

Remerciements

En premier lieu, nous tenons à témoigner notre reconnaissance à Allah tout

Puissant, de nous avoir donné la de terminer ce travail

Ainsi, Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon directeur de mémoire, Dr.

DJELLOULI GHOUTI. Je le remercie chaleureusement

Pour m'avoir encadré ce travail, pour ses qualités humaines et surtout ses

Qualités scientifiques, qui m'ont permis de réaliser cette mémoire dans les meilleures conditions

Possibles. Qu'il trouve ici toute ma gratitude pour sa patience.

Ma gratitude va également à Dr A. AZZOUZ pour avoir accepté d'être président de jury de mon travail, ainsi que

, qui me font l'honneur de participer au de cette mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi à Mr B.SAADLI et Dr F. HATHOUT pour avoir accepté d'examiner

Ce travail et faire partie du jury de mon travail, pour ses conseils et remarques.

Je dédie ce travail à mes chers parents sans qui je ne serais pas là. Je les remercie

Infiniment pour leur amour, leur confiance et leur soutien inconditionnel pendant ces

Années.

A tous mes enseignants qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour.

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut ...Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance ... Aussi, c'est tout simplement que je dédie ce mémoire aux personnes les plus chers à mon cœur.

À mes chers parents :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices permanent.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

À mes chers et adorable frères et sœurs :

Mohamed, hadjira, Houda, Chaimaa. En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

À mes amis de toujours :

Kheira, Ghania ,Mlouka ,Brahim

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble. Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

À la mémoire de mon grand-père et ma grande mère

J'aurais tant aimé que vous soyez présents. Que Dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde.

À toute La promotion 2017 d'analyse mathématique.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Quelque notion sur les équations Linéaires de second ordre	7
2.1	Introduction	7
2.2	Propriétés des solutions des équations différentielles ordinaires du second ordre	7
2.2.1	Wronskien	9
2.2.2	Zéros de Solutions	12
2.2.3	Distribution des zéros	15
2.2.4	Oscillation des solutions	17
2.3	Opérateur différentiel auto-adjoint	18
2.4	Problème de Sturm-Liouville et applications	21
2.4.1	Problème de Sturm-Liouville	21
2.4.2	Equivalence de (P1) et (P2).	23
2.4.3	Fonction de Green	25
2.5	Opérateur de Hilbert-Schmidt	27
2.6	Problèmes de Strum-Liouville dégénérés	31
2.7	Problèmes de Strum-Liouville non dégénérés	32
2.8	Séries ou bases trigonométriques	33
3	Fonctions et valeurs propres	37
3.1	Existance des valeurs propres	38
3.2	Existance des fonctions propres	44
3.2.1	Problème régulier	45

3.2.2	Existence de fonctions propres du problème régulier	46
3.2.3	Propriétés spectrales du problème régulier	49
3.2.4	Existence de valeurs propres	55
3.2.5	L'intégralité des fonctions propres	58
3.2.6	Problème singulier SL	68
4	Exemples fondamentales	69
4.1	Développement selon une famille de fonctions orthogonales	70
4.2	Problème des ondes en dimension 1	70
4.2.1	Résolution par séparation des variables.	70
4.2.2	Trois problèmes aux valeurs et fonctions propres différentes. .	78
4.3	Problème de la chaleur en dimension 1	86

Chapitre 1

Introduction

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue

En mathématiques, et plus particulièrement en analyse, une théorie spectrale est une théorie étendant à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrices. Bien que ces idées viennent au départ du développement de l'algèbre linéaire, elles sont également liées à l'étude des fonctions analytiques, parce que les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles de fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre.

Cette théorie spectrale est une excroissance de travail fondamental de David Hilbert [6] entre 1900 et 1910 sur l'analyse des opérateurs intégraux sur les espaces de dimension infinie maintenant appelé espaces de Hilbert. Cependant, comme presque chaque nouveau développement important dans les mathématiques, il a été précédé par beaucoup de travail connexes, par exemple l'analyse de Poincaré du problème de Dirichlet et valeurs propres associées [15]. On pourrait soutenir que le sujet a commencé avec le travail séminal de Fourier sur la solution de l'équation de la chaleur en utilisant des développements en série en sinus et cosinus, qui a été publié par l'Académie Française en 1822 [3]. Fourier présenté ce travail en 1807, à l'époque napoléonienne, et un compte de ses malheurs au cours de la période de quinze ans avant la publication est donnée par Korner (1988).

Donc notre objet est d'appliquer la théorie spectrale générale pour les opérateurs auto-adjoints au cas physiquement pertinent où les équations des valeurs propres sont des *ODE* de second ordre [11], [5] requis pour prendre des équations différentielles partielles [12]. Initialement conçu pour couvrir trois sujets principaux : Des fonctions spéciales, des séries de Fourier et des intégrales, et un bref aperçu du problème de Sturm-Liouville et de ses solutions [3], [17], [16] et [18].

L'utilisation de la séparation des variables pour résoudre un problème de valeur limite pour une équation différentielle partielle de second ordre conduit souvent à un problème de valeur propre de Sturm-Liouville et l'ensemble de solutions est susceptible d'être une suite de fonctions spéciales, d'où la pertinence de ces sujets. Typiquement, la solution de l'équation différentielle partielle peut alors être représentée (point) par une série de Fourier ou une intégrale de Fourier [4], [3], selon que le domaine soit fini ou infini.

Mais il est vite apparu que ces «méthodes mathématiques» pouvaient être développées dans un mémoire de master plus cohérent et substantiel en les présentant dans la théorie de Sturm-Liouville plus générale dans L^2 . Selon cette théorie, un opérateur différentiel linéaire de second ordre qui est auto-adjoint a une suite orthogonale de fonctions propres qui s'étend sur L^2 . Cela conduit immédiatement au théorème fondamental de série de Fourier sur L^2 comme un cas spécial dans lequel l'opérateur est simplement $\frac{d^2}{dx^2}$.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Commençant par le premier chapitre et réservé pour l'introduction générale.

Le deuxième chapitre contient deux parties dans la première on introduit d'une manière générale quelque notion sur les équations linéaires de second ordre tels que l'existence de la solution et on va discuter sur le nombre et la distribution des zéros des solutions.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du problème de Sturm-Liouville. Nous commençons avec une analyse systématique du problème SL sur \mathbb{R} puis en transforme le problème de Sturm-Liouville à un problème vibrationnel pour trouver une solution non triviale vérifiée certaines conditions aux limites données.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude spectrale des opérateurs différentiels de second ordre. On va étudier l'existence des valeurs et fonctions propres, l'intégralité

des fonctions propres des problèmes réguliers.

Le dernier chapitre fait l'objet de résoudre certains exemples de famille des fonctions orthogonales en particulier, le problème des ondes et de la chaleur en dimension 1.

Chapitre 2

Quelque notion sur les équations Linéaires de second ordre

2.1 Introduction

Les ensembles orthogonaux complets de fonctions dans L^2 apparaissent naturellement comme des solutions de certaines équations différentielles linéaires de second ordre dans des conditions aux limites appropriées, après le mathématicien suisse Jacques Sturm (1803 – 1855) et le mathématicien français Joseph Liouville (1809 – 1882) [18], qui a étudié ces problèmes et les propriétés de leurs solutions.

2.2 Propriétés des solutions des équations différentielles ordinaires du second ordre

Considérons l'équation différentielle ordinaire du second ordre sur l'intervalle réel I donnée par [11], [1] :

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad (2.1)$$

où a_0, a_1, a_2 , et f sont des fonctions complexes donnés sur I . Lorsque $f = 0$ sur I , l'équation est appelée homogène, sinon il est non homogène.

Tout fonction (complexe) $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$ est une solution de l'équation (2.1) si la substitution de y par les résultats de l'identité φ

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour tous } x \in I.$$

Si l'on désigne par L l'opérateur différentiel de second ordre, donc

$$L = a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

alors l'équation (2.1) peut être écrit sous la forme $Ly = f$. L'opérateur L est linéaire, donc (2.1) est appelée une équation différentielle linéaire de second ordre. Sauf indication contraire, toutes les équations différentielles et les opérateurs avec lesquels nous traitons sont linéaires.

Une propriété fondamentale des équations linéaires homogènes est que toute combinaison linéaire des solutions de l'équation est aussi une solution, car si φ et ψ satisfaire

$$L\varphi = 0, \quad L\psi = 0$$

alors nous avons clairement

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi = 0$$

pour n'importe quelle paire de constantes c_1 et c_2 . C'est ce qu'on appelle le principe de superposition.

Si la fonction a_0 ne s'annule pas en tout point de I , l'équation (2.1) peut être divisée par a_0 à donner

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x), \tag{2.2}$$

où $q = \frac{a_1}{a_0}$, $r = \frac{a_2}{a_0}$, et $g = \frac{f}{a_0}$. Les équations (2.1) et (2.2) sont clairement équivalent, dans le sens où ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 2.2.1. *L'équation (2.1) est dite alors régulière sur I , sinon, si il y a un point $c \in I$ où $a_0(c) = 0$, l'équation est singulier, et c est alors considéré comme un point singulier de l'équation.*

Remarque 2.2.1. Selon le théorème d'existence et d'unicité pour les équations linéaires, si les fonctions q, r et g sont toutes continues sur I et x_0 est un point de I , alors, pour tout deux nombres ζ et η , il existe une solution unique φ de (2.2) dans I tel que

$$\varphi(x_0) = \zeta \qquad \varphi'(x_0) = \eta \qquad (2.3)$$

Les équations (2.3) sont appelées conditions initiales, et le système d'équations (2.2) et (2.3) est appelé un problème de valeur initiale.

2.2.1 Wronskien

Définition 2.2.2. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1$ le déterminant

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

est appelé le Wronskien de f et g . Le symbole $W(f, g)(x)$ est parfois abrégé en $W(x)$.

Les lemmes suivants montrent l'importance de Wronskien dans l'étude des équations différentielles.

Lemme 2.2.1. Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation homogène

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \qquad x \in I \qquad (2.4)$$

où $q \in \mathcal{C}(I)$, alors soit $W(y_1, y_2)(x) = 0$ pour tout $x \in I$, ou $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve 2.2.1. D'après la définition précédente

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

puisque y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation (2.4) nous avons

$$\begin{aligned} y_1'' + q(x)y_1' + r(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + q(x)y_2' + r(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

en multipliant la première équation par y_2 , la seconde par y_1 , et en soustrayant, on obtient

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + q(y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0$$

$$\implies W' + qW = 0.$$

en intégrant cette dernière équation, on obtient

$$W = c \exp\left(-\int_a^x q(t) dt\right), \quad x \in I. \quad (2.5)$$

où c est une constante arbitraire. La fonction exponentielle ne s'annule pas pour aucune exposant (réel ou complexe), donc $W(x) = 0$ si, et seulement si, $c = 0$.

Remarque 2.2.2. Pour $q \in \mathcal{C}(I)$, l'expression (2.5) implique que les deux fonctions W et W' sont continues.

Lemme 2.2.2. Les solutions y_1 et y_2 de l'équation (2.4) sont linéairement indépendantes si, et seulement si, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ sur I .

Preuve 2.2.2. Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendante, alors l'un d'eux est un multiple constant de l'autre, et donc $W(y_1, y_2)(x) = 0$ sur I . Inversement si $W(y_1, y_2)(x) = 0$ à n'importe quel point de I , alors, par le lemme (2.2.1), $W(y_1, y_2)(x) \equiv 0$. Du propriétés des déterminants, ceci implique que les fonctions vectorielles (y_1, y_1') et (y_2, y_2') sont linéairement dépendantes, et donc y_1 et y_2 sont linéairement dépendants.

Remarque 2.2.3. Nous avons utilisé le fait que y_1 et y_2 sont des solutions d'équation (2.4) uniquement dans la deuxième partie de la preuve, la partie "seulement si". C'est parce que les Wronskien de deux fonctions linéairement indépendantes peuvent s'annuler à certains points, mais pas à tous, dans I . Considérons, par exemple, x et x^2 sur $[-1, 1]$.

Exemple 2.2.1. L'équation

$$y'' + y = 0 \quad (2.6)$$

a deux solutions linéairement indépendantes, $\sin x$ et $\cos x$. La solution générale est donc

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

notons que

$$W(\cos x, \sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

si l'équation (2.6) est donnée sur l'intervalle $[0, \pi]$ sous les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{2.7}$$

on obtient la solution unique

$$y(x) = \sin x$$

mais les conditions aux limites homogènes

$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \tag{2.8}$$

donnent la solution triviale $y = 0$, comme on pourrait s'y attendre.

D'autre part, les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

ne donnent pas une solution unique car la paire d'équations

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 = 0$$

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = -c_1 = 0$$

ne détermine pas la constante c_2 . Le déterminant des coefficients dans ce système est

$$\begin{vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{vmatrix} = 0$$

Remarque 2.2.4. Ce dernier exemple indique que les conditions aux limites (2.7) et (2.8) ne déterminent pas de façon unique les constantes c_1 et c_2 dans la solution générale dans ce cas. Mais les conditions initiales

$$y(x_0) = \xi, \quad y'(x_0) = \eta,$$

donnent toujours une solution unique, car le déterminant des coefficients dans le système des équations

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = \xi$$

$$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = \eta$$

est donné par

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0)$$

qui ne peut pas être nul.

Exemple 2.2.2. En général, compte tenu d'une équation différentielle de second ordre sur $[a, b]$, les conditions aux limites séparées

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \xi \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \eta \end{aligned}$$

à une solution générale de la forme $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, donne le système

$$\begin{aligned} c_1 [\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a)] + c_2 [\alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a)] &= \xi. \\ c_1 [\beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + c_2 [\beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] &= \eta. \end{aligned}$$

donc, les constantes c_1 et c_2 sont déterminées de façon unique si et seulement si

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_1')(a) & (\alpha_1 y_2 + \alpha_2 y_2')(a) \\ (\beta_1 y_1 + \beta_2 y_1')(b) & (\beta_1 y_2 + \beta_2 y_2')(b) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.9)$$

2.2.2 Zéros de Solutions

Il n'est pas nécessaire, ni toujours possible, de résoudre une équation différentielle du type

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad (2.10)$$

explicitement afin d'étudier les propriétés de ses solutions. Sous certaines conditions, les paramètres de l'équation et ses conditions aux limites déterminent complètement ces propriétés. En particulier, les caractéristiques qualitatives d'une solution comme le nombre et la distribution de ses zéros, ses points singuliers, son comportement asymptotique et ses propriétés d'orthogonalité sont toutes régies par les coefficients q et r et les conditions aux limites données. Nous pouvons donc essayer de déduire

certaines de ces propriétés en analysant l'effet de ces coefficients sur le comportement de la solution [11], [5]. Dans cette section, nous étudierons l'effet de q et r sur la distribution des zéros des solutions.

Dans l'exemple 2.2.1, nous avons constaté que les deux solutions de $y'' + y = 0$ sur \mathbb{R} possèdent une suite infinie de zéros alternatifs répartis uniformément, donnée par

$$\dots < -\pi < -\frac{\pi}{2} < 0 < \pi < \frac{3\pi}{2} < \dots$$

où $\{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ sont les zéros de $\sin x$ et $\{\frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ sont ceux de $\cos x$. Nous allons maintenant constater que ce n'est pas complètement accidentel.

Définition 2.2.3. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ a un zéro isolé à $x_0 \in I$ si $f(x_0) = 0$ tel que pour tout voisinage U de x_0 $f(x) \neq 0$ sur $I \cap U \setminus \{x_0\}$

Lemme 2.2.3. Si y est une solution non triviale de l'équation homogène (2.10), les zéros de y sont isolés dans I .

Preuve 2.2.3. Supposons que $y(x_0) = 0$, où y est une solution de (2.10). Si $y'(x_0) = 0$, alors y est identiquement nulle (par le théorème d'unicité). Si $y'(x_0) \neq 0$, alors, puisque y' est continue sur I , il existe un voisinage U de x_0 où $y' \neq 0$ sur $U \cap I$. Par conséquent y est soit strictement croissante ou strictement décroissante sur $U \cap I$

Théorème 2.2.1. (Théorème séparation de Sturm). Si y_1 et y_2 sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad x \in I$$

alors les zéros de y_1 sont distinctes de celles de y_2 , et les deux suites de zéros alternent,

c'est-à-dire y_1 a exactement un zéro entre deux zéros successifs de y_2 , et vice-versa

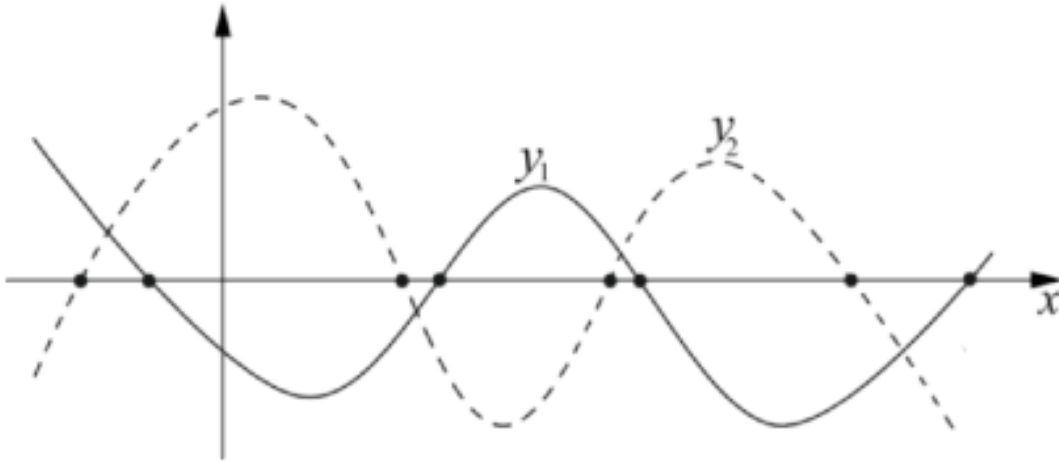


fig1 : Les zéros alternés de y_1 et y_2 .

Preuve 2.2.4. *Puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendants, leur Wronskien*

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$$

ne s'annule pas, et a donc un signe sur I d'après le lemme (2.2.2). Notons d'abord que y_1 et y_2 ne peuvent pas avoir un zéro commun, sinon W serait nul. Supposons que x_1 et x_2 sont deux zéros successifs de y_2 . Alors

$$W(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \neq 0$$

$$W(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2) \neq 0$$

et les nombres $y_1(x_1), y_1(x_2), y_2'(x_1),$ et $y_2'(x_2)$ sont tous non nuls. Parce que y_2' est continue sur I , x_1 a un voisinage U_1 où le signe de y_2' ne change pas, et de même il existe un voisinage U_2 de x_2 où y_2' ne change pas de signe. Mais les signes de y_2' dans $U_1 \cap I$ et $U_2 \cap I$ ne peuvent pas être la même, car si y_2 augmente sur un, alors il doit diminuer sur l'autre. Pour $W(x)$ avoir un signe constant sur I , $y_1(x_1)$ et $y_1(x_2)$ doivent donc avoir des signes opposés ; donc y_1 , étant continue, a au moins un zéro entre x_1 et x_2 . Il ne peut avoir plus d'un tel zéro, car si x_3 et x_4 sont deux zéros de

y_1 qui se situent entre x_1 et x_2 , on peut utiliser le même argument pour conclure que y_2 s'anulle entre x_3 et x_4 . Mais cela contredit l'hypothèse que x_1 et x_2 sont des zéros consécutifs de y_2 .

