

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut ... Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, L'amour, le respect, la reconnaissance ... Aussi, c'est tout simplement que je dédie ce mémoire aux personnes les plus chers à mon coeur.

À mes chers parents :

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices permanent.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

À mes chers et adorable frères et soeurs :

Karima, Malika, Nawel, Ahmed, Farid, Nadir mon petit frère que j'adore. En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

À mes amis de toujours :

Hanaà, Amine, Keltouma, Brahim, Nacera

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble. Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

À la mémoire de mon grand-père et ma grande mère

J'aurais tant aimé que vous soyez présents. Que Dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde.

À toute La promotion 2017 d'analyse mathématique.

Remerciements

Louange à ALLAH, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait peut être. Je remercie ALLAH qui m'a orienté au chemin du savoir et les portes de la science.

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr. DJELLOULI GHOUTI**, je le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi à tout mes professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Je voudrais remercier aussi toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à mes recherches et à l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, je termine mes remerciements sans une pensée à mes parents pour tout l'amour et le réconfort ces années durant. Sans leur aide, cette recherche n'aurait pu aboutir. Mes collègues et mes proches.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Introduction à la théorie de diffusion et théorie spectrale	11
2.1	Onde et équation de Schrödinger	11
2.1.1	Onde plane	11
2.1.2	Ondes stationnaires	12
2.1.3	Equation de Schrödinger	13
2.2	Eléments de la théorie spectrale	15
2.2.1	Opérateurs autoadjoints	15
2.2.2	Calcul fonctionnel.	17
2.2.3	Opérateurs à trace.	18
3	Résolution des problèmes de Laplace et de Helmholtz unidimensionnelle	21
3.1	Particule libre	22
3.1.1	Solution de l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien	22
3.1.2	Solution de l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien non homogène	24
3.1.3	Résolvante du Hamiltonien libre	24
3.1.4	Décomposition spectrale H_0	26
3.2	Particule non libre	27
3.2.1	Résolvante du Hamiltonien complet des ondes planes	27

4	Matrices et opérateurs de diffusion	35
4.1	Matrice de transmission	35
4.1.1	Solutions de Jost	35
4.1.2	Equation d'onde	39
4.2	Matrice de diffusion	43
4.3	Opérateur de diffusion	52
5	Résonances et formules de trace	59
5.1	Résonances	59
5.2	Formules de trace	76
5.2.1	Principe des formules de traces	76
5.2.2	Analyse asymptotique des spectres.	77
5.2.3	Formules de trace	78

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de la théorie de la diffusion est de prouver l'existence d'un tel opérateur de diffusion et de lier ses propriétés à la nature du diffuseur. Dans les situations où l'opérateur de diffusion constitue la seule donnée de mouvement physiquement observable, la tâche principale est le problème inverse de la reconstruction du diffuseur de l'opérateur de diffusion.

Cette notion de diffusion est significative pour les systèmes décrits par les opérateurs non linéaires. Cependant, la plupart des travaux sur la théorie de la diffusion, traitent des systèmes linéaires invariants dans le temps, auquel cas $\{U(t)\}$ forment un groupe à un paramètre d'opérateurs linéaires.

Dans notre approche, nous traitons des systèmes décrits par un groupe d'opérateurs unitaires $\{U(t)\}$ agissant sur un espace Hilbert H dans lequel il existe deux sous-espaces distingués D_- et D_+ , avec la propriété que, comme t varie de $-\infty$ à $+\infty$, les sous-espaces $U(t)D_-$ et $U(t)D_+$ augmentent (diminuent) de manière monotone du sous-espace zéro à l'espace entier H ; nous appelons D_- et D_+ les sous-espaces entrants et sortants, respectivement. Il n'est pas difficile de montrer qu'avec chaque sous-espace D_- et D_+ on peut associer une représentation spectrale spéciale du groupe $\{U(t)\}$, dans le cas où D_- est représenté par des fonctions analytiques dans le demi-plan inférieur, le deuxième D_+ est représenté par des fonctions analytiques dans le demi-plan supérieur. Les deux représentations sont liées par un facteur multiplicatif unitaire par l'opérateur $S(\xi)$, $-\infty < \xi < +\infty$, que nous appelons la matrice de

diffusion. Si D_- et D_+ sont orthogonaux alors $S(\xi)$ est la restriction à l'axe réel d'une fonction analytique à valeur déterminée par l'opérateur holomorphe dans le demi-plan inférieur.

