République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Sur un Schéma de la Réduction Générale des Opérateurs de Fredholm

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, géometrie et applications

par

Youcef Nacéra [1]

Sous la direction de

Mr G. Djellouli

Soutenue le 25 Mai 2017 devant le jury composé de

Dr.H.M Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr.G Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Dr.A Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr.F Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : youcefnacira2020@gmail.com

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans cette mémoire on aborde l'étude de la stabilité des opérateurs de Fredholm par rapport aux petites perturbations. Le mathématicien Suédois Erik Ivar Fredholm $(1866 - 1927)$ s'est principalement intéressé à la physique mathématique. Dans le langage mathématique la théorie de Fredholm est connue par la théorie des équations intégrales. Fredholm s'intéressait à la résolution du problème suivant : étant donnée une fonction continue g sur $[0;1]$, peut-on trouver f continue sur $[0;1]$ qui vérifie l'équation intégrale

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = \int_0^1 k(x;y)f(y)dy + g(x)$$

Si le noyau k est continu sur le carré $[0;1] \times [0;1]$, il résulte du théorème d'Ascoli que l'opérateur intégral est compact de $\mathcal{C}([0;1])$ dans lui-même, donc le problème revient à résoudre une équation de la forme

$$(I - T_k)f = g.$$

Fredholm découvre que l'indice de $(I - T_k)$ est nul, ce qui le conduit à formuler ce qui est resté connu sous le nom d'alternative de Fredholm. Vingt cinq ans plus tard les équations intégrales sont devenues un domaine important de recherche mathématique. Notamment après l'introduction des espaces de Hilbert c'est une étape importante dans le développement de la théorie quantique.

Dans un sens plus large, la structure abstraite de la théorie de Fredholm est donnée en termes de théorie spectrale d'opérateurs de Fredholm et de noyaux de Fredholm sur les espace de Hilbert, ceci établi en particulier la théorie quantique qui décrit le comportement de la matière de particules - atomes, électrons, et semblables - dans des petits intervalles, qui a conduit à des découvertes remarquables pour les physiciens. Ce qui attire dans cette théorie, c'est la propriété de stabilité des opérateurs de Fredholm sous une petite perturbation, ce résultat a été introduit pour la première fois par F.V. Atkinson en 1951 dans [At] pour le cas borné, tout en concluant que l'ensemble des opérateurs de Fredholm est ouvert dans l'ensemble des opérateurs bornés et l'indice est constant sur chaque composante connexe de l'ensemble résolvant essentiel (de Fredholm). Un autre type de stabilité par rapport aux perturbations a était établit au cours de la même année c'est la stabilité aux perturbations compact. Cette notion a été généralisée successivement au cas non borné par M.G. Krein et M.A. Krasnolesky dans [KrKr] et par B. Sg. Nagy dans [Na] en 1952 et en 1987 par J. P. Labrousse et B. Mercier [LaMe]. ils ont introduit sur l'espaces des opérateurs fermés $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ une métrique g définie par

$$g(A,B) = \left\| P_{G(A)} - P_{G(B)} \right\|$$

où $P_{G(A)}, P_{G(B)}$ sont respectivement les projections orthogonales dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sur le graphe de A noté $G(A)$ et sur le graphe de B noté $G(B)$. Plusieurs auteurs ont étudié la structure topologique de l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et donnèrent des résultats intéressants [Ka], [La2], [CoLa]..... En 1963 H.O. Cordes et J. PH. Labrousse ont introduit une autre métrique p (plus pratique) équivalente à la métrique g sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et par suite énoncèrent le premier théorème de stabilité des opérateurs de Fredholm non bornés et conclurent encore que l'ensemble des opérateurs de Fredholm non bornés noté $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est un ouvert dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. D'autre part dans J. Ph. Labrousse et B. Mercier [LaMe],est étendue à l'ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ la notion d'équivalence compacte des opérateurs de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$: $A \sim B$ si et seulement si $(A - B)$ est compact sur $\mathcal{H}$. Plusieurs résultats ont été dégagés à l'aide de cette relation " $\sim$ ", on peut notamment citer la correction spectrale par une perturbation compacte, le théorème de Weyl, l'algebre de Calkin,... etc. La relation " $\sim$ " permet aussi d'étendre à la classe des opérateurs de Fredholm de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ un certain nombre de résultats et de propriétés spectrales [LaMe]. Notons aussi l'emploi de la théorie de Fredholm dans la définition du spectre essentiel d'un opérateur de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, notion déjà employée dans divers sens par plusieurs auteurs, en particulier si $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Chapitre 2

Concepts liés aux théorie des groupe quotient et théorie des opérateurs

2.1 Espaces quotients

L'objectif de ce chapitre est de formaliser cette situation pour un groupe quelconque. Autrement dit, étant donné un groupe G et un sous-groupe H, à quelles conditions peut-on définir un ensemble quotient G/H et une application canonique $\pi : G \to G/H$, de telle sorte que la loi de G induise sur G/H une loi interne le munissant d'une structure de groupe et que π soit un morphisme de groupes ?

On va montrer qu'à tout sous-groupe H d'un groupe G est associée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur G. Si cette relation d'équivalence satisfait certaines conditions de compatibilité, la loi interne de G induit une loi interne sur l'ensemble des classes d'équivalence $G/\mathcal{R}$ qui munit cet ensemble d'une structure de groupe et la projection canonique $\pi : G \to G/\mathcal{R}$ est un morphisme de groupes. On montrera qu'inversement, à toute relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur un groupe G et satisfaisant les conditions de compatibilité, est associé un sous-groupe H de G tel que la relation $\mathcal{R}$ soit la relation associée au sous-groupe H. Ceci conduit à la notion de sous-groupe normal. Pour plus de détail le lecteur peut se reporter à [A.C], [A.M], [L.S] *et* [C.J]

2.2 Classes modulo un sous-groupe

On considère un groupe G, H un sous-groupe de G, et on définit sur G la relation

$$(x\mathcal{R}y) \Longleftrightarrow (x^{-1}y \in H).$$

Proposition 2.2.1. 1. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Soit x un élément de G, sa classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ est l'ensemble*

$$xH = \{xh, h \in H\}.$$

Définition 2.2.1. *La relation $\mathcal{R}$ est appelée relation d'équivalence à gauche modulo H, et xH la classe à gauche de x modulo H.*

Remarque 2.2.1. 1. *On définit une relation d'équivalence à droite modulo H par*

$$(xRy) \Longleftrightarrow (xy^{-1} \in H)$$

et la classe à droite de x modulo H est l'ensemble

$$Hx = \{hx, h \in H\}.$$

Lorsque nous aurons à considérer les relations à gauche et à droite modulo H, nous noterons ces deux relations respectivement $_H\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_H$.
2. *Quel que soit h dans H, on a*

$$Hh = H = hH$$

et H est la classe à droite et à gauche de l'élément neutre de G modulo H.
3. *Si le groupe G est abélien, en notant sa loi additivement, les relations d'équivalences définies ci-dessus s'écrivent*

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow ((x-y) \in H),$$

et les relations d'équivalences (resp. les classes) à gauche et à droite modulo H coïncident.

Notation 2.2.1. *On note* $(G/H)_g$ *(resp.* $(G/H)_d$ *) l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de* G *pour la relation à gauche (resp. à droite) modulo* H*. Ces ensembles sont aussi appelés ensembles quotients à gauche (resp. à droite) modulo* H*.*

Définition 2.2.2. *Soient* G *un groupe et* H *un sous-groupe de* G*. On appelle indice de* H *dans* G*, qu'on note* $[G : H]$*, le cardinal de l'ensemble* $(G/H)_g(ou(G/H)_d)$*.*

Théorème 2.2.1. *(de Lagrange). Si* G *est un groupe fini, pour tout sous-groupe* H *de* G *on a*

$$|G| = |H|[G : H].$$

2.3 Groupes quotients

On va maintenant étudier la situation où G est un groupe.

Proposition 2.3.1. *Soient* G *un groupe et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence définie sur* G*, compatible avec la loi de* G*. Alors l'ensemble quotient* $G/\mathcal{R}$*, muni de la loi induite par la loi de* G *(définie par* $(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \overline{xy}$ *), est un groupe.*

Preuve 2.3.1. *C'est une conséquence directe de la proposition* (2.2.1)*, qui assure que la loi sur le quotient est bien définie, et de la remarque* (2.2.1)*. Une autre façon de dire les choses est la suivante : notant* $\pi : G \longrightarrow G/\mathcal{R}$ *l'application de passage au quotient, la loi sur le quotient* $G/\mathcal{R}$ *est définie par*

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy).$$

On est donc amené à déterminer les relations d'équivalences compatibles avec la loi de G*.*

Proposition 2.3.2. *Pour tout sous-groupe* H *d'un groupe* G*, la relation* $\mathcal{R}_H$ *(resp.* ${}_H\mathcal{R}$ *) est compatible à droite (resp. à gauche) avec la loi de composition de* G*.*
Réciproquement, si une relation $\mathcal{R}$ *définie sur un groupe* G *est compatible à droite (resp. à gauche) avec la loi de composition du groupe* G*, alors il existe un unique sous-groupe* H *de* G *tel que*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_H \qquad (resp. \mathcal{R} =_H \mathcal{R}).$$

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit normal (ou distingué) dans G si

$$\mathcal{R}_H =_H \mathcal{R}.$$

On note alors H/G

2.4 Sous-groupes normaux et morphismes

Théorème 2.4.1. *Soient G et G' deux groupes et f un élément de $Hom(G, G')$. Alors f induit un isomorphisme f de $G/\ker(f)$ sur $\mathrm{Im}(f)$.*

Remarque 2.4.1. *Le théorème ci-dessus peut être démontré à partir du théorème de factorisation des applications. En effet, on sait que si E et E' sont des ensembles et $f : E \to E$ est une application, on définit sur E une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si*

$$f(x) = f(y).$$

On considère $E/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E et l'application $\overline{f}$ définie comme ci-dessus est une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $\mathrm{Im}(f)$. Il suffit alors de vérifier que l'application $\overline{f}$ est un morphisme de groupes.

Théorème 2.4.2. *Soient G un groupe, H un sous-groupe normal de G,*

$$\pi : G \to G/H$$

la projection canonique.
i. Le morphisme π induit une correspondance biunivoque entre les sous-groupes (resp. sous-groupes normaux) de G contenant H et les sous-groupes (resp. sous-groupes normaux) de G/H.
ii. Si K est un sous-groupe de G, alors HK est un sous-groupe de G contenant H et

$$\pi(K) = HK/H.$$

Théorème 2.4.3. *(de passage au quotient). Soient G et G' deux groupes, H (resp. H') un sous-groupe normal de G (resp. G'),*

$$\pi : G \to G/H \qquad (resp. \pi : G' \to G'/H')$$

la projection canonique. Pour tout $f \in Hom(G, G')$ *tel que* $f(H) \subseteq H'$*, il existe un unique* $\widehat{f} \in Hom(G/H, G'/H')$ *tel que*

$$f \circ \pi = \pi \circ f.$$

Convention. L'expression « le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

est commutatif » signifie que les applications $f,\ f',\ g,\ g'$ *satisfont à la condition*

$$g' \circ f = f' \circ g.$$

Preuve 2.4.1. *Démonstration du théorème* (2.4.3)*. Considérons le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ G/H & \xrightarrow{\overline{f'}} & G'/H' \end{array}$$

Si le morphisme $\overline{f}$ *existe et fait commuter le diagramme, il doit vérifier*

$$\overline{f}(\pi(x)) = \pi'(f(x))$$

et, tout élément de G/H *s'écrivant* $\pi(x)$ *pour* $x \in G$*, cette égalité impose l'unicité de* $\overline{f}$*.*

Montrons que l'égalité ci-dessus définit bien une application $\overline{f}$*, i.e. que* $\overline{f}(\pi(x))$ *est indépendant du représentant* x *choisi dans* G *pour décrire sa classe dans* G/H*. Si*

$$\pi(x) = \pi(y),$$

on a $xy^{-1} \in H$*, donc*

$$f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in f(H) \subseteq H'$$

D'où

$$\pi'(f(x)) = \pi'(f(y)).$$

Montrons que $\overline{f}$ est un morphisme de groupes. On a

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\pi(x)\pi(y)) &= \overline{f}(\pi(xy)) \\
&= \pi'(f(xy)) \\
&= \pi'(f(x)f(y)) \\
&= \pi'(f(x))\pi'(f(y)) \\
&= \overline{f}(\pi(x))\overline{f}(\pi(y))
\end{aligned}$$

Remarque 2.4.2. *En particulier, si $H \subseteq \ker(f)$, il existe un unique morphisme $\overline{f} \in Hom(G/H, G')$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$. On dit que f factorise à travers π.*

2.5 Quotient d'un espace vectoriel normé

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On rappelle que E/F est le quotient de E par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow x - y \in F.$$

Pour les opérations évidentes, E/F est un espace vectoriel et l'application quotient $\pi : E \to E/F$ est linéaire.
Pour

$$\xi = \pi(x) \in E/F$$

on pose

$$\begin{aligned}
\|\xi\| &= \inf\{\|y\| : \; \pi(y) = \xi\} \\
&= \inf\{\|x - y\| : \; y \in F\}
\end{aligned}$$

Théorème 2.5.1. ***(Quotient d'un espace vectoriel normé)***
1. *L'application $\xi \mapsto \|\xi\|$ est une norme sur E/F ;*
2. *$\pi : E \longmapsto E/F$ est continue, de norme ≤ 1 ;*

3. $\pi : E \longmapsto E/F$ *est une application ouverte ;*
4. *Si* E *est un espace de Banach, alors* E/F *l'est aussi*

Lemme 2.5.1. *Soit* $F \subseteq E$ *un sous-espace fermé d'un espace normé* $(E, \|.\|_E)$ *et* $\pi : E \longrightarrow E/F$ *l'application quotient associée. Alors*

$$(\pi U_E) = U_{E/F}.$$

Proposition 2.5.1. *Soit* $F \subseteq E$ *un sous-espace fermé d'un espace normé* $(E, \| \cdot \|_E)$. *Alors,*
1. $\| x + F \|_{E/F} \leq \| x \|_E$ *pour tout* $x \in E$ *;*
2. *Pour tout* $x \in E$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\overline{x} \in E$ *tel que*

$$\overline{x} + F = x + F$$

et

$$\| \overline{x} \|_E < \| x + F \|_{E/F} + \varepsilon.$$

Preuve 2.5.1. " $\subseteq$ " *Soit* $x \in U_E$*,*

$$\|\pi(x)\|_{E/F} = \|x + F\|_{E/F} \leq \|x\|E \leq 1,$$

donc $\pi(x) \in E/F$ *et* $\pi(U_E) \subseteq U_{E/F}$.
" $\supseteq$ " *Soit* $x + E \in U_{E/F}$*, alors par le point* (2) *de la proposition* (2.5.1)*, il existe* $\overline{x} \in E$ *tel que*

$$\pi(\overline{x}) = \overline{x} + F = x + F$$

et

$$\|\overline{x}\|_E < \|x + F\|_{E/F} + \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$*. En d'autres termes, il existe* $\widehat{x} \in U_E$ *tel que*

$$\pi(\widehat{x}) = \widehat{x} + F = x + F.$$

Par conséquent, $U_{E/F} \subseteq \pi(U_E)$.

2.5.1 Propriété universelle de l'espace quotient

Soient E et F des espaces normés et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Soit encore $H \subseteq \ker(A)$ un sous-espace fermé de E et $\pi : E \longrightarrow E/H$ l'application quotient.
Alors, il existe un unique opérateur linéaire $S : E/H \longrightarrow F$ tel que $A = S \circ \pi$.
Autrement dit le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ \pi \downarrow & \nearrow_{\exists ! S} & \\ E/H & & \end{array}$$

De plus,

$$\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(A);$$

S est une application ouverte si et seulement si A est une application ouverte ; S est borné si et seulement si A est borné et si A est borné, alors

$$\|S\| = \|A\|.$$

Preuve 2.5.2. 1. *L'existence et l'unicité d'une application linéaire $S : E/H \longrightarrow F$ tel que*

$$A = S \circ \pi$$

et de même image que A constitue la propriété universelle algébrique du quotient.
2. *Montrons que S est une application ouverte si et seulement si A est une application ouverte. Supposons d'abord que S soit une application ouverte. π est aussi une application ouverte par la proposition* (2.5.1) *. Par conséquent,*

$$A = S \circ \pi$$

est aussi une application ouverte en tant que composition de deux applications ouvertes.
Réciproquement, supposons que A soit une application ouverte et soit U un ouvert de E/H. Alors,

$$S(U) = S(\pi(\pi^{-1}(U))) = A(\pi^{-1}(U)).\pi^{-1}(U)$$

est un ouvert de E puisque π est continu et donc

$$S(U) = A(\pi^{-1}(U))$$

est un ouvert de F puisque A est ouverte. Par conséquent S est une application ouverte.
Montrons que S est borné si et seulement si A est borné. Par le lemme (2.5.1).

$$\pi(U_E) = U_{E/H}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sup\{\|S(x+H)\|/\ x+H \ &\in\ U_{E/H}\} = \sup\{\|S(\pi(x))\|\ /x \in U_E\} \\ &=\ \sup\{\|Ax\|\ /\ x \in U_E\} \end{aligned}$$

Ainsi S est borné si et seulement si A est borné et si A est borné, alors $\|S\| = \|A\|$

2.5.2 Théorème d'isomorphisme

Soient E et F des espaces de Banach et $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Supposons de plus que $\mathrm{Im}(A)$ soit un fermé de F. Alors :

$$E/\ker(A) \simeq A(E)$$

Preuve 2.5.3. *Le noyau de A est fermé en tant que pré-image par une application continue du fermé $\{0_F\}$ de F. Nous pouvons donc considérer l'espace quotient $E/\ker(A)$ ainsi que l'unique opérateur induit $S : E/\ker(A) \longrightarrow F$ tel que*

$$A = S \circ \pi,$$

fourni par la propriété universelle du quotient. Il vient,

$$\begin{aligned} \ker(S) &= \{x + \ker(A)\ /\ x \in E \text{ et } S \circ \pi(x) = 0\} \\ &= \{x + \ker(A)/\ x \in \ker(A)\} \\ &= \{0 + \ker(A)\} \end{aligned}$$

L'opérateur S est donc un opérateur linéaire borné et injectif de l'espace de Banach $E/\ker(A)$ dans l'espace de Banach $A(E)$. Il s'agit donc d'un isomorphisme. D'où l'assertion.
Finalement, en application de la propriété universelle du quotient, nous obtenons un test de continuité des opérateurs linéaires de rang fini entre deux espaces normés.