Corollaire 2.2.1. *Si les solutions de*

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \tag{2.11}$$

ont un zéro commun dans I , alors ils sont linéairement dépendants.

2.2.3 Distribution des zéros

Afin d'étudier la distribution des zéros de l'équation (2.11), [4], [3] il serait beaucoup plus commode si nous pouvions nous débarrasser du terme moyen qy' en transformant l'équation

$$u'' + \rho(x)u = 0. \tag{2.12}$$

a cette effet, posons

$$y(x) = u(x)v(x),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \\ y''(x) &= u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x). \end{aligned}$$

en substituant aux équations (2.11)

$$vu'' + (2v' + qv)u' + (v'' + qv' + rv)u = 0.$$

Ainsi, nous obtenons (2.12) en choisissant $2v' + qv = 0$, ce qui implique

$$\begin{aligned} v(x) &= \exp\left(\frac{-1}{2} \int_a^x q(t)dt\right), \\ \rho(x) &= r(x) - \frac{1}{4}q^2(x) - \frac{1}{2}q'(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

La fonction exponentielle v ne s'anulle jamais sur \mathbb{R} , donc les zéros de u coïncident avec ceux de y , et l'on peut, dans le but d'étudier la distribution des zéros de l'équation (2.10), limiter notre attention sur l'équation (2.12).

Théorème 2.2.2. (Théorème de comparaison de Sturm) [18] Soit φ et ψ deux solutions non triviales des équations

$$\begin{aligned} y'' + r_1(x)y &= 0, \\ u'' + r_2(x)u &= 0, \quad x \in I, \end{aligned}$$

respectivement, et supposons que $r_1(x) \geq r_2(x)$ pour tout $x \in I$. Alors, φ a au moins un zéro entre chaque paire de zéros consécutifs de ψ , à moins que $r_1(x) \equiv r_2(x)$ et φ est un multiple constant de ψ .

Preuve 2.2.5. Soit x_1 et x_2 deux zéros consécutifs quelconque de ψ sur I , et supposons que φ n'a pas de zéro dans l'intervalle ouvert $]x_1, x_2[$. Supposons que les deux solutions φ et ψ sont positifs sur $]x_1, x_2[$, (sinon changer le signe de la fonction négative). Donc φ' et ψ' sont continues, il en résulte que $\psi'(x_1) \geq 0$ et $\psi'(x_2) \leq 0$, et donc le Wronskien de φ et ψ satisfait

$$W(x_1) = \varphi(x_1)\psi'(x_1) \geq 0, \quad W(x_2) = \varphi(x_2)\psi'(x_2) \leq 0. \quad (2.14)$$

mais puisque

$$\begin{aligned} W'(x) &= \varphi(x)\psi''(x) - \varphi''(x)\psi(x) \\ &= [r_1(x) - r_2(x)]\varphi(x)\psi(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in]x_1, x_2[\end{aligned}$$

W est une fonction croissante sur $]x_1, x_2[$. Cela contredit l'équation (2.14), à moins $r_1(x) - r_2(x) \equiv 0$ et $W(x) \equiv 0$, dans ce cas, φ et ψ sont linéairement dépendants par le lemme (2.2.2).

Corollaire 2.2.2. Soit φ une solution non triviale de $y'' + r(x)y = 0$ sur I . Si $r(x) \leq 0$, alors φ a au plus un zéro sur I .

Preuve 2.2.6. Si la solution de φ a deux zéros x_1 et x_2 sur I , alors, d'après le théorème (2.2.2), la solution $\psi(x) \equiv 1$ de $u'' = 0$ doit s'annuler sur $]x_1, x_2[$, ce qui est impossible.

Exemple 2.2.3. (i) Toute solution non triviale de $y'' = 0$ sur \mathbb{R} est un cas particulier de

$$\varphi(x) = c_1x + c_2,$$

qui est représenté par une ligne droite, et a au plus un zéro.

(ii) L'équation $y'' - y = 0$ a la solution générale

$$\varphi(x) = c_1 \exp(x) + c_2 \exp(-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

si c_1 et c_2 ne sont pas nuls, alors $\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, sauf si $c_2 = -c_1$, dans ce cas, φ a un zéro pour $x = 0$.

(iii) La solution de $y'' + y = 0$ est donnée par

$$\varphi(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x = a \sin(x - b),$$

où $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et $b = -\arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$. Si $a \neq 0$, φ a un nombre infini de zéros donnés par

$$x_n = b + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.2.4 Oscillation des solutions

Définition 2.2.4. La solution non triviale de

$$y'' + r(x)y = 0, \quad x \in I \tag{2.15}$$

est appelée oscillatoire s'il a un nombre infini de zéros

Remarque 2.2.5. Si $r(x) \leq 0$, la solution ne peut pas osciller par le corollaire (2.2.2); mais si

$$r(x) > k^2 > 0 \quad x \in I,$$

pour un certain constant positive k , alors toute solution de (2.15) sur I a un nombre infini de zéros répartis entre les zéros de toute solution y de $y'' + k^2y = 0$, tel que $y = a \sin k(x - b)$, qui sont donnés par

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}.$$

Ainsi, chaque sous-intervalle de I de longueur $\frac{\pi}{k}$ a au moins un zéro de l'équation (2.15) et comme $k > 0$, alors le nombre de zéros augmente. Ceci, bien sûr, est clairement le cas lorsque r est constant [7].

Remarque 2.2.6. Du théorème de séparation de Sturm (2.2.1), nous concluons également que si l'intervalle I est infini et si une solution de l'équation

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

oscille, alors toutes ses solutions oscillent.

Exemple 2.2.4. [17] a) L'exemple (2.2.2) (iii) et selon le théorème (2.2.2), l'équation a des solutions oscillantes dépend de la fonction r .

b) L'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (2.16)$$

est connue sous le nom d'équation de Bessel d'ordre v , en utilisant la formule (2.13) en posons $u = \sqrt{xy}$, l'équation de Bessel sous cette transformation prend la forme

$$u'' + \left(1 + \frac{1 - 4v^2}{x^2}\right)u = 0 \quad (2.17)$$

En comparant les équations (2.17) et $u'' + ru = 0$ nous voyons que

$$r(x) = \left(1 + \frac{1 - 4v^2}{x^2}\right) \begin{cases} \geq 1 & \text{si } 0 \leq v \leq \frac{1}{2} \\ < 1 & \text{si } v > \frac{1}{2} \end{cases}$$

En appliquant le théorème (2.2.2), nous concluons :

- (i) Si $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ alors, dans chaque sous-intervalle de $[0, \infty]$ de longueur π , toute solution de l'équation de Bessel présente au moins un zéro.
- (ii) Si $v > \frac{1}{2}$ alors, dans chaque sous-intervalle de $(0, \infty)$ de longueur π , tout Solution non-triviale de l'équation de Bessel a au plus un zéro.
- (iii) Si $v = \frac{1}{2}$ la distance entre les zéros successifs de toute solution non triviale de l'équation de Bessel est exactement π .

2.3 Opérateur différentiel auto-adjoint

Revenant à la forme générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre (2.1), dans la notation légèrement modifié,

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0, \quad (2.18)$$

nous souhaitons maintenant étudier les propriétés d'orthogonalité de ses solutions [12]. Cela signifie naturellement que nous devrions chercher les solutions \mathcal{C}^2 de (2.18) qui se trouvent dans L^2 . L'équation (2.18) peut s'écrire sous la forme

$$Ly = 0,$$

où

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x), \quad (2.19)$$

est un opérateur différentiel linéaire de second ordre avec $y \in L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I)$.

Déterminons la forme de l'adjoint de l'opérateur

$$L : L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I) \rightarrow L^2(I)$$

défini par l'équation (2.19), où les coefficients p, q , et r sont des fonctions \mathcal{C}^2 sur I . On note que $\mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I) = \mathcal{C}^2(I)$ lorsque I est un intervalle fermé et borné. Notons par L^* l'adjoint de L , donc,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I) \quad (2.20)$$

Si $I =]a, b[$ (I peut être fini ou infini), et par l'intégration par parties du côté gauche de (2.20). Donc

$$\begin{aligned} \langle Lf, g \rangle &= \int_a^b (pf'' + qf' + rf)\bar{g}dx \\ &= pf'\bar{g}|_a^b - \int_a^b f'(p\bar{g})'dx + qf\bar{g}|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})'dx + \int_a^b fr\bar{g}dx \\ &= [pf'\bar{g} + f(q\bar{g})']|_a^b + \int_a^b f(p\bar{g})''dx + qf\bar{g}|_a^b - \int_a^b f(q\bar{g})'dx + \int_a^b fr\bar{g}dx \\ &= \langle f, (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \rangle + [p(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - p')f\bar{g}]|_a^b, \end{aligned}$$

Notons que le côté droite de l'équation ci-dessus est bien définie si $p \in \mathcal{C}^2(a, b)$, $q \in \mathcal{C}^1(a, b)$, et $r \in \mathcal{C}(a, b)$. Le dernier terme, bien entendu, doit être interprété comme étant la différence entre les limites à a et b . Nous avons donc, pour tout $f, g \in L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I)$,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^*g \rangle + \left[p(f'\bar{g} - f\bar{g}') + (q - p')f\bar{g} \right] \Big|_a^b, \quad (2.21)$$

ou

$$\begin{aligned} L^*g &= (\bar{p}g)'' - (\bar{q}g)' + \bar{r}g \\ &= \bar{p}g'' + (2\bar{p}' - \bar{q})g' + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g. \end{aligned}$$

l'opérateur

$$L^* = \bar{p} \frac{d^2}{dx^2} + (2\bar{p}' - \bar{q}) \frac{d}{dx} + (\bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r})g$$

est appelé l'adjoint formel de L .

Définition 2.3.1. L est dit formellement auto-adjoint lorsque $L^* = L$, c-à-d quand

$$\bar{p} = p, \quad 2\bar{p}' - \bar{q} = q, \quad \bar{p}'' - \bar{q}' + \bar{r} = r.$$

Remarque 2.3.1. Ces trois équations sont satisfaites si, et seulement si, les fonctions p, q , et r sont réels et $q = p'$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} Lf &= pf''' + p'f' + rf \\ &= (pf')' + rf. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque L est formellement auto-adjoint, il a la forme

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + r,$$

et l'équation (2.21) est réduite à

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle + p(f'\bar{g} - f\bar{g}') \Big|_a^b, \quad (2.22)$$

En comparant les équations (2.20) et (2.22), nous voyons maintenant que

Corollaire 2.3.1. *L'opérateur L formellement auto-adjoint est auto-adjoint si*

$$p(f'\bar{g} - f\bar{g}')\Big|_a^b = 0 \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I) \quad (2.23)$$

Remarque 2.3.2. *Il convient de noter à ce stade que, lorsque $q = p'$, le terme $\bar{p}'' - \bar{q}'$ dans l'expression de L^* chute, donc la continuité de p'' et q' n'est plus nécessaires.*

2.4 Problème de Sturm-Liouville et applications

2.4.1 Problème de Sturm-Liouville

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ on pose $I =]a, b[$ ou $[a, b]$; $\mathcal{C}^m(I)$, $m \in \mathbb{N}$ (resp. $L^2(I)$) désigne l'espace des (resp. l'espace des classes de) fonctions m fois continûment dérivable sur I (resp. de carré intégrable dans I) à valeur réelles pour simplifier. On notera la norme de u dans $\mathcal{C}(I)$ est définie comme suite :

$$\|u\| = \sup_{x \in I} |u(x)|;$$

et norme de u dans $L^2(I)$ est :

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On se donne

$$\begin{cases} \alpha_k, \beta_k \quad (k = 1, 2), \text{ quatre constantes réelles} \\ q \in \mathcal{C}(I) \end{cases}$$

Un problème de Sturm-Liouville [18] associé à (2.1) est un problème qui se ramène au problème de type suivant :

Problème : (p_1)

Soit f une fonction donnée dans $L^2(I)$, trouver $u \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant :

$$-u'' + qu = f \quad (2.24)$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Remarque 2.4.1. *Le fait de considérer des fonctions à valeurs réelles n'enlève rien la généralité du problème.*

Si l'on souhaite que l'opérateur associé au problème (p_1) soit auto-adjoint, il est nécessaire que les données (2.1) soient réelles. Dans ce cas si f est à valeurs complexes, il en est de même de u et les parties réelles et imaginaires de u sont solutions d'un problème (p_1) à données réelles.

Maintenant si l'on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} i) y_k = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\beta_k} & \text{pour } \beta_k \neq 0 \\ 0 & \text{pour } \beta_k = 0, \end{cases} & k = 1, 2 \\ ii) p(u, v) = y_2 u(b) v(b) - y_1 u(a) v(a), & u, v \in \mathcal{C}(I) \end{array} \right. \quad (2.26)$$

et

$$a(u, v) = \int_a^b \left[\frac{du}{dx} + quv \right] dx + p(u, v), \quad u, v \in \mathcal{H}^1(I) \quad , \quad (2.27)$$

le problème de Sturm-Liouville (p_1) se ramène au problème variationnel (p_2) suivant, auquel il est équivalent :

Problème (p_2) Trouver $u \in \mathcal{V}$ tel que

$$a(u, v) = \int_a^b f v dx \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V} \quad (2.28)$$

l'espace \mathcal{V} qui dépend des conditions aux limites (2.25) est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1(I)$ muni de la norme induite par celle de $\mathcal{H}^1(I)$; il est défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{array}{l} l^1(I) \quad \text{si } \beta_k \neq 0 \text{ pour } k = 1 \text{ et } k = 2, \\ \mathcal{H}_0^1(I) \quad \text{si } \beta_k = 0 \text{ pour } k = 1 \text{ et } k = 2, \\ \mathcal{V}_a = \{v \in \mathcal{H}_0^1(I) ; v(a) = 0\} \quad \text{si } \beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0, \\ \mathcal{V}_b = \{v \in \mathcal{H}_0^1(I) ; v(b) = 0\} \quad \text{si } \beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Lemme 2.4.1. *La forme bilinéaire $a(u, v)$ est continue et \mathcal{V} -elliptique si il existe une constante M positive telle que $q(x) \geq M$ pour tout $x \in I$, et le problème (p_2) admet donc une solution d'après le théorème de Lax-Milgram [1, 1].*

2.4.2 Equivalence de (P1) et (P2).

Tout d'abord, si u est une solution de (P_1) , alors $u' \in \mathcal{H}_0^1(I)$ par (2.24), et la formule de Green (ici intégration par parties) donne

$$-[u'v]_a^b + \int_a^b (u'v' + quv) dx - \int_a^b f v dx \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V} \quad (2.30)$$

d'où (2.28) en observant que

$$-[u'v]_a^b = p(u, v)$$

compte tenu de (2.25). Donc u est aussi solution de (p_2) .

Réciproquement, si u est une solution de (P_2) , alors le choix de $v \in L(I) \subset \mathcal{V}$ montre que (2.24) est vérifiée si (2.28) l'est. On en déduit que $u'' \in L^2(I)$, de sorte que $u \in \mathcal{H}^2(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(I)$ et (2.30) a lieu. Comparant alors (2.28) et (2.30) où l'on prend successivement $v \in \mathcal{V}$ nulle on a, puit nulle en b , on obtient (2.25).

Dans le but d'établir la continuité de la forme bilinéaire $a(u; v)$ sur l'espace $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et sa coercivité sur \mathcal{V} (pour q convenable), nous allons utiliser le lemme suivant qui résulte évidemment des propriétés de l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(I)$ (cas $n = 1$) et notamment de la compacité de l'injection $\mathcal{H}^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(I)$ voir [13]; pour la commodité du lecteur, nous donnons ici une démonstration directe du

Lemme 2.4.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que l'on ait :*

$$\|u\|_\infty^2 \leq \varepsilon |u'|^2 + C_\varepsilon |u|^2, \quad \forall u \in \mathcal{H}^1(I) \quad (2.31)$$

Preuve 2.4.1. *Il suffit d'établir la propriété pour $\mathcal{C}^1(I)$ qui est dense dans $\mathcal{H}^1(I)$. Supposons que (2.31) n'est pas lieu.*

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\begin{cases} \varphi_n \in \mathcal{C}^1(I) & \text{pour tout } n \\ \|\varphi_n\|_\infty = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

telle que

$$1 = \|\varphi_n\|_\infty \geq \int_a^b \left(\varepsilon |\varphi_n'|^2 + n |\varphi_n|^2 \right) dx. \quad (2.33)$$

D'une part, on déduit de (2.33) que $\int_a^b |\varphi_n|^2 \leq \frac{1}{n}$ de sorte que

$$\text{mes} \left\{ x : |\varphi_n(x)| > \frac{1}{2} \right\} < \frac{4}{n};$$

or, on peut trouver (continuité de φ_n) $x_n \in I$ tel que

$$|\varphi_n(x_n)| = 1 = \|\varphi_n\|_\infty \quad \text{et} \quad y_n \in \left[x_n - \frac{4}{n}, x_n + \frac{4}{n} \right] \cap I$$

avec $|\varphi_n(y_n)| \leq \frac{1}{2}$ car $\text{mes} \left\{ \left[x_n - \frac{4}{n}, x_n + \frac{4}{n} \right] \cap \Omega \right\} \geq \frac{4}{n}$; alors, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq |(|\varphi(x_n)| - |\varphi(y_n)|)| \leq |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| \leq \left| \int_a^b |\varphi'_n| dx \right| \\ &\leq \sqrt{|x_n - y_n|} \left(\int_a^b |\varphi'_n| \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} |\varphi'_n|_{L^2} \end{aligned}$$

(par suite de l'inégalité de Cauchy – Schwartz)

ce qui donne $|\varphi'_n|_{L^2}^2 \geq \frac{n}{16} \rightarrow +\infty$ avec n . D'autre part, de (2.33) pour on déduit $1 \geq \varepsilon |\varphi'_n|_{L^2}^2$ d'où une contradiction.

