de dimension un.
2. L'utilisation d'une semi-métrique qui donne une forte concentration à la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle, est alors une solution originale de ce problème de dégradation de la vitesse.
3. Le choix du paramètre de lissage à une importance dans l'estimation par la méthode du noyau. L'expression de notre de convergence, décompose principalement en deux parties : partie biais proportionnelle à h et partie dispersion inversement proportionnelle à h . Les vitesses de convergences données dans les théorèmes précédents nous permettent de faire un choix optimal de ce paramètre. En effet, il suffit de choisir un paramètre de lissage qui minimise l'erreur en moyenne d'ordre p ou presque complète donnée dans les théorèmes ci-dessus.

Bibliographie

- [1] Attouch, Laksaci, Ould-Said,E.(2009). Asymptotic Distribution of Robust Estimator for Functional Nonparametric Models. *communications in statistics : Theory and Methods* 38,1317-1335
- [2] Azzeddine, N.,Laksaci, A., Ould-Said,E.(2008). On the robust nonparametric regression estimation for functional regressor. *Statistic and Probability Letters*.78,3216-3221
- [3] Barrientos - Marin,J.,Ferraty , F., Vieu, P.(2010). Locally modelled regression and functional data .*J.of Non Parametric Statistics*. 22,617-632
- [4] Burba, F., Ferraty, F., Vieu, P. (2008). Convergence de l'estimateur à noyau des k plus proches voisins en régression fonctionnelle non-paramétrique. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 346, 339-342.
- [5] Collomb, G., Härdle, W., Hassani, S. (1987). A note on prediction via conditional mode estimation. *J. Statist. Plann. and Inf.* 15, 227-236.
- [6] Crambes, C., Delsol, L., Laksaci, A. (2008). Lp errors for robust estimators in functional nonparametric regression. *Journal of Nonparametric*
- [7] Delsol, L., Ferraty, F.,Vieu, P.(2011). Structural test in regression on functional variables , *J.Multivariate Anal*
- [8] labe Delsol, L(2007). Régression non paramétrique fonctionnelle : expression asymptotique des moments, *Ann.I.S.U.P.VOLLI*,3,43-67
- [9] Delsol, L (2009). Advances on asymptotic normality in non-parametric functional time series analysis. *Statistics*, 43, 13U33.
- [10] Ezzahrioui, M. (2007). Prédiction dans les modèles conditionnels en dimension infinie. PhD Thesis. Univ. du Littoral Côte d'Opale.

- [11] Ezzahrioui, M., Ould-Said, E. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data . Preprint LMPA NO 277, Univ. du Littoral Côte d'Opale .
- [12] Ezzahrioui, M., Ould-Said, E. (2005). Asymptotic normality of nonparametric estimators of the conditional mode for functional data. Technical report, No.249, LMPA, Univ. Littoral Côte d'Opale
- [13] Ezzahrioui, M., Ould-Said, E. (2006). On the asymptotic properties of a nonparametric estimator of the conditional mode for functional dependent data. Preprint, LMPA No 277, Univ. du Littoral Côte d'Opale
- [14] Ferraty, F., Laksaci, A., Vieu, P. (2006) Estimation of some characteristics of the conditional distribution in non parametric functional models. *Statistical Inference for Stochastic processes*. 9, 47-76
- [15] Ferraty, F., Vieu, P. (2000). Dimension fractale et estimation de la régression dans des espaces vectoriels semi-normés. *C.R. Acad. Sci., Paris*. 330, No 2 , 139-142.
- [16] Ferraty, F., Vieu, P. (2011) . *Non Parametric functional data analysis. Theory and Practice* . Springer-Verlag.
- [17] Ferraty, F., Vieu, P. (2006). *Nonparametric functional data analysis. Theory and Practice*. Springer-Verlag.
- [18] Ferraty, F., Rabhi, A. and Vieu, P. (2005). Conditional quantiles for dependent functional data with application to the climatic El Niño phenomenon. *Sankhya*. 67 , 378-398.
- [19] Ferraty, F., Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* 16, 111-125.
- [20] Ferraty, F., Laksaci, A., Vieu, P. (2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*. 340, 389-392.
- [21] Ferraty, F., Rabhi, A., Vieu, P. (2008). Estimation non paramétrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle. *Rom. J. Pure Applied Math.* 52, 1-18.
- [22] Ferraty, F., Vieu, P. (2004). Nonparametric models for functional data, with application in regression times series prediction and curves discrimination. *J. Nonparametric Statist.* 16, 111-125

- [23] Laksaci, A., Mechab, B. (2010). Estimation non parametrique de la fonction de hasard avec variable explicative fonctionnelle cas des donnees spatiales. Rev : Roumaine, Math Pures Appl. 55, 35-51.
- [24] Laksaci, A. (2007). Convergence en moyenne quadratique de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle avec variable explicative fonctionnelle. Ann. I.S.U.P. 51, 69-80.
- [25] Laksaci, A., Madani, F., Rachdi, M. (2010). Kernel conditional density estimation when the regressor is valued in a semi metric space. International Statistical Review. (In press).
- [26] Louani, D., Ould-Saïd, E. (1999). Asymptotic normality of kernel estimators of the conditional mode under strong mixing hypothesis. J. Nonparametric Statist. 11, No.4, 413-442
- [27] Loannides, D., Matzner-Lober, E. (2004). A note on asymptotic normality of convergent estimates of the conditional mode with errors-in-variables. J. Nonparametr. Stat. 16, 515-524.
- [28] Masry, E. (2005). Nonparametric regression estimation for dependent functional data : Asymptotic normality. Stoch. Proc. and their Appl., 115, 155-177.
- [29] Ould-Saïd, E. (1997). A note on ergodic processes prediction via estimation of the conditional mode function. Scand. J. Statist. 24, 231-239.
- [30] Quintela-del-Rio, A., Vieu, P. (1997). A nonparametric conditional mode estimate. J. Nonparametr. Statist. 8, No.3, 253-266.
- [31] Quintela-del-Rio, A. (2010). On non-parametric techniques for areacharacteristic seismic hazard parameters. Geophys. J. Int. 180, 339-346
- [32] Quintela-del-Rio, A., Vieu, P. (1997). A nonparametric conditional mode estimate. J. Nonparametr. Statist. 8, No.3, 253-266.
- [33] Stute, W.(1986) On almost sure convergence of conditional empirical distribution functions. Ann. Probab. 14 891-901
- [34] Roussas, G.(1969) Nonparametric estimation of the transition distribution function Markov process. Ann. Math.Staist.40 1386-1400