2.5.3 Projections

Définition 2.5.1. 1. *On dit qu'un sous-espace fermé F d'un espace normé E admet un supplémentaire topologique s'il existe un sous-espace fermé H de E tel que*

$$E = F \oplus H$$

2. *On dit qu'un opérateur $P : E \longrightarrow E$ est une projection si*

$$P(P(x)) = P(x), \qquad \forall x \in E$$

de plus ;

$$E = P(E) + (I - P)E = \operatorname{Im} P + \ker P$$

Corollaire 2.5.1. *F et H sont des espaces supplémentaires dans E, alors $F \backsimeq E/H$.*

Preuve 2.5.4. *C'est une conséquence immédiate du premier théorème d'isomorphie appliqué à la projection d'image F et de noyau H.*

Chapitre 3

Généralités sur les opérateurs

Dans le cas d'un opérateur borné, on pouvait toujours supposer que son domaine est l'espace tout entier. Dans le cas d'un opérateur non borné il n'en est pas de même ; le domaine de l'opérateur devra toujours être précisé et, lorsqu'on effectuera des opérations algébriques sur des opérateurs non bornés, les questions de domaine devront être examinées avec soin. Donc l'étude des domaines est indispensable pour ce type d'opérateurs voir [M.S.B], [N.B], [H.B], [M.T] *et* [P.LB].

3.0.4 Opérateurs bornés

Définitions

Un opérateur A sur un espace de Banach E est une application linéaire de E dans lui même.
Un opérateur continu ou borné est un opérateur tel que

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| < +\infty.$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des opérateurs bornés sur E. [M.S.B]

Topologies sur les opérateurs bornés

On peut définir plusieurs topologies sur l'espace des opérateurs, on en utilisera principalement deux :

1. La topologie en norme d'opérateur
2. La topologie faible qui est la plus petite topologie rendant continues les applications $\alpha_{x,l}$ définies sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$\alpha_{x,l}(A) = l(A(x))$$

pour $x \in E,\ l \in E^*$.

Spectre d'un opérateur

L'ensemble résolvante d'un opérateur A est l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda I - A \in GL(E)\}.$$

L'ensemble résolvante est un ouvert de $\mathbb{C}$.
On définit le spectre

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

On définit alors la résolvante de A comme

$$R_\lambda(A) = (\lambda I \ - A)^{-1}.$$

Théorème 3.0.2. ***(Identité de la résolvante)****. Soit A un opérateur sur un Banach E, on a :*
1. *Pour λ et μ dans une même composante connexe de $\rho(A)$*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) \tag{3.1}$$

De plus sur cette composante connexe, les résolvantes commutent.
2. *$\lambda \to R_\lambda(A)$ est analytique en sur $\rho(A)$.*

Preuve 3.0.5. *Soit $\lambda \in \rho(A)$, on définit la série*

$$R(z) = R_\lambda(A)(I + \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda - z)^n R_\lambda^n(A))$$

qui converge en norme si $|z - \lambda| < ||R_\lambda(A)||^{-1}$ et vérifie

$$R(z)(zI - A) = (zI \ - A)R(z) = I$$

d'où

$$R(z) = R_z(A).$$

L'égalité de (3.1) et la commutativité sont immédiates.

Adjoints

Si E est un espace de Hilbert, on rappelle que si $A \in \mathcal{L}(E)$ alors $\exists! B \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$< Ax,\ y >=< x,\ By > .$$

On note alors $B = A^*$, c'est l'adjoint de A.

Définition 3.0.2. ***(Opérateur auto-adjoint, normal, unitaire)****. On rappelle les définitions suivantes :*
1. *A est auto-adjoint si $A^* = A$*
2. *A est normal s'il commute avec son adjoint*
3. *A est unitaire si $AA^* = I$.*

Théorème 3.0.3. *Si A est auto-adjoint alors*
1. *$\sigma(A)$ est inclus dans $\mathbb{R}$*
2. *Les sous espaces propres de A sont orthogonaux.*

Opérateurs compacts

Parmi les opérateurs bornés, on distingue les opérateurs compacts, et on note leur espace vectoriel $\mathcal{K}(E)$. Ce sont opérateurs qui envoient les parties bornés de E sur des parties relativement compactes de F.

Exemple 3.0.1. *Les opérateurs de rang finis sont compacts par le théorème de Riesz. On a plusieurs propriétés et caractérisation intéressantes de la compacité des opérateurs :*

Proposition 3.0.2. *Si (x_n) (suite à valeur dans un Hilbert $\mathcal{H}$) converge faiblement vers x, et si A est compact, alors $A(x_n)$ converge vers Ax au sens de la norme.*

Preuve 3.0.6. *La suite $||x_n||$ est bornée par le théorème de Banach-Steinhaus. On raisonne ensuite par l'absurde.*

Proposition 3.0.3. *Si A_n est une suite d'opérateurs compacts qui converge vers A pour la norme d'opérateur, alors A est compact.*

Proposition 3.0.4. *Si A ou B est compact, alors AB est compact.*

Proposition 3.0.5. *Sur un Hilbert séparable, A est compact si et seulement si il est la limite au sens de la norme d'opérateur d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Théorème 3.0.4. ***(Théorème Analytique de Fredholm)****. Soit D une domaine de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathcal{K}(\mathcal{H})$ une fonction analytique, alors on a l'alternative suivante :*
1. *$\forall z \in D,\ (I\ - f(z))$ n'est pas inversible*
2. *$I - f(z)$ est inversible en dehors d'un ensemble discret de D, et cet inverse est une fonction méromorphe sur D dont les résidus sont de rang fini. De plus, $I - f(z)$ est toujours injective.*

Corollaire 3.0.2. ***(Alternative de Fredholm)****. Soit A un opérateur compact sur $\mathcal{H}$, alors $I - A$ est inversible si et seulement si $I - A$ est injective.*

Théorème 3.0.5. ***(Hilbert-Schmitt)****. Soit A un opérateur compact auto-adjoint sur $\mathcal{H}$. Alors il existe une base de Hilbert de vecteurs propres que l'on peut ordonner de manière à ce que la suite des valeurs propres tende vers 0.*

Proposition 3.0.6. *Soient E, F, I, G des espaces de Banach et des opérateurs bornés*

$$E \underset{S}{\longrightarrow} F \underset{A}{\longrightarrow} I \underset{R}{\longrightarrow} G$$

tel que A soit compact. Alors
1. *$\mathcal{K}(E, F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(E, F)$.*
2. *la composition $R \circ A \circ S$ est un élément de $\mathcal{K}(E, F)$.*

Opérateurs non bornés

Un opérateur non continu ne peut pas être défini sur $\mathcal{H}$ tout entier, on cherche alors à le définir sur un domaine $D(A)$ qui ait des bonnes propriétés, comme par exemple qu'il soit dense.

Exemple 3.0.2. 1. *Sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est définie sur $\mathcal{H}^2$.*
2. *(Les Potentiels) Sur $L^2(E)$, si V est une fonction de E dans $\mathbb{C}$, la multiplication par V dans $L^2(E)$ est définie sur*

$$\{f \in L^2(E),\ \int_X V(x)f(x)dx < \infty\}.$$

Si V est finie presque partout, alors ce domaine est dense.

Définition 3.0.3. ***(Opérateur fermé)***. *A est fermé si et seulement si son graphe est fermé.*
Si l'opérateur est fermé, on garde les mêmes définitions de spectre, résolvante. De plus si l'opérateur est défini sur un domaine dense, on conserve l'identité de la résolvante. On traitera maintenant avec des opérateurs fermés dont le domaine de définition est dense.

3.0.5 Opérateurs à image fermée :

Théorème 3.0.6. *Soient E, F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{B}(E, F)$. Alors A est d'image fermée si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que*

$$\|Ax\| \geq c.d(x, \ker A) \qquad\qquad \forall x \in E$$

Preuve 3.0.7. *Soit*

$$\widehat{E} = E/\ker A.$$

Comme E est un espace de Banach, $\widehat{E}$ reste un espace de Banach, muni de la norme définie par

$$\|\widehat{x}\| = d(x, \ker A).$$

Ainsi, nous pouvons définir $\widehat{A} : \widehat{E} \longrightarrow F$ par

$$\widehat{A}(\widehat{x}) = A(x).$$

Comme $A \in \mathcal{B}(E, F)$, $\widehat{A} \in \mathcal{B}(E, F)$. De plus, $\widehat{A}$ est injective et

$$\operatorname{Im} \widehat{A} = \operatorname{Im} A.$$

Supposons que A soit un opérateur à image fermée. Alors, par linéarité (et donc continuité) de $\widehat{A}$, nous pouvons affirmer que $\widehat{A}^{-1} : \operatorname{Im} A \longrightarrow \widehat{E}$ est un opérateur fermé entre espaces de Banach. Ainsi, par le théorème du graphe fermé, $\widehat{A}^{-1}$ est un opérateur borné et $\widehat{A}^{-1}$ est un opérateur borné et

$$\|A(x)\| = \|\widehat{A}(\widehat{x})\| \geq \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1}\|\widehat{x}\|^{-1} = \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1} d(x, \ker A)$$

ce qui est la relation cherchée si l'on pose

$$c = \|\widehat{A}^{-1}\|^{-1}$$

Réciproquement, supposons qu'il existe c tel que :

$$\|Ax\| \geq c.d(x, \ker A) \qquad \forall x \in E.$$

Soit (x_n), une suite telle que

$$A(x_n) \longrightarrow Ax = y.$$

Ainsi, $(\widehat{x}_n)$ est une suite de Cauchy. Comme nous venons d'affirmer que $\widehat{E}$ est un espace de Banach, $(\widehat{x}_n)$ converge vers un $\widehat{x} \in \widehat{E}$
Par conséquent,

$$A(x_n) = \widehat{A}(\widehat{x}_n) \longrightarrow \widehat{A}(\widehat{x}) = Ax = y$$

Ainsi, A est un opérateur à image fermée.

Théorème 3.0.7. *Soit $A \in \mathcal{B}(E, F)$, comme précédemment. Si il existe un sous-espace fermé F_0 tel que $\operatorname{Im} A \oplus F_0$ est fermé, alors A est un opérateur à image fermée.*

Preuve 3.0.8. *Posons $A_0 : E \times F_0 \longrightarrow F$, l'opérateur défini par*

$$A_0(x, y_0) = Ax + y_0.$$

Muni de la norme donnée par

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$

$E \times F_0$ est un espace de Banach. Comme $A \in \mathcal{B}(E, F)$, A_0 est un opérateur linéaire borné d'image

$$\operatorname{Im} A_0 = \operatorname{Im} A + F_0.$$

Par hypothèse,

$$\operatorname{Im} A_0 = \operatorname{Im} A + F_0$$

est fermé. De plus,

$$\ker A_0 = \ker A \times \{0\},$$

car $y_0 < \operatorname{Im} A, \quad \forall y_0 \in F_0$. *On utilise le théorème précédent pour affirmer qu'il existe* $c > 0$ *tel que :*

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|A_0(x,0)\| \geq c.\ d((x,0), \ker A_0) \\ &= c.d(x, \ker A). \end{aligned}$$

Par le même théorème, on conclut que $\operatorname{Im} A$ *est fermée.*

Corollaire 3.0.3. *Soit* $A \in \mathcal{B}(E,F)$, *comme avant. Si* $\operatorname{Im} A$ *admet un supplémentaire, alors* A *est un opérateur à image fermée. Ce corollaire s'applique en particulier lorsque la codimension de l'image est finie.*

Preuve 3.0.9. *Il s'agit d'un résultat immédiat du théorème précédent, vu que si* $\operatorname{Im} A$ *admet un supplémentaire, il existe* F_0 *tel que*

$$\operatorname{Im} A \oplus F_0 = F$$

qui est fermé. Par le théorème, $\operatorname{Im} A$ *doit donc être fermée.*

Théorème 3.0.8. *Soit* $A \in \mathcal{B}(E,F)$, *comme avant. Si* $A(B)$ *est fermé dans* F *pour tout sous-ensemble fermé et borné* BE, *alors* A *est d'image fermée.*

Preuve 3.0.10. *Ab absurdo, supposons que* $\operatorname{Im}(A)$ *ne soit pas fermée. Par la preuve du théorème* (3.0.6), *on peut construire une suite* (x_n) *telle que* $A(x_n)$ *converge vers* 0 *avec*

$$d(x_n, \ker A) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Soit (z_n), *une suite de* $\ker A$ *telle que*

$$\|x_n - z_n\| < 2, \qquad \forall n \in \forall.$$

Posons à présent V, *la fermeture de l'ensemble* $\{x_n - z_n | n \in \mathbb{N}\}$. *Comme* V *est un sous-ensemble fermé et borné de* E, $A(V)$ *est fermé dans* F *par hypothèse du théorème.*
Remarquons également que

$$A(x_n) = A(x_n - z_n),$$

ainsi $0 \in A(V)$. *Nous avons donc l'existence d'un* $u \in V \cap \ker A$ *tel que*

$$\|u - (x_{n_0} - z_{n_0})\| < 1/2$$

pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. *Cela implique*

$$d(x_n, \ker A) < 1/2,$$

ce qui contredit

$$d(x_n, \ker A) = 1.$$

Ainsi, $\operatorname{Im} A$ *est fermée.*

Lemme 3.0.2. *Soit* E *un espace de Banach,* $A \in \mathcal{K}(A)$*, alors* $I - A$ *est à image fermée et*

$$\dim(\ker(I - A)) = co\dim(\operatorname{Im}(I - A)) < \infty.$$

Preuve 3.0.11. *Nous divisons cette preuve en* 2 *parties :*
1. *Vérifions d'abord que* $(I - A)(B)$ *est fermé dans* E *pour tout sous-ensemble fermé et borné* BE. *Soit* B*, un sous-ensemble fermé et borné de* E *et considérons une suite* (x_n) *d'éléments de* B *telle que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (I - A)(x_n) = y$$

Comme A *est compact, la suite* $A(x_n)$ *admet une sous-suite convergente* $A(x_{n_i})$*.Ainsi, il existe* $x_0 \in B$ *avec :*

$$x_0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n_i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} ((I - A)(x_{n_i}) + A(x_{n_i}))$$

Et donc

$$y = (I - A)(x_0) \in (I - A)(B).$$

Ainsi, $(I - A)(B)$ *est fermé dans* E.
2. *Vu que nous venons de vérifier que* $(I - A)$ *satisfait les hypothèses du théorème précédent, par celui-ci, nous pourrons conclure que* $\operatorname{Im}(I - A)$ *est fermée.*
Il reste à vérifier que $n(I - A) < \infty$ *et* $d(I - A) < \infty$.
3. *La première assertion est facile à montrer Comme*

$$x = \mathcal{K}(x), \qquad \forall x \in \ker(I - K),$$

l'opérateur identité est compact sur $\ker(I - K)$. *Ainsi,* $n(I_K) < \infty$.

Chapitre 4

Théorie des opérateurs de Fredholm cas borné

4.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons étudier quelques propriétés d'une classe spéciale d'opérateurs linéaires fermés de $\mathcal{H}$ dans lui-même, que nous appelons les opérateurs de Fredholm**.** Le résultat principal à retenir dans ce chapitre est que la propriété d'être Fredholm (borné) est stable sous de petites perturbations. Dans ce chapitre et dans le cadre des opérateurs bornés on commence par introduire le premier théorème de stabilité qui montre que l'ensemble des opérateurs de Fredholm $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est ouvert dans l'espace des opérateurs linéaires bornés, de plus, on montre qu'il est stable par rapport aux petites perturbations compactes.

4.1.1 Définitions

Nous arrivons finalement aux définitions des deux objets qui sont au centre de nos intérêts et qui vont nous occuper jusqu'à la fin de ce travail : les opérateurs de Fredholm et la fonction indice

Définition 4.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire borné $A : E \longrightarrow F$ est appelé un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont* *satisfaites :*

1. $\operatorname{Im} A$ *est fermé dans* F *;*
2. $\dim(\ker A)$ *est finie.*
3. $\dim(F/\operatorname{Im} A) = \dim(co\ker A)$.