Remarque 2.4.2. Notons que ceci se généralise aussitôt aux espaces de Sobolev $\mathcal{W}^{1,P}(I)$ voir [13]. Nous sommes maintenant en mesure de montrer la

Proposition 2.4.1. *i) La forme bilinéaire symétrique $a(u; v)$ définie par (2.27) est continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{H}^1(I) \times \mathcal{H}^1(I)$.*

ii) Il existe une constante $M > 0$ telle que si

$$q(x) \geq M \quad \text{pour tout} \quad x \in I, \tag{2.34}$$

alors la forme bilinéaire $a(u; v)$ est coercive sur V , i.e. on a

$$\{ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(u; u) \geq \alpha \|u\|^2, \forall u \in \mathcal{V} \} \tag{2.35}$$

avec

$$\|u\|^2 = \int_a^b (|u'|^2 + |u|^2) dx \tag{2.36}$$

Preuve 2.4.2. *i) Notons que*

$$|p(u, v)| \leq (|y_1| + |y_2|) \|u\|_\infty \|v\|_\infty \quad (2.37)$$

de sorte que (d'après Cauchy-Schwartz) :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \max(1, \|q\|_\infty) \|u\| \|v\| + |p(u, v)| \\ &\leq C \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^1(I) \end{aligned}$$

d'après (2.37) et le lemme précédent d'où le *i*).

ii) De (2.27), on déduit :

$$a(u; u) = |u'|_{L^2}^2 + \int_a^b q |u|^2 dx + p(u, u) \geq |u'|_{L^2}^2 + \int_a^b q |u|^2 dx - p(u, u)$$

d'après (2.37) et le lemme précédent, on a :

$$p(u, u) \leq (|y_1| + |y_2|) (\varepsilon |u'|^2 + C_\varepsilon |u|^2)$$

de sorte que

$$a(u; u) \geq |u'|_{L^2}^2 (1 - (|y_1| + |y_2|) \varepsilon) - \left[\inf_{x \in \Omega} |q(x)| - C_\varepsilon \right] |u|_{L^2}^2.$$

Soit alors $\alpha \in]0, 1[$ donnée ; on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $1 - (|y_1| + |y_2|) \varepsilon = \alpha$ d'où C_ε est connu et la conclusion de la proposition alieu pour $M \geq C_\varepsilon$.

2.4.3 Fonction de Green

Supposons que :

$$q \in \mathcal{C}(I) \text{ vérifie (2.22)} \quad (2.38)$$

Ce qui permet d'utiliser la théorie classique des équations différentielles ordinaires, mais ne joue, autrement, aucun rôle essentiel. Notons que l'opérateur A de domaine $D(A)$ défini à l'aide de la forme bilinéaire $a(u; v)$ par la formule suivante

$$\begin{cases} i) a(u; v) = (Au; v) \text{ pour tout } u \in D(A) \text{ et } v \in \mathcal{V} \\ ii) D(A) = \{u \in \mathcal{V} : v \longrightarrow a(u; v) \text{ est continu sur } \mathcal{V} \text{ pour la topologie de } \mathcal{H}\} \end{cases} \quad (2.39)$$

est donné par :

$$\begin{cases} A = -\frac{d^2}{dx^2} + q \\ D(A) = \{u \in \mathcal{H}^2(I) : u \text{ vérifie (2.25)}\} \end{cases} \quad (2.40)$$

L'injection de \mathcal{V} [$\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(I)$] dans $H = L^2(I)$ étant compacte, A^{-1} est auto-adjoint compact.

En fait ici, on a plus : A^{-1} est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et donc donné par un noyau symétrique K ou noyau de Green [14] qui est déterminé à l'aide d'une fonction G appelée fonction de Green de l'opérateur A

Proposition 2.4.2. *On suppose que A est défini par (2.40) et que (2.34) a lieu. Alors pour tout $t \in I$, il existe une fonction continue sur I à valeurs réelles $G : x \longrightarrow G(x)$ possédant les propriétés suivantes :*

i) *Dans chaque intervalle ouvert $a < x < t$ et $t < x < b$ est deux fois continûment dérivable et vérifie au sens des distribution dans I :*

$$AG = \delta_t, \quad (\delta_t(x-t) \text{ mesure de Dirac au point } t) \quad (2.41)$$

ii) *G vérifie les conditions aux limites (2.25)*

Preuve 2.4.3. *D'après la théorie élémentaire des équations différentielles linéaires, il existe une solution $u_1 \neq 0$ (resp. $u_2 \neq 0$) de*

$$y'' - q(x)y = 0$$

satisfaisant la condition

$$\alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a) = 0 \quad \left(\text{resp. } \alpha_2 u_2(a) + \beta_2 u_2'(a) \right)$$

u_1 et u_2 ne sont pas proportionnelles car sinon il existerait une solution non nulle de l'équation $y'' - q(x)y = 0$ dans $D(A)$ ce qui ne peut avoir lieu, le noyau de A étant réduit à $\{0\}$ si (2.34) a lieu. Comme u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes, toute solution de $y'' - q(x)y = 0$ peut s'écrire de manière unique $y = c_1 u_1 + c_2 u_2$ ou c_1 et c_2 sont des constantes.

Notons que le Wronskien

$$W = u_1 u_2' - u_2 u_1'$$

des solutions u_1, u_2 est alors une constante $d \neq 0$ car $\frac{dW}{dx} = 0$, il suffit maintenant de choisir les constantes c_1 et c_2 de sorte que la fonction G définie par :

$$G_t(x) = \begin{cases} c_1 u_1(x), & a < x < t \\ c_2 u_2(x), & t < x < b \end{cases} \quad (2.42)$$

soit continue en t et vérifie :

$$G'_t(t+0) - G'_t(t-0) = -1 \quad (2.43)$$

de sorte que (2.41) ait lieu.

On se trouve ainsi conduit aux relations :

$$\begin{aligned} c_1 u_1(t) - c_2 u_2(t) &= 0 \\ c_1 u'_1(t) - c_2 u'_2(t) &= 1 \end{aligned} \quad (2.44)$$

ce qui donne par suite :

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{u_2(t)}{d}, \quad c_2 = -\frac{u_1(t)}{d}; \\ G_t(x) &= \begin{cases} -\frac{u_2(t)u_1(x)}{d}, & a < x < t \\ -\frac{u_1(t)u_2(x)}{d}, & t < x < b \end{cases} \text{ pour tout } t \in I \end{aligned} \quad (2.45)$$

d'où :et la proposition ci-dessus. (2.4.2)

2.5 Opérateur de Hilbert-Schmidt

On notera que pour tout $t \in I, G \in \mathcal{H}^1(I)$, mais $G \notin D(A)$;

$$AG + \delta_t \in \mathcal{H}^1(I).$$

La fonction de Green G vérifie

$$a(G; v) = v(t) \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}. \quad (2.46)$$

Désignons maintenant par

$$K : \begin{cases} I \times I \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto k(x, y) = G_x(y) \end{cases} \quad (2.47)$$

K ainsi définie est une fonction continue sur $I \times I$ qui peut être prolongée par continuité en $y = a$, et $y = b$ en posant :

$$k(x, a) = -\frac{u_2(x)u_1(a)}{d}, \quad k(x, b) = -\frac{u_1(x)u_2(b)}{d} \quad \forall x \in]a, b[$$

et en $x = a$, $x = b$ en prenant

$$k(a, y) = -\frac{u_2(a)u_1(y)}{d}, \quad k(b, y) = -\frac{u_1(b)u_2(y)}{d}, \quad \forall y \in [a, b]$$

de sorte qu'ainsi prolongée la fonction K appelée noyau de Green de l'opérateur A est de classe \mathcal{C} sur $I \times I$ et vérifie

$$k(x, y) = k(y, x), \quad \forall x, y \in I \tag{2.48}$$

En particulier

$$k \in L^2(I \times I, dx dy); \tag{2.49}$$

K définit donc un opérateur de Hilbert-Schmidt S_k

$$(S_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad x \in I \text{ pour tout } f \in L^2(I). \tag{2.50}$$

On a alors la

Proposition 2.5.1. *Soit A défini par (2.40) et q vérifiant (2.34). Alors*

$$A^{-1} = S_k \tag{2.51}$$

autrement dit, toute solutions u du problème (p_1) [ou (p_2)] est donnée par

$$u(x) = S_k(f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2(I) \tag{2.52}$$

et réciproquement.

Preuve 2.5.1. *Soit u donnée par (2.52); on a :*

$$u(x) = -\frac{u_2(x)}{d} \int_a^x u_1(y) f(y) dy - \frac{u_1(x)}{d} \int_x^b u_2(y) f(y) dy.$$

la dérivée au sens des distributions de u est :

$$u'(x) = -\frac{u_2'(x)}{d} \int_a^x u_1(y) f(y) dy - \frac{u_1'(x)}{d} \int_x^b u_2(y) f(y) dy$$

De même u'' est définée par :

$$u''(x) = -\frac{u_2'(x)}{d} \int_a^x u_1(y) f(y) dy - \frac{u_1'(x)}{d} \int_x^b u_2(y) f(y) dy - \frac{[u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)]}{d} f(x) \quad p.p.$$

Or

$$\begin{cases} u_1 u_2' - u_1' u_2 = d \\ -u''_k + q u_k = 0, \\ k = 1, 2, \end{cases}$$

de sorte que

$$u(x) = \pm a u(x) - f(x) \quad p.p \text{ sur } I$$

d'où (2.34). Maintenant pour $x = a$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= -\alpha_1 \frac{u_1(c)}{d} \int_a^b u_2(y) f(y) dy - \beta_1 \frac{u_1'(a)}{d} \int_a^b u_2(y) f(y) dy \\ &= -\frac{1}{a} [\alpha_1 u_1(a) + \beta_1 u_1'(a)] \int_a^b u_2(y) f(y) dy = 0 \end{aligned}$$

de même pour $x = b$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0.$$

Ainsi (2.25) est vérifiée et u est solution du problème (p_1) [resp. (p_2)]. on a :

$$a(u; v) = \int_a^b f v dy \quad \text{pour tout } v \in \mathcal{V}.$$

Si l'on prend $v = G$, qui appartient à \mathcal{V} , $x \in I$, on obtient :

$$a(u; G) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx.$$

Or $a(u; G) = a(G; u) = u(x)$ d'après (2.46) donc u est donnée par (2.52)

Considérons maintenant le :

Problème (p_λ) Trouver u vérifiant

$$\begin{cases} Au - \lambda u = f \\ \text{plus les conditions aux limites (2.25)}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Le problème (p_λ) est équivalent au (\tilde{p}_λ)

$$(I - \lambda S_k) u = S_k f$$

et on se trouve pour ce problème, quel que soit λ , dans l'alternative de Fredholm. Désignons par λ_n , $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs propres de A qui sont réelles, strictement positives et qui peuvent être rangée dans une suite croissante tendant vers $+\infty$. Soit $d_n = \dim N(A - \lambda_n I)$; alors on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d_n}{\lambda_n^2} < +\infty \quad (2.54)$$

Remarque 2.5.1. Notons que jusqu'à ici nous avons supposé que q vérifie (2.34). Si ce n'est pas le cas, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $q + \lambda_0 \geq M > 0$.

Dans ce précédent. On remplacera l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q \quad \text{par} \quad \tilde{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + q + \lambda_0, \quad q + \lambda_0 \geq M.$$

Dans le problème (p_λ) , on récupérera l'opérateur A en écrivant

$$\tilde{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + q + \lambda_0 + (\lambda - \lambda_0) = \tilde{A} + (\lambda - \lambda_0);$$

on trouvera donc que $\lambda_n - \lambda_0 > 0$, $\lambda_n > \lambda_0, \forall n \geq 1$ et que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty$$

à partir de

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{d_n}{|\lambda_n - \lambda_0|^2} < +\infty.$$

Remarque 2.5.2. Nous avons supposé que q est une fonction continue sur I . Il en résulte que les valeurs propres de A sont de classe \mathcal{C}^2 .

Corollaire 2.5.1. Les vecteurs propres $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme une base orthonormale de $L^2(I)$ vérifiant :

$$-w_n'' + qw_n = \lambda_n w_n, \quad \lambda_n \neq 0,$$

donc w_n est de classe \mathcal{C}^2 si q est de classe \mathcal{C} et de classe \mathcal{C}^{m+2} si q de classe \mathcal{C}^m . De plus si q de classe \mathcal{C}^∞ , alors les w_n sont aussi de classe \mathcal{C}^∞ .

Remarque 2.5.3. Une variante (utile) de problème (p_λ) est obtenue de la manière suivante. Soit p une fonction donnée vérifiant :

$$p \in \mathcal{C}(I), \quad p \geq 0 \text{ sur } I. \quad (2.55)$$

On remplace l'équation (2.53) du problème (p_λ) par :

$$Au - \rho \lambda u = f \quad (\text{ou } \rho f), \quad (2.56)$$

les conditions aux limites étant par ailleurs inchangées. On introduit alors l'espace $L_\rho^2(I)$ (espace L^2 avec poids égal à ρ), c'est-à-dire l'espace des fonctions g mesurables à valeurs dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) telles que

$$\int_a^b |g(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty.$$

muni de la norme suivante :

$$\left(\int_a^b |g(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$L_\rho^2(I)$ est un espace de Hilbert et l'on a :

$$L_\rho^2(I) \hookrightarrow L^2(I) \quad (2.57)$$

On obtiendra alors pour le problème de valeurs propres associé à (2.56) des fonctions propres qui forment une base orthonormale de $L_\rho^2(I)$

2.6 Problèmes de Sturm-Liouville dégénérés

Les problèmes dégénérés sont relatifs aux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = -\frac{d^2}{dx^2} + q, \quad q \in \mathcal{C}(I), q \text{ non borné dans } I \\ L = -\frac{d}{dx} \left(k \frac{d}{dx} \right) + q, \quad k \text{ vérifiant (2.61) ii), } q \text{ borné ou non dans } I \end{array} \right. \quad (2.58)$$

(dans ce cas k s'annulant en un point au moins du bord)

ces opérateurs donnent lieu à des équations différentielles qui dégénèrent au bord de l'ouvert I

Remarque 2.6.1. *La plus par des bases orthonormales traditionnelles proviennent d'un noyau de Hilbert-Schmidt inversant un opérateur différentiel du 2^{ème} ordre. Avec des difficulté théorique supplémentaires, la théorie s'étend aux équations aux dérivées partielles dans \mathbb{R}^n , par exemple, si est un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ suffisamment régulière, pour pouvoir résoudre*

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f, \\ \text{avec des conditions aux limites sur } \Gamma = \sigma I \end{array} \right.$$

on trouve encore dans ce type de problème un noyau de Green K qui ici n'est plus une fonction continue sur $I \times I$, ni même dans l'espace

$$L^2(I \times I, dx, dy), \quad dx = dx_1 \dots dx_n, \quad dy = dy_1 \dots dy_n.$$

Cependant ce noyau K définit un opérateur hermitien S_k (qui n'est plus de Hilbert-Schmidt), mais qui reste compact.

2.7 Problèmes de Sturm-Liouville non dégénérés

Plus généralement, on peut considérer le même type de problèmes pour l'opérateur

$$A = -\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d}{dx} \right] + q \tag{2.59}$$

où l'on a

$$q, k \in C(I) \text{ données} \tag{2.60}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} i) k > 0 \text{ sur } I \\ \text{ou} \\ ii) k > 0 \text{ dans } I, \quad k \geq 0 \text{ sur } I. \end{array} \right. \tag{2.61}$$

avec les problèmes (p_1) , (p_2) ou (p_λ) associés à l'hypothèse (2.61) *i*) sont des problèmes de Sturm-Liouville "non dégénérés" et se ramènent a des problèmes de type (P) par changement de variables et de fonctions bien déterminer [13]

Nous allons maintenant montrer comment certaines bases connues peuvent être obtenues par application de la théorie précédente.

2.8 Séries ou bases trigonométriques

i) Considérons d'abord le problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} = f, & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Ce problème est un cas particulier du problème (P) avec $a = 0, b = 1, q = 0, \beta_k = 0, k = 1, 2$. Le problème (2.62) correspond au problème de Dirichlet pour l'opérateur

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur A vérifient

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2\pi^2, & n > 1 \text{ et } n \in \mathbb{N} \\ w_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x; \end{cases} \quad (2.63)$$

$q \in \mathcal{C}^1$ (puis que $q = 0$) et donc $w_n \in \mathcal{C}^\infty(I)$. On notera que la fonction de Green G est définie par :

$$G(x) = \begin{cases} (1-t)x & 0 \leq x \leq t \\ t(1-x) & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.64)$$

et le noyau K par :

$$k(x, y) = \begin{cases} (1-x)y & 0 \leq y \leq x \\ x(1-y) & x \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.65)$$

les w_n forment une base orthonormale de $L^2[0, 1]$.

ii) Considérons maintenant le problème

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + u = f, & 0 \leq x \leq 1 \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

C'est encore un cas particulier du problème (P) avec $a = 0, b = 1, q = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Le problème (2.66) est le problème de Neumann pour opérateur

$$-\frac{d^2}{dx^2} + 1.$$

On trouve les valeurs propres et les vecteurs propres de A :

$$\begin{cases} \lambda_n = 1 + n^2\pi^2, & n \in \mathbb{N} \\ w_0(x) = 1. \\ w_n(x) = \sqrt{2} \cos n\pi x, & n \geq 1. \end{cases} \quad (2.67)$$

Explicitons à présent la fonction de Green :

la solution (à une constante multiplicative près) u_1 de $Au = 0$ vérifiant $u_1'(0) = 0$ est $u_1(x) = \cosh x$, une solution u_2 de $Au = 0$ vérifiant $u_2'(0) = 0$ est

$$u_2(x) = [\exp x + \exp -(x - 2)].$$

Le Wronskien

$$W = u_1 u_2' - u_2 u_1' = d = 1 - \exp 2$$

de sorte que G est défini par :

$$G_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{\exp(2-1)} [\exp t + \exp -(t - 2)] \cdot \cosh x \\ \frac{1}{\exp(2-1)} \cosh t [\exp t + \exp -(t - 2)]. \end{cases} \quad (2.68)$$

les w_n qui sont C^∞ ($q = 1$) forment encore une base orthonormale de $L^2(0, 1)$.

iii) Comme toute fonction f de $L^2(-1, +1)$ est la somme d'une fonction paire f_p et d'une fonction impaire f_i :

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

les développements

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos n\pi x; & \sum |\alpha_n|^2 < +\infty \\ f_i(x) &= \sum_{n \geq 1} \beta_n \sin n\pi x; & \sum |\beta_n|^2 < +\infty \end{aligned} \quad (2.69)$$

qui sont valables au sens de $L^2(0, 1)$, sont encore valables dans $L^2(-1, +1)$ et donnent :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_0 + \sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos n\pi x + \beta_n \sin n\pi x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n \exp(-in\pi x) \\ \sum_{n \geq 1} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) < +\infty, \end{cases} \quad (2.70)$$

valable dans $L^2(-1, +1)$.

Ceci prouve que $\left\{ \frac{\exp(-in\pi x)}{\sqrt{2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace $L^2(-1, +1)$
ou encore que $\left\{ \frac{\exp(-in\theta)}{\sqrt{2}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace $L^2(\Gamma)$, où
 $\Gamma = \{z = \exp i\theta; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est le cercle unité du plan complexe [4].