Nous appliquons cette théorie à des systèmes régis par des équations différentielles hyperboliques. La forme unitaire de l'espace de Hilbert est définie comme l'énergie ; D_- se compose de tous les états initiaux A tels que $U(t)A$ est nul dans un cône $|x| < -ct + \omega$, D_+ des états A pour lesquels $U(t)A$ est nul dans un cône avant $|x| < ct + \omega$. Ici, ω est tellement choisi que tous les diffuseurs, c'est-à-dire les obstacles, les potentiels et les inhomogénéités, sont contenus dans la balle $\{|z| < \omega\}$. Nous montrons que dans un nombre impair de dimensions spatiales D_+ et D_- sont orthogonaux. Donner par P_+ et P_- les opérateurs qui suppriment les composants D_+ et D_- c'est-à-dire projeter sur les compléments orthogonaux de D_+ et D_- . Puisque les mouvements entrants ne sont pas influencés par le diffuseur pour $t < 0$ et les mouvements sortants ne sont pas influencés $t > 0$, ils peuvent être éliminés sans perdre aucune information sur le diffuseur. Cela suggère de regarder les opérateurs

$$Z(t) = P_+ U(t) P_- \quad (t > 0)$$

Nous montrons que ces opérateurs forment un semi-groupe étroitement lié à la matrice de diffusion : l'ensemble des points dans le demi-plan inférieur auquel la matrice de diffusion n'est pas inversable est σ , où σ désigne le spectre du générateur infinitésimal de $\{Z(t)\}$. Nous utilisons la théorie des équations hyperboliques pour étudier directement les opérateurs $\{Z(t)\}$; les informations obtenues de cette façon relient le spectre du générateur infinitésimal aux propriétés géométriques et analytiques de l'obstacle.

Nous pouvons montrer que différents obstacles donnent lieu à différentes matrices de diffusion. En utilisant le principe de Birman-Kato de l'invariance de l'opérateur de diffusion, on obtient la matrice de diffusion pour l'équation de Schrodinger à partir de la matrice de diffusion pour l'équation d'onde correspondante. Notre étude dans ce mémoire s'applique uniquement aux perturbations qui agissent dans un domaine borné et dans des espaces de dimension impaire.

De même, Faddeev (*cf.*[LDF]) a réussi à prouver l'existence de la matrice de diffusion pour les problème de trois corps. Les formules relatives aux résonances de diffusion

et à la trace de certaines fonctions des opérateurs perturbés et non perturbés jouent un rôle important dans la théorie de diffusion et dans l'analyse des distributions de résonances. L'un classique, appelé la formule de Poisson dans la théorie Lax-Phillips, relie la trace du groupe d'ondes aux résonances pour une perturbation compacte du Laplacien en dimension impaire. Il a été prouvé par Lax-Phillips (*cf.*[L.P]) et a ensuite été prolongé par Bardos et al. (*cf.*[BC.GL. JR]), Melrose-Sjöstrand (*cf.*[MRB.SJ]) et Zworski (*cf.*[MZ]).