Nous noterons

$$n(A) = \dim(\ker A)$$

et

$$d(A) = \dim(co\ker A)$$

ainsi que $\mathcal{F}(E,F)$ *l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de* E *dans* F

Définition 4.1.2. *L'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeurs entières suivante :*

$$\begin{array}{rcl} ind & : & \mathcal{F}(E,F) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ A & \longmapsto & ind(A) = \dim(\ker A) - \dim(co\ker A) \end{array}$$

4.1.2 Exemples

Pour un premier contact avec les opérateurs de Fredholm et l'indice, prenons un exemple intuitif en dimension finie.

Exemple 4.1.1. *Considérons deux espaces de Banach* E *et* F *de dimension finie. (Par exemple* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *muni de la norme euclidienne). Soit* $A : E \longrightarrow F$ *un opérateur linéaire continu. Banalement,* $\dim(\ker A)$ *et* $\dim(co\ker A)$ *sont finies et* $\operatorname{Im} A$ *est fermée, étant de Alors,*

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim(\ker A) - \dim(co\ker A) = \dim(\ker A) - \dim(F/\operatorname{Im} A) \\ &= \dim(\ker A) - (\dim(F) - \dim(\operatorname{Im} A)) \\ &= \dim(\ker A) - \dim(F) + \dim(\operatorname{Im} A) \\ &= \dim(E) - \dim(F) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Remarque 4.1.1. *Tout opérateur borné* $A : E \longrightarrow F$ *entre deux espace de Banach qui est bijectif est un opérateur de Fredholm d'indice nul. En effet, il découle de la* *bijectivité que*

$$\ker A = \{0_E\},$$

dont la dimension est nulle, et

$$\operatorname{Im} A = F$$

qui est fermée et sa codimension est nulle, ainsi :

$$ind(A) = \dim(\ker A) - co\dim(A) = 0 - 0 = 0$$

contre exemple

L'opérateur nul $A : E \longrightarrow F$, défini par

$$A(x) = 0_F$$

pour tout $x \in E$, entre deux espace de Banach n'est pas un opérateur de Fredholm si la dimension de E ou de F est infinie. En effet, si E est de dimension infinie, alors

$$\ker A = E$$

est de dimension infinie et si F est de dimension infinie

$$\operatorname{Im} A = \{0_F\}$$

dont la codimension, qui est la dimension de F, est infinie.

Exemple 4.1.2. ***(Translations dans l^2_F)***

Considérons l'espace vectoriel l^2_F, l'espace des suites $\xi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficient dans F telles que $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Muni de la norme

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_2 & : & l^2_F \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \{x_n\} & \longmapsto & \|\{x_n\}\|_2 = \{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\}^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

il s'agit d'un espace de Banach. Nous allons montrer que cet espace possède deux familles infinies dénombrables d'opérateurs de Fredholm, les translations à droite et les translations à gauche.

4.1.3 Translation à droite :

Posons

$$\begin{array}{cccccc} A_d^1 & : & l_F^2 & \longrightarrow & l_F^2 \\ (x_0, x_1, x_2, ...) & \longmapsto & (0, x_0, x_1, x_2, ...) \end{array}$$

la translation d'un cran à droite.
Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice -1. En effet, A_d^1 est clairement linéaire et les trois conditions de la définition (4.1.1)
1. Le noyau de A_d^1 est constitué uniquement de la suite identiquement nulle.
Ainsi

$$\dim(\ker A_d^1) = 0 < \infty.$$

2. Le conoyau

$$co\ker(A_d^1) = l_F^2 \ / \ \mathrm{Im}(A_d^1)$$

où une classe d'équivalence contient toutes les suites de l_F^2 de même premier coefficient $x_0 \in F$. La suite $(1, x_1, x_2, ...)$ constitue donc une base de $co\ker(A_d^1)$. Ainsi

$$\dim(co\ker(A_d^1)) = 1 \ < \infty.$$

3. Il reste à voir que $\mathrm{Im}(A_d^1)$ est un fermé de l_F^2. Soit donc $\{x_n\} \subset l_F^2$ une suite qui converge vers un certain $\xi = \{\xi_n\} \in l_F^2$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$ on ait

$$\|x_n - \xi\| = \{\sum_{i=0}^{\infty} |x_{n_i} - \xi_i|^2\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq m$ et pour tout i fixé, on a

$$|x_{n_i} - \xi i|^2 \leq \|x_n - \xi\| < \varepsilon$$

et donc $x_{n_i} \longrightarrow \xi_i$ pour tout i et en particulier

$$0 = x_{n_0} \longrightarrow \xi_0.$$

Or la suite identiquement nulle converge vers 0. Donc par unicité de la limite nous obtenons $\xi_1 = 0$ et $\xi \in \mathrm{Im}(A_d^1)$ qui est de ce fait fermé dans l_F^2. Nous obtenons en outre que l'indice de A_d^1 est :

$$ind(A_d^1) = \dim(\ker A_d^1) - \dim(co\ker A_d^1) = 0 - 1 = -1$$

4.1.4 Translation à gauche :

Posons

$$\begin{array}{rcl} A_g^1 & : & l_F^2 \longrightarrow l_F^2 \\ (x_0, x_1, x_2, ...) & \longmapsto & (x_1, x_2, ...) \end{array}$$

la translation d'un cran à droite. Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice 1. En effet, A_g^1 est clairement linéaire et les trois conditions de la définition (4.2.1) sont vérifiées :

1. Le noyau est

$$\ker(A_g^1) = \{\{x_n\} \in l_F^2 \ / \ x_0 \in F \ arbitraire, \ x_i = 0 \quad \forall i \geq 1\}.$$

Ainsi

$$\dim(\ker A_g^1) = 1 < \infty \cdot$$

2. Le conoyau est

$$\begin{aligned} co\ker(A_g^1) &= l_F^2 / \operatorname{Im}(A_g^1) \\ &= l_F^2 / l_F^2 = \{0_{l_F^2}\}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\dim(co\ker(T_d^1)) = 0 < \infty$$

3. L'image de A_g^1 est l_F^2 tout entier qui est fermé en tant qu'espace topologique. Nous obtenons en outre que l'indice de A_d^1 est :

$$ind(A_g^1) = \dim(\ker A_g^1) - \dim(co\ker A_g^1) = 1 - 0 = 1$$

Exemple 4.1.3. *L'espace $Hom(l_F^2)$ compte bien sûr aussi des opérateurs linéaires qui ne sont pas de Fredholm. Les p-ièmes projection sur F, par exemple, ne le sont pas. Soit $i \in \mathbb{N}$ et considérons*

$$\begin{array}{rcl} P_i & : & l_F^2 \longrightarrow F \\ & : & \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \longmapsto x_i \end{array}$$

Il s'agit d'opérateurs linéaires bornés mais

$$\ker P_i = \{\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in l_F^2 | x_i = 0\}$$

Sa dimension est donc infinie quelque soit $i \in \mathbb{N}$. Les projections canoniques de l_F^2 ne sont donc pas des opérateurs de Fredholm.

Lemme 4.1.1. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{B}(E, F)$ un opérateur borné. Alors*
1. $\ker A^* = (\operatorname{Im} A)^\circ$ *;*
2. $\ker A =^\circ (\operatorname{Im} A^*)$.

Exemple 4.1.4 (**Adjoint d'un opérateur de Fredholm**). *.Soient E, F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{F}(E, F)$ un opérateur de Fredholm. On définit l'adjoint de A par*

$$\begin{array}{ccc} A^* & : & F^* \longrightarrow E^* \\ y^* & \longmapsto & y^* \circ A. \end{array}$$

et la proposition suivante montre que A^*est de Fredholm.

Proposition 4.1.1. *Soit A un opérateur linéaire borné. Si $A \in \mathcal{F}(E, F)$ alors $A^* \in \mathcal{F}(F, E)$.*

Preuve 4.1.1. *Nous allons montrer que A^*est aussi un opérateur de Fredholm et que son indice est l'opposé de celui de A. Nous savons que E^*et F^*sont des espaces de Banach puisque E et F sont des espaces normés. Nous savons aussi que $A^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$. Il reste donc à voir que*
1. $\operatorname{Im} A^*$ *est fermée ;*
2. $\dim(\ker A^*) < \infty$ *;*
3. $\dim(E^*/\operatorname{Im} A^*) < \infty$.

a. Etant donné que A est Fredholm, son image $\operatorname{Im} A$ est fermée, ce qui équivaut à dire que $\operatorname{Im} A^*$est fermée, d'après le théorème de l'image fermée.

b. Le sous-espace $\ker A$ de E, il vient :

$$(\ker A)^* \simeq E^*/(\ker A)^\circ$$

Or le théorème de l'image fermée fournit

$$(\ker A)^\circ = \operatorname{Im} A^*$$

Ainsi :

$$(\ker A)^* \simeq E^*/(\ker A)^\circ \simeq E^*/\operatorname{Im} A^*$$

Donc

$$\dim(E^*/\operatorname{Im} A^*) = \dim((\ker A)^*) = \dim(\ker A) < \infty$$

par hypothèse.

c. Le sous-espace $\operatorname{Im} A$ *de* F*, il vient :*

$$(F/\operatorname{Im} A)^* \simeq (\operatorname{Im} A)^\circ$$

En outre le lemme (4.1.1) *fournit*

$$(\operatorname{Im} A)^\circ = \ker A^*.$$

Par conséquent :

$$(F/\operatorname{Im} A)^* \simeq (\operatorname{Im} A)^\circ = \ker A^*$$

Ainsi

$$\dim(\ker A^*) = \dim((F/\operatorname{Im} A)^*) = \dim(F/\operatorname{Im} A)) < \infty$$

par hypothèse.

L'opérateur adjoint A^* *est donc bien Fredholm. Calculons son indice :*

$$\begin{aligned} ind(A^*) &= \dim(\ker A^*) - \dim(E^*/\operatorname{Im} A^*) \\ &= \dim(F/\operatorname{Im} A) - \dim(\ker A) \\ &= -ind(A) \end{aligned}$$

Proposition 4.1.2. *Pour tout opérateur de Fredholm* $A : E \longrightarrow F$*, nous pouvons reformuler l'indice sous la forme suivante :*

$$ind(A) = \dim(\ker A) - \dim(\ker A^*)$$

Preuve 4.1.2. *Découle du point* (3) *où nous avons montré que*

$$\dim(co\ker A) = \dim(F/\operatorname{Im} A)) = \dim(\ker A^*).$$

4.2 Produits d'opérateurs de Fredholm :

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice d'une composition d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des composants.

Lemme 4.2.1. *Soient E, F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{B}(E, F)$. Soit N un sous-espace de E de co-dimension finie n. Alors A est de Fredholm si et seulement si la restriction $A_0 : N \longrightarrow F$ est de Fredholm. De plus,*

$$indA = indA_0 + n.$$

Preuve 4.2.1. *Si le résultat est vrai pour $n = 1$, il se généralise par récurrence. Posons :*

$$E = N \oplus vect\{x_1\}$$

Considérons les 2 cas possibles suivants :
1. *Si $A(x_1) \notin \operatorname{Im} A_0$, alors*

$$A(E) = A_0(N) \oplus vect\{A(x_1)\}$$

et

$$\ker A_0 = \ker A.$$

Ainsi,

$$d(A_0) = d(A) + 1$$

et

$$n(A_0) = n(A),$$

d'où

$$ind(A) = ind(A_0) + 1.$$

2.*Si $A(x_1) \in \operatorname{Im} A_0$, alors*

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_0$$

et il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$A(x_0) = A_0(u).$$

De plus,

$$\ker A = \ker A_0 \oplus vect\{x_1 - u\}.$$

Ainsi,

$$d(A_0) = d(A)$$

et

$$n(A_0) = n(A) - 1,$$

d'où

$$ind(A) = ind(A_0) + 1.$$

Notation 4.2.1. *Soit $A : E \longrightarrow F$, un opérateur de Fredholm. Alors* $\ker A$ *et* $\operatorname{Im} A$ *admettent des supplémentaires. (*$\ker A$ *est fermé en tant que pré-image du fermé* $\{0_F\}$ *par une application continue et sa dimension est finie,* $\operatorname{Im} A$ *par le corollaire* (3.0.3) *puisque sa codimension est finie). On peut écrire*

$$E = \ker A \oplus E_0$$

et

$$F = \operatorname{Im} A \oplus F_0.$$

Comme $E_0 \simeq \operatorname{Im} A$, on peut définir une application bijective $\widetilde{A} : E_0 \times F_0 \longrightarrow F$ par :

$$\widetilde{A}(x_0, y_0) = A(x_0) + y_0$$

On appelle $\widetilde{A}$ la bijection associée à A .

Théorème 4.2.1. *Soient E, F, M trois espaces de Banach. Si $A : E \longrightarrow F$ et $B : F \longrightarrow M$ sont des opérateurs de Fredholm, alors BA est un opérateur de Fredholm. De plus,*

$$indBA = indA + indB.$$

Preuve 4.2.2. *Soit $\widetilde{A}$ la bijection associée à A et posons A_0, la restriction de A à E_0 (Notons que A_0 est aussi la restriction de $\widetilde{A}$ à E_0).Comme $\widetilde{A}$ est un isomorphisme et que B est Fredholm, l'opérateur $B\widetilde{A}$ est un opérateur de Fredholm avec*

$$indB\widetilde{A} = indB.$$

En identifiant E_0 *et* $E_0 \times \{0\}$, *on obtient que* BA_0 *est la restriction commune de* BA *et* $B\widetilde{A}$ *à* E_0. *Par le lemme précédent* $B\widetilde{A}$ *est Fredholm* $\Longleftrightarrow$ BA_0 *est Fredholm* $\Longleftrightarrow$ BA *est Fredholm.*
De plus,

$$\begin{aligned} indBA &= indBA_0 + \dim(E/E_0) \\ &= indB\widetilde{A} - \dim(E_0 \times \ F_0/E_0 \times \ \{0\}) + n(A) \\ &= indB + indA. \end{aligned}$$

Exemple 4.2.1. ***(Opérateurs de Fredholm d'indice*** $n \in \mathbb{Z}$ ***dans*** l_F^2 ***)***
Sachant que la composition de deux opérateurs de Fredholm est encore un opérateur de Fredholm dont l'indice est obtenu en sommant les indices des deux opérateurs que l'on compose. En reprenant les deux opérateurs A_d^1 *et* $A_{g'}^1$, *nous pouvons ainsi construire un opérateur de Fredholm dans* l_F^2 *d'indice* $n \in \mathbb{Z}$ *pour tout entier* n *par le processus suivant :*
Soit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Posons*

$$A_d^m = \underbrace{A_d^1 \circ ... \circ A_d^1}_{m \ fois}.$$

Il s'agit d'un opérateur de Fredholm entant que composition d'opérateurs de Fredholm et son indice est

$$ind(A_d^m) = m \cdot \ ind(A_d^1) = m \cdot \ (-1) = -m < 0.$$

Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. *Posons*

$$A_g^p = \underbrace{A_d^1 \circ ... \circ A_d^1}_{p \ fois}.$$

Il s'agit d'un opérateur de Fredholm entant que composition d'opérateurs de Fredholm et son indice est

$$ind(A_g^p) = p \cdot \ ind(A_g^1) = p \cdot 1 = p > 0.$$

Cela nous apprend que pour obtenir un opérateur de Fredholm d'indice 0 *dans* l_F^2 *,il suffit de composer* A_g^1 *avec* A_d^1 *ce qui nous donne l'identité.*

4.3 Perturbations

4.3.1 Ouverture de $GL(E;F)$ dans $\mathcal{B}(E,F)$:

Notons par $GL(E;F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés inversibles d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F. Nous savons d'après le théorème des applications ouvertes que si $A \in GL(E;F)$, alors $A^{-1} \in \mathcal{B}(E;F)$.
Nous voulons montrer que $GL(E;F)$ est un ouvert de $\mathcal{B}(E,F)$ pour la topologie engendrée par la norme opérateur.
Il s'agit donc de trouver un $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in GL(E;F)$, on ait $B_{\mathcal{B}(E,F)}(A,\delta) \subset GL(E;F)$. Autrement dit, on cherche une condition sur les $S \in \mathcal{B}(E,F)$ tels que

$$\|A + S - A\| = \|S\| < \delta.$$

Il faut donc savoir sous quelles conditions sur la norme d'un opérateur linéaire $S \in \mathcal{B}(E,F)$,l'opérateur $A + S \in GL(E;F)$ pour tout $A \in GL(E;F)$.

Injectivité :

Soit $x \in \ker(A+S)$. Remarquons que si

$$Ax = y,$$

alors

$$x = A^{-1}y,$$

et

$$\|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \ \|y\| = \|A^{-1}\| \cdot \ \|Ax\|,$$

donc

$$\|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Alors,

$$(A+S)(x) = 0 \Longleftrightarrow Sx = -Ax.$$

Implique que

$$\|S\| \cdot \ \|x\| \geq \|Sx\| = \| - Ax\| = \|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1}\|x\|.$$

Ainsi

$$(\|S\| - \|A^{-1}\|^{-1})\|x\| \geq 0.$$

Alors si

$$(\|S\| - \|A^{-1}\|^{-1}) < 0,$$

on a nécessairement que

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

En résumé, nous avons obtenu que si $\|S\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ alors $A + S$ est un opérateur injectif.