Chapitre 3

Fonctions et valeurs propres

Nous nous intéressons au problème des valeurs propres pour l'opérateur $-L$, [15] c'est-à-dire aux solutions de l'équation

$$Lu + \lambda u = 0. \tag{3.1}$$

Lorsque $u = 0$ cette équation, bien sûr, est satisfaite pour toutes les valeurs de λ . Lorsque $u \neq 0$, elle peut être satisfaite pour certaines valeurs de λ . Ce sont les valeurs propres de $-L$. Toute fonction complexe $u \neq 0$ dans $\mathcal{C}^2(I) \cap L^2(I)$ qui satisfait l'équation (3.1) pour un certain nombre λ est une fonction propre de $-L$ correspondant à la valeur propre λ . Nous renvoyons également aux valeurs propres et les fonctions propres de $-L$ comme valeurs propres et fonctions propres de l'équation (3.1). Puis que cette équation est homogène, les fonctions propres de $-L$ sont déterminées à une constante multiplicative. Lorsque les conditions aux limites appropriées sont ajoutées à l'équation (3.1), le système résultant est appelé un problème de valeurs propres de Sturm-Liouville, dont il est question dans la section suivante. De toute évidence, $-L$ est (formellement) auto-adjoint si, et seulement si, L est (formellement) auto-adjoint. La raison pour laquelle nous recherchons les valeurs propres de $-L$ plutôt que L est que, comme il s'avère, L a valeurs propres négatives lorsque la fonction p est positif. Le théorème suivant résume les résultats que nous avons obtenus jusqu'à présent, comme il généralise les propriétés (i) et (ii) ci-dessus de l'espace de dimension finie à la dimension infinie de l'espace $L^2(I) \cap \mathcal{C}^2(I)$.

3.1 Existence des valeurs propres

Théorème 3.1.1. Soit $L : L^2(a, b) \cap \mathcal{C}^2(a, b) \longrightarrow L^2(a, b)$ un opérateur différentiel linéaire du second ordre défini par ;

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a, b), \quad (3.2)$$

où $p \in \mathcal{C}^2(a, b)$, $q \in \mathcal{C}^1(a, b)$, et $r \in \mathcal{C}(a, b)$. Alors

(i) L est formellement auto-adjoint, i.e $L^* = L$, si les coefficients p, q , et r sont réels et $q \equiv p$.

(ii) L est auto-adjoint, i.e $L' = L$, si L est formellement auto-adjoint et l'équation (3.2) est satisfaite.

(iii) Si L est auto-adjoint, alors les valeurs propres de l'équation

$$Lu + \lambda u = 0$$

Sont toutes réelles et toute paire de fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $L^2[a, b]$.

Preuve 3.1.1. Nous avons déjà démontré (i) et (ii).

Pour prouver (iii), supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $-L$. Ensuite, il existe une fonction $f \in L^2(a, b) \cap \mathcal{C}^2(a, b)$, $f \neq 0$, tel que

$$Lf + \lambda f = 0$$

$$\implies \lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f, f \rangle = -\langle Lf, f \rangle .$$

Puisque L est auto-adjoint,

$$-\langle Lf, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|^2$$

d'où $\bar{\lambda} \|f\|^2 = \lambda \|f\|^2$. Puisque $\|f\| \neq 0$, $\bar{\lambda} = \lambda$

Si μ est une autre valeur propre de $-L$ associé à la fonction propre $g \in L^2(a, b) \cap \mathcal{C}^2(a, b)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda \langle f, g \rangle &= -\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle = \mu \langle f, g \rangle \\ (\lambda - \mu) \langle f, g \rangle &= 0 \\ \lambda \neq \mu &\implies \langle f, g \rangle = 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. Comme indiqué précédemment, lorsque $q = p'$ dans l'expression de L , les conclusions de ce théorème sont valables sous la condition plus faible que p' soit continue.

Exemple 3.1.1. L'opérateur $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$ est formellement auto-adjoint avec $p = -1$ et $r = 0$. Pour déterminer ses fonctions propres en $\mathcal{C}^2(0, \pi)$, nous devons résoudre l'équation :

$$u'' + \lambda u = 0.$$

Considérons d'abord le cas où $\lambda > 0$. La solution générale de l'équation est donnée par

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda x} + c_2 \sin \sqrt{\lambda x} \quad (3.3)$$

sous les conditions aux limites

$$u(0) = u(\pi) = 0 \quad (3.4)$$

Alors, $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$ est, en fait, auto-adjoint. En appliquant les conditions aux limites à (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} u(0) &= c_1 = 0 \\ u(\pi) &= c_2 \sin \sqrt{\lambda \pi} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda \pi} = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ainsi, les valeurs propres de $-\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)$ sont données par la suite n^2 : $n \in \mathbb{N} = (1, 4, 9, \dots)$, et les fonctions propres correspondantes sont $(\sin nx : n \in \mathbb{N}) = (\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots)$. observe que nous avons choisi $c_2 = 1$ pour des raisons de simplicité, car les conditions aux limites ainsi que l'équation de la valeur propre sont toutes homogènes. Nous pourrions également diviser chaque fonction propre par sa norme

$$\|\sin nx\| = \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 x \, dx} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

pour obtenir les fonctions propres normalisées $(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin nx : n \in \mathbb{N})$. Si $\lambda = 0$, la solution de l'équation différentielle est donnée par $u(x) = c_1 x + c_2$, et si $\lambda < 0$ il est donné par

$$u(x) = c_1 \cosh \sqrt{-\lambda x} + c_2 \sinh \sqrt{-\lambda x}.$$

Dans les deux cas, l'application des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = \pi$ conduit à la conclusion que $c_1 = c_2 = 0$. Mais la solution triviale n'est pas admissible en tant que fonction propre, donc nous n'avons pas de valeurs propres dans l'intervalle $]-\infty, 0]$. Les valeurs propres $\lambda_n = n^2$ sont des nombres réels, conformément au théorème (3.1.1), et les fonctions propres $u_n(x) = \sin nx$ sont orthogonales dans $L^2[0, \pi]$ parce que pour tous $n \neq m$

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right] \Big|_0^\pi = 0$$

Parfois, il n'est pas possible de déterminer exactement les valeurs propres d'un système, Comme le montre l'exemple suivant

Exemple 3.1.2. *Considérons la même équation $u'' + \lambda u = 0$ sur l'intervalle $[0, l]$, sous les conditions aux limites séparées $u(0) = 0$, $hu(l) + u'(l) = 0$, où h est une constante positive*

Il est facile de vérifier que ce système n'a pas de valeurs propres $]-\infty, 0]$; lorsque $\lambda > 0$, la solution générale est

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

La première condition aux limites implique que $c_1 = 0$ et la seconde donne

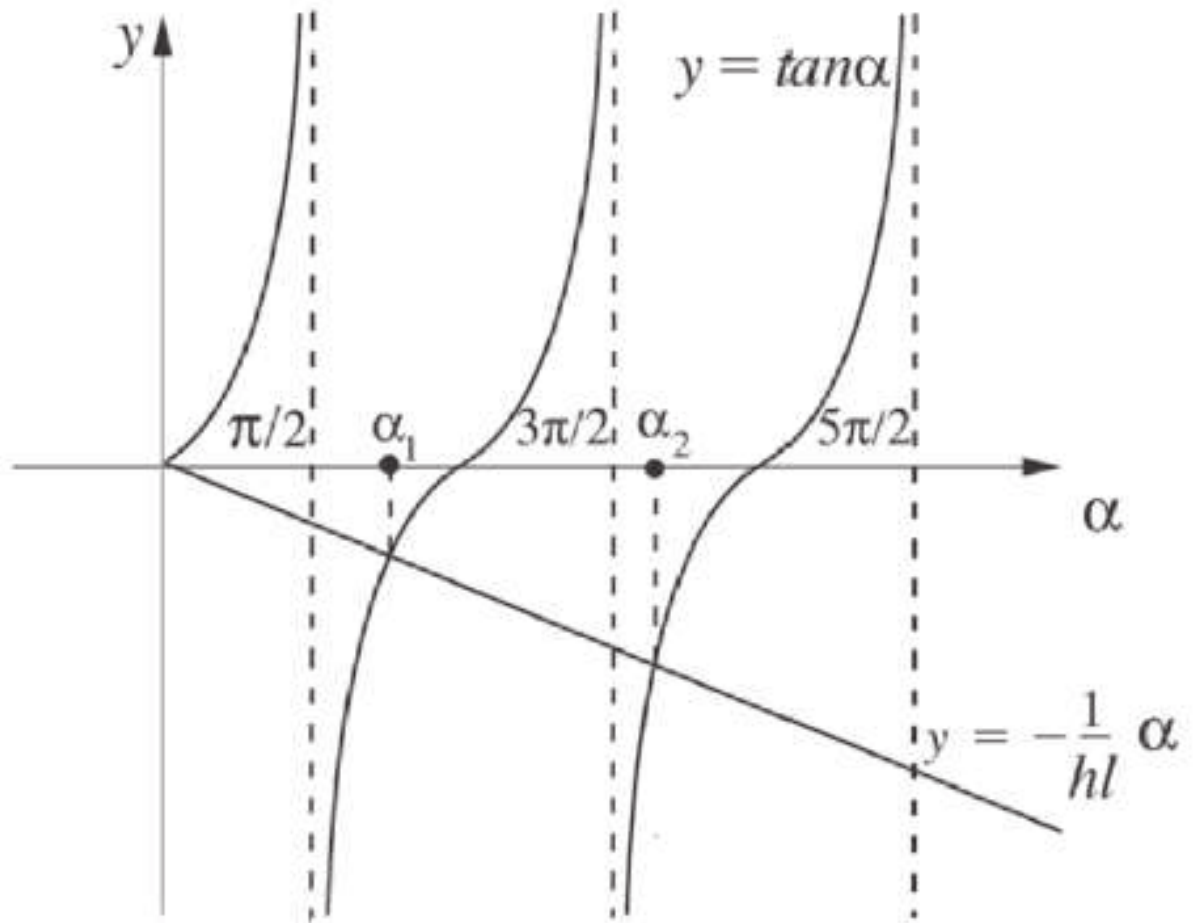
$$c_2 \left(h \sin \sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l \right) = 0$$

puisque c_2 ne peut pas être 0, sinon nous n'obtenons pas de fonction propre, nous devons avoir

$$h \sin \sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0$$

et puisque $\sin \sqrt{\lambda}l$ et $\cos \sqrt{\lambda}l$ ne peut pas être nulle à la fois, alors on trouve $\tan \sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$. pour $\alpha = \sqrt{\lambda}l$ on voit que α est déterminée par l'équation $\tan \alpha = -\frac{\alpha}{hl}$. Il s'agit d'une équation transcendante qui est résolue graphiquement par les points de l'intersection des graphes des deux équations suivantes : $y = \tan \alpha$ et $y = -\frac{\alpha}{hl}$, comme

le montre la suite (α_n) dans la figure (3.5)



(3.5)

fig 2

Les valeurs propres et les fonctions propres du problème sont donc données par $\lambda_n = \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^2$,

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{\alpha_n x}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad n \in \mathbb{N}$$

et les conclusions du théorème (3.1.1) (iii) sont clairement satisfaites.

Généralisation

Si $p' \neq q$ sur I l'opérateur L dans le Théorème (3.1.1) peut être transformé en opérateur formellement auto-adjoint lorsqu'il est multiplié par une fonction appropriée.

En effet, soit

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x), \quad x \in I = [a, b]$$

où $p \in \mathcal{C}^2(I)$ ne s'anule pas sur I , $q \in \mathcal{C}^1(I)$ et $r \in \mathcal{C}(I)$ nous pouvons supposé, sans perte de généralité, que $p(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Si $q' \neq p'$ on peut multiplier L par une fonction ρ et définir l'opérateur

$$\tilde{L} = \rho L = \rho p \frac{d^2}{dx^2} + \rho p \frac{d}{dx} + \rho r$$

\tilde{L} sera formellement auto-adjoint si

$$\rho p = (\rho p)' = \rho' p + \rho p'$$

Il s'agit d'une équation différentielle de premier ordre dans ρ , dont la solution est

$$\rho(x) = \frac{c}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{q(t)}{p(t)} dt\right), \quad (3.6)$$

où c est une constante. Notons que ρ est une fonction \mathcal{C}^2 strictement positive sur I . Il se réduit à une constante (non nulle) lorsque $q = p'$, c'est-à-dire lorsque L est formellement auto-adjoint.

Le résultat de l'exemple (3.1.1) nous permet de généraliser la partie (iii) du théorème (3.1.1) aux opérateurs différentiels qui ne sont pas formellement auto-adjoints.

Proposition 3.1.1. *Si $Lu = pu'' + qu' + ru$ ou $p > 0$ et $q \neq p'$, l'équation des valeurs propres $Lu + \lambda u = 0$ peut être multiplié par la fonction positive ρ définie par (3.6) pour donner l'équivalent équation $\rho Lu + \lambda \rho u = 0$, où ρL est maintenant formellement auto-adjoint, avec $\rho > 0$,*

Corollaire 3.1.1. *Si $L : L^2(a, b) \cap \mathcal{C}^2(a, b) \longrightarrow L^2(a, b)$ est un opérateur linéaire auto adjoint et ρ est une fonction positive et continue sur $[a, b]$, alors les valeurs propres de l'équation $Lu + \lambda \rho u = 0$ sont tous réels et toute paire de fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes sont orthogonales dans $L^2_\rho(a, b)$.*

Remarque 3.1.2. 1. Dans ce corollaire les valeurs propres et les fonctions propres de l'équation $Lu + \lambda \rho u = 0$ sont, en fait, les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur $-\rho^{-1}L$.

2. Supposons que l'intervalle $[a, b]$ est finie. Etant donné que la fonction poids ρ est continue et positif sur $[a, b]$, sa valeur minimum α et β sa valeur maximale satisfont $0 < \alpha \leq \rho(x) \leq \beta < \infty$ ceci implique $\sqrt{\alpha} \|u\| \leq \|u\|_\rho \leq \sqrt{\beta} \|u\|$, et donc $\|u\|_\rho < \infty$ si, et seulement si, $\|u\| < \infty$. Les deux normes sont dites équivalentes, et les deux espaces $L^2_\rho[a, b]$ et $L^2[a, b]$ contiennent clairement les mêmes fonctions, bien qu'elles aient des produits internes différents.

3. Rien dans la preuve de ce corollaire oblige L être un opérateur différentiel du second ordre. En fait, le résultat est vrai pour tout opérateur linéaire auto-adjoint sur un espace de produit intérieur.

Exemple 3.1.3. Trouver les fonctions propres et les valeurs propres du problème de la valeur limite

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < b, \quad (3.7)$$

$$y(1) = y(b) = 0. \quad (3.8)$$

L'équation (3.7) est une équation de Cauchy-Euler dont les solutions ont la forme x^m . La substitution à l'équation conduit à $m(m-1) + m + \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm i\sqrt{\lambda}$. En supposant $\lambda > 0$, nous avons

$$x^{i\sqrt{\lambda}} = \exp i\sqrt{\lambda} \log x = \cos(\sqrt{\lambda} \log x) + i \sin(\sqrt{\lambda} \log x),$$

et la solution générale de l'équation (3.7) est donnée par

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \log x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \log x).$$

En appliquant les conditions aux limites (3.8)

$$y(1) = c_1 = 0, \quad y(b) = c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \log b) = 0$$

parce que nous ne pouvons pas avoir les deux constantes c_1 et c_2 nulles, cela implique

$$\sin(\sqrt{\lambda} \log x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \log x = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ainsi, les valeurs propres du problème de la valeur limite sont données par la suite des nombres réels positifs

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\log b} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

et la suite correspondante de fonctions propres est

$$y_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{\log b} \log x \right).$$

Notons ici que l'opérateur différentiel

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}$$

n'est pas formellement auto-adjoint, mais il le devient après multiplication par la fonction poids

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2} \exp \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{x}$$

L'opérateur résultant est alors

$$\begin{aligned} L &= x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) \end{aligned}$$

Les fonctions propres ($y_n : n \in \mathbb{N}$) de ce problème sont en fait des fonctions propres de $-\rho^{-1}L = -xL$ qui sont orthogonales dans $L_p^2(1, b)$, non $L_2(1, b)$. Effectivement,

$$\begin{aligned} \langle y_m, y_n \rangle &= \int_1^b \sin \left(\frac{m\pi}{\log b} \log x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{\log b} \log x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\log b}{\pi} \int_0^\pi \sin m\xi \sin n\xi d\xi \\ &= 0 \quad \text{pour tous } m \neq n \end{aligned}$$

De plus le problème n'a pas de valeurs propres dans l'intervalle $]-\infty, 0]$

3.2 Existence des fonctions propres

Dans cette section on cherche à déterminer les valeurs propres de l'opérateur différentiel L formellement auto-adjoint donné par

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x) \quad (3.9)$$

l'équation des valeurs propres

$$Lu + \lambda\rho(x)u = 0 \quad x \in (a, b), \quad (3.10)$$

sous les conditions aux limites homogènes séparés

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad (3.11)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0 \quad (3.12)$$

où α_i et β_i sont des constantes réelles, est appelé valeur propre de problème de Sturm-Liouville (SL) [15], [7] et [18].

3.2.1 Problème régulier

Puisque L est auto-adjoint dans ces conditions aux limites, si elles existent, alors d'après (3.1.1) les valeurs propres de l'équation (3.10) sont réels et ses fonctions propres sont orthogonales dans $L^2_\rho[a, b]$. Lorsque l'intervalle $[a, b]$ est borné et p ne s'annule pas sur $[a, b]$, le système d'équations (3.10) à (3.12) est appelée un problème régulier de SL, sinon il est singulier.

Dans le problème régulier n'y a aucune perte de généralité en supposant que $p(x) > 0$ sur $[a, b]$. Les solutions du problème de SL sont clairement les fonctions propres de l'opérateur $-\rho^{-1}L$ dans \mathcal{C}^2 qui remplissent les conditions aux limites (3.11) et (3.12). Maintenant, nous montrons que le problème régulier de SL a non seulement des solutions, mais il y a assez pour couvrir $L^2_\rho[a, b]$. Ce résultat fondamental est prouvé par étapes. En supposant, par souci de simplicité, que $\rho(x) = 1$, nous construisons d'abord la fonction de Green de l'opérateur L dans les conditions aux limites (3.11) et (3.12). Ce choix de ρ évite certains détails gênants sans obscurcir le principe général. Nous utilisons ensuite la fonction de Green de parvenir à une expression intégrale de L^{-1} , l'inverse de L .

Les fonctions propres de $-L$,

$$Lu + \lambda u = 0,$$

coïncider avec ceux de $-L^{-1}$,

$$L^{-1}u + \mu u = 0,$$

où $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Nous arrivons aux conclusions souhaitées en analysant les propriétés spectrales de L^{-1} , c'est-à-dire ses valeurs et fonctions propres.