L'originalité des résultats de Sjöstrand est qu'il n'a pas besoin de la théorie de la diffusion et cela lui a permis de couvrir les cas de dimension égale et une très grande classe de perturbations, y compris les perturbations à longue distance. Son approche était un outil efficace dans l'étude de la répartition des résonances et de la fonction de changement spectral. (*cf.*[ZB.CY]; [PB. JMC. PD]) et (*cf.*[EML. LDL]; [TR]; [BS]; [JS])

L'étude mathématique des résonances quantiques en régime semi-classique a maintenant une vingtaine d'années. Les techniques développées ainsi que les résultats obtenus sont utilisés dans d'autres domaines tels que les équations aux dérivées partielles, la géométrie et la théorie des nombres. La première définition rigoureuse des résonances est probablement celle donnée dans (*cf.*[LaPh]) en 1966 et (*cf.*[Va]) en 1968 dans le cas des potentiels analytiques de dilatation d'un seul corps, immédiatement généralisée aux problèmes de plusieurs corps (*cf.*[HeSj]; [Hu]; [Ma2]; [Me2]; [MaMe]; [Se]). Cette première définition mathématique a été basée sur la notion de la graduation complexe et était très satisfaisante du point de vue de la théorie spectrale abstraite comme du point de vue de l'intuition physique. En particulier, les résonances obtenues de cette façon coïncident avec les pôles de la résolvante de l'Hamiltonien quantique (*cf.*[ReSi]). Cependant, cette définition rigide n'a pas permis d'obtenir des résultats plus concrets (tels que la localisation des résonances) et nécessite donc à recourir à des outils plus flexibles. Une première tentative a donné lieu à de nombreux développements grâce aux travaux de Balslev et Combes (*cf.*[BaCo]) en 1971 et Hunziker (*cf.*[Hu]) en 1986, elle s'appuie sur la notion de distorsion analytique pour avoir une manière flexible de définir et d'étudier les résonances. Dans la même année est apparu le travail (*cf.*[HeMa]), dans lequel la distorsion dans l'espace des phases a permis d'obtenir des résultats très précis sur l'endroit des résonances (dans la limite

semi-classique). Cependant, toutes ces théories de résonances ont exigé l'analyticité du potentiel, au moins en dehors d'une région compacte arbitrairement grande de l'espace de position sauf dans le cas où le potentiel est exponentiellement décroissant à l'infini (sa transformée de Fourier est analytique dans une bande étroite). Dans ce cas, l'emploi de la distorsion complexe dans l'espace de la quantité de mouvement uniquement rend encore possible la construction d'une théorie des résonances qui implique les pôles de la résolvante de l'opérateur de Schrödinger : $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0^+ . Par exemple dans (*cf.*[Hu]), sous certaines conditions, les éléments de la résolvante $\langle (P - z)^{-1} \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ partant de $\text{Im } z > 0$, (φ et ψ sont dans un espace A_δ dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ appelé espace des vecteurs analytiques) se prolongent en une fonction méromorphe dont les pôles sont appelés résonances. Ces études indiquent que les résonances devraient être traitées d'une certaine manière formelle comme des valeurs propres de l'opérateur $P(h)$. B. Helffer et J. Sjöstrand en 1986, ont été amenés à définir les résonances comme étant les nombres complexes z pour lequel $(P(h) - z)$ n'est pas inversible dans des espaces de Sobolev adaptés (*cf.*[HeSj]). En 1987, Helffer et Martinez on établi dans (*cf.*[HeMa]) une comparaison entre les diverses notions de résonances, ils ont montré que lorsque plusieurs des techniques précédentes s'appliquent, les définitions des résonances coïncident. Le modèle le plus simple de diffusion / résonances quantiques vient de considérer les potentiels compacts sur la ligne réelle,

$$V(x) \in \mathbb{R}, |V(x)| \leq C, V(x) = 0 \quad \text{pour} \quad |x| > L$$

et l'opérateur de Schrödinger correspondant,

$$H_V = -\partial_x^2 + V(x)$$

La définition mathématique des résonances est simple et élégante : ce sont les pôles du résolvant. La fonction de Green est continué de manière métamorphique du demi-plan physique inférieur. Plus précisément, considérons la résolvante

$$R_V(\lambda) = (H_V - \lambda^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \text{Im } \lambda > 0$$

(Avec des pôles à λ pour lequel λ^2 est une valeur propre de H_V). Cet opérateur est

essentiellement identique à la fonction de Green sortante $G_V(\lambda, x, y)$:

$$R_V(\lambda)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} G_V(\lambda, x, y)\varphi(y) dy$$

La convention concernant Sortant / entrant est le choix de l'analyse de $R_V(\lambda)$ et $G_V(\lambda)$ dans $\pm \text{Im } \lambda > 0$.