Surjectivité :

Soit $y \in F$. Alors,
L'opérateur $A + S$ est surjectif

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \text{ telque } (A+S)\,x = y \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \text{ telque } x + A^{-1}Sx = A^{-1}y \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \text{ telque } x = A^{-1}y - A^{-1}Sx \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \text{ telque } x = f(x).
\end{aligned}$$

Où

$$f(x) = A^{-1}y - A^{-1}Sx.$$

Donc d'après le théorème du point fixe de Banach, il suffit de voir que f est une application contractante.

$$\|f(x) - f(z)\| = \|A^{-1}Sx - A^{-1}Sz\| \leq \|A^{-1}S\| \cdot \ \|x - z\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \ \|S\| \cdot \ \|x - z\|.$$

L'application f est donc contractante si et seulement si

$$\|A^{-1}\| \cdot \ \|S\| < 1 \Longleftrightarrow \|S\| < \|A^{-1}\|^{-1}.$$

En résumé, on peut prendre

$$\delta = \|A^{-1}\|^{-1},$$

alors pour tout opérateur S de norme inférieure ou égale à $\|A^{-1}\|^{-1}$, l'opérateur $A+S$ est encore un élément de $GL(E;F)$.

4.3.2 Stabilité dans le cas borné

Dans cette section, nous allons enoncer plusieurs résultats concernant la stabilité des opérateurs de Fredholm aux petites perturbations.
Soit $A \in \mathcal{C}(A))$, rappelons que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est l'adhérence dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs de rang fini, et que le produit d'un opérateur borné par un opérateur de Fredholm est de Fredholm. Enfin si $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, alors $K^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. En particulier, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, invariant par conjugaison (i.e par passage a l'adjoint). En général, on verra ces opérateurs comme des quantités "négligeables" par rapport aux opérateurs de Fredholm, comme le montrent les théorèmes suivants.

Théorème 4.3.1. $(cf.[At])$ ***"Premier théorème de stabilité"*** $\forall\ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$ $\exists \delta > 0$ *tel que* $\forall\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

$$\begin{cases} \|A-B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \delta \Longrightarrow B \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \\ et\ ind(B) \ = ind(A) \end{cases} \tag{4.1}$$

Remarque 4.3.1. *Ce théorème montre que l'ensemble des opérateurs de Fredholm* $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est un ouvert de l'ensemble des opérateurs linéaires bornés* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *et qu'il est stable par rapport aux petites perturbations bornées , i.e* $\forall\ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *et* $\|B\|$ *est petite alors* $A+B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *(reste Fredholm) et*

$$ind(A+B) = ind(A)$$

(l'indice reste stable pour toute perturbation bornée de A*). Autrement dit, on cherche une condition sur les* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tel que*

$$\|B\| = \|A+B-A\| < \delta.$$

Il faut donc savoir sous quelles conditions sur la norme d'un opérateur linéaire borné B *l'opérateur* $A+B$ *soit un Fredholm, pour tout* $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Le théorème suivant dû à "Dieudonne" nous apprend que non seulement l'ensemble des opérateurs de Fredholm entre deux espaces de Hilbert est ouvert dans l'ensemble des opérateur bornés, mais aussi que l'indice se trouve être une application continue.

Théorème 4.3.2. *Soient $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$ et $\hat{A}$ la bijection canonique associée à A. Si $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est tel que $\|B\| < \left\| \hat{A}^{-1} \right\|^{-1}$, alors $A + B$ est de Fredholm et*

$$ind(A + B) = ind(A).$$

Corollaire 4.3.1. *L'application $ind : \mathcal{F}(\mathcal{H}) \to \mathbb{Z}$ est constante sur tous les composantes connexes de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Preuve 4.3.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$. D'aprés le théoreme (4.3.2)on sait que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$*

est ouvert dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, de plus l'espace $\mathbb{Z}$ étant discret et l'indice une application continue d'aprés le théorème (4.3.2) donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ tel que } \|A - B\| < \delta \Longrightarrow |indA - indB| < \varepsilon$$

ce qui implique que l'indice de deux opérateurs de Fredholm A_1 et A_2 est nécessairement égal s'il existe un chemin reliant A_1 et A_2. Autrement dit, l'indice est une application constante sur les composantes connexes de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.
La reciproque de ce théorème est aussi vraie : si les indices de deux opérateurs de Fredholm A_1 et A_2 sont égaux, alors A_1 et A_2 appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. C'est une conséquence du théorème d'Atiyah-Jänich.[**?**]

Preuve 4.3.2. *Si $f : [0, 1] \to \mathcal{F}(\mathcal{H})$ est une application continue, alors*

$$indf(0) = indf(1),$$

c'est à dire que l'indice composée avec f est continu du connexe $[0, 1]$ dans le discret $\mathbb{Z}$, elle est donc constante.

Remarque 4.3.2. *La théorie de l'indice s'est en fait dans un premier temps orientée dans deux directions, celle d'un indice analytique (que l'on calcule par : $ind(A) = nul(A) - def(A)$) et celle d'un indice topologique calculé uniquement à partir des propriétés abstraites de la variété étudiée (la formule fait intervenir le caractère de Chern...). Le premier résultat important dans ce domaine est le théorème de l'indice obtenu au début des années 60 par Atiyah et Singer pour les opérateurs elliptiques sur les variétés compactes. Ce théorème s'énonce facilement par :*

$$indana(A) = indtop(A).$$

Un autre type de stabilité pour la classe des oprateurs de Fredholm bornés, c'est la stabilité sous une perturbation compacte qui s'énonce ainsi :

Corollaire 4.3.2. ([Ka]) $\forall\ K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *alors* $I + K \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *avec i*

$$nd(I + K) = 0.$$

Théorème 4.3.3. ($cf.$ [At], [Ka]) *Soient* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\forall K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *, alors*

$$A + K \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \quad et \quad ind(A + K) = ind A$$

4.3.3 Stabilité dans le cas non borné

Avant d'énoncer le théorème (4.3.1)sous sa forme générale (cas non borné), introduisons quelques topologies sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

Quelques topologies sur l'espace des opérateurs fermés $\mathcal{C}(\mathcal{H})$

Conorme d'un opérateur ($cf.$ [?].[?]) **.** Avant de donner la définition de la conorme, il est important de rappeler quelques propriétés de l'opérateur quotient. En effet, $\forall\ A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, le sous espace $\ker A$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, par conséquent, l'espace quotient $\widetilde{\mathcal{H}} \stackrel{def}{=} \mathcal{H}/\ker A$ est un espace de Hilbert de norme définie par :

$$\|\widetilde{u}\| =: \inf_{u \in \widetilde{u}} \|u\| = dist(u, \ker A), \quad \widetilde{u} \text{ est la classe de } u \text{ dans } \widetilde{\mathcal{H}} \tag{4.2}$$

Sur cet espace l'opérateur $D(A)/\ker A \to \mathcal{H}$ défini par $\widetilde{A}\widetilde{u} = Au$, $\forall u \in \widetilde{u}$ est linéaire, fermé et inversible. Son inverse $\widetilde{A}^{-1}$ a pour domaine $\operatorname{Im} A$ tel que

$$\begin{aligned} \widetilde{A}^{\,-1}: \ \operatorname{Im} A &\longrightarrow D(A)/\ker A \\ \widetilde{A}\widetilde{u} &\longrightarrow \widetilde{A}^{-1}\left[\widetilde{A}\widetilde{u}\right] = \widetilde{u} \end{aligned} \tag{4.3}$$

de norme

$$\left\|\widetilde{A}^{-1}\right\| = \sup_{\substack{\widetilde{u} \in D(\widetilde{A}) \\ u \notin \ker A}} \frac{\|\widetilde{u}\|}{\left\|\widetilde{A}\widetilde{u}\right\|} \tag{4.4}$$

De plus si $y \in \widetilde{u}$ alors $(u - y) \in \ker A$ c'est à dire que $y = (u - z)$ tel que $z \in \ker A$, alors

$$\|\widetilde{u}\| = \inf_{y\in\widetilde{u}} \|u\| \ = \inf_{z\in\ker A} \|u-z\| = dist(u, \ker A) \ \textit{tel que} \ u \notin \ker A \tag{4.5}$$

(4.3), (4.4) et (4.5) nous donnent

$$\left\|\widetilde{A}^{-1}\right\| = \sup_{\substack{u\in D(A)\\ u\notin \ker A^*}} \frac{\|\widetilde{u}\|}{\|Au\|} = \sup_{\substack{u\in D(A)\\ u\notin \ker A^*}} \frac{dist(u,\ker A)}{\|Au\|}$$

ou bien

$$\frac{1}{\left\|\widetilde{A}^{-1}\right\|} = \inf_{\substack{u\in D(A)\\ u\notin \ker A}} \frac{\|Au\|}{dist(u,\ker A)}$$

Définition 4.3.1. *Soit $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, on appelle conorme ou module minimal réduit de l'opérateur non nulle A le nombre $c(A)$ donné par :*

$$c(A) = \inf_{u\in D(A)\cap(\ker A)^\perp} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Remarque 4.3.3. (i) *Comme le sous espace* $\ker(A)$ *est fermé, alors*

$$H = \ker A \oplus \ker A^\perp$$

et puisque $u \notin \ker A$ alors $u \in \ker A^\perp$ et par suite, la conorme de A est donnée par :

$$c(A) = \inf_{u\in D(A)\cap(\ker A)^\perp} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \frac{1}{\left\|\widetilde{A}^{-1}\right\|}$$

avec la convention $c(A) = 0$ si $\widetilde{A}^{-1}$ est non borné et $c(A) = \infty$ si $\widetilde{A}^{-1} = 0$.
(ii) *Soient $A \in \mathcal{C}(H)$ et F un sous-espace de H contenant* $\ker A$. *Alors on définit*

$$c_F(A) = \inf_{u\in D(A)\cap F^\perp} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Rappelons le résultat suivant :

Proposition 4.3.1. $(cf.$[**?**], $[Ka])$. *Si $A \in \mathcal{C}(H)$ alors :*

1. $\operatorname{Im} A$ *est fermé dans $\mathcal{H} \Longleftrightarrow c(A) > 0$*
2. *Si A^* est l'adjoint de A alors $c(A^*) = c(A)$.*

Métriques entre les sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert [CoLa]

Ce paragraphe est consacré à l'étude topologique de l'ensemble des opérateurs fermés dans un espace de Hilbert, nous définissons d'abord la métrique entre les sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert. On verra plus particulièrement les rapports qui existent entre un opérateur de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et son graphe. D'autres topologies sont également définies mais sans que leur étude détaillée soit entreprise. Cette nouvelle métrique servira pour l'extension de la théorie de stabilité des opérateurs de Fredholm (borné) aux opérateurs de Fredholm fermés.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et M, N deux sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$. Notons par P_M (resp. P_N) la projection orthogonale sur M (resp. sur N), alors si $x \in \mathcal{H}$ la distance $d(x, M)$ entre x et M est donnée par :

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

il est donc clair que :

$$d(x, M) = \|(I - P_M)x\| = \|x - P_M x\|$$

car l'inf est atteint au point $y = P_M x$. Alors nous définissons $d(N, M)$ par la formule :

$$d(N, M) = \sup_{x \in N, \|x\|=1} d(x, N) + \sup_{x \in M, \|x\|=1} d(x, M)$$

En fait,

$$d(N, M) = \|(I - P_M)P_N\| + \|(I - P_N)P_M\|$$

par conséquence nous avons le résultat suivant

Lemme 4.3.1. [*CoLa*] *$d(N, M)$ définit une métrique sur l'ensembles de tous les sous-espaces linéaires fermés de $\mathcal{H}$.*

Il s'avère que la métrique $d(N, M)$ est étroitement liée a ce qu'on appelle la métrique entre deux sous-espaces linéaires fermés N et M de $\mathcal{H}$ définie par la formule

$$g(N, M) = \|P_M - P_N\|$$

H. O. Cordes et J. Ph Labrousse ont montré dans [CoLa] que $g(N, M)$ est une métrique sur $\mathcal{C}(H)$ équivalente à $d(N, M)$, de façon que :

$$g(N, M) \leq d(N, M) \leq 2g(N, M)$$

et comme le graphe $G(A)$ de l'opérateur fermé A et un sous-espace fermé de l'espace $H \oplus H$, les résultats établis ci-dessus impliquent immediatement la

Définition 4.3.2. ($cf.$ [La1]. [LaMe] [Ka], [KrKr],)*Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. *Notons par* $P_{G(A)}$ *(resp.* $P_{G(B)}$*) la projection orthogonale dans* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *sur* $G(A)$ *(resp.* $G(B)$*). Alors posons :*

$$\delta(A, B) = \delta(G(A), G(B)) = \left\| \left(I - P_{G(B)}\right) P_{G(A)} \right\|$$
$$g(A, B) = g(G(A), G(B)) = \left\| P_{G(A)} - P_{G(B)} \right\|$$

Proposition 4.3.2. ($cf.$[Ka], [La1]) *Si* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, *on a :*
1. $g(A, B)$ *définit une métrique sur* $\mathcal{C}(\mathcal{H})$
2. $g(A, B) = g(B^*, A^*)$

4.3.4 Quelques résultats auxilliaires

Proposition 4.3.3. ($cf.$ [CoLa], [RiNa]) *Soit* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *alors* $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ *est un opérateur symétrique positif dont l'image est dense et égale à* $D(A^*A)$. *En outre :*

$$A^*AR_A = I - R_A \tag{4.6}$$

Si $u \in D(A)$ *on a :*

$$R_{A^*}Au = AR_Au \tag{4.7}$$

on en déduit que

$$(AR_A)^* = A^*R_{A^*} \tag{4.8}$$

et que $\forall u \in \mathcal{H}$;

$$\left\| (\frac{1}{2} - R_A)u \right\|^2 + \|AR_Au\|^2 = \frac{1}{4} \|u\|^2$$

d'où

$$\|R_A\| \leq 1, \ \|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$$

Preuve 4.3.3. 1. *Il est clair que l'opérateur A^*A est autoadjoint $\forall A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, de plus A^*A est positif, par conséquent $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ existe et est borné défini sur tout $\mathcal{H}$ et $\|R_A\| \leq 1$, de plus, $\forall u \in \mathcal{H}$, $R_A u \in D(A^*A) \subset D(A)$. Alors $\forall u \in \mathcal{H}$, on a :*

$$\begin{aligned}
\|AR_A u\|^2 &=< AR_A u, AR_A u > \\
&=< R_A u, A^*AR_A u > \\
&\leq< R_A u, (A^*A + 1)R_A u > \\
&\leq< R_A u, u > \\
&\leq \|R_A u\| \|u\| \leq \|u\|^2
\end{aligned}$$

d'où $\|AR_A\| \leq 1$. D'autre part, $\forall u \in \mathcal{H}$ on a :

$$\begin{aligned}
A^*AR_A u &= A^*AR_A u + R_A u - R_A u \\
&= (A^*A + 1)R_A u - R_A u \\
&= u - R_A u
\end{aligned}$$

on déduit donc

$$A^*AR_A = I - R_A$$

2. *Montrons maintenant que*

$$AR_A u = R_{A^*} Au \quad \forall u \in D(A)$$

Soit $u \in D(A)$, posons $v = R_A u \in D(A)$ alors,

$$\begin{aligned}
Au &= A(A^*A + 1)v = Av + AA^*Av = (1 + AA^*)Av \\
&= (1 + AA^*)AR_A u
\end{aligned}$$

ou bien

$$(1 + AA^*)^{-1}Au = AR_A u \Rightarrow R_{A^*}Au = AR_A u$$

3. *Montrons*

$$\forall u \in \mathcal{H}, \quad \left\|(\frac{1}{2}I - R_A)u\right\|^2 + \|AR_A u\|^2 = \frac{1}{4}\|u\|^2$$

En effet, soit $u \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}\left\|(\frac{1}{2}I - R_A)u\right\|^2 &=< \frac{1}{2}u - R_Au, \frac{1}{2}u - R_Au > \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2 - < \frac{1}{2}u, R_Au > - < R_Au, \frac{1}{2}u > + \|R_Au\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|u\|^2 - (< u, R_Au > - \|R_Au\|^2)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\|AR_Au\|^2 &=< AR_Au, AR_Au > \\ &=< R_Au, A^*AR_Au > \\ &=< R_Au, (A^*A+1)R_Au - R_Au > \\ &=< R_Au, u - R_Au > \\ &=< R_Au, u > - \|R_Au\|^2\end{aligned}$$

donc $\forall u \in \mathcal{H}$,

$$\left\|(\frac{1}{2}I - R_A)u\right\|^2 = \frac{1}{4}\|u\|^2 - \|AR_Au\|^2$$

d'où le résultat de plus on obtient

$$\|R_A\| \leq 1, \ \|AR_A\| \leq \frac{1}{2} \tag{4.9}$$

4. *Montrons la relation*

$$(AR_A)^* = A^*R_{A^*}.$$

On a $R_AA^* \subset (AR_A)^*$, *de plus*

$$\forall u \in D(A^*), \ (AR_A)^*u = R_A^*A^*u = R_AA^*u$$

(R_A *est autoadjoint) et en utilisant* (4.7) *alors*

$$(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$$

de plus la relation (4.9) *montre que* AR_A *et* $A^*R_{A^*}$ *sont bornés.*

Proposition 4.3.4. *(cf. [LaMe], [CoLa])Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, on a :*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ A R_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix} \text{ sur } \mathcal{H} \times \mathcal{H} \tag{4.10}$$

Preuve 4.3.4. *Supposons que $v \in D(A^*)$, $u \in \mathcal{H}$ et soit $\hat{u} = \{u, v\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, alors $P_{G(A)}\hat{u} = \{x, Ax\}$, $x \in D(A)$ donc*

$$(G(A))^{\perp} = V G(A^*)$$

où V est la transformation unitaire définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ par

$$V(u, v) = (-v, u),$$

on obtient $P_{G(A)}\hat{u}$ par la décomposition

$$\hat{u} = (u, v) = \{x, Ax\} + \{-A^* y, y\} \text{ avec } y \in D(A^*) \text{ et } x \in D(A)$$

x, y sont solutions du système

$$\begin{cases} u = x - A^* y \\ v = Ax + y \end{cases}$$

En résolvant le système en x, on obtient

$$\begin{aligned} x &= R_A u + R_A A^* v \\ &= R_A u + A^* R_{A^*} v \end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} u = x - A^* y \\ A^* v = A^* A x + A^* y \end{cases}$$

alors

$$u + A^* v = x + A^* A x \Rightarrow (1 + A^* A)x = u + A^* v$$

et comme

$$R_A A^* v = A^* R_{A^*} v$$

on trouve :

$$x = R_A u + A^* R_{A^*} v$$

par suite

$$\begin{aligned} P_{G(A)}\hat{u} &= \{x, Ax\} = \{R_A u + A^* R_{A^*} v, AR_A u + AA^* R_{A^*} v\} \\ &= \{R_A u + A^* R_{A^*} v, AR_A u + (1 - R_{A^*})\, v\} \end{aligned}$$

car

$$AA^* R_{A^*} v = (1 - R_{A^*})\, v,\ \forall v \in \mathcal{H}$$

finalement on trouve

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix} \ sur\ \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

d'où le résultat.