3.2.2 Existence de fonctions propres du problème régulier

La fonction de Green [14] de l'opérateur différentiel auto-adjoint

$$L = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + r,$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, & |\alpha_1| + |\alpha_2| &> 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, & |\beta_1| + |\beta_2| &> 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

est une fonction

$$G : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

ayant les propriétés suivantes.

1. G est symétrique, dans le sens que

$$G(x, \zeta) = G(\zeta, x) \quad \text{pour tout } x, \zeta \in [a, b],$$

et G satisfait les conditions aux limites pour tout variable x et ζ .

2. G est une fonction continue sur $[a, b] \times [a, b]$ et de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b] \times [a, b] \setminus \{(x, \zeta) : x = \zeta\}$, où il satisfait à l'équation différentielle

$$L_x G(x, \zeta) = \zeta = p(x)G_{xx}(x, \zeta) + p'(x)G_x(x, \zeta)\zeta + r(x)G(x, \zeta) = 0.$$

3. Le dérivé $\frac{\partial G}{\partial x}$ a un saut de discontinuité en $x = \zeta$ donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(\zeta^+, \zeta) - \frac{\partial G}{\partial x}(\zeta^-, \zeta) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial G}{\partial x}(\zeta + \delta, \zeta) - \frac{\partial G}{\partial x}(\zeta - \delta, \zeta) \right] \\ &= \frac{1}{p(\zeta)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

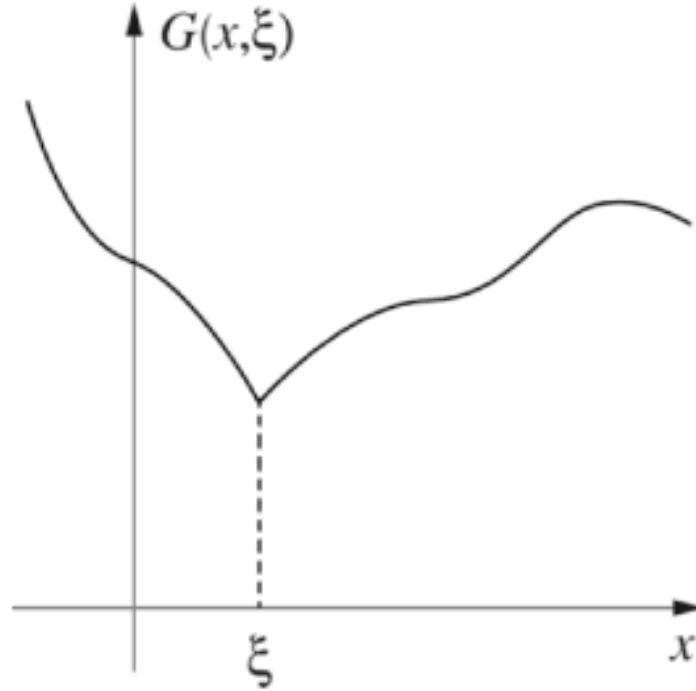


fig 3 Fonction de Green.

Nous supposons que l'équation homogène $Lu = 0$, sous les conditions aux limites séparées (3.11) et (3.12), n'a que la solution triviale $u = 0$. Cela équivaut à l'hypothèse que 0 n'est pas une valeur propre de $-L$. Il n'y a aucune perte de généralité dans cette hypothèse, car si $\tilde{\lambda}$ est un nombre réel qui n'est pas une valeur propre de $-L$ alors nous pouvons définir l'opérateur

$$\tilde{L} = L + \tilde{\lambda} = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + \tilde{r},$$

où $\tilde{r}(x) = r(x) + \tilde{\lambda}$. Maintenant, dans la mesure où

$$Lu + \lambda u = \tilde{L}u + (\lambda - \tilde{\lambda})u,$$

on voit que λ est une valeur propre de $-L$ associé à la fonction propre u si et seulement si $\lambda - \tilde{\lambda}$ est une valeur propre de $-\tilde{L}$ associée à la même fonction propre u . Puisque $\tilde{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de $-L$, 0 ne peut pas être une valeur propre de \tilde{L} . Il existe des nombres réels qui ne sont pas des valeurs propres de $-L$ qui découlent du lemme suivant :

Lemme 3.2.1. *Les valeurs propres de $-L$ sont bornées inférieurement par une constante réelle.*

Preuve 3.2.1. *Pour tout $u \in C^2([a, b])$ qui satisfait les conditions aux limites (3.11) et (3.12), nous avons*

$$\begin{aligned} \langle -Lu, u \rangle &= \int_a^b [-(pu')'\tilde{u} - r|u|^2] dx \\ &= \int_a^b [p|u'|^2 - r|u|^2] dx + p(a)u'(a)u(a) - p(b)u'(b)u(b) \\ &= \int_a^b [p|u'|^2 - r|u|^2] dx + p(b)\frac{\beta_1}{\beta_2}u^2(b) - p(a)\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u^2(a). \end{aligned}$$

si $\beta_2 = 0$ alors la deuxième condition aux limites implique $u(b) = 0$ et le second terme du côté droit disparaît. De même, le troisième terme est 0 si $\alpha_2 = 0$. Le cas où u est une fonction propre de $-L$ sous les conditions aux limites $u(a) = u(b) = 0$ rapporte immédiatement

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|^2 &= \int_a^b p(x)|u'(x)|^2 dx - \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \\ &\geq -\|u\|^2 \max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donc $\ell = -\max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\}$ est une borne inférieure de λ .

D'autre part, si u satisfait les conditions aux limites séparées

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0 \end{aligned}$$

alors l'argument de dimensions montre qu'il ne peut y avoir plus de deux fonctions propres linéairement indépendants de $-L$ avec les valeurs propres inférieures à ℓ .

En effet, supposons que $-L$ a trois fonctions propres linéairement indépendants u_1, u_2 et u_3 avec leurs valeurs propres correspondantes λ_1, λ_2 et λ_3 toutes inférieures à ℓ . On peut supposer, sans perte de généralité, que les fonctions propres sont orthonormales. Depuis et tous moins de . Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les fonctions propres sont orthonormé. Donc

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_i(a) + \alpha_2 u'_i(a) &= 0, \\ \beta_1 u_i(b) + \beta_2 u'_i(b) &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

on voit que chacun des six vecteurs $(u_i(a), u_i'(a))$ et $(u_i(b), u_i'(b))$ se situe dans un sous-espace à une dimension de \mathbb{R}^2 . Par conséquent, les trois vecteurs $u_i = (u_i(a), u_i'(a), u_i(b), u_i'(b))$ se trouvent dans un sous-espace à deux dimensions de \mathbb{R}^4 . Nous pouvons donc former une combinaison linéaire $c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$, où tous les coefficients sont des zéros, tel que

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0 \quad .$$

Mais cela implique

$$\begin{aligned} c_1u_1(a) + c_2u_2(a) + c_3u_3(a) &= 0 \quad , \\ c_1u_1(b) + c_2u_2(b) + c_3u_3(b) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

la fonction

$$v(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + c_3u_3(x)$$

est donc une fonction propre de $-L$ qui satisfait à $v(a) = v(b) = 0$, et par conséquent, sa valeur propre est bornée inférieurement par ℓ . Mais cela est contredit par l'inégalité

$$\langle Lv, v \rangle = \lambda_1 |c_1|^2 + \lambda_2 |c_2|^2 + \lambda_3 |c_3|^2 < (|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2) = \ell \|v\|^2$$

3.2.3 Propriétés spectrales du problème régulier

Maintenant, nous construisons la fonction de Green pour l'opérateur L sous les conditions aux limites (3.11) et (3.12),

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, & |\alpha_1| + |\alpha_2| &> 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, & |\beta_1| + |\beta_2| &> 0 \end{aligned}$$

Selon un théorème d'existence [11] et [5] pour les équations différentielles du second ordre, $Lu = 0$ a deux solutions uniques (non triviales) v_1 et v_2 tels que

$$\begin{aligned} v_1(a) &= \alpha_2, & v_1'(a) &= -\alpha_1 \quad , \\ v_2(b) &= \beta_2, & v_2'(b) &= -\beta_1 \quad . \end{aligned}$$

donc v_1 satisfait la première condition limite en $x = a$,

$$\alpha_1 v_1(a) + \alpha_2 v_1'(a) = 0,$$

et v_2 satisfait la deuxième condition

$$\beta_1 v_2(b) + \beta_2 v_2'(b) = 0,$$

Il est clair que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, sinon chacun serait un multiple constant (non nul) de l'autre, et les deux satisferaient alors $Lu = 0$ et les conditions aux limites (3.11) et (3.12). Mais ceci contredit le fait 0 n'est pas une valeur propre de L .

Maintenant, nous définissons

$$G(x, \zeta) = \begin{cases} c^{-1} v_1(\zeta) v_2(x), & a \leq \zeta \leq x \leq b \\ c^{-1} v_1(x) v_2(\zeta), & a \leq x \leq \zeta \leq b \end{cases} \quad (3.16)$$

où

$$c = p(x)[v_1(x)v_2'(x) - v_1'(x)v_2(x)] = p(x)W(v_1, v_2)(x) \quad (3.17)$$

est une constante non nulle. Cela découle du fait que ni p ni W doit nul sur $[a, b]$, et l'identité de Lagrange

$$[p(v_1 v_2' - v_1' v_2)]' = v_1 L v_2 - v_2 L v_1 = 0 \quad \text{sur } [a, b].$$

Il est maintenant facile de montrer que toutes les propriétés de $G(\zeta, x)$ énumérés ci-dessus sont remplies. Ici, nous vérifions l'équation (3.14). En différenciant (3.16), nous obtenons

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta}(x, x + \delta) - \frac{\partial G}{\partial \zeta}(x, x - \delta) = \frac{1}{c}[v_1(x)v_2'(x + \delta) - v_1'(x - \delta)v_2(x)],$$

où $\delta > 0$. Compte tenu de (3.17) et la continuité de v_1' et v_2' , cette expression tend vers $\frac{1}{p(x)}$ quand $\delta \rightarrow 0$.

Maintenant, on définit l'opérateur T sur $\mathcal{C}([a, b])$ par

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta, \quad (3.18)$$

et montrons que la fonction Tf est de classe $\mathcal{C}^2([a, b])$ et résout l'équation différentielle $Lu = f$.

La réécriture (3.18) et la différenciation

$$\begin{aligned}
(Tf)(x) &= \int_a^x G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_x^b G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta \\
(Tf)'(x) &= \int_a^x G_x(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_x^b G_x(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta \\
(Tf)''(x) &= \int_a^x G_{xx}(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + G_x(x, x^-) f(x^-) \\
&\quad + \int_x^b G_{xx}(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta - G_x(x, x^+) f(x^+)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la continuité de G et f à $\zeta = x$ pour obtenir $(Tf)(x)$.

Puisque

$$G_x(x, x^-) - G_x(x, x^+) = \frac{1}{c} [v_1(x^-) v_2'(x) - v_1'(x) v_2(x^+)] = \frac{1}{p(x)}$$

par la continuité de v_1 et v_2 , nous avons aussi

$$(Tf)''(x) = \int_a^x G_{xx}(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_x^b G_{xx}(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \frac{f(x)}{p(x)}$$

d'où nous concluons que Tf est dans $\mathcal{C}^2([a, b])$ et satisfait

$$\begin{aligned}
L(Tf)(x) &= p(x)(Tf)''(x) + p'(x)(Tf)'(x) + r(x)(Tf)(x) \\
&= \int_a^x L_x G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + \int_x^b L_x G(x, \zeta) f(\zeta) d\zeta + f(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

compte tenu du fait que $L_x G(x, \zeta) = 0$ pour tout $\zeta \neq x$.

De la propriété (1) de G , il est clair que Tf satisfait également les conditions aux limites (3.11) et (3.12). D'autre part, si $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$ satisfait les conditions aux limites (3.11) et (3.12), alors nous pouvons intégrer par parties et en utilisant la continuité

de p, u, u' et les propriétés de G pour obtenir

$$\begin{aligned}
 T(Lu)(x) &= \int_a^x G(x, \zeta) Lu(\zeta) d\zeta + \int_x^b G(x, \zeta) Lu(\zeta) d\zeta \\
 &= p(\zeta)[u'(\zeta)G(x, \zeta) - u(\zeta)G_\zeta(x, \zeta)]\Big|_a^x + \int_a^x u(\zeta)L_\zeta G(x, \zeta) d\zeta + p(\zeta)[u'(\zeta)G(x, \zeta) \\
 &\quad - u(\zeta)G_\zeta(x, \zeta)]\Big|_x^b + \int_x^b u(\zeta)L_\zeta G(x, \zeta) d\zeta \\
 &= p(\zeta)u(\zeta)G_\zeta(x, \zeta)\Big|_x^+ + p(\zeta)[u'(\zeta)G(x, \zeta) - u(\zeta)G_\zeta(x, \zeta)]\Big|_a^b \\
 &= u(x),
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'équation (3.14) et du fait que u et G satisfont aux conditions aux limites séparées. L'opérateur T agit de sorte comme l'inverse de l'opérateur L , et le système d'équations SL

$$\begin{aligned}
 Lu + \lambda u &= 0, \\
 \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \\
 \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0,
 \end{aligned}$$

est équivalente à l'équation de valeur propre unique

$$Tu = \mu u,$$

ou $\mu = \frac{-1}{\lambda}$. En d'autres termes, u est une fonction propre du problème de SL associé à la valeur propre λ si et seulement si elle est une fonction propre de T associé à la valeur propre $\frac{-1}{\lambda}$. Nous allons déduire les propriétés spectrales du problème régulier de SL de celles du opérateur intégral T .

L'exemple suivant illustre la méthode que nous avons décrit pour la construction de la fonction Green dans le cas particulier où l'opérateur L est $\frac{d^2}{dx^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$

Exemple 3.2.1. *Soit*

$$\begin{aligned}
 u'' + \lambda u &= 0, \quad 0 < x < 1, \\
 u(0) &= u(1) = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu dans l'exemple (3.2.1) que ce système d'équations a seulement une valeurs propres positives. La solution générale de l'équation différentielle est

$$v(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Notant que $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, nous recherchons la solution v_1 qui satisfait les conditions initiales suivantes à $x = 0$,

$$v_1(0) = \alpha_2 = 0, \quad v_1'(0) = -\alpha_1 = -1.$$

ces conditions impliquent

$$c_1 = 0 \quad \sqrt{\lambda}c_2 = -1$$

donc

$$v_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x$$

de même, la solution v_2 qui satisfait aux conditions

$$v_2(1) = \beta_2 = 0, \quad v_2'(1) = -\beta_1 = -1,$$

on trouve facilement

$$v_2(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}x - \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}x.$$

or, la fonction de Green, d'après (3.16), est donnée par

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c^{-1}v_1(\xi)v_2(x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ c^{-1}v_1(x)v_2(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

la constante c peut être calculée en utilisant (3.17), et est donnée par $\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$. Ainsi

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \left(\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \right), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}} \left(\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\xi - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\xi \right), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Notons que

$$\begin{aligned} G_\xi(x, x^+) - G_\xi(x, x^-) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sin \sqrt{\lambda}} \left(\cos \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x^+ + \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x^+ \right) \\ &\quad - \frac{\cos \sqrt{\lambda}x^-}{\sin \sqrt{\lambda}} \left(\cos \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x - \sin \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Les autres propriétés de G peuvent être facilement vérifiées.

Définition 3.2.1. Un ensemble infini F de fonctions définies et continues sur $[a, b]$ est dit équicontinuous sur $[a, b]$ si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, qui dépend eulement sur ε , tel que

$$x, \xi \in [a, b], \quad |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } f \in F$$

Remarque 3.2.1. Cette condition implique clairement que chaque membre d'un ensemble de fonctions équicontinuous est une fonction uniformément continue sur $[a, b]$; Mais, plus que cela, le même δ fonctionne pour toutes les fonctions de E .

Définition 3.2.2. L'ensemble E est uniformément borné s'il existe un nombre positif M tel que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{pour tout } f \in E, \text{ et } x \in [a, b]$$

Lemme 3.2.2. Selon le théorème d'Ascoli-Arzela [13], si E est un ensemble de fonctions infinies, uniformément bornées et équicontinuous sur l'intervalle borné $[a, b]$, alors E contient une suite $(f_n : n \in \mathbb{N})$ qui est uniformément convergente sur $[a, b]$. La limite de f_n est nécessairement une fonction continue sur $[a, b]$.

Lemme 3.2.3. Soit T l'opérateur intégral défini par l'équation (3.18). L'ensemble des fonctions $\{Tu\}$, où $u \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\|u\| \leq 1$ est uniformément bornée et équicontinuous

Preuve 3.2.2. La fonction de Green G est continue et fermée sur le carré $[a, b] \times [a, b]$, donc $|G(x, \zeta)|$ est uniformément continue et bornée par une constante M positive. De (3.18) et l'inégalité Cauchy-shwartz,

$$|Tu(x)| = |\langle G(x, \zeta), u(\zeta) \rangle| \leq M\sqrt{b-a} \|u\|,$$

donc l'ensemble $\{|Tu| : \|u\| \leq 1\}$ est majorée par $M\sqrt{b-a}$. Puisque G est uniformément continue sur le carré $[a, b] \times [a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$x_1, x_2 \in [a, b], |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |G(x_2, \zeta) - G(x_1, \zeta)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } \zeta \in [a, b].$$

Si u est continue sur $[a, b]$, alors

$$|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |Tu(x_2) - Tu(x_1)| \leq \varepsilon\sqrt{b-a} \|u\|$$

Donc, les fonctions $\{TU : u \in \mathcal{C}[a, b], \|u\| \leq 1\}$ sont équicontinuous

Maintenant, nous pouvons affirmer notre premier théorème d'existence pour le problème de valeurs propres cosidirie.

3.2.4 Existence de valeurs propres

Théorème 3.2.1. $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est une valeur propre de T .

Par conséquent, $\|T_n\| > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et nous avons prouvé ce qui suit.