Pour x et y fixés, la fonction de Green a une suite méromorphe pour $\text{Im } \lambda > 0$ dans \mathbb{C} . Cela équivaut essentiellement au fait que

$$R_V(\lambda) = (H_V - \lambda^2)^{-1} : L_{comp}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R})$$

et méromorphe. Notons que nous avons réduit le domaine à un espace des fonctions plus petit de L^2 disparaissant à l'extérieur d'un ensemble borné, L_{comp}^2 et a élargi la portée à un plus grand espace de fonctions qui sont carrés intégrables uniquement à des intervalles bornés L_{loc}^2 .

Les résonances sont maintenant définies comme des pôles de la continuation méromorphe de la fonction de Green $G_V(\lambda)$, ou équivalent du résolvant $R_V(\lambda)$. Donc

$$R_V(\lambda) = R_V(-\bar{\lambda})^*, \quad \text{Im } \lambda > 0$$

La même relation se trouve dans \mathbb{C} et les résonances sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire. La figure 1 illustre comment ils recherchent un potentiel simple. Cette définition bien que très élégante n'est pas très intuitive. Les résonances se manifestent très concrètement dans les expansions d'ondes, les pics des sections transversales de dispersion et les transitions de déphasage, nous décrirons l'interprétation de l'expansion des vagues.

Il existe de nombreuses conventions contradictoires sur le sujet en partie en raison de son émergence indépendante dans différentes branches de la science et des mathématiques. La convention ci-dessus vient de la diffusion électromagnétique / sonore où λ est une fréquence. Dans ce contexte, les résonances sont souvent appelées pôles de diffusion. Dans la mécanique quantique λ^2 plutôt que λ serait appelée une résonance. Dans la diffusion automorphe, ou la diffusion sur les variétés hyperboliques de dimension $n + 1$, la convention nomme s pour laquelle $s(n - s) = \lambda^2 + \frac{n^2}{2}$ sont des résonances. Dans le contexte des trous noirs, les résonances sont appelées modes quasi normales.

Pour un compte rendu général des résonances en diffusion unidimensionnelle, nous suggérons (*cf.*[PdRS]). Peut-être que la première étude de la distribution des pôles de résonance / diffusion a été menée par Regge (*cf.* [TR]), bien que sa motivation soit très différente. Pour les résultats mathématiques dans une dimension, (*cf.*[DaBiMaZw]); (*cf.*[ScMi]); (*cf.*[StTw]); (*cf.*[StSv]) et bien d'autres articles. Un schéma léger de la théorie générale est fourni dans (*cf.* [MZ]), alors que pour une introduction appropriée et de nombreuses références, on devrait consulter (*cf.*[JS]). L'expansion des solutions de l'équation des ondes en termes de pôles de diffusion a été soulignée au début par Lax et Phillips (*cf.*[LP.RP]). En fait, ces expansions expliquées ont même été utilisées pour calculer numériquement des pôles de diffusion (*cf.*[GM.MW. WS]).

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres.

Commençant par le premier chapitre où on a donné une introduction générale.

Dans le deuxième chapitre, on introduit d'une manière générale la notion de quelques éléments d'analyse fonctionnelle et de la théorie spectrale qui sont des outils de base en mécanique quantique (*cf.*[ED]) qui seront utiles pour les d'autres chapitres.