R_A étant un opérateur auto-adjoint positif (de spectre inclu dans $\mathbb{R}^+$), alors R_A admet une unique racine carrée $S_A = \sqrt{R_A}$.

Proposition 4.3.5. $(cf.$ [*LaMe*], [*CoLa*]$)$ $S_A : \mathcal{H} \to D(A) = \operatorname{Im} S_A$ *est surjectif, de plus* $\forall u \in D(A)$ *on a*

$$S_{A^*} Au = AS_A u \tag{4.11}$$

on en déduit comme précédemment que :

$$(AS_A)^* = A^* S_{A^*} \tag{4.12}$$

$$\forall u \in \mathcal{H},\ \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2 = \|u\|^2 \tag{4.13}$$

d'où

$$\|S_A\| \leq 1,\ \|AS_A\| \leq 1$$

Preuve 4.3.5. *On a*

$$\|S_A\| = \left\|\sqrt{R_A}\right\| \leq 1$$

par contre

$$S_{A^*} Au = \sqrt{R_{A^*}} Au$$

et comme

$$(AR_A)^* = A^* R_{A^*}$$

alors

$$(AS_A)^* = A^* S_{A^*}$$

de plus on a

$$R_{A^*} Au = AR_A u$$

en déduit

$$S_{A^*} Au = AS_A u$$

alors

$$\forall u \in \mathcal{H}, \ \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2 = \|u\|^2$$

Pour quelques applications il s'avère utile d'avoir une troisième métrique ($cf.$ [**?**], [CoLa] et [LaMe]) également équivalente à $d\ (A, B)$ et à $g(A, B)$ précédemment définies, cette métrique est notée par $p(A, B)$, et définie par

$$p(A, B) = \left[\|R_A - R_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2 + \|A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*}\|^2\right]^{1/2}$$

Lemme 4.3.2. *($cf.$ [CoLa] [La1]) $p(A, B)$ est une métrique sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, équivalente à $g(A, B)$,*

$$g(A, B) \leq \sqrt{2} p(A, B) \leq 2g(A, B)$$

Preuve 4.3.6. *$p(A, B)$ est évidemment bien définie sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, symétrique et satisfait l'inégalité triangulaire. Montrons maitenant l'équivalence de g et p, en effet, d'après la proposition* (4.3.4)*, il découle que*

$$\begin{aligned}
[g(A, B)]^2 = \left\|P_{G(A)} - P_{G(B)}\right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} R_A - R_B & A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*} \\ AR_A - BR_B & B_{B^*} - R_{A^*} \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&\leq 2\left[\|R_A - R_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2 + \|A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*}\|^2\right] \\
&\leq 2\left[p(A, B)\right]^2
\end{aligned}$$

d'après la proposition (4.3.3) *on a*

$$\|A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*}\| = \|AR_A - BR_B\|$$

de plus pour $\hat{u} = \{u, 0\}$ et $\widehat{v} = \{0, v\}$ on obtient

$$[g(A, B)]^2 \|u\|^2 \geq \left\|\left(P_{G(A)} - P_{G(B)}\right) \hat{u}\right\|^2 = \|(R_A - R_B)\, u\|^2 + \|(AR_A - BR_B)\, u\|^2$$
$$[g(A, B)]^2 \|v\|^2 \geq \left\|\left(P_{G(A)} - P_{G(B)}\right) \widehat{v}\right\|^2 = \|(A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*})\, v\|^2 + \|(R_{A^*} - R_{B^*})\, v\|^2$$

d'où, $[p(A, B)]^2 \leq 2\left[g(A, B)\right]^2$.

4.3.5 Stabilité des opérateurs fermés de Fredholm

Proposition 4.3.6. *[La1] [La2] $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un sous-espace ouvert de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Plus précisement si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et si $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ avec $p(A,B) < \dfrac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$ alors $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et*

$$\|A-B\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}\sqrt{1+\|B\|^2}p(A,B)$$

Preuve 4.3.7. *Soit $u \in D(B)$, alors*

$$\|Bu\| \leq \|Au\| + \|(B-A)u\|$$

de plus

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}\|(B-A)u\| &\leq \|R_{A^*}(B-A)u\| \\ &\leq \|R_{A^*}-R_{B^*}\|\,\|Bu\| + \|(R_{B^*}B-R_{A^*}A)u\|\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\|(B-A)u\| &\leq \sqrt{1+\|A\|^2}\left[\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\,\|Bu\| + \|R_{B^*}B-R_{A^*}A\|\,\|u\|\right] \\ &\leq \sqrt{1+\|A\|^2}p(A,B)\left[\|Bu\|+\|u\|\right]\end{aligned}$$

puisque $p(A,B) < \dfrac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$ ceci implique $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\sqrt{1+\|A\|^2}\ p(A,B) \leq (1-\varepsilon)$ ce qui donne

$$\|Bu\| \leq \|A\|\,\|u\| + (1-\varepsilon)\|Bu\| + (1-\varepsilon)\|u\|$$

ce qui montre que B est borné et on a

$$\|Bu\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(1+\|A\|)\|u\|$$

mais puisque B et borné alors B^* l'est aussi et

$$\|B^*-A^*\| = \|B-A\|.$$

Nous avons

$$\|B-A\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}\left[\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\,\|B\| + \|R_{B^*}B-R_{A^*}A\|\right]$$

de même

$$\|B^* - A^*\| \leq \sqrt{1 + \|A\|^2}\left[\|R_A - R_B\| \|B\| + \|B^* R_{B^*} - A^* R_{A^*}\|\right]$$

Par sommation des deux équations, on obtient

$$\begin{aligned} 2\|B - A\| &\leq \sqrt{1 + \|A\|^2} p(A,B)(1 + \|B\|) \\ &\leq \sqrt{1 + \|A\|^2} p(A,B)\sqrt{2}\sqrt{1 + \|B\|^2} \end{aligned}$$

finalement,

$$\|A - B\| \leq \sqrt{1 + \|A\|^2}\sqrt{1 + \|B\|^2} p(A,B)$$

Corollaire 4.3.3. [*La1*] *Si on pose*

$$v = R_A u + B^* R_{B^*} A u$$

on obtient $v \in D(B)$ *et*

$$\|v - u\| \leq \|R_A - R_B\| \|u\| + \|A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*}\| \|Au\| \tag{4.14}$$

$$\|Au - Bv\| \leq \|AR_A - BR_B\| \|u\| + \|R_{A^*} - R_{B^*}\| \|Au\| \tag{4.15}$$

Lemme 4.3.3. [*La1*] *Si* $B \in \mathcal{R}(A)$ *(*$\mathcal{R}(A)$ *désigne l'ensemble des opérateurs à image fermé) et* $A \in \mathcal{C}(H)$*,* F *est un sous-espace fermé de* $\mathcal{H}$ *contenant* $\ker A$ *tel que* $\lambda = \delta(\ker B, F) < 1$*. Alors*

$$\sqrt{1 - \lambda^2} c(B) - c_F(A) \leq \sqrt{1 + c_F^2(A)}\sqrt{1 + c^2(B)} p(A,B)$$

Preuve 4.3.8. *Soit* $u \in D(A)$*,* $\|u\| = 1$*,* $u \perp F$*. Alors,*

$$\begin{aligned} \|P_{\ker B} u\|^2 &= < u, P_{\ker B} u > = < (I - P_F) u, P_{\ker B} u > \\ &= < u, (I - P_F) P_{\ker B} u > \\ &\leq \|u\| \|(I - P_F) P_{\ker B}\| \|P_{\ker B} u\| \end{aligned}$$

donc

$$\|P_{\ker B} u\| \leq \lambda \|u\|, \textit{avec} \quad \lambda = \|(I - P_F) P_{\ker B}\|$$

de plus

$$\left\|\left(I - P_{\ker B}\right) u\right\| \geq \sqrt{1-\lambda^2}\,\|u\|$$

soit

$$\begin{aligned} v_1 &= R_B P_{\ker B} u = P_{\ker B} u \\ v_2 &= R_B \left(I - P_{\ker B}\right) u + B^* R_{B^*} A u \end{aligned}$$

alors $v_2 \perp \ker B$, *de plus si* $v = v_1 + v_2$

$$\|Bv_2\| = \|Bv\| \leq \|Au\| + \|Au - Bv\| \tag{4.16}$$

mais

$$\|Bv_2\| \geq c(B)\,\|v_2\|$$

et

$$\begin{aligned} \left\|\left(I - P_{\ker B}\right) u\right\| &\leq \|v_2\| + \left\|v_2 - \left(I - P_{\ker B}\right) u\right\| \\ &\leq \|v_2\| + \|v - u\| \end{aligned}$$

donc

$$\|v_2\| \geq \left\|\left(I - P_{\ker B}\right) u\right\| - \|v - u\|$$

et

$$\begin{aligned} \|Bv_2\| &\geq c(B)\left(\left\|\left(I - P_{\ker B}\right) u\right\| - \|v - u\|\right) \\ &\geq c(B)\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\|u\| - \|v - u\|\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

de (4.16) *et* (4.17) *on obtient,*

$$c(B)\left(\sqrt{1-\lambda^2}\,\|u\| - \|v-u\|\right) \leq \|Bv_2\| \leq \|Au\| + \|Au - Bv\|$$

ce qui implique

$$c(B)\sqrt{1-\lambda^2}\,\|u\| \leq c(B)\,\|v-u\| + \|Au\| + \|Au - Bv\|$$

de (4.14) *et* (4.15) *on obtient pour tout* $u \perp F$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\lambda^2}\,c(B) \quad \leq \quad & \left[c(B)\,\|R_A - R_B\| + \|AR_A - BR_B\|\right]\|u\| \\ & + \left[c(B)\,\|A^* R_{A^*} - B^* R_{B^*}\| + \|R_{A^*} - R_{B^*}\| + 1\right]\|Au\| \end{aligned}$$

est d'après la définition de $c_F(A)$ *on a aussi*

$$\sqrt{1-\lambda^2}c(B) - c_F(A) \leq \|AR_A - BR_B\| + c(B)\|R_A - R_B\| + c_F(A)\|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|u\| + c_F(A)c(B)\|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz, le résultat est finalement obtenu

Corollaire 4.3.4. [*La1*] *Soit* $B \in \mathcal{R}(A)$ *tel que* $nul(B) = 0$. *Alors si* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *est tel que* $p(A,B) < \dfrac{c(B)}{\sqrt{1+c^2(B)}}$ *on obtient*

$$|c(A) - c(B)| \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c^2(B)}p(A,B)$$

Soit maintenant le premier théorème de stabilité dans le cas non borné.

Théorème 4.3.4. $(cf.$ [*CoLa*], [*La1*]$)$ $\forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *tels que* $p(A,B) < \dfrac{c(A)}{\sqrt{1+c(A)^2}}$ *alors* $B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *et*

$$ind(B) = ind(A).$$

Preuve 4.3.9. 1.*Supposons que* $nul(A) < +\infty$. *Donc puisque*

$$\delta(\ker B, \ker A) \leq \frac{\sqrt{1+c(A)^2}}{c(A)}p(A,B) < 1$$

on doit avoir aussi que $nul(B) < +\infty$.
Maintenant soit F *un sous-espace de dimension finie de* $\mathcal{H}$ *engendré par* $\ker B$ *et* $\ker A$ *alors* F *est un sous-espace fermé contenant* $\ker(A)$, *et par conséquent* $\lambda = \delta(\ker A, F) = 0$ *et en appliquant le corollaire* (4.3.4)*on obtient*

$$c(A) - c_F(B) \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c_F^2(B)}p(A,B)$$

ceci signifie que $c_F(B) > 0$ *sinon*

$$c(A) \leq \sqrt{1+c^2(A)}p(A,B) < c(A)$$

qui donne une contradiction. Mais $c_F(B) > 0$ *signifie que l'image de* B_F, *la restriction de* B *à* $F^\perp$, *est fermée et puisque* F *est de dimension fini ceci signifie que* $\operatorname{Im} B$ *est également fermée, donc* $\dim \operatorname{Im} B / \operatorname{Im} B_F < +\infty$. *D'où le résultat.*

Si $nul(B) = +\infty$ *alors* $def(B) = nul(A^*) < +\infty$. *Par conséquent,* $p(A^*, B^*) < \dfrac{c(A^*)}{\sqrt{1+c^2(A^*)}}$ *puisque*

$$p(A, B) = p(A^*, B^*), \; c(A) = c(A^*)$$

et alors $B^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *ainsi* $B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *donc le théorème est également prouvé dans ce cas-ci.*

2. *Montrons que* $ind(B) = ind(A)$

D'après ce qui précède B *et donc* B^* *ont une image fermée. En outre* $\delta(\ker B, \ker A) < 1$ *et* $\delta(\ker B^*, \ker A^*) < 1$ *c'est à dire* $nul(A^*) \geq nul(B^*)$ *et* $nul(A) \geq nul(B)$.

Premièrement suposons que $nul(A) < +\infty$ *et soit* $nul(A) \geq nul(B) + n$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \leq nul(A) - nul(B)$. *Alors*

$$\operatorname{Im} B^* \cap \ker A = (\ker B)^{\perp} \cap \ker A$$

contient un sous-espace M *de dimension* n.

Soit $N = \{u \in D(B^*) \mid \; u \perp \ker B^*, B^*u \in M\}$, *alors* $\dim N = n$.