Preuve 3.2.3. $\|T\| = \sup\{|\langle Tu, u \rangle| : u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\| = 1\}$ et $\langle Tu, u \rangle$ est un nombre réel, donc soit $\|T\| = \sup \langle Tu, u \rangle$ ou $\|T\| = -\inf \langle Tu, u \rangle, \|u\| = 1$. Supposons que $\|T\| = \sup \langle Tu, u \rangle$. Alors, il existe une suite de fonctions $u_k \in \mathcal{C}([a, b])$, avec $\|u_k\| = 1$, de sorte que $\langle Tu_k, u_k \rangle \rightarrow \|T\|$ quand $k \rightarrow \infty$. Puisque $\{Tu_k\}$ est uniformément bornée et équicontinue, nous pouvons utiliser le théorème d'Ascoli Arzelà [13] à conclure qu'il a une sous-suite $\{Tu_{k_j}\}$ qui est uniformément convergente sur $[a, b]$ à une fonction continue φ_0 . Nous prouvons maintenant que φ_0 est une fonction propre de T correspondant à la valeur propre $\mu_0 = \|T\|$. Quand $j \rightarrow \infty$, nous avons

$$\sup_{x \in [a, b]} |Tu_{k_j}(x) - \varphi_0(x)| \rightarrow 0,$$

ce qui implique

$$\|Tu_{k_j}(x) - \varphi_0(x)\| \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

et donc $\|Tu_{k_j}(x)\| \rightarrow \|\varphi_0(x)\|$. En outre, puisque $\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \mu_0$,

$$\|Tu_{k_j} - \mu_0 u_{k_j}\|^2 = \|Tu_{k_j}\|^2 + \mu_0^2 - 2\mu_0 \langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \|\varphi_0\|^2 - \mu_0^2, \quad (3.20)$$

donc $\|\varphi_0\|^2 \geq \mu_0^2 > 0$, et la fonction φ_0 ne peut pas être nulle sur $[a, b]$ car

$$\|Tu_{k_j}(x)\|^2 \leq \|T\|^2 \|u_{k_j}\|^2 = \mu_0^2$$

il résulte également de (3.20) que

$$0 \leq \|Tu_{k_j} - \mu_0 u_{k_j}\|^2 \leq 2\mu_0^2 - 2\mu_0 \langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle.$$

Mais $\langle Tu_{k_j}, u_{k_j} \rangle \rightarrow \mu_0$, d'où

$$\|Tu_{k_j} - \mu_0 u_{k_j}\| \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Maintenant, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\| \\ &\leq \|T\varphi_0 - T(Tu_{k_j})\| + \|T(Tu_{k_j}) - \mu_0Tu_{k_j}\| + \|\mu_0Tu_{k_j} - \mu_0\varphi_0\|. \end{aligned}$$

Dans la limite quand $j \rightarrow \infty$, en utilisant l'inégalité $\|Tu\| \leq \|T\| \|u\|$ avec (3.19) et (3.21), nous concluons que

$$\|T\varphi_0 - \mu_0\varphi_0\| = 0$$

$T\varphi_0 - \mu_0\varphi_0$ étant continue, cela implique $T\varphi_0(x) = \mu_0\varphi_0(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Si $\|T\| = -\inf \langle Tu, u \rangle$, un argument similaire aboutit à la même conclusion. Soit

$$\psi_0 = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} G_1(x, \zeta) &= G(x, \zeta) - \mu_0\psi_0(x)\bar{\psi}_0(\zeta), \\ (T_1u)(x) &= \int_a^b G_1(x, \zeta)u(\zeta)d\zeta \\ &= Tu(x) - \mu_0 \langle u, \psi_0 \rangle \psi_0(x) \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}([a, b]). \end{aligned}$$

La fonction G_1 possède les mêmes propriétés de régularité et de symétrie que G , donc le théorème de convergence dominé de Lebesgue s'appliquent clairement à l'opérateur auto-adjoint T_1 . si $\|T_1\| \neq 0$ alors nous définissons

$$\sup \{ |\langle T_1u, u \rangle| : u \in \mathcal{C}([a, b]), \|u\| = 1 \} = |\mu_1|,$$

où μ_1 est une nombre réel (non nul) qui est une valeur propre de T_1 correspondant à certains fonction propre (non nul) $\varphi_1 \in \mathcal{C}([a, b])$, qui est

$$T_1\varphi_1 = \mu_1\varphi_1.$$

Soit $\psi_1 = \varphi_1/\|\varphi_1\|$ Alors, pour tout $u \in \mathcal{C}([a, b])$,

$$\begin{aligned} \langle T_1u, \psi_0 \rangle &= \langle Tu, \psi_0 \rangle - \mu_0 \langle \langle u, \psi_0 \rangle \psi_0, \psi_0 \rangle \\ &= \langle u, T\psi_0 \rangle - \mu_0 \langle u, \psi_0 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $T\psi_0 = \mu_0\psi_0$, En particulier, $\langle T_1\psi_1, \psi_0 \rangle = \langle \mu_1\psi_1, \psi_0 \rangle = 0$, et donc ψ_1 est orthogonal à ψ_0 . Maintenant, l'équation (3.22) donne

$$T\psi_1 = T_1\psi_1 = \mu_1\psi_1.$$

Ainsi ψ_1 est également une fonction propre de T , et les valeurs propres associées satisfait

$$|\mu_1| = \|T\psi_1\| \leq \|T\| = |\mu_0|.$$

Définissons

$$G_2(x, \zeta) = G_1(x, \zeta) - \mu_1\psi_1(x)\overline{\psi_1(\zeta)} = G(x, \zeta) - \sum_{k=0}^1 \mu_k\psi_k(x)\overline{\psi_k(\zeta)}$$

$$T_2u = T_1u - \mu_1\langle u, \psi_1 \rangle \psi_1 = Tu - \sum_{k=0}^1 \mu_k\langle u, \psi_k \rangle \psi_k(x),$$

et en procédant comme ci-dessus, on en déduit l'existence d'une troisième fonction propre normalisé ψ_2 de T associé à une valeur propre réelle μ_2 tels que ψ_2 est orthogonal à la fois ψ_0 et ψ_1 et $|\mu_2| \leq |\mu_1|$. Ainsi, on obtient une suite de fonctions propres orthonormée $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ de T correspondant à la suite de valeurs propres $|\mu_0| \geq |\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots$. La suite des fonctions propres ne prend fin que si $\|T_n\| = 0$ pour un certain n . Dans ce cas,

$$0 = LT_nu = LTu - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\langle u, \psi_k \rangle L\psi_k = u - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\langle u, \psi_k \rangle L\psi_k$$

pour tout $u \in \mathcal{C}([a, b])$, ce qui donnerait

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k\langle u, \psi_k \rangle L\psi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \psi_k \rangle LT\psi_k = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \psi_k \rangle \psi_k$$

Mais comme aucun ensemble fini de fonctions propres ne peut parcourir $\mathcal{C}([a, b])$, cette dernière égalité ne peut pas tenir pour tout $u \in \mathcal{C}([a, b])$. Par conséquent, $\|T_n\| > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et nous avons prouvé ce qui suit.

Théorème 3.2.2. (Théorème d'existence). L'opérateur intégral T défini par (3.18) a une suite infinie de fonctions propres (ψ_n) orthonormées dans $L^2[a, b]$.

3.2.5 L'intégralité des fonctions propres

Si f est une fonction de $L^2[a, b]$ alors, par l'inégalité de Bessel, nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2 .$$

Pour prouver l'intégralité des fonctions propres (ψ_n) dans $L^2(a, b)$ nous devons montrer que cette inégalité est en fait une égalité. Ce que nous faisons d'abord en prouvant que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

pour tout $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ qui satisfait aux conditions aux limites (3.11) et (3.12), et alors en utilisant la densité de $\mathcal{C}^2([a, b])$ dans $L^2[a, b]$ pour d'étendre cette égalité à $L^2[a, b]$.

Théorème 3.2.3. *Compte tenu de toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ qui satisfait les conditions aux limites (3.11) et (3.12), la série infinie $\sum \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Preuve 3.2.4. *Pour chaque $x \in [a, b]$ fixé, nous avons*

$$\langle G(x, \cdot), \psi_k \rangle = T\bar{\psi}_k(x) = \mu\bar{\psi}_k(x) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$

L'inégalité de Bessel, appliquée à G en fonction de ζ donne

$$\sum_{k=0}^n \mu_k^2 |\psi_k|^2 \leq \int_a^b |G(x, \zeta)|^2 d\zeta \quad \text{pour tout } x \in [a, b], \quad n \in \mathbb{N}$$

L'intégration par rapport à x et en tendre $n \rightarrow \infty$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^2 \leq M^2(b-a)^2 \tag{3.23}$$

où M est la valeur maximale de $|G(x, \zeta)|$ sur le carré $[a, b] \times [a, b]$. Une conséquence immédiate de l'inégalité (3.23) est que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n| = 0. \tag{3.24}$$

avec

$$G_n(x, \zeta) = G(x, \zeta) - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \psi_k \bar{\psi}_k(\zeta),$$

nous avons déjà vu que l'opérateur intégral

$$T_n : u(x) \mapsto \int_a^b G_n(x, \zeta) u(\zeta) d\zeta, \quad u \in \mathcal{C}([a, b]),$$

a μ_n valeur propre et de norme

$$\|T_n\| = |\mu_n|.$$

Par conséquent, pour tout $u \in \mathcal{C}([a, b])$,

$$\|T_n u\| = \left\| Tu - \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \leq |\mu_n| \|u\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \longrightarrow \infty \quad (3.25)$$

en vue de (3.24). Si $n > m$, alors

$$\sum_{k=m}^n \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k = (T \sum_{k=m}^n \langle u, \psi_k \rangle \psi_k);$$

mais puisque $|Tu| \leq M\sqrt{b-a} \|u\|$ pour tout $u \in \mathcal{C}([a, b])$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right| &\leq \|T\| \left\| \sum_{k=m}^n \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \\ &\leq M\sqrt{b-a} \left(\sum_{k=m}^n |\langle u, \psi_k \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Bessel, le côté droit de cette inégalité tend vers zéro quand $m, n \longrightarrow \infty$, donc la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue. La continuité de Tu et (3.25) impliquent maintenant

$$Tu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \langle u, \psi_k \rangle \psi_k \quad \text{pour tout } x \in [a, b]. \quad (3.26)$$

Si $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ satisfait les conditions aux limites (3.11) et (3.12), alors $u = Lf$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et $f = Tu$. Puisque

$$\mu_k \langle u, \psi_k \rangle = \langle u, \mu_k \psi_k \rangle = \langle u, T\psi_k \rangle = \langle Tu, \psi_k \rangle = \langle f, \psi_k \rangle$$

L'équation (3.26) donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(x) \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

Il faut maintenant démontrer que toute fonction f dans $L^2[a, b]$ peut être approchée (au sens de la norme L^2) par une fonction \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ qui satisfait aux conditions aux limites séparées (3.13). En effet, il est suffisant de prouver la densité de $\mathcal{C}^2([a, b])$ dans $L^2[a, b]$ indépendamment des conditions aux limites; Si $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$, on peut former une suite uniformément bornée de fonctions $g_n \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= g(x) \quad \text{sur } \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right] \\ \text{et } g_n(a) &= g'_n(a) = g_n(b) = g'_n(b) = 0. \end{aligned}$$

Une telle suite satisfait clairement les conditions aux limites et les donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0$$

Si $f \in L^2[a, b]$, et puisque l'espace des fonctions continue à support compact et dense dans $L^2[a, b]$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h , continue sur $[a, b]$, de sorte que

$$\|f - h\| < \varepsilon \quad . \quad (3.27)$$

Il faut donc montrer que pour tout $h \in \mathcal{C}([a, b])$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^2([a, b])$, de sorte que

$$\|h - g\| < \varepsilon \quad . \quad (3.28)$$

Cela peut être déduit de la théorème d'approximation de Weierstrass, mais voici une preuve directe de ce résultat.

Définissons la fonction \mathcal{C}^∞ positif

$$\alpha(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

où

$$c = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right) dx \right]^{-1}$$

de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx = 1$. Ensuite, nous définissons la suite de fonctions

$$\alpha_n(x) = n\alpha(nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

qui se trouvent aussi dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Parce que α s'annule sur $|x| \geq 1$, chaque fonction α_n s'annule sur $|x| \geq \frac{1}{n}$, et satisfait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx = 1 \quad \text{pour tout } n$$

Enfin, on étend h comme une fonction continue de $[a, b]$ de \mathbb{R} en définissant

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < a - 1, x > b + 1 \\ h(a)(x - a + 1), & a - 1 \leq x < a \\ h(b)(-x + b + 1), & b < x \leq b + 1, \end{cases}$$

et définissent la convolution de h et α_n par

$$\begin{aligned} (h * \alpha_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)\alpha_n(x - y) dy \\ &= \int_{x-1/n}^{x+1/n} h(y)\alpha_n(x - y) dy \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} h(x - y)\alpha_n(y) dy \end{aligned}$$

Avec $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty$ la fonction $h * \alpha_n$ est également une fonction de \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . De plus,

$$\begin{aligned} |h(x) - (h * \alpha_n)(x)| &= \left| \int_{-1/n}^{1/n} [h(x - y)\alpha_n(y) - h(x)\alpha_n(y)] dy \right| \\ &\leq \sup \{ |h(x - y) - h(x)| : x \in [a, b], |y| \leq 1/n \} \end{aligned}$$

Puisque h est continue dans \mathbb{R} , il est uniformément continue sur un intervalle réel fini, et par conséquent, en tant que $n \rightarrow \infty$,

$$|h(x) - (h * \alpha_n)(x)| \leq \sup \{ |h(x - y) - h(x)| : x \in [a, b], |y| \leq 1/n \} \rightarrow 0 .$$

Nous avons effectivement montré ici que \mathcal{C}^∞ , qui est un sous-ensemble de \mathcal{C}^2 , est dense dans $\mathcal{C}([a, b])$ au sens de la norme sup, ce qui est plus que ce que nous nous proposons de faire. Par conséquent, il existe un entier n tel que

$$\|h - h * \alpha_n\| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N$$

En choisissant la fonction g dans (3.28) d'être $h * \alpha_N$, nous obtenons

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| + \|h - g\| < 2\varepsilon \quad (3.29)$$

pour tout $f \in L^2[a, b]$. En utilisant les inégalités de triangle et de Bessel, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \right\| &\leq \|f - g\| + \left\| g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k \right\| + \left\| \sum_{k=0}^n \langle g - f, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \\ &\leq 2\|f - g\| + \left\| g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k \right\|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En vue du théorème de Weierstrass (M - Test), nous pouvons faire $\|g - \sum_{k=0}^n \langle g, \psi_k \rangle \psi_k\| < \varepsilon$ en choisissant n assez grand, tel que $n \geq M$. Ceci, combiné avec (3.29) et (3.30), signifie maintenant

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \right\| < 5\varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq \max\{N, M\}.$$

Nous avons donc démontré ce qui suit..

Théorème 3.2.4. (Complétude Théorème) Si $f \in L^2[a, b]$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \psi_k \rangle \psi_k \right\| = 0 \quad (3.31)$$

L'équation (3.31) est équivalente à l'identité

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k,$$

où l'égalité est dans $L^2[a, b]$ Il est également équivalente à la relation de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \psi_k \rangle|^2.$$

Chacune de ces équations exprime le fait que la suite (ψ_k) des fonctions propres orthonormées de T forme un ensemble complet dans $L^2[a, b]$.

Revenons au problème de SL

$$\begin{aligned} Lu + \lambda u &= 0, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) &= 0, \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) &= 0, \end{aligned}$$

où $u \in \mathcal{C}^2([a, b])$, nous avons montré que ce système d'équations est équivalent à l'équation intégrale unique

$$Tu = \mu u = -u/\lambda.$$

Les conditions aux limites déterminent une solution unique de l'équation différentielle

$$Lu + \lambda u = 0$$

par conséquent, chaque valeur propre λ de $-L$ correspond à une fonction propre unique, u . Ce qui revient à dire que chaque μ valeur propre de T correspond à une fonction propre unique, u . Par (3.24), $1/|\lambda_n| = |\mu_n| \rightarrow 0$, et il résulte du (3.2.1) que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Réintroduire la fonction de poids ρ , nous arrivons donc au théorème fondamental suivant.

Théorème 3.2.5. *Supposons que $p', r, \rho \in \mathcal{C}([a, b])$, et $p, \rho > 0$ sur $[a, b]$, le problème SL de valeurs propres défini par les équations (3.10) à (3.12) a une suite infinie de valeurs propres réelles*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

tels que $\lambda_n \rightarrow \infty$. pour chaque valeur propre λ_n correspond une seule fonction propre φ_n . La suite de fonctions propres ($\varphi_n : n \in \mathbb{N}_0$) forme une base orthogonale de $L^2_\rho(a, b)$.

Remarque 3.2.2. 1. *Si les conditions aux limites séparées (3.11) et (3.12) sont remplacées par les conditions périodiques*

$$u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

il est facile de vérifier que (3.10) est satisfaite à condition que $p(a) = p(b)$. L'opérateur défini par (3.9) est alors auto-adjoint et ses valeurs propres sont bornées ci-dessous par

$$-\max\{|r(x)| : a \leq x \leq b\}.$$

Les résultats obtenus ci-dessus restent valables, sauf que l'unicité de la fonction propre pour chaque valeur propre n'est pas garantie.

2. On peut également montrer que chaque fonction propre φ_n a exactement n zéros dans l'intervalle $[a, b]$. (voir Sec 2.2.2) Les résultats obtenus ci-dessus restent valables, sauf que l'unicité de la fonction propre pour chaque valeur propre n'est pas garantie.

Exemple 3.2.2. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres de l'équation

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

sous réserve de l'une des paires de conditions aux limites séparées

$$\begin{aligned} (i) \quad u(0) &= u(l) = 0; \\ (ii) \quad u'(0) &= u'(l) = 0. \end{aligned}$$

L'opérateur différentiel est formellement auto-adjoint et les conditions aux limites (i) et (ii) sont homogènes et séparés, afin que les deux théorèmes (3.2.2) et (3.2.3) s'appliquent. Nous avons déjà vu dans l'exemple (3.2.1) que, dans les conditions aux limites (i), l'équation

$$u'' + \lambda u = 0$$

n'a que des valeurs propres positives.

Dans les conditions aux limites (ii) il est facile de montrer qu'il n'a pas de valeurs propres négatives. Ceci est compatible avec la remarque (3.2.2) dans la mesure où $r(x) \equiv 0$.

Solution 3.2.1. Si $\lambda > 0$, la solution générale de l'équation différentielle est

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda x} + c_2 \sin \sqrt{\lambda x} \quad (3.32)$$

appliquons la conditions (i) on obtient

$$\begin{aligned} u(0) &= c_1 = 0, \\ u(l) &= c_2 \sin \sqrt{\lambda l} = 0 \implies \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

les valeurs propres λ_n tendent vers ∞ , et les fonctions propres correspondant

$$u_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$$

sont orthogonales dans $L^2[0, l]$, car, pour tout $m \neq n$,

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos(m-n) \frac{\pi}{l} x - \cos(m+n) \frac{\pi}{l} x \right] \, dx = 0$$

alors la suite de fonctions

$$\sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N},$$

est total dans $L^2[0, l]$.

Maintenant nous nous tournons vers les conditions aux limites (ii) Si $\lambda = 0$, la solution générale de $u'' = 0$ est

$$u(x) = c_1 x + c_2,$$

et les conditions (ii) impliquent $c_1 = 0$. u est donc une constante, que nous pouvons prendre 1. Ainsi $\lambda_0 = 0$, $u_0(x) = 1$ est la première paire de fonction propre-valeurs propres. Mais si $\lambda > 0$, la première des conditions (ii) appliquées à (3.32) donne $u'(0) = \sqrt{\lambda} c_2 = 0$, donc $c_2 = 0$. La condition en $x = l$ donne

$$\begin{aligned} u'(l) &= -c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \implies \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \\ u_n(x) &= \cos \frac{n\pi}{l} x \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres et les fonctions propres dans des conditions (ii) sont

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, \quad u_n(x) = \cos \frac{n\pi}{l} x \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

encore une fois, nous pouvons vérifier que la suite $(\cos \frac{n\pi}{l} x : n \in \mathbb{N}_0)$ est orthogonal dans $L^2[0, l]$, et nous concluons d'après le théorème(3.2.3) qu'il engendre également cet espace.