Le troisième chapitre aborde les opérateurs de Laplace et de Helmholtz. Nous commençons avec une analyse systématique du problème de diffusion libre sur \mathbb{R} , lorsque l'hamiltonien quantique est donné par $H_0 = -\partial_x^2$. De même on établit les mêmes résultats pour H_V défini par :

$$H_V = H_0 + V = -\partial_x^2 + V$$

où le potentiel V est une fonction C^∞ à support compact. Il s'agit principalement de montrer l'existence de la résolvante de l'opérateur H_V et leur domaine d'analytité.

Dans le quatrième chapitre on définit les solutions de Jost de l'équation

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)u = 0$$

Cette étude peut être ramenée à celle de la matrice de transmission et de la diffusion est de relier les données sortantes aux données entrantes. De plus, ont définis l'opérateur de diffusion et le théorème qui relie l'opérateur de diffusion à la matrice de diffusion.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des résonances qui sont les pôles de la résolvante de l'opérateur H_V . On montre que leurs pôles coïncident avec les pôles de la matrice de diffusions et puis on donne la formule de trace.

Chapitre 2

Introduction à la théorie de diffusion et théorie spectrale

2.1 Onde et équation de Schrödinger

2.1.1 Onde plane

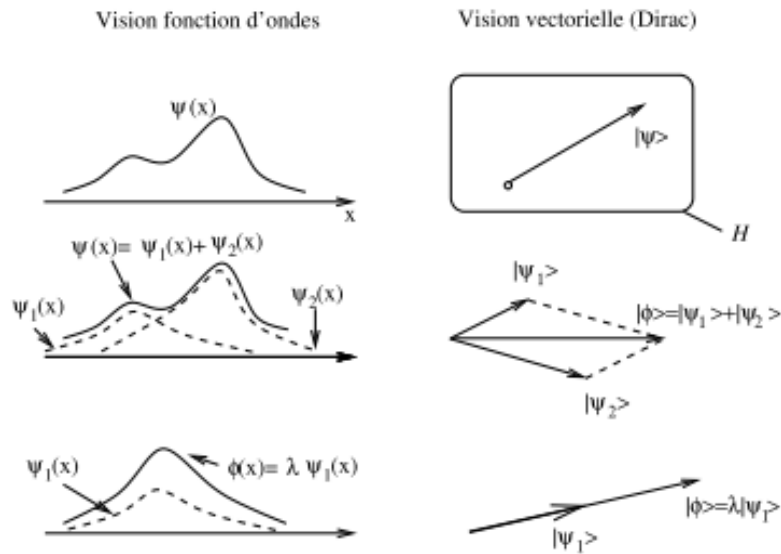
Définition 2.1.1. *On appelle onde plane de vecteur d'onde k et de pulsation ω la fonction*

$$\phi(t, x) = e^{i(k \cdot x - \omega t)}. \quad (2.1)$$

On note que, à t fixé, $\phi(t, x)$ est constante sur tout (hyper-)plan perpendiculaire à k , et l'on dit que l'onde plane se propage dans la direction de k .

Exemple 2.1.1. *Voici deux exemples importants de fonctions d'ondes à une dimension. On se contente de donner ici leur expression et représentation. Leur interpréta-*

tion physique et mathématique sera donnée plus loin.



Cette figure illustre l'aspect vectoriel de l'espace des fonctions d'ondes.

2.1.2 Ondes stationnaires

Une onde stationnaire est un état particulier, c'est un vecteur propre de H :

$$H\psi = E\psi, \quad E \in \mathbb{R} \text{ énergie}$$

qui s'appelle l'équation de Schrödinger stationnaire.

L'évolution de ψ est donc :

$$\frac{d\psi}{dt}(x, t) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right) H\psi = \left(\frac{-i}{\hbar}\right) E\psi(x, t)$$

donnant

$$\psi(x, t) = \underbrace{e^{-iEt/\hbar}}_{\text{phase}} \psi(0, t)$$

Par conséquent le module $|\psi(x, t)| = |\psi(x, 0)|$ ne bouge pas (d'où le nom d'onde stationnaire).