Finallement soit $P = N \oplus \ker B^*$. *Alors* $\dim P = n + nul(B^*)$. *Nous voulons montrer que* $\dim P \leq nul(A^*)$ *c'est à dire que* P *ne contient aucun élément différent de zéro* $u + w$, $u \in N$, $w \in \ker B^*$, *orthogonal à* $\ker A^*$. *Supposons qu'il y'avait un tel élément et soit*

$$v = R_{A^*}(u + w) = R_{A^*}(u + w) + AR_AB^*(u + w),$$

(puisque $B^*(u + w) = B^*u \in \ker A$). *Alors, comme* $< A^*v, B^*(u + w) >= 0$ *on a :*

$$\begin{aligned} \|A^*v - B^*(u+w)\|^2 &= \|A^*v\|^2 + \|B^*(u+w)\|^2 \\ \|v - (u+w)\|^2 &= \|(I - R_{A^*})(u+w)\|^2 = \|u+w\|^2 - < u+w, v > - \|A^*v\|^2 \end{aligned}$$

La sommations des deux égalités donne

$$\|u+w\|^2 + \|B^*(u+w)\|^2 = \|v - (u+w)\|^2 + \|A^*v - B^*(u+w)\|^2 + < u+w, v >$$

Maintenant puisque $u + v \perp \ker A^*$ *et en utilisant*

$$\|R_Au\|^2 + \|AR_Au\|^2 =< u, R_Au >$$

on obtient

$$\left(1+c^2(A)\right)\|v\|^2 \leq \|v\|^2+\|A^*v\|^2 =< u+w, v > \leq \|v\|\,\|u+w\|$$

donc

$$\|v\| \leq \frac{1}{1+c^2(A)}\,\|u+w\|$$

et donc

$$|< u+w, v >| \leq \frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)}$$

utilisant maintenant (4.14) *et* (4.15) *on obtient*

$$\begin{aligned}
\|u+w\|^2+\|B^*(u+w)\|^2 &\leq [\|A^*R_{A^*}-B^*R_{B^*}\|\,\|u+w\|+\|R_A-R_B\|\,\|B^*(u+w)\|]^2+\\
&\quad [\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\,\|u+w\|+\|AR_A-BR_B\|\,\|B^*(u+w)\|]^2+\\
\frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)} &\leq p^2(A,B)\left[\|u+w\|^2+\|B^*(u+w)\|^2\right]+\frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)}\\
&< \left[\frac{c^2(A)}{1+c^2(A)}+\frac{1}{1+c^2(A)}\right]\left[\|u+w\|^2+\|B^*(u+w)\|^2\right]
\end{aligned}$$

contradiction. Donc $nul(A^*) = nul(B^*) + n$

Maintenant si $nul(B^*) = \infty$ *on a* $nul(A^*) = \infty$ *et* $ind(A) = ind(B) = -\infty$. *Si d'une part* $nul(B^*) < \infty$ *alors,* $nul(A^*) \geq nul(B^*) + n$ *(appliquant ce qui précède à* A^*,B^* *au lieu de à* A, B*) implique* $nul(A) \geq nul(B)+n$. *Maintenant l'un ou l'autre* $nul(A^*)$ *ou* $nul(A)$ *est fini de sorte que*

$$q = \min\{nul(A^*) - nul(B^*), nul(A) - nul(B)\} < \infty$$

Comme $nul(A^*)-nul(B^*) \geq q$ *implique* $nul(A)-nul(B) \geq q$ *et vice versa il suit que*

$$nul(A^*) - nul(B^*) = nul(A) - nul(B) = q$$

i.e,

$$ind(A) = ind(B).$$

Ceci prouve le théorème quand $nul(B) < \infty$. *Mais si* $nul(B) = \infty$, *alors* $nul(B^*) < \infty$ *et de ce qui précède nous obtenons*

$$ind(A^*) = ind(B^*)$$

c'est à dire que

$$ind(A) = ind(B).$$

Ce résultat à été généralisé dans [Na] et peut également s'énoncer sous la forme équivalente :

Théorème 4.3.5. [*LaMe*] $\forall A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ \forall B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $A - B \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Rightarrow B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *et*

$$ind(B) = ind(A)$$

4.4 Notion de $\mathcal{K}$-équivalence [?]

Dans ce paragraphe, on désire étendre aux opérateurs fermés, la notion d'équivalence modulo les compactes connue pour les opérateurs bornés par la relation

$$A \sim B \Leftrightarrow A - B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

Dans ce but nous rappelons certain nombre de définitions et de résultats déjà connus permettant de donner la définition d'équivalence compacte forte et de démontrer le deuxième théorème de stabilité sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.

4.4.1 Equivalence compacte faible

Définition 4.4.1. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. A et B sont dits faiblement compact équivalents (et nous écrivons $A \sim B$) si $P_{G(A)} - P_{G(B)}$ est un opérateur compact sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Remarque 4.4.1. *i. $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$.*
ii. La proposition (4.3.4) *montre que $A \sim B \Longrightarrow R_A - R_B \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, de même on peut voir* ($cf.$ [?]) *que si $A \sim B \Leftrightarrow A^* \sim B^*$.*

Définition 4.4.2. *Soit $A, T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ tels que $D(A) \subseteq D(T)$, nous dirons que T est A-compact si $TS_A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. .*

Remarque 4.4.2. *Il est facile de voir* ($cf.$ [?]) *que cette définition de l'A-compact est équivalente à celle donnée dans* [*Ka*]. *En particulier il en découle que si $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $A - B$ est A-compact, alors $D(A) = D(B)$ et $(A - B)$ est B-compact, de plus on peut montrer* ($cf.$ [?]) *que si $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$; alors $(A - B)$ est A-compact $\Rightarrow A \sim B$*

Le théorème qui suit généralise le fait suivant : Si $(A - B)$ est compact (ou seulement $B-$compact) et si A est de Fredholm, alors B est de Fredholm.

Théorème 4.4.1. [*LaMe*] *Soit.* $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *alors* $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$

Preuve 4.4.1. 1. *Montrons d'abord que :*

$$\forall u \perp \ker A,\ \left\|(I - P_{G(A)})\{u, 0\}\right\| \geq \frac{c(A)}{\sqrt{1 + c^2(A)}}\|u\| \tag{4.18}$$

En effet,

$$I - P_{G(A)} = \begin{pmatrix} I - R_A & -A^* R_{A^*} \\ -AR_A & R_{A^*} \end{pmatrix}$$

d'où

$$(I - P_{G(A)})\{u, 0\} = ((I - R_A)\, u, -AR_A u)$$

alors

$$\begin{aligned} \left\|(I - P_{G(A)})\{u, 0\}\right\|^2 &= \|((I - R_A)\, u, -AR_A u)\|^2 \\ &== \|(I - R_A)\, u\|^2 + \|AR_A u\|^2 \end{aligned}$$

et comme

$$I - R_A = A^* AR_A$$

il vient

$$\begin{aligned} \left\|(I - P_{G(A)})\{u, 0\}\right\|^2 &= \|(I - R_A)\, u\|^2 + \|AR_A u\|^2 \\ &=< (I - R_A)\, u, (I - R_A)\, u > + < AR_A u, AR_A u > \\ &=< (I - R_A)\, u, (I - R_A)\, u > + < R_A u, A^* AR_A u > \\ &=< (I - R_A)\, u, (I - R_A)\, u > + < R_A u, (I - R_A)\, u > \\ &=< (I - R_A)\, u + R_A u, (I - R_A)\, u > \\ &=< u, (I - R_A)\, u > \\ &=< u, u > + < u, R_A u >= \|AS_A u\|^2 \end{aligned}$$

or $u \perp \ker A$ *alors* $S_A u \perp \ker A$ *car*

$$\forall v \in \ker A, < S_A u, v >=< u, S_A v >=< u, v >= 0.$$

Comme $S_A u \in (\ker A)^{\perp} \cap D(A)$ *et*

$$\|u\|^2 = \|S_A u\|^2 + \|AS_A u\|^2$$

il vient

$$c(A) = \inf_{S_A u \in D(A) \cap (\ker A)^{\perp}} \frac{\|AS_A u\|}{\|S_A u\|}$$

ce qui implique

$$\|AS_A u\|^2 \geq c^2(A) \|S_A u\|^2 = c^2(A) \|u\|^2 - c^2(A) \|AS_A u\|^2$$

donc

$$\|AS_A u\|^2 + c^2(A) \|AS_A u\|^2 \geq c^2(A) \|u\|^2$$

c.à.d

$$\|AS_A u\|^2 \geq \frac{c^2(A)}{1 + c^2(A)} \|u\|^2$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

2. *Supposons que* $nul(A) < +\infty$ *et montrons que* $nul(B) < \infty$ *(si* $nul(A) = +\infty$ *on raisonne avec* A^**et* B^**). Supposons par l'absurde que* $nul(B) = +\infty$. *Alors* $\ker B \cap (\ker A)^{\perp}$ *est de dimension infinie.*

Soit $(u_n)_n$ *une suite orthonormée de* $\ker B \cap (\ker A)^{\perp}$ *donc* $\forall u \in D(B)$ *l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\{0, Bu\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u, Bu\} + P_{G(A)} \{0, Bu\} - (I - P_{G(A)}) \{u, 0\}$$

si cette égalité est appliquée à la suite $(u_n)_n$*, elle donne :*

$$\{0, 0\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, 0\} - (I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$$

et comme $P_{G(B)} - P_{G(A)}$ *et compact sur* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*, il existe une sous suite encore notée* (u_n) *telle que* $(P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$ *converge dans* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$*, ce qui entraîne que la suite* $(I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$ *étant de Cauchy, en outre* (4.18) *entraine que* $(u_n)_n$ *est convergente ce qui est absurde, et par conséquent que* $\dim \left(\ker B \cap (\ker A)^{\perp}\right) < \infty$. *Comme par hypothèse* $nul(A) < \infty$ *on trouve bien que* $nul(B) < \infty$.

3. *Montrons maintenant que* $\operatorname{Im} B$ *est fermé dans* $\mathcal{H}$.

Comme $\dim(\ker A + \ker B) < \infty$ *il suffit de montrer que la restriction de B à* $(\ker A + \ker B)^{\perp}$ *a une image fermée.*
Soit donc $(u_n) \subseteq (\ker A + \ker B)^{\perp} \cap D(B)$ *telle que* $(Bu_n)_n$ *converge dans* $\mathcal{H}$ *vers un élément* f. *On va montrer que* $(u_n)_n$ *est bornée.*
Si $(u_n)_n$ *n'est pas bornée, alors il existerait une sous-suite encore notée* $(u_n)_n$ *telle que* $\|u_n\| \to +\infty$. *Alors comme précédemment* $\forall\, (u_n)_n \in D(B)$ *l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} + P_{G(A)} \left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\} - (I - P_{G(A)}) \left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, 0\right\}$$

La suite $\left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ *étant bornée, il existe une sous suite, encore notée* $(u_n)_n$, *telle que* $\left(P_{G(A)} - P_{G(B)}\right) \left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ *converge dans* $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. *D'autre part,* $\left\{0, \frac{Bu_n}{\|u_n\|}\right\}$ *converge vers* $\{0, 0\}$, *on en déduit que* $(I - P_{G(A)}) \left\{\frac{u_n}{\|u_n\|}, 0\right\}$ *est une suite convergente. l'inégalité* (4.18) *entraîne la convergence de* $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)_n$ *vers un élément* u *c'est-à-dire* $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to u$ *et* $\frac{Bu_n}{\|u_n\|} \to 0$. B *étant fermé,* $u \in D(B)$ *et* $Bu = 0$ *comme* $u \in (\ker B)^{\perp}$ *il en résulte que* $u = 0$ *ce qui est absurde. Donc la suite* $(u_n)_n$ *est bornée dans* $\mathcal{H}$.

$$\{0, Bu_n\} = (P_{G(B)} - P_{G(A)}) \{u_n, Bu_n\} + P_{G(A)} \{0, Bu_n\} - (I - P_{G(A)}) \{u_n, 0\}$$

alors $\{0, Bu_n\}$ *converge vers* $\{0, f\}$. *On en déduit que* $P_{G(A)} \{0, Bu_n\}$ *converge vers* $P_{G(A)} \{0, f\}$.
D'autre part, il existe une sous-suite notée encore $(u_n)_n$ *telle que* $\left(P_{G(B)} - P_{G(A)}\right) \{u_n, Bu_n\}$ *est convergente On en déduit encore que* $\left(I - P_{G(A)}\right) \{u_n, 0\}$ *converge et que* $(u_n)_n$ *converge vers* u *et comme* $(Bu_n)_n$ *converge vers* f *et que* B *est fermé, il résulte que* $u \in D(B)$ *et* $f = Bu$.

L'exemple qui suit montre que si A et B sont de Fredholm $\mathcal{K}$-équivalents, leurs indices ne sont pas nécessairement égaux.

Exemple 4.4.1. *Soit A l'opérateur diagonal défini sur une base de $\mathcal{H}$ par :*

$$Ae_n = ne_n \quad pour \ n \geq 1$$

A est fermé de domaine dense

$$D(A)=\left\{x=\sum_{n\geq 1}x_n e_n,\ \sum_{n\geq 1}n^2\left|x_n\right|^2<+\infty\right\}$$

alors A est de Fredholm et $indA=0$.
Posons $u_0=\sum_{n\geq 1}n^{-3/2}e_n$, alors $u_0\notin D(A)$. On pose $B=A$ sur $D(A)$ et $Bu_0=0$ donc B est une extension fermée de A, B est de Fredholm et $indB=1$ bien que $P_{G(B)}-P_{G(A)}$ soit de rang fini, donc compact, les indices de A et B sont différents

La notion de $\mathcal{K}$-équivalence n'est pas donc assez forte pour entrainer la conservation des indices. On va donner une condition nécessaire et suffisante pour que, A et B étant deux opérateurs de Fredholm $\mathcal{K}$-équivalents, leurs indices soient égaux. Admettons les résultats préparatoires suivantes :

Proposition 4.4.1. [*LaMe*] *Soit $A,B\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$ tels que $A\sim B$ Alors les opérateurs $I+A^*B$, $I+AB^*$, $I+BA^*$ et $I+B^*A$ sont fermés de domaine dense dans $\mathcal{H}$, Fredholm et*

$$(I+A^*B)^*=I+B^*A,$$

et

$$(I+BA^*)^*=I+AB^*$$

Remarque 4.4.3. 1. *Si A et B sont bornés, de domaine $\mathcal{H}$, et tels que $(A-B)$ est compact, alors*

$$ind\,(I+BA^*)=0.$$

2. *Si A et B sont fermés, de domaines denses et tels que $(A-B)$ est B compact, alors*

$$ind\,(I+BA^*)=0.$$

Dans les deux cas simples ci-dessus,

$$ind(I+AB^*)=0$$

. En général, quand A et B sont $\mathcal{K}$-équivalents, cette condition n'est pas vérifiée.

Remarque 4.4.4. *Ces résultats utilisant le fait que si* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $A \sim B \Rightarrow \lambda A \sim \lambda B$

Proposition 4.4.2. [*LaMe*] *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; *alors*

$$\delta(A+T, B+T) \leq \zeta^2 \delta(A, B) \tag{4.19}$$

$$g(A+T, B+T) \leq \zeta^2 g(A, B) \tag{4.20}$$

avec $\zeta = \dfrac{\|T\|}{2} + \sqrt{1 + \dfrac{\|T\|^2}{4}}$. *De plus si* $A \sim B$ *alors* $A + T \sim B + T$

Corollaire 4.4.1. *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$; *alors :*

$$A \sim B \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (A - \lambda I) \sim (B - \lambda I)$$

d'où

$$A \sim B \Rightarrow \rho_e(A) = \rho_e(B)$$

avec

$$\rho_e(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})\}$$

est l'ensemble résolvante essentiel de l'opérateur A.

Lemme 4.4.1. $\forall\ A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *alors*

$$A \sim B \Rightarrow ind(I + A^*B) = indB - indA = ind(A^*B)$$

Preuve 4.4.2. *Comme* $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *et* $A \sim B$ *alors d'après le théorème* (4.4.1) $B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *d'où* $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, A/λ, $B/\lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *et par conséquent l'opérateur* $|\lambda|^2 + A^*B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. *Comme* $A^*B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, *et en vertu du théorème* (4.3.4) *du corollaire* (4.4.2) *et de la proposition* (4.3.3) *on voit que*

$$indAB^* = ind(I + AB^*) = ind(B) - ind(A).$$

4.4.2 Equivalence compacte forte

Proposition 4.4.3. (*cf.* [*LaMe*]) *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $A \sim B$; *alors*

$$W(A, B) = I - R_A - R_B + 2R_AR_B$$

est un opérateur inversible de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Remarque 4.4.5. *A partir de la proposition* (4.4.3)*on voit que* $W(A,B)$ *est une application continue de* $\mathcal{C}(\mathcal{H})\times\mathcal{C}(\mathcal{H})$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Corollaire 4.4.2. [*LaMe*]*Soit* $A,B\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$; *alors*

$$A\sim B \Longrightarrow g(BA^*,(B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))\leq|\lambda|\left(1+\left\|(W(A,B))^{-1}\right\|+\left\|(W(A-\lambda I,B-\lambda I))^{-1}\right\|\right) \tag{4.21}$$

Proposition 4.4.4. *Soit* $A,B\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$; *alors*

$$A\sim B\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\forall\lambda\in\mathbb{C},\ ind(I+(B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))=ind(I+BA^*)\\ \forall\lambda\in\rho_e(A)=\rho_e(B),\ ind(B-\lambda I)=ind(A-\lambda I))+ind(I+BA^*)\end{array}\right.$$

Preuve 4.4.3. *Soit* $\lambda_0\in\mathbb{C}$. *Alors la remarque* (4.4.5) *et* (4.21) *entrainent que* $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ *tel que*

$$|\lambda-\lambda_0|<\delta\Rightarrow\left\|(W(A-\lambda I,B-\lambda I))^{-1}\right\|\leq 2\left\|(W(A-\lambda_0 I,B-\lambda_0 I))^{-1}\right\|$$

et $g((B-\lambda_0 I)(A^*-\overline{\lambda_0}I),(B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))<\varepsilon$. *En utilisant maitenant l'inégalé* (4.19) *et en posant*

$$\gamma=c\left(I+(B-\lambda_0 I)(A^*-\overline{\lambda}_0 I)\right)>0$$

alors il exsiste $\delta>0$ *tel que :*

$$|\lambda-\lambda_0|<\delta\Rightarrow g((I+(B-\lambda_0 I)(A^*-\lambda_0 I)),(I+(B-\lambda I)(A^*-\lambda I)))<\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

d'où en vertu du théorème (4.3.4) *on déduit que* $ind(I+(B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))$ *est localement constant sur* $\mathbb{C}$ *et donc constant (et par conséquent égale à* $ind(I+BA^*)$). *En outre si* $\lambda\in\rho_e(A)=\rho_e(B)$ *et en utilisant le lemme* (4.4.1) *on trouve*

$$\begin{aligned}-ind(A-\lambda I)+ind(B-\lambda I)&=ind((B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))\\&=ind(I+(B-\lambda I)(A^*-\overline{\lambda}I))\\&=ind(I+BA^*)\end{aligned}$$

Définition 4.4.3. *Soit* $A,B\in\mathcal{C}(\mathcal{H})$. *Nous dirons que* A *et* B *sont fortement compct-équivalents et nous écrivons* $A\approx B$ *si* $A\sim B$ *et*

$$ind(I+AB^*)=0$$

Remarque 4.4.6. 1. $\approx$ *est une relation d'équivalence*
2. $A \approx B \Rightarrow \begin{cases} A^* \approx B^* \\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda A \approx \lambda B \end{cases}$
3. *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$; *alors :*

$$A \approx B \Rightarrow \forall \lambda \in \rho_e(A) = \rho_e(B)$$
$$ind(A - \lambda I) = ind(B - \lambda I)$$

conséquence immédiate de la proposition (4.4.4) . *Réciproquement,*

$$A \sim B \ et\ \exists \lambda \in \rho_e(A) = \rho_e(B) \ tel\ que\ ind(A - \lambda I) = ind(B - \lambda I) \Rightarrow A \approx B$$

Exemple 4.4.2. $\forall A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ \forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$

$$A \approx B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(H) \ et\ ind(B) = ind(A)$$

Preuve 4.4.4. *Conséquence immédiate de théorème* (4.4.1) *et la propositon* (4.4.4) .