Selon l'exemple précédent, toute fonction $f \in L^2[0, l]$ peut être représentée par une série infinie de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (3.33)$$

ou de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.34)$$

l'égalité dans chaque cas étant dans $L^2[0, l]$. Notons que ces deux représentations de $f(x)$ ne donnent pas nécessairement la même valeur en tout point de $[0, l]$.

Par exemple, en $x = 0$, on obtient

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

dans la première représentation et $f(0) = 0$ dans le second. Cela est dû au fait que les équations (3.33) et (3.34) ne sont pas des égalités ponctuelles mais $L^2[0, l]$

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \right\| = 0 \quad \text{et} \quad \left\| f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right\| = 0 \quad ,$$

où les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les formules

$$a_n = \frac{\langle f, \cos(\frac{n\pi x}{l}) \rangle}{\|\cos(\frac{n\pi x}{l})\|^2}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{\langle f, \sin(\frac{n\pi x}{l}) \rangle}{\|\sin(\frac{n\pi x}{l})\|^2}, \quad 0, n$$

car

$$\begin{aligned} \left\| \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\|^2 &= \int_0^l \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} l, & n = 0 \\ l/2, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \\ \left\| \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\|^2 &= \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

les coefficients dans les développements (3.33) et (3.34) sont donc donnés par

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad (3.35)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.36)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad (3.37)$$

Considérons, par exemple, la fonction constante définie sur $[0, l]$ par $f(x) = 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\langle 1, \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\rangle = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Par conséquent $b_n = (2/n\pi)(1 - (-1)^n)$ et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \end{aligned}$$

Comme indiqué plus haut, cette égalité doit, bien sûr, être comprise comme

$$\left\| 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \right\| = 0,$$

ou

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^k}{k} \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \xrightarrow{L^2} 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

D'autre part, étant donné que

$$\begin{aligned} \left\langle 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right\rangle &= \int_0^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \in \mathbb{N} \\ l, & n = 0 \end{cases}, \\ \|1\|^2 &= l, \end{aligned}$$

les coefficients a_n dans l'expression (3.33) disparaissent tous à l'exception de la première, qui est $a_0 = 1$, donc la série se réduit au terme simple 1. Mais cela est à prévoir, parceque la fonction f coïncide avec le premier élément de la suite

$$\left(\cos \frac{n\pi x}{l} : n \in \mathbb{N}_0 \right) = \left(1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots \right)$$

De la même manière, sur la base du théorème (3.2.2), la suite de fonctions propres pour le problème de (SL) décrite dans (3.2.2) est total dans $L^2_\rho(1, b)$, où $\rho(x) = 1/x$. Ainsi, toute fonction $f \in L^2_\rho(1, b)$ peut être étendu à une série de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left(\frac{n\pi}{\log b} \log x \right),$$

où

$$b_n = \frac{\left\langle f, \sin \left(\frac{n\pi \log x}{\log b} \right) \right\rangle_\rho}{\left\| \sin \left(\frac{n\pi \log x}{\log b} \right) \right\|_\rho^2}$$

3.2.6 Problème singulier SL

Nous terminons cette section par un bref mot sur le problème de SL singulier. dans l'équation

$$Lu + \lambda \rho u = (pu')' + ru + \lambda \rho u = 0, \quad a < x < b,$$

où p est lisse et ρ est positive et continue, nous avons jusqu'ici supposé que p ne s'annule pas sur l'intervalle fermé, borné $[a, b]$ tout assouplissement de ces conditions conduit à un problème singulier.

Définition 3.2.3. On appelle problèmes singuliers de SL un problème qui vérifie l'une des situations suivantes.

1. $p(x) = 0$ pour $x = a$ et / ou $x = b$.
2. L'intervalle (a, b) est infini.

Dans le premier cas d'expression $\rho p(f'g - fg')$ s'annule au point final où $p = 0$, donc pas de condition à la limite est nécessaire à ce point de terminaison. En particulier, si $p(a) = p(b) = 0$ et la limite de u en a et b existe, alors l'équation

$$\rho p(f'g - fg') \Big|_a^b = 0 \tag{3.38}$$

est satisfait et L est auto-adjoint. Si $[a, b]$ est infini, alors il serait nécessaire pour $\sqrt{\rho}u(x)$ tendent vers 0 quand $|x| \rightarrow \infty$ pour que u se trouvent en L^2_ρ .

Dans un premier temps, l'expression $\rho p(f'g - fg')$ s'annule au point final où $p = 0$, donc aucune condition aux limites n'est requise à ce point final. En particulier, si $p(a) = p(b) = 0$ et les limites de u à a et b existent, l'équation

$$\rho p(f'g - fg') \Big|_a^b = 0 \tag{3.39}$$

est satisfaite et L est auto-adjoint. Si (a, b) est infinie, alors il serait nécessaire pour $\sqrt{\rho}u(x)$ tend vers 0 quand $|x| \rightarrow \infty$ pour que u se trouvent en L^2_ρ . Pour un traitement plus approfondi du sujet, le lecteur est référé à [15] et [18].

Chapitre 4

Exemples fondamentales

En ce chapitre nous sommes intéressés à prolonger la méthode de séparation des variables à une plus grande classe des problèmes des équations partielles. On étudiera les deux types de problèmes au moyen de leurs modèles mathématiques qui sont les équations aux dérivées partielles [15], [2] et [12] suivantes :

(a) L'équation des ondes pour $u(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

avec deux conditions initiales (C.I.) :

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y), \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

et les conditions au bord (C.B.), appelées aussi conditions aux limites (C.L.) :

$$u(x, y, t) = 0.$$

(b) L'équation de la chaleur pour $u(x, y, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \nabla^2 u = 0,$$

avec une seule condition initiale :

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

et les conditions au bord :

$$u(x, y, t) = 0.$$

4.1 Développement selon une famille de fonctions orthogonales

Soit f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$. On note le *produit scalaire* de f et g :

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (4.1)$$

et la norme de f :

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}. \quad (4.2)$$

4.2 Problème des ondes en dimension 1

4.2.1 Résolution par séparation des variables.

Considérons le problème de la corde vibrante de longueur L fixée aux bouts, modélisé par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.3)$$

avec les conditions aux limites (*C.L.*) :

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (4.4)$$

et les conditions initiales (*C.I.*) :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La résolution de ce problème par séparation des variables comporte trois étapes :

Étape 1 : La séparation des variables x et t , ce qui donne 2 équations différentielles ;

Étape 2 : Les solutions simples u_n satisfaisant les (*C.L.*) (4.4) ;

Étape 3 : La superposition $u = \sum u_n$ satisfaisant les (*C.I.*) (4.5).

Étape 1 : Séparation des variables.

Posons

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

et substituons les dérivées suivantes :

$$u_{tt} = FG', \quad u_{xx} = F''G$$

dans l'E.D.O. (4.3) :

$$FG' = c^2 F''G.$$

En divisant par $c^2 FG$, on a :

$$\frac{1}{c^2} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k, \quad k \text{ une constante.}$$

On obtient ainsi deux équations différentielles, l'une pour $F(x)$ et l'autre pour $G(t)$:

$$F''(x) - kF(x) = 0, \quad (4.6)$$

$$G'(t) - c^2 kG(t) = 0, \quad (4.7)$$

où k est à déterminer au moyen des conditions aux limites (4.4).

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres.

On résout (4.6) et (4.7) tel que $u = FG$ satisfasse (4.4) :

$$u(0, t) = F(0)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t,$$

$$u(L, t) = F(L)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t.$$

On exclut le cas $G(t) \equiv 0$, correspondant à la solution nulle sans intérêt ($u \equiv 0$).

Donc

$$F(0) = 0, \quad F(L) = 0. \quad (4.8)$$

Les conditions aux limites (4.8) pour F déterminent les valeurs admissibles de la constante k dans (4.6).

(i) Si $k = 0$, (4.6) admet la solution générale :

$$F(x) = ax + b.$$

Donc $F(0) = 0 \Rightarrow b = 0$ et $F(L) = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow a = 0$; ce qui implique que $u \equiv 0$.

(ii) Si $k = \mu^2 > 0$, (4.6) admet la solution générale :

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

De nouveau $F(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$ et $F(L) = 0 \Rightarrow Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0$.

On a donc le système homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dont le déterminant est non nul :

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} = e^{-\mu L} - e^{\mu L} \neq 0$$

puisque $\mu L \neq 0$. Donc l'unique solution est la solution nulle :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce cas est aussi sans intérêt $u \equiv 0$.

(iii) Si $k = -p^2 < 0$, (4.6) admet la solution générale :

$$F(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Alors $F(0) = 0 \Rightarrow A \cos 0 = 0 \Rightarrow A = 0$ et $F(L) = 0 \Rightarrow B \sin pL = 0$. Or $B \neq 0$, sinon $u \equiv 0$; donc $\sin pL = 0$, c'est-à-dire $pL = n\pi$ ou, pour indiquer la dépendance de p sur n , on écrit :

$$p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisqu'à l'étape suivante la constante arbitraire B sera multipliée par d'autres constantes arbitraires, B_n et B_n^* , on peut prendre $B = 1$; on a alors la suite de solutions

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.9)$$

Maintenant, on résout (4.7) avec

$$k = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$G'_n + \lambda_n^2 G_n = 0,$$

où

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \quad (4.10)$$

sont les valeurs propres du problème (4.3)–(4.4). La solution générale de cette dernière équation différentielle est

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t.$$

Donc les fonctions propres :

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.11)$$

sont des solutions de l'E.D.O. (4.3) qui satisfont les C.L. (4.4).

Puisque les fonctions propres (4.5) admettent les zéros suivants :

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \text{ pour } x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}L,$$

on voit que le $n^{\text{ème}}$ mode normal admet $n - 1$ noeuds dans l'intervalle $(0, L)$, c'est-à-dire $n - 1$ points fixes où la corde est stationnaire.

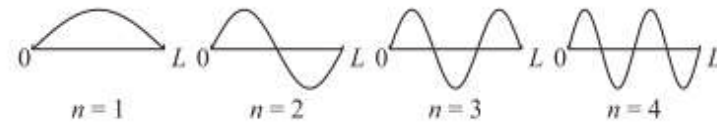


fig.4. Les quatre premiers modes normaux.

Étape 3 : Superposition des fonctions propres. Pour satisfaire les conditions initiales (4.5), on superpose les solutions simples (4.11) du problème aux limites homogènes (toute combinaison linéaire (convergente) de solutions est aussi une solution). Pour satisfaire les conditions initiales (4.5), on cherche une solution qui est une somme (convergente) de fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (4.12)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Puisque chacune des fonctions propres (4.11) est solution de (4.3) – (4.4), alors, la somme (4.12) est aussi une solution de (4.11) – (4.4)

On détermine les B_n et les B_n^* . En $t = 0$, $u(x, 0)$ est une superposition de sinus :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Les B_n sont donc les coefficients de la série de Fourier de sinus de $f(x)$. ou B_n est donnée par

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx. \quad (4.13)$$

De même, en $t = 0$, $u_t(x, 0)$ est aussi une superposition de sinus :

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Alors les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de la série de Fourier de sinus de $g(x)$:

$$\lambda_n B_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx,$$

c'est-à-dire

$$B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx. \quad (4.14)$$

Par(4.12) , la solution du problème de la corde vibrante (4.3), (4.4) et (4.4) en série de

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x, \end{aligned}$$

où les B_n et les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de Fourier des conditions initiales $f(x)$ et $g(x)$ développées en série de sinus.

Exemple 4.2.1. Résoudre le problème de la corde vibrante :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

fixée aux bouts (C.L.) :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

de déplacement initial triangulaire (C.I.) :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ &= \begin{cases} 2kx/L, & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ 2k(L-x)/L, & \frac{L}{2} < x < L, \end{cases} \end{aligned}$$

et de vitesse initiale (C.I.) :

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= g(x) \\ &= 13 \sin \frac{3\pi}{L}x + 2 \sin \frac{4\pi}{L}x. \end{aligned}$$

en effet, puisque la corde est de longueur L et est fixée aux bouts, les fonctions propres (4.11) sont :

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L}x$$

et les valeurs propres (4.10) sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Par superposition, la solution (4.12) satisfaisant les (C.I.) est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L}x.$$

En $t = 0$, on a :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

On voit que les B_n sont les coefficients du développement de $f(x)$ en série de Fourier de sinus. Alors :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L}x dx + \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx \right] \end{aligned}$$

On intègre les deux intégrales par parties. La première devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= -\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour intégrer la seconde intégrale on ne sépare pas le facteur $(L-x)$ puisque celui-ci s'annule à la limite supérieure $x=L$; donc

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= -\frac{L}{n\pi} (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_{L/2}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{L/2}^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{4k}{L^2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} 2 \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \frac{8k}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ \frac{8k}{\pi^2 n^2} & n = 1, 5, 9, 13, \dots, \\ -\frac{8k}{\pi^2 n^2} & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Donc, le développement de $f(x)$ est

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x - \dots \right).$$

Pour déterminer les B_n^* on dérive $u(x, t)$ par rapport à t :

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n B_n \sin \lambda_n t + \lambda_n B_n^* \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Alors, en $t = 0$,

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= 13 \sin \frac{3\pi}{L} x + 2 \sin \frac{4\pi}{L} x. \end{aligned}$$

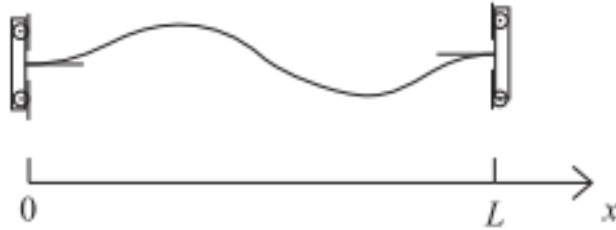


fig.5. Corde vibrante mobile aux bouts.

Comme le 3^{ème} membre est déjà sous forme de série de Fourier de sinus, on identifie les coefficients :

$$\lambda_1 B_1^* = 0 \Rightarrow B_1^* = 0,$$

$$\lambda_2 B_2^* = 0 \Rightarrow B_2^* = 0,$$

$$\lambda_3 B_3^* = 13 \Rightarrow B_3^* = \frac{13}{\lambda_3},$$

$$\lambda_4 B_4^* = 2 \Rightarrow B_4^* = \frac{2}{\lambda_4},$$

$$\lambda_n B_n^* = 0 \Rightarrow B_n^* = 0, \quad n = 5, 6, \dots$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{8k}{\pi^2} \cos \lambda_1 t \sin \frac{\pi}{L} x + \left(-\frac{8k}{\pi^2} \cos \lambda_3 t + \frac{13}{\lambda_3} \sin \lambda_3 t \right) \sin \frac{3\pi}{L} x \\ &+ \frac{2}{\lambda_4} \sin \lambda_4 t \sin \frac{4\pi}{L} x + \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{5^2} \cos \lambda_5 t \sin \frac{5\pi}{L} x - \frac{1}{7^2} \cos \lambda_7 t \sin \frac{7\pi}{L} x \right. \\ &\left. + \frac{1}{9^2} \cos \lambda_9 t \sin \frac{9\pi}{L} x - \frac{1}{11^2} \cos \lambda_{11} t \sin \frac{11\pi}{L} x + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\text{où } \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

4.2.2 Trois problèmes aux valeurs et fonctions propres différentes.

On considère trois exemples de cordes vibrantes donnant lieu à des fonctions propres et à des valeurs propres différentes.

Exemple 4.2.2. Résoudre le problème d'une corde vibrante mobile aux bouts

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, & t \geq 0 \end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \neq \text{const.} \\ u_t(x, 0) &= g(x) \neq \text{const.}, 0 < x < L. \end{aligned}$$

Preuve 4.2.1. On sépare les variables :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t), \\ F''(x) &= kF(x), \\ G'(t) &= c^2 kG(t). \end{aligned}$$

On considère individuellement les 3 cas possibles, $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$. Le cas $k = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b, \\ F'(0) = a = 0 &\Rightarrow F(x) = b \Rightarrow F'(L) = 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$G(t) = ct + d,$$

on obtient la solution

$$u(x, t) = ct + d \quad (b = 1).$$

Mais

$$u(x, 0) = d = \text{const.} \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = c = \text{const.}$$

ce qui contredit la restriction sur les conditions initiales. Dans ce cas, la corde ne vibre pas mais elle s'éloigne à la vitesse c .

Le cas $k = p^2 > 0$. On a :

$$F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Les conditions aux limites produisent le système linéaire homogène en A et B :

$$\begin{aligned} F'(0) &= pA - pB = 0, \\ F'(L) &= pAe^{pL} - pBe^{-pL} = 0. \end{aligned}$$

Puisque le déterminant du système est non nul :

$$\begin{vmatrix} p & -p \\ pe^{pL} & -p e^{-pL} \end{vmatrix} = p[e^{pL} - e^{-pL}] \neq 0,$$

alors l'unique solution est

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc $u \equiv 0$. Ces deux cas sont sans intérêt.

Le cas $k = -p^2 < 0$. On a

$$F(x) = a \cos px + b \sin px,$$

$$G(t) = \alpha \cos cpt + \beta \sin cpt.$$

On détermine les fonctions propres et les valeurs propres au moyen des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= (-ap \sin px + bp \cos px)|_{x=0} G(t) = 0, & t \geq 0 \\ &\Rightarrow bp = 0 \Rightarrow b = 0; \\ u_x(L, t) &= -ap \sin(pL)G(t) = 0, & t \geq 0 \\ &\Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p_n = \frac{n\pi}{L}, & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres sont

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors,

$$F_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

et

$$G_n(t) = \alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t.$$

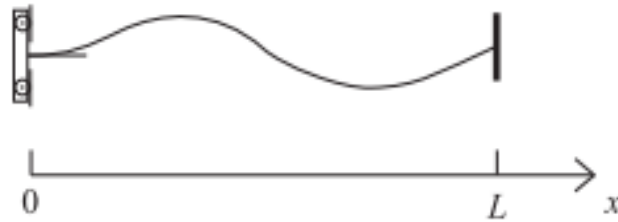


fig.6. Corde vibrante mobile au bout $x = 0$ et fixée au bout $x = L$.