Bien que les vecteurs propres (ondes stationnaires) soient des états très particuliers, ils ont une importance en physique car :

* l'état stationnaire de plus basse énergie $\psi_e = 1$, appelé état fondamental, apparaît à basse température à cause des phénomènes de relaxation thermique.

* Dans les expériences de spectroscopie, on excite un atome ou une molécule avec un rayonnement monochromatique, le faisant transiter par e et de résonance vers un état stationnaire ψ_e d'énergie plus élevée. (*cf.* [EML.LDL], [LP.RP], [DY] et [EML.LD])

2.1.3 Equation de Schrödinger

Supposons que cette onde plane décrit une particule quantique d'impulsion ξ , le seul choix raisonnable est de poser $\xi = \alpha k$ pour une certaine constante réelle α . Niels Bohr proposa

$$\xi = h\omega = \hbar\nu, \quad (2.2)$$

où $\nu = 2\pi\omega$ est la fréquence de l'onde plane et $\hbar = h/2\pi$ et ce choix s'est révélé judicieux. On note aussi $\lambda = h\nu = \hbar\omega$ l'énergie de la particule et avec ces notations, l'onde plane (2.1) s'écrit

$$\phi(t, x) = e^{i(\xi \cdot x - Et)/\hbar} \quad (2.3)$$

Mais l'énergie cinétique E_c de la particule doit être $E_c = \frac{\xi^2}{2m}$, et l'on voit que

$$E_c \phi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(t, x), \quad \Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2. \quad (2.4)$$

Si la particule est placée dans un potentiel $V(x)$, son énergie totale E est la somme de V et de son énergie cinétique. Notant que, par (2.3), $E\phi(t, x) = \frac{\hbar}{i} \partial_t \phi(t, x)$, on obtient l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\hbar}{i} \partial_t \phi(t, x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(t, x) + V(x) \phi(t, x). \quad (2.5)$$

On voit apparaître dans cette équation l'opérateur de Schrödinger :

$$H_V(x, hD_x) = -\frac{h^2}{2m} \Delta + V(x). \quad (2.6)$$

Il s'agit d'un opérateur différentiel que l'on peut obtenir en remplaçant formellement ξ par $hD_x = \frac{h}{i} \partial_x$ dans l'énergie classique $p(x, \xi)$.

Schrödinger postule alors que les particules quantiques sont associées aux solutions $\phi(t, x)$ de l'équation de Schrödinger, qui vérifient la condition de normalisation, pour chaque t fixé,

$$\|\phi(t, \cdot)\|_{L^2} = \int |\phi(t, x)|^2 dx = 1. \quad (2.7)$$

La fonction $\phi(t, x)$ est appelée fonction d'onde de la particule, et la quantité $|\phi(t, x)|^2$ peut alors être interprétée comme la densité de probabilité de présence de la particule. En d'autres termes,

$$\|1_{\Omega}(x)\phi(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int 1_{\Omega}(x)|\phi(t, x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

est la probabilité de présence de la particule dans la région $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à l'instant t . Il faut noter que l'onde plane (2.3) n'est pas dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais que toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$ s'écrit comme superposition d'ondes planes (on parle de paquet d'ondes)

$$\phi(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{d/2}} \int \psi(\xi) e^{i(\xi \cdot x - Et)/\hbar} d\xi$$

(où t est fixé) : c'est le théorème de *Fourier-Plancherel*. En particulier on peut considérer l'onde plane comme "limite" d'un paquet d'onde gaussien :

$$g(t, x) = \int e^{ix \cdot \xi/\hbar} e^{-itE/\hbar} e^{-(\xi - \eta)^2/2\hbar} d\xi. \quad (2.9)$$

On est tout de suite confronté au problème suivant : l'équation de Schrödinger (2.5) n'a pas de sens immédiat pour une fonction $\phi(t, \cdot)$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut toujours considérer que $H_V(x, \hbar D_x)\phi(t, \cdot)$ est une distribution, mais l'égalité (2.5) pose la question de savoir si $H_V(x, \hbar D_x)\phi(t, \cdot)$ est une fonction de $L^2(\mathbb{R}^d)$. C'est *Von Neumann* qui a mis au point au début des années 1930 les notions mathématiques permettant de répondre correctement à ces questions : la théorie spectrale des opérateurs non-bornés (d'ailleurs la théorie des distributions de Laurent Schwartz est postérieure).