Chapitre 5

Sur un schéma de réduction générale des opérateurs de Fredholm

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on va étudier l'extension de théorème de stabilité des opérateurs de Fredholm à l'espace des opérateurs fermés $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, on introduit sur cet espace quelques topologies de type projectives qui permettent de montrer que l'espace des opérateurs de Fredholm est un ouvert dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Pour montrer le deuxième théorème de stabilité, on définit sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ une relation d'équivalence modulo les compacts de la façon suivante : Si $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}),\ B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ alors $A \sim B \Rightarrow B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Une limite de cette approche est la non conservation de l'indice d'un opérateur de Fredholm, pour pallier cet inconvénient on introduit une autre relation d'équivalence dite équivalence forte. Une forme plus générale a été introduite trente cinq ans après en 1987 par J.P. Labrousse et B. Mercier dans [LaMe].

Notons aussi l'emploi de la théorie de Fredholm dans la définition du spectre essentiel d'un opérateur de $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, notion déjà employée dans des sens divers par plusieurs auteurs.

Dans ce chapitre on présente une méthode nouvelle inspirée de la méthode de réduc-

tion spectrale dite de Feshbach des Hamiltoniens moléculaires [Fe] qui a suscité de nombreux travaux récents concernant le spectre discret et le calcul des résonances en analyse semi-classique [Fe] [MeSe2].
La réduction que nous obtenons permet de retrouver d'une manière simple et aisée les résultats de stabilité de la théorie de Fredholm établit au chapitre quatre). Cette méthode est aussi adaptée par l'analyse spectrale des opérateurs de Fredholm on caractérise le spectre à travers une matrice finie d'opérateurs de Fredholm compacts analytiques.

5.2 Théorie de Fredholm :

Soient E et F deux espaces de Banach, ω un ouvert dans $\mathbb{C}$ et $(P_z)_{z\in\omega}$ une famille continue sur ω d'opérateurs linéaires bornés de E dans F.
Supposons que pour un certain z_0 dans ω, l'opérateur correspondant P_{z_0} noté P est de Fredholm d'indice $n_0 - d_0$, avec

$$n_0 = \dim\ker P < +\infty$$

et

$$d_0 = co\dim_F \operatorname{Im} P < +\infty.$$

Par analogie avec les opérateurs de Grushin introduits dans [Fe], [Me1], [MeSe1] et considérons alors l'opérateur :

$$\mathcal{P}_0 = \begin{pmatrix} P & R_0^- \\ R_0^+ & 0 \end{pmatrix}$$

agissant sur $E \oplus \mathbb{C}^{d_0}$ dans $F \oplus \mathbb{C}^{n_0}$. R_0^+ et R_0^- sont des opérateurs linéaires bornés définits de E dans $\mathbb{C}^{n_0}$ et de $\mathbb{C}^{d_0}$ dans F respectivement, tels que :
(H1) Le rang de $R_0^{\pm}$ est maximal,

$$\dim \operatorname{Im} R_0^- = d_0$$
$$\dim \operatorname{Im} R_0^+ = n_0$$

(H2) $R_0^-\left(\mathbb{C}^{d_0}\right)$ est transverse à $P(E)$,

$$F = \operatorname{Im} R_0^- \oplus \operatorname{Im} P$$

(H3) $R_0 = R^+_{0|\ker P}$ est inversible

Remarque 5.2.1. 1. *Les deux projections non orthogonales p_0 de F dans $\operatorname{Im} P$ et p_0^- de F dans $\operatorname{Im} R_0^-$ sont bornées relativement à la décomposition **(H2)**. En particulier,*

$$rg(p_0^-) = corg(p_0) = d_0,$$

(ici rg (resp. $corg$) désigne le rang (resp.corang)).
2. *Si $\mathcal{E}$ est le complémentaire de* $\ker P$ *dans E, alors*

$$P' = P_{|\mathcal{E}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\operatorname{Im} P$.
3. R_0^- *est un isomorphisme de $\mathbb{C}^{d_0}$ dans* $\operatorname{Im} R_0^-$.

Exemple 5.2.1 (**d'opérateurs** $R_0^\pm$). *:*
1. *Si $\{\hat{e}_1, ..., \hat{e}_{d_0}\}$ une base fixée de l'espace quotient $F \diagup \operatorname{Im} P$,On pose*

$$R_0^-(\lambda_1, ..., \lambda_{d_0}) = \sum_{k=1}^{d_0} \lambda_k e_k \in F, \quad (\lambda_1, ..., \lambda_{d_0}) \in \mathbb{C}^{d_0} \quad .$$

Il est clair que cette définition ne dépends pas du choix du représentant de la classe d'équivalence
on montre facilement que $rg(R_0^-) = d_0$ et que $\operatorname{Im} R_0^-$ *est transverse à* $\operatorname{Im} P$. *En effet,*

$$\forall g \in F, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_{d_0}) \in \mathbb{C}^{d_0} \text{ tel que } \hat{g} = \sum_{k=1}^{d_0} \lambda_k \hat{e}_k \in F \diagup \operatorname{Im} P \text{ et } (g - \sum_{k=1}^{d_0} \lambda_k e_k) \in \operatorname{Im} P.$$

Alors

$$g = \sum_{k=1}^{d_0} \lambda_k e_k + (g - \sum_{k=1}^{d_0} \lambda_k e_k) \in \operatorname{Im} R_0^- \oplus \operatorname{Im} P$$

car

$$\operatorname{Im} R_0^- \cap \operatorname{Im} P = \{0\}\,.$$

2. *Si* $\{v_1, ..., v_{n_0}\}$ *est une base de* $\ker P$ *et* $\mathcal{E}$ *est le complémentaire de* $\ker P$ *dans* E, *alors chaque élément* f *de* E *s'écrit d'une manière unique sous la forme*

$$f = \sum_{k=1}^{n_0} \mu_k v_k + f_{\mathcal{E}}$$

où $f_{\mathcal{E}}$ *est la projection de* f *sur* $\mathcal{E}$.
On définit R_0^+ *de* E *dans* $\mathbb{C}^{n_0}$ *par*

$$R_0^+ f = (\mu_1, ..., \mu_{n_0}).$$

Par construction

$$rg(R_0^+) = n_0$$

et R_0^+ *est inversible sur* $\ker P$.

Proposition 5.2.1. *L'opérateur* $\mathcal{P}_0$ *défini ci-dessus est inversible dans* $\mathcal{L}(E \oplus \mathbb{C}^{d_0}, F \oplus \mathbb{C}^{n_0})$, *son inverse est borné donné par*

$$\mathcal{P}_0^{-1} = \begin{pmatrix} A_0 & A_0^+ \\ A_0^- & A_0^{-+} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= (1 - (R_0)^{-1} R_0^+)(P')^{-1} p_0 \in \mathcal{L}(F, E) \\ A_0^+ &= (R_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_0}, E) \\ A_0^- &= (R_0^-)^{-1} p_0^- \in \mathcal{L}(F, \mathbb{C}^{d_0}) \\ A_0^{-+} &= 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_0}, \mathbb{C}^{d_0}) \end{aligned}$$

et $(P')^{-1}$ *dénote ici l'inverse de* $P_{|\mathcal{E}}$.

Preuve 5.2.1. *Montrer que $\mathcal{P}_0$ est inversible revient à résoudre le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} Pf + R_0^- \alpha = g \\ \qquad R_0^+ f = \beta \\ g \in F, \beta \in \mathbb{C}^{n_0} \end{array}\right.$$

là où l'inconnu $f \oplus \alpha$ *est dans* $E \oplus \mathbb{C}^{d_0}$.
Puisque

$$E = \ker P \oplus \mathcal{E} \ ,$$

on a

$$f = f_0 + f_{\mathcal{E}}$$

avec $f_0 \in \ker P$ *et* $f_{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$, *alors*

$$\left\{\begin{array}{l} Pf_{\mathcal{E}} + R_0^- \alpha = g \\ R_0^+ f_0 + R_0^+ f_{\mathcal{E}} = \beta \end{array}\right.$$

*d'aprés l'hypothèse **(H3)**, on peut écrire ce système comme*

$$\left\{\begin{array}{l} Pf_{\mathcal{E}} + R_0^- \alpha = g \\ f_0 = (R_0)^{-1}(\beta - R_0^+ f_{\mathcal{E}}) \end{array}\right.$$

et puisque

$$Pf_{\mathcal{E}} = p_0 g,$$

et

$$R_0^- \alpha = p_0^- g,$$

on obtient

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{E}} &= (P')^{-1} p_0 g \\ f_0 &= (R_0)^{-1}(\beta - R_0^+ (P')^{-1} p_0 g \\ \alpha &= (R_0^-)^{-1} p_0^- g \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est alors inversible d'inverse borné.
Pour étudier les propriétés de la familles $(P_z)_{z \in \omega}$ dans un voisinage assez petit de z_0

on fixe $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon < \dfrac{1}{\left\|\mathcal{P}_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(F\times\mathbb{C}^{n_0},E\times\mathbb{C}^{d_0})}}$ *et on définit l'opérateur* $\mathcal{P}_z$ *de* $E\times\mathbb{C}^{d_0}$ *dans* $F\times\mathbb{C}^{n_0}$ *par*

$$\mathcal{P}_z = \begin{pmatrix} P_z & R_0^- \\ R_0^+ & 0 \end{pmatrix}$$

Par continuité de la famille $(P_z)_{z\in\omega}$ *il existe un voisinage complexe* Ω *de* z_0 *inclu dans* ω *tel que*

$$\|P_z - P\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon, \quad \forall z \in \Omega$$

donc

$$\left\|\mathcal{P}_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(E\times\mathbb{C}^{d_0},F\times\mathbb{C}^{n_0})} \|\mathcal{P}_z - \mathcal{P}_0\|_{\mathcal{L}(E\times\mathbb{C}^{d_0},F\times\mathbb{C}^{n_0})} < 1$$

par suite, $\forall z \in \Omega$,

$$\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_0\left[1 - \mathcal{P}_0^{-1}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_z)\right]$$

est inversible dans $\mathcal{L}(E\times\mathbb{C}^{d_0}, F\times\mathbb{C}^{n_0})$ *d'inverse borné donné par la série de Neumann*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_z^{-1} &= \left[1 - \mathcal{P}_0^{-1}(\mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_z)\right]^{-1}\mathcal{P}_0^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 - \mathcal{P}_0^{-1}\mathcal{P}_z\right]^n \mathcal{P}_0^{-1}\end{aligned}$$

notons, $\forall z \in \Omega$

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{P}_z^{-1} = \begin{pmatrix} A(z) & A^+(z) \\ A^-(z) & A^{-+}(z) \end{pmatrix}$$

Remarque 5.2.2. $A(z) \in \mathcal{L}(E,F)$, $A^+(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_0},E)$, $A^-(z) \in \mathcal{L}(F,\mathbb{C}^{n_0})$ *et* $A^{-+}(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_0},\mathbb{C}^{d_0})$ *dépendent continument en* z *dans* Ω *et*

$$A^{-+}(z_0) = A_0^{-+} = 0,$$

de plus quitte à diminuer Ω*, les opérateurs* $A^{\pm}(z)$ *sont de rang maximal sur* Ω*,*

$$\begin{aligned}rg(A^+(z)) &= n_0 \\ rg(A^-(z)) &= d_0\end{aligned}$$

Maintenant pour $z \in \Omega$*, étudions l'équation*

$$P_z f = g$$

et observons l'intérêt de l'opérateur $\mathcal{P}_z$ *dans les solutions de cette équation à travers le résultat suivant*

Proposition 5.2.2. *Pour un $g \in F$ donné ; l'équation opérationnelle*

$$P_z f = g$$

admet une solution f dans E si et seulement si $A^-(z)g \in \operatorname{Im} A^{-+}(z)$

Preuve 5.2.2. *En introduisant la variable auxiliaire $R_0^+ f \in \mathbb{C}^{n_0}$, on a*

$$\begin{aligned} P_z f = g &\Longleftrightarrow \mathcal{P}_z(f \oplus 0) = (g \oplus R_0^+ f) \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{E}_z(z)(g \oplus R_0^+ f) = (f \oplus 0) \end{aligned}$$

alors

$$A(z)g + A^+(z)R_0^+ f = f \tag{5.1}$$

$$A^-(z)g + A^{-+}(z)R_0^+ f = 0 \tag{5.2}$$

si

$$A^-(z)g = \beta \in \operatorname{Im} A^{-+}(z) \subset \mathbb{C}^{d_0},$$

il existe alors $\alpha \in \mathbb{C}^{n_0}$ tel que

$$\beta = A^{-+}(z)\alpha.$$

En substituant cette valeur de β dans (5.2)*, nous trouvons*

$$A^{-+}(z)\left[\alpha + R_0^+ f\right] = 0$$

On peut alors choisir une solution f telle que

$$R_0^+ f = -\alpha$$

Tout en substituant cette expression dans (5.1)*, on a alors la solution*

$$f = A(z)g - A^+(z)\alpha$$

Réciproquement, si $f \in E$ est une solution de l'équation

$$P_z f = g,$$

alors (5.2) *permet d'écrire*

$$A^-(z)g = -A^{-+}(z)R_0^+ f \in \operatorname{Im} A^{-+}(z).$$

D'une part, puisque le

$$rg(A(z)) = d_0$$

si nous supposons que pour $g \in F$ *; il existe* $\varepsilon > 0$ *tels que* $B_F(g,\varepsilon) \subset F/\operatorname{Im} P_z$*(où* $B_F(g,\varepsilon)$ *est la boule ouverte de* F *centrée en* g *et de rayon* ε*) alors* $\forall h \in B_F(g,\varepsilon)$ *l'équation*

$$P_z f = g$$

n'a aucune solution dans E *par conséquent* $A^-(z)h \notin \operatorname{Im} A^{-+}(z)$ *et* $\operatorname{Im} A^{-+}(z) \subsetneq \mathbb{C}^{d_0}$ *ce qui est absurde. On en déduit alors que* $\operatorname{Im} P_z$ *est fermé dans* F*.*
D'autre part , considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{A^-(z)} & \mathbb{C}^{n_0} \\ s\downarrow & \searrow t & \downarrow s' \\ F/\operatorname{Im} P_z & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C}^{n_0}/\operatorname{Im} A^{-+}(z) \end{array}$$

où $s(g) = \dot{g},\ g \in F;\ s'(\alpha) = \widehat{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{C}^{d_0};$

$$\begin{aligned} \rho(\dot{g}) &= \widehat{A^-(z)g} \\ t(g) &= \widehat{A^-(z)g} \end{aligned}$$

et $\dot{}$ *(resp.* $\widehat{\cdot}$*) est la classe d'équivalence dans* $F/\operatorname{Im} P_z$ *(resp. dans* $\mathbb{C}^{d_0}/\operatorname{Im} A^{-+}(z)$*) alors* $\rho : F/\operatorname{Im} P_z \to \mathbb{C}^{d_0}/\operatorname{Im} A^{-+}(z)$ *est un isomorphisme linéaire.*

1. injective car,

$$\begin{aligned} \rho(\dot{g}) = \rho(\dot{h}) &\Leftrightarrow A^-(z)(g-h) \in \operatorname{Im} A^{-+}(z) \\ &\Longleftrightarrow P_z f = (g-h) \text{ admet une solution } f \text{ dans } E \\ &\Leftrightarrow (g-h) \in \operatorname{Im} P_z \Leftrightarrow \dot{g} = \dot{h} \end{aligned}$$

2. Surjective car, $\rho \circ s = t$ et

$$\operatorname{Im} t = \mathbb{C}^{d_0}/\operatorname{Im} A^{-+}(z).$$

Par suite

$$\dim\left(F/\operatorname{Im} P_z\right) = \dim\left(\mathbb{C}^{n_0}/\operatorname{Im} A^{-+}(z)\right) < +\infty, \quad \forall z \in \Omega \tag{5.3}$$

de même, si $\alpha \in \mathbb{C}^{n_0}$, alors $\forall z \in \Omega$

$$\beta = A^{-+}(z)\alpha \Leftrightarrow \mathcal{E}(z)\left(0 \oplus \alpha\right) = \left(A^{+}(z)\alpha \oplus \beta\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_z\left(A^{+}(z)\alpha \oplus \beta\right) = (0 \oplus \alpha)$$

et

$$P_z A^{+}(z)\alpha + R_0^{-}\beta = 0 \tag{5.4}$$

$$R_0^{+} A^{+}(z)\alpha = \alpha \tag{5.5}$$

de (5.5) on déduit que si

$$A^{+}(z)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0,$$

alors

$$\ker A^{+}(z) = \{0\}$$

et

$$\dim(\operatorname{Im} A^{+}(z)) = n_0$$

Soit l l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} l: & \ker A^{-+}(z) & \rightarrow & \ker(P_z) \\ & \alpha & \mapsto & A^{+}(z)\alpha \end{array}$$

1. l est bien défini car si

$$A^{-+}(z)\alpha = 0$$

on obtient d'après (5.4)

$$P_z A^{+}(z)\alpha = P_z\left(l(\alpha)\right) = 0 \Rightarrow l(\alpha) \in \ker P_z$$

2.l et linéaire injective $\ker l = \{0\}$ (car $A^{+}(z)$ est injectif)

3.l surjective, or $\operatorname{Im} l = \ker P_z$ car l'équation

$$A^{+}(z)\alpha = f$$

doit être résolue pour f donnée dans $\ker P_z$.