Les fonctions propres sont

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On satisfait les conditions initiales par superposition des fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

avec

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{L} x = f(x),$$

$$B_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \cos \frac{n\pi}{L} x \\ &= g(x), \end{aligned}$$

$$B_n^* = \frac{1}{\lambda_n} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exemple 4.2.3. Résoudre le problème d'une corde vibrante de longueur L mobile au bout $x = 0$ et fixée au bout $x = L$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 7 \cos \frac{5\pi}{2L} x, \\ u_t(x, 0) &= 2 \cos \frac{7\pi}{2L} x, & 0 < x < L. \end{aligned}$$

Preuve 4.2.2. On sépare les variables :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t), \\ F''(x) &= kF(x), \\ G'(t) &= c^2 k G(t). \end{aligned}$$

De nouveau, on considère individuellement les 3 cas possibles, $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.
Le cas $k = 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b, \\ F'(0) &= a = 0, \\ F(L) &= b = 0. \end{aligned}$$

Le cas $k = p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= Ae^{px} + Be^{-px}, \\ F'(0) &= pA - pB = 0, \\ F(L) &= Ae^{pL} + Be^{-pL} = 0, \\ \begin{vmatrix} p & -p \\ e^{pL} & e^{-pL} \end{vmatrix} &= p[e^{-pL} + e^{pL}] \neq 0; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ces deux cas sont sans intérêt puisque $u \equiv 0$.

Le cas $k = -p^2 < 0$:

$$F(x) = A \cos px + B \sin px,$$

$$F'(0) = pB = 0,$$

$$F(L) = A \cos pL = 0;$$

alors

$$\begin{aligned} pL &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

on écrit donc :

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors,

$$F_n(x) = A_n \cos \frac{(2n-1)n\pi}{2L}x$$

et

$$G_n(t) = \alpha_n \cos cp_n t + \beta_n^* \sin cp_n t$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont, respectivement :

$$\lambda_n = \frac{c(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On superpose les fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$



fig.7. Corde vibrante fixée au bout $x = 0$ et mobile au bout $x = L$.

pour satisfaire les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 7 \cos \frac{5\pi}{2L} x \\ &= 7 \cos \frac{(2 \times 3 - 1)\pi}{2L} x. \end{aligned}$$

Puisque, les fonctions $\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$ sont orthogonales sur $[0, L]$, on peut identifier les coefficients :

$$\begin{aligned} B_3 &= 7, \\ B_n &= 0, \quad n = 1, 2, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 2 \cos \frac{7\pi}{2L} x \\ &= 2 \cos \frac{(2 \times 4 - 1)\pi}{2L} x, \end{aligned}$$

et par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} \lambda_4 B_4^* &= 2, \\ \lambda_n B_n^* &= 0, \quad n \neq 4. \end{aligned}$$

La solution est donc

$$u(x, t) = 7 \cos \lambda_3 t \cos \frac{5\pi}{2L} x + \frac{2}{\lambda_4} \sin \lambda_4 t \cos \frac{7\pi}{2L} x.$$

Exemple 4.2.4. Résoudre le problème d'une corde vibrante de longueur L fixée au bout $x = 0$ et mobile au bout $x = L$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 3 \sin \frac{7\pi}{2L} x, \\ u_t(x, 0) &= 17 \sin \frac{3\pi}{2L} x, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Preuve 4.2.3. On sépare les variables :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t), \\ F''(x) &= kF(x), \\ G'(t) &= c^2 k G(t). \end{aligned}$$

Si $k = 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b, \\ F(0) &= b = 0, \\ F'(L) &= a = 0; \end{aligned}$$

si $k = p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= Ae^{px} + Be^{-px}, \\ F(0) &= A + B = 0, \\ F^{pL} - pBe^{-pL} &= 0, \\ pe^{pL} - pe^{-pL} &= -p[e^{-pL} + e^{pL}] \neq 0; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0;$$

donc ces deux cas sont sans intérêt. Enfin, si

$k = -p^2 < 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos px + B \sin px, \\ F(0) &= A = 0, \\ F'(L) &= pB \cos pL = 0; \\ pL &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \end{aligned}$$

$$= (2n - 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots ;$$

donc

$$p_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2L}.$$

Alors,

$$F_n(x) = A_n \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x$$

et

$$G_n(t) = \alpha_n \cos cp_n t + \beta_n \sin cp_n t.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont, respectivement :

$$\lambda_n = \frac{c(2n - 1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On superpose les fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

pour satisfaire les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x \\ &= 3 \sin \frac{7\pi}{2L} x \\ &= 3 \sin \frac{(2 \times 4 - 1)\pi}{2L} x. \end{aligned}$$

Puisque, , les fonctions $\sin(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x)$ sont orthogonales sur $[0, L]$, on peut identifier les coefficients :

$$B_4 = 3,$$

$$B_n = 0, \quad n \neq 4.$$

De même,

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 17 \sin \frac{3\pi}{2L} x \\ &= 17 \sin \frac{(2 \times 2 - 1)\pi}{2L} x, \end{aligned}$$

et par identification des coefficients :

$$\lambda_2 B_2^* = 17,$$

$$\lambda_n B_n^* = 0, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots$$

La solution est donc

$$u(x, t) = 3 \cos \lambda_4 t \sin \frac{7\pi}{2L} x + \frac{17}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t \sin \frac{3\pi}{2L} x.$$

4.3 Problème de la chaleur en dimension 1

Considérons une tige mince de longueur L , de conductivité thermique k , de chaleur spécifique σ et de densité linéaire ρ , isolée sur sa longueur .



fig.8. Tige mince de longueur L isolée sur sa longueur.

D'après la loi newtonienne de l'écoulement de la chaleur, la température de la tige $u(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad (4.15)$$

$$c^2 = \frac{k}{\sigma \rho} \quad (4.16)$$

Trouver $u(x, t)$ si la température aux bouts est zéro (C.L.) :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.17)$$

et la température initiale (C.I.) est

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \quad (4.18)$$

Preuve 4.3.1. (Trois étapes)

Étape 1. La séparation de variables. Posons

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

dans (4.15) ; alors les équations

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F'(x)}{F(x)} = -p^2 < 0$$

nous donnent deux équations différentielles découplées :

$$F'' + p^2 F(x) = 0, \quad (4.19)$$

$$\dot{G}(t) + c^2 p^2 G(t) = 0. \quad (4.20)$$

Puisque la température de la tige est nulle aux deux bouts, on sait déjà que $-p^2 = 0$ ou > 0 implique que $u \equiv 0$.

étape2. Les fonctions propres $u_n(x, t)$ sont les solutions non nulles de l'E.D.O. (4.15) et des (C.L).(4.17) .

De (4.19) on obtient

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

et de (4.17)

$$F(0) = A = 0$$

et

$$\begin{aligned} F(L) &= B \sin pL = 0 \\ \Rightarrow pL &= n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

D'où les valeurs de p :

$$p_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Puisque B sera multiplié par la suite par une constante arbitraire, on peut prendre $B = 1$. Donc

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

De même, de (4.20) on a

$$\begin{aligned} \dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 G_n(t) &= 0, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L}, \end{aligned}$$

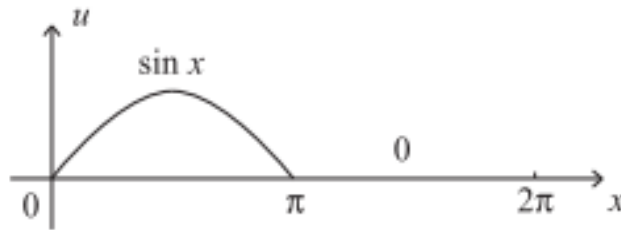


fig.9. Condition initiale $u(x, 0)$ pour l'exemple 2.5

d'où

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}.$$

On a donc les fonctions propres et les valeurs propres :

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Étape 3. On satisfait la condition initiale par superposition des fonctions propres

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

pour que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

Puisque $u(x, 0)$ est représenté par le développement de FOURIER de sinus de la fonction $f(x)$, alors les coefficients sont donnés par la formule :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Exemple 4.3.1. *Trouver la température $u(x, t)$ d'une tige de longueur $L = 2\pi$, isolée latéralement, aux conditions aux limites nulles :*

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et à la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Prendre $c^2 = 25$.

Preuve 4.3.2. *Puisque la température est nulle aux bouts,*

on sait que les valeurs propres sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{5n\pi}{2\pi} = \frac{5n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et que la solution est la superposition des fonctions propres correspondantes : (V. figure 8.) Puisque la température est nulle aux bouts,

on sait que les valeurs propres sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{5n\pi}{2\pi} = \frac{5n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et que la solution est la superposition des fonctions propres correspondantes : Puisque $u(x, 0)$ est représenté par le développement de FOURIER de sinus de la fonction $f(x)$, alors les coefficients sont donnés par la formule :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{2\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin \frac{n}{2} x dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [-\cos(x+y) + \cos(x-y)],$$

on a, si $n \neq 2$,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[-\cos\left(\frac{n}{2} + 1\right)x + \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right)x \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{2}{n+2} \sin \frac{n+2}{2}x \Big|_0^\pi + \frac{2}{n-2} \sin \frac{n-2}{2}x \Big|_0^\pi \right] \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+2} \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi + \frac{1}{n-2} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right)\pi \right] \end{aligned}$$

Donc pour n pair, $n \neq 2$:

$$B_n = 0.$$

Pour $n = 4k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, (c'est-à-dire pour $n = 1, 5, 9, \dots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+2}(-1) + \frac{1}{n-2}(-1) \right] \\ &= -\frac{4}{\pi(n^2 - 4)} \end{aligned}$$

et pour $n = 4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$, (c'est-à-dire pour $n = 3, 7, 11, \dots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+2}(+1) + \frac{1}{n-2}(+1) \right] \\ &= \frac{4}{\pi(n^2 - 4)} \end{aligned}$$

Enfin, pour $n = 2$,

$$B_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (-\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2}.$$

La solution est donc

$$u(x, t) = -\frac{4}{\pi(-3)} \sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{-25t/4} + \frac{1}{2} \sin x e^{-25t} + \frac{4}{5\pi} \sin\left(\frac{3x}{2}\right)e^{-225t/4} - \dots$$

Exemple 4.3.2. Résoudre le problème de la chaleur d'une tige avec conditions aux limites non homogènes modélisé par L'équation aux dérivées partielles :

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (4.21)$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0, t) = A, \quad (4.22)$$

$$u(L, t) = B, \quad t > 0, \quad (4.23)$$

et la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \quad (4.24)$$

Preuve 4.3.3. *On transforme le problème en deux problèmes connus. Exprimons $u(x, t)$ comme la somme de deux fonctions $v(x, t)$ et $\psi(x)$,*

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x),$$

telles que v et ψ sont solutions de (4.21) et v satisfait les conditions aux limites homogènes

$$v(0, t) = 0 \text{ et } v(L, t) = 0.$$

Alors (4.21) devient

$$v_t = c^2 v_{xx} + c^2 \psi',$$

et de (4.22) on a :

$$0 = v(0, t) = u(0, t) - \psi(0) = A - \psi(0) \Rightarrow \psi(0) = A$$

et

$$0 = v(L, t) = u(L, t) - \psi(L) = B - \psi(L) \Rightarrow \psi(L) = B.$$

Pour que v soit solution de (4.21) il faut que

$$\psi'' = 0;$$

donc

$$\psi(x) = \alpha x + \beta.$$

On détermine α et β au moyen des conditions aux limites sur ψ :

$$\begin{aligned} \psi(0) = \beta = A &\Rightarrow \beta = A, \\ \psi(L) = \alpha L + A = B &\Rightarrow \alpha = \frac{B - A}{L}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\psi(x) = \frac{B-A}{L}x + A.$$

Enfin, de la condition initiale (4.24), on obtient

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \psi(x) \\ &= f(x) - \frac{B-A}{L}x - A \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L}x. \end{aligned}$$

Puisque v est solution de (4.21) aux conditions aux limites $v = 0$ en $x = 0$ et en $x = L$, alors

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L}x e^{-\lambda_n^2 t}, \\ \lambda_n &= \frac{cn\pi}{L}, \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \frac{B-A}{L}x - A \right] \sin \frac{n\pi}{L}x dx \end{aligned}$$

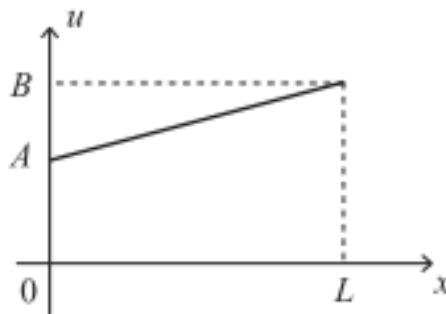


fig.10.état stationnaire

La solution est donc :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L}x e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{B-A}{L}x + A.$$

La série au second membre représente l'état transitoire et les deux derniers termes représentent l'état stationnaire .

Exemple 4.3.3. Résoudre le problème de la chaleur d'une tige de longueur L dans un milieu ambiant à 0°C , modélisé par le problème

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

aux valeurs aux limites

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u_x(L, t) &= -hu(L, t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

et aux valeurs initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Preuve 4.3.4. La solution générale de l'équation de la chaleur

$$u(x, t) = e^{-c^2 \mu^2 t} (A \cos \mu x + B \sin \mu x),$$

obtenue par séparation des variables, doit satisfaire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$:

$$u(0, t) = A = 0$$

et

$$\begin{aligned} u_x(L, t) &= e^{-c^2 \mu^2 t} (\mu B \cos \mu L) \\ &= -he^{-c^2 \mu^2 t} B \sin \mu L, \end{aligned}$$

d'où

$$\tan(\mu L) = -\frac{\mu}{h}.$$

Posons

$$\alpha = \mu L, \Rightarrow \mu = \frac{\alpha}{L}.$$

Alors α est solution de l'équation transcendante

$$\tan \alpha = -\frac{\alpha}{hL}.$$

On approxime les racines de cette équation dans la figure (4.13) On a donc

$$\mu_n = \frac{\alpha_n}{L}, \quad \lambda_n = c\mu_n = \frac{c\alpha_n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les fonctions propres sont

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right)e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Puisque les conditions aux limites sont homogènes de degré 0 en $x = 0$ et de degré 1 en $x = L$, on obtient la solution par superposition :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right)e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Celle-ci doit satisfaire la condition initiale

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\alpha_n}{L}x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

On détermine les B_n au moyen du développement de Fourier de $f(x)$ valide parce que les fonctions

$$\sin \frac{\alpha_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sont orthogonales sur $[0, L]$, c'est-à-dire

$$\int_0^L \sin \frac{\alpha_n}{L}x \sin \frac{\alpha_m}{L}x dx = 0, \quad m \neq n. \quad (4.25)$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} B_m \int_0^L \sin^2 \frac{\alpha_m}{L}x dx &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin \frac{\alpha_n}{L}x \sin \frac{\alpha_m}{L}x dx \\ &= \int_0^L f(x) \sin \frac{\alpha_m}{L}x dx. \end{aligned}$$

Pour démontrer (4.25) on pose

$$y_n = \sin \frac{\alpha_n}{L}x;$$

alors :

$$\int_0^L y_m y_n'' dx + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 \int_0^L y_n y_m dx = \int_0^L y_m (y_n'' + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 y_n) dx = 0,$$

et, par intégration par parties,

$$y_n y_n' \Big|_0^L - \int_0^L y_n' y_n' dx + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 \int_0^L y_n y_n dx = 0,$$

$$y_m y_m' \Big|_0^L - \int_0^L y_m' y_m' dx + \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2 \int_0^L y_m y_m dx = 0.$$

La différence entre les deux termes intégrés est

$$y_m(L) y_m'(L) - y_n(L) y_n'(L) = \frac{\alpha_n}{L} \sin \alpha_m \cos \alpha_n - \frac{\alpha_m}{L} \sin \alpha_n \cos \alpha_m,$$

c'est-à-dire, après division par $\cos \alpha_m \cos \alpha_n$,

$$\frac{1}{L} (\alpha_n \tan \alpha_m - \alpha_m \tan \alpha_n) = \frac{\alpha_n}{L} \left(-\frac{\alpha_m}{hL}\right) - \frac{\alpha_m}{L} \left(-\frac{\alpha_n}{hL}\right) = 0,$$

d'où

$$\left[\left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2 \right] \int_0^L \sin \frac{\alpha_n}{L} x \sin \frac{\alpha_m}{L} x dx = 0.$$

Si $m \neq n$, alors $\alpha_n \neq \alpha_m$ et la dernière intégrale est nulle, ce qui démontre

l'orthogonalité en question.

Donc, avec $m = n$,

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin \frac{\alpha_n}{L} x dx}{\int_0^L \sin^2 \frac{\alpha_n}{L} x dx}$$

où

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2 \frac{\alpha_n}{L} x dx &= \frac{1}{2} L - \frac{L}{4\alpha_n} \sin 2\alpha_n \\ &= \frac{1}{2} L - \frac{L}{2\alpha_n} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n} \cos^2 \alpha_n \\ &= \frac{1}{2} L - \frac{L}{2\alpha_n} \left(-\frac{\alpha_n}{hL}\right) \cos^2 \alpha_n \\ &= \frac{Lh + \cos^2 \alpha_n}{2h} \end{aligned}$$

Les ouvrages dont on trouvera les références ci-dessous, ne sont pas tous cités dans le cours du texte. Beaucoup d'entre eux ont été une source d'inspiration pour la présentation de divers notions exposées dans ce mémoire. Ils constituent une bonne base documentaire à laquelle le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances pourra se reporter.

Bibliographie

- [1] Birkhoff, G. and G.-C. Rota, Ordinary Differential Equations, 2nd edn., John Wiley, New York, 1969.
- [2] Buck, R.C., Advanced Calculus, McGraw-Hill, 3rd edn., McGraw-Hill International, New York, 1978.
- [3] Carslaw, H.S., Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, 3rd edn., Dover, New York, 1930.
- [4] Churchill, R.V. and J.W. Brown, Fourier Series and Boundary Value Problems, 6th edn., McGraw-Hill International, New York, 2001.
- [5] Coddington, E.A. and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [6] Courant, R. and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vols I and II, Interscience Publishers, New York, 1953 and 1963.
- [7] Courant, R. and F. John, Introduction to Calculus and Analysis, vol. II, John Wiley, New York, 1974.
- [8] Folland, G.B., Fourier Analysis and Its Applications, Wadsworth, Belmont, California, 1992.
- [9] González-Velasco, E.A., Fourier Analysis and Boundary Value Problems, Academic Press, San Diego, California, 1995.
- [10] Halmos, P.R., Finite-Dimensional Vector Spaces, 2nd edn., Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1958.
- [11] Ince, E.L., Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.
- [12] John, F., Partial Differential Equations, 4th edn., Springer, New York, 1982

- [13] J.L.Lions Théories spectrale I et II.
- [14] Prem K. Kythe Green's Functions and linear differential equations Theory, Applications, and Computation, Group an Informa business, Boca Raton, FL 33487-2742 © 2011 by Taylor and Francis Group, LLC
- [15] Titchmarsh, E.C., Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations, 2nd edn., Clarendon Press, Oxford, 1962.
- [16] Tolstov, G.P., Fourier Series, Dover, New York, 1962.
- [17] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 1944.
- [18] Zettl, A., Sturm-Liouville Theory, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.