Puisque le potentiel V est indépendant de t , il est raisonnable de chercher des solutions de (2.5) à variables séparées t et x , c'est-à-dire sous la forme

$$\phi(t, x) = \alpha(t)u(x).$$

On obtient pour une certaine constante $E \in \mathbb{C}$,

$$a(t) = e^{-iEt}, \quad \text{et} \quad H_V(x, \hbar D_x)u(x) = Eu(x), \quad (2.10)$$

l'équation pour u apparait comme une équation aux valeurs propres pour l'opérateur P . Cette équation est appelée équation de Schrödinger stationnaire, et c'est notre principal sujet d'étude dans ce mémoire. Notons enfin que les énergies possibles d'une particule quantique en régime stationnaire sont les valeurs propres de l'opérateur non borné H_V sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Lorsque l'ensemble des valeurs propres est un ensemble discret, on obtient une quantification des niveaux d'énergie compatibles avec les expériences mettant en évidence l'aspect corpusculaire des particules quantiques. Pour plus de détail le lecteur peut se référer à (*cf.*[AMe] et [CC.T]).

2.2 Eléments de la théorie spectrale

2.2.1 Opérateurs autoadjoints

Il s'agit de définir de façon précise ce qu'on entend par opérateur auto-adjoint dans le cas d'un opérateur non borné sur un espace de Hilbert, par exemple un opérateur différentiel. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et on introduit les notions suivantes :

Opérateurs à domaine.

C'est la donnée d'un couple $(A, D(A))$ formé d'un sous-espace $D(A)$ dense de \mathcal{H} , le domaine de A et d'une application linéaire A de $D(A)$ dans \mathcal{H} .

Graphes.

Le graphe de $(A, D(A))$, noté G_A , est défini par :

$$G_A = \{(x, Ax) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : x \in D(A)\}$$

Opérateurs fermés.

On dit que $(A, D(A))$ est fermé si son graphe l'est dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Si l'adhérence du graphe est encore un graphe, on définit la fermeture de A comme l'opérateur (fermé) dont le graphe est l'adhérence de celui de A .

Opérateurs symétriques.

Un opérateur $(D(A), A)$ est dit symétrique si :

$$\forall x, y \in D(A), \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Pour un opérateur différentiel sur la variété X munie d'une forme volume, on dit parfois qu'il est formellement symétrique s'il l'est avec comme domaine l'espace $C_0^\infty(X)$.

Adjoint.

On définit l'adjoint $(A^*, D(A^*))$ de $(A, D(A))$ de la façon suivante :

$$x \in D(A^*) \text{ si et seulement si } z \rightarrow \langle Az, x \rangle$$

se prolonge continument à \mathcal{H} ; par le théorème de représentation de Riesz, et le fait que $D(A)$ est dense, on a alors :

$$\langle Az, x \rangle = \langle z, y \rangle$$

et on pose $y = A^*(x)$. L'adjoint est toujours fermé et si A est symétrique son adjoint en est un prolongement, et en particulier tout opérateur symétrique est fermable.

Remarque 2.2.1. *Un opérateur $(A, D(A))$ est autoadjoint s'il est égal (avec domaine) à son adjoint. Il est essentiellement autoadjoint si sa fermeture est autoadjointe, dans ce cas il n'a qu'une extension autoadjointe. Noter qu'un opérateur symétrique peut n'avoir aucune extension auto-adjointe !! C'est le cas de $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ sur \mathbb{R}^+ .*

Résolvante et spectre

On