Posons d'après (5.4), $R_0^+ f = \alpha$. En utilisant (5.2) on obtient

$$A^{-+}(z)\alpha = -A^-(z)P_z f$$

et donc

$$l(\alpha) = A^+(z)\alpha = f \ ,$$

en vertu de (5.1).
Par conséquent

$$nul\,(P_z) = nul(A^{-+}(z)) < +\infty, \ \forall z \in \Omega \tag{5.6}$$

On vient alors d'établir le résultat fondamental suivant relatif à la stabilité sur Ω du caractère Fredholm et de l'indice correspondant.

Théorème 5.2.1. *Pour tout z dans Ω, P_z et $A^{-+}(z)$ sont des opérateurs de Fredholm de même indice indépendant de z.*

$$ind(P_z) = ind\left(A^{-+}(z)\right) = n_0 - d_0 \ , \qquad \forall z \in \Omega$$

5.3 Réduction spectrale d'un opérateur de Fredholm :

Supposons maintenant que Ω est un voisinage ouvert connexe de 0 dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions, $E \subset F$ avec une inclusion dense et que

$$P_z = P - z$$

où $P\,(= P_0)$ est l'opérateur de Fredholm tel que

$$n_0 = nul(P_0) < +\infty$$

et

$$d_0 = def(P_0) = \dim(F/\operatorname{Im} P_0) < +\infty.$$

On suppose en outre que P_z est bijectif pour au moins un point de Ω différent de 0. Alors d'après (5.3) et (5.6), $A^{-+}(z)$ est aussi bijectif au même point et donc

$$n_0 = d_0.$$

L'autre intérêt principal d'avoir considéré l'opérateur $\mathcal{P}_z$ est qu'il ramène en fait l'étude spectrale de l'opérateur de Fredholm P à celle d'un opérateur linéaire plus simple agissant sur $\mathbb{C}^{n_0}$.

Théorème 5.3.1. *Pour tout z dans Ω, on a l'équivalence suivante :*

$$z \in \sigma(P) \Leftrightarrow 0 \in \sigma(A^{-+}(z)) \Leftrightarrow \det(A^{-+}(z)) = 0$$

où σ désigne le spectre d'un opérateur linéaire.

Preuve 5.3.1. *si $0 \notin \sigma(A^{-+}(z))$, alors (5.1) et (5.2) donnent l'équivalence suivante*

$$P_z f = g \Leftrightarrow \begin{cases} R_0^+ f = -\left(A^{-+}(z)\right)^{-1} A^-(z)g \\ f = A(z)g - A^+(z)\left(A^{-+}(z)\right)^{-1} A^-(z)g \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$P_z^{-1} = A(z) - A^+(z)\left(A^{-+}(z)\right)^{-1} A^-(z) \tag{5.7}$$

ce qui prouve que $z \notin \sigma(P)$.
Inversement, si $z \notin \sigma(P)$ les équations (5.4) et (5.5) permettent décrire,

$$A^{-+}(z)\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = -R_0^+ P_z^{-1} R_0^- \beta$$

en particulier $0 \notin \sigma(A^{-+}(z))$ et donc

$$\left(A^{-+}(z)\right)^{-1} = -R_0^+ P_z^{-1} R_0^- \tag{5.8}$$

Remarque 5.3.1. 1. *Les formules (5.7) et (5.8) montrent, du fait que par construction $A(z)$, $A^{\pm}(z)$ et $A^{-+}(z)$ dépendent analytiquement de z, qu'une singularité de P_z^{-1} est nécessairement une singularité de $(A^{-+}(z))^{-1}$ et inversement.*
2. *Comme*

$$A^{-+}(0) = A_0^{-+} = 0,$$

alors

$$\det(A_0^{-+}) = 0$$

et $0 \in \sigma(P)$.Puisque l'ensemble des zéros de $\det(A^{-+}(z))$ forme un ensemble discret quitte à diminuer Ω, nous pouvons supposer que P_z (et donc $A^{-+}(z)$) est inversible

d'inverse borné pour $z \in \Omega / \{0\}$ .0 *est alors un pôle d'ordre* N_0 *de* $\left(A^{-+}(z)\right)^{-1}$; *soit* γ *un contour complexe fermé simple autour de la singularité* 0 *dans* Ω.
Notons

$$\Pi \overset{def}{=} \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma} P_z^{-1} dz \tag{5.9}$$

L'opérateurs Π *apporte des informations spectrales supplémentaires sur* P *et permet de préciser le résultat du théorème* (5.3.1)

Théorème 5.3.2. 1. Π *est un projecteur de rang fini.*
2. $\operatorname{Im}\Pi = \Pi(E) = \Pi(F)$. $\ker \Pi$ *et* $\operatorname{Im}\Pi$ *sont invariants par* P.
3. $\sigma(P) \cap \overset{\circ}{\gamma} = \sigma(P_{/\operatorname{Im}\Pi}) \cap \overset{\circ}{\gamma}$, $\overset{\circ}{\gamma}$ *est l'intérieur du contour* γ

$$\sigma(P_{/\ker\Pi}) \cap \overset{\circ}{\gamma} = \varnothing$$
$$\#\left(\sigma(P) \cap \overset{\circ}{\gamma}\right) = rg\Pi$$

où # *est le cardinal d'un ensemble)*

Preuve 5.3.2. 1. *Soit* γ' *un autre contour complexe fermé simple autour de* 0 *inclu dans* γ. *Par analyticité de la résolvante* P_z^{-1} *dans* $\Omega / \{0\}$, *on a à l'aide du théorème de Cauchy*

$$\begin{aligned}
\Pi^2 &\overset{def}{=} \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{\gamma} \oint_{\gamma'} P_z^{-1} P_t^{-1} dz dt \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \oint_{\gamma} \oint_{\gamma'} \frac{1}{(t-z)} \left[P_t^{-1} - P_z^{-1}\right] dz dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma} \left[\oint_{\gamma'} \frac{dt}{(t-z)}\right] P_z^{-1} dz - \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\gamma'} \left[\oint_{\gamma} \frac{dz}{(t-z)}\right] P_t^{-1} dt \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{\gamma'} P_t^{-1} dt = \Pi
\end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de (5.7) *on a*

$$\Pi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} A^{+}(z) \left(A^{-+}(z)\right)^{-1} A^{-}(z) dz \tag{5.10}$$

en particulier $\left(A^{-+}(z)\right)^{-1}$ *possède un développement en série de Laurent dans* Ω *exprimé par*

$$\left(A^{-+}(z)\right)^{-1} = \frac{R_{-N_0}}{z^{N_0}} + \ldots + \frac{R_{-1}}{z} + \widetilde{R}(z) \tag{5.11}$$

où $\widetilde{R}(z)$ *est analytique en* z, $A^{\pm}(z)$ *admettent à leur tour dans* Ω *un développement en série de Taylor donné par*

$$A^{\pm}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d^j A^{\pm}}{dz^j}(0) z^j \tag{5.12}$$

En utilisant la formule des résidus, on obtient aussi

$$\Pi = -\sum_{\substack{j+l-k=-1 \\ 1 \leq k \leq N_0}}^{\infty} \frac{d^j A^{+}}{dz^j}(0) R_{-k} \frac{d^j A^{-}}{dz^l}(0) \tag{5.13}$$

puisque les opérateurs $\dfrac{d^j A^{\pm}}{dz^j}$ *sont de rang fini* $\leq n_0$, *alors la formule* (5.13) *montre que* Π *est de rang fini* $\leq n_0 N_0$.

2. *On voit aussi sur* (5.9) *que* $\operatorname{Im}\Pi \subset E$. *Comme* E *est dense dans* F, Π *est de rang fini et* $\Pi(E) \subset \Pi(F)$, *on a*

$$\Pi(E) = \Pi(F) = \operatorname{Im}\Pi.$$

$$\forall f \in E,\ \forall z \in \gamma,\ PP_z^{-1} f = P_z^{-1} P f = f +$$

en intégrant sur γ, *on obtient*

$$\Pi P f = P \Pi f,\ \forall f \in E \tag{5.14}$$

En particulier, on en déduit que $\operatorname{Im}\Pi$ *et* $\ker \Pi$ *sont invariants par* P.

3. *Comme* Π *est un projecteur alors*

$$F = \ker \Pi \oplus \operatorname{Im}\Pi.$$

Notons $P_1 = P_{/\ker \Pi}$, $P_2 = P_{/\operatorname{Im}\Pi}$ *et*

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (t-z)^{-1} P_t^{-1} dt,\ z \in \mathring{\gamma}.$$

On a

$$
\begin{aligned}
\Pi R(z) &= \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\gamma}\oint_{\gamma'}\frac{1}{(t-z)}P_{\lambda}^{-1}P_t^{-1}dtd\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\gamma'}\left[\oint_{\gamma}\frac{dt}{(t-z)(\lambda-t)}\right]P_{\lambda}^{-1}d\lambda - \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\gamma}\left[\oint_{\gamma'}\frac{d\lambda}{(\lambda-t)}\right]\frac{P_t^{-1}}{(t-z)}dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\oint_{\gamma'}\left[2\pi i(\frac{1}{(\lambda-z)}+\frac{1}{(z-\lambda)}\right]P_{\lambda}^{-1}d\lambda = 0
\end{aligned}
$$

d'où $\operatorname{Im} R(z) \subset \ker \Pi$. *Par suite,*

$$
\begin{aligned}
P_z R(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}(t-z)^{-1}P_z P_t^{-1}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{dt}{(t-z)} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}P_t^{-1}dt \\
&= (1-\pi)
\end{aligned}
$$

donc

$$(P_1 - z)R(z)_{/\ker \Pi} = 1_{/\ker \Pi \cap F} \tag{5.15}$$

on a de la même façon

$$R(z)(P_1 - z)_{/\ker \Pi} = 1_{/\ker \Pi \cap F} \tag{5.16}$$

Ainsi, si $z \in \overset{\circ}{\gamma}$, $(P_1 - z)$ *est inversible de* $\ker \Pi \cap F$ *dans* $\ker \Pi \cap F$ *d'inverse borné égale à* $R(z)_{/\ker \Pi}$ *et donc* $z \notin \sigma(P_1)$, *où bien*

$$\sigma(P_1) \cap \overset{\circ}{\gamma} = \emptyset.$$

D'autre part, $\forall z \in \Omega \setminus \{0\}$,

$$P_z^{-1} = (P_1 - z)^{-1} \oplus (P_2 - z)^{-1} \tag{5.17}$$

d'où

$$\sigma(P) \cap \overset{\circ}{\gamma} = \sigma(P_2) \cap \overset{\circ}{\gamma} \tag{5.18}$$

or, $P_2 = \Pi P_{/\operatorname{Im}\Pi}$ *est défini sur un espace de dimension finie, il possède alors un spectre discret fini de cardinal égal au rang de* Π

Remarque 5.3.2. 1.*Si* $z \neq 0$ *est un second point où*

$$\det(A^{-+}(z_1)) = 0,$$

P_{z_1} *n'est pas bijectif et si* Π *et* Π_1 *sont les projecteurs correspondants donnés par* (5.9), *alors*

$$\Pi\Pi_1 = \Pi_1\Pi = 0.$$

2. *En s'appuyant sur l'équation* (5.2) *avec*

$$\begin{aligned} \alpha &= -R_0^+ f \\ &\quad \textit{et} \\ f &= A^+(z)\alpha, \end{aligned}$$

on a

$$A^-(z)P_zA^+(z) + A^{-+}(z) = 0$$

sur $\mathbb{C}^{n_0}$. *d'où*

$$\frac{dA^{-+}(z)}{dz} = A^-(z)A^+(z)$$

ainsi, si

$$\det(A^-(z)A^+(z)) \neq 0,$$

alors l'équation

$$A^{-+}(z) = 0$$

admet une seule solution $z = 0$ *dans* Ω, 0 *est alors dans ce cas un pôle simple pour* P_z^{-1}.

3. *On a directement d'après les équations* (5.4) *et* (5.5), $A_0^- A_0^+$ *est inversible si et seulement si*

$$\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\},$$

ce qui exclu l'existence des vecteurs propres généralisés pour P.

4. *Si* P *est un opérateur pseudo-différentiel sur* $\mathbb{R}^n$ *à symbole* $\alpha(x,\xi)$ *elliptique pour lequel il existe une constante* $\varepsilon > 0$, *tel que*

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ |\alpha(x,\xi)| < \varepsilon\right\}$$

est borné dans $\mathbb{R}^{2n}$, P *est un opérateur de Fredholm sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ $cf.$[*QiWo*], [*MeSe2*] *il peut alors être spectralement réduit par la méthode précédente.*

Bibliographie

[A.C] Albert, C. (1997). Topologie, Belin et Espaces Éditions 34.

[A.M] Artin, M. (1991). Algebra, Prentice Hall, New Jersey.

[At] F.V. Atkinson, "La solvabilité normale d'équations linéaires dans des espaces normés". Math. Sbornik. N.S. 28/70,

[C.J] Calais, J. Introduction à la théorie des groupes.

[CoLa] H. O. Cordes et J. P. Labrousse "The invariance of index in he metric space of closed operators" J. Math. and Mech. 12(5), (1963), 693-720.

[Fe] H. Feshbach, "United theory of nuclear reactions I and II". Ann. Physics 5, 1958, 363 and 19, (1962), 287

S. Goldberg, "Unbounded linear operators" Mc Graw Hill New York (1966)

[H.B] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, 1983.

[Ka] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators" Springer-Verlag, New York, (1966) .

[KrKr] M. G. Krein, M.A. Krasnoselski, "Théorèmes fondamentaux sur l'extension d'opérateurs hermitiens". Usp. Math. Nauk 2 (3) (19), (1947) 60- 106

[KrKr1] M.G. Krein et M.A. Krasnoselski, "Stabilité de l'indice d'un opérateur non borné". Math. Sbornik N.S. 30(72), (1952), 219-224

[L.S] Lang, S. (2004). Algèbre, Dunod.

[La1] J. Ph. Labrousse , On a metric space of closed operators on a Hilbert space. Rev. Mat. Fis. teorica. Univ. N. Tucuman (Argentine) XVI (1 et 2) (1966) 45-77,

[La2] J. Ph. Labrousse , "Quelque topologies sur des espaces d'opérateurs dans des espaces de Hilbert". Dept. de Math. Univ. de Nice (1970)

[LaMe] J.P. Labrousse. et B. Mercier, "Equivalence compacte entre deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert". Math. Nach. 133, (1987), 91-105.

[Me1] B. Messirdi, "Asymptotique de Born-Oppenheimer pour la prédissociation moléculaire cas de potentiels réguliers". Ann. I.H.P. Phys. Theor. 61, (1994) 255–292 .

[M.S.B] M.S. Birman. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space.

[M.T] M. Takesaki, Theory of operator algebras, Encyc. Math. Sciences 124, 125, 127, Springer Verlag, 2001-2002

[MeSe1] B. Messirdi et A. Senoussaoui, "Méthode BKW formelle et spectre des molécules polyatomiques dans l'approximation de Born-Oppenheimer" Canadian Journal of Physics, CJP, Vol. 79(4), (2001), 757-771

[MeSe2] B. Messirdi.et A. Senoussaoui, "Parametrix du problème de Cauchy C1 hyperbolique muni d'un système d'ordres de Leray-Volevîc". Journal for Analysis and its Applications ZAA, Volume 24 (2005), N 3, 581-592

[N.B] N. Bourbaki, Théorie spectrale, Hermann, 1967.

[Na] B.Sg. Nagy, "On the stability of the index of unbounded linear transformations" Act. Math. Acad. Sci. Hung. 3, (1952), 49-52

[P.LB] P. Lévy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, Dunod, 2003

[QiWo] F. Qihong. and M.N. Wong, "A characterization of the Fredholm pseudo dierential operators". The Journal of the London Mathematical Society. 55(2),(1997), 139-145

[RiNa] F. Riesz et B. S. Z. Nagy "Leçons d'analyse fonctionnelle". Acad. Kiado (Budapest), (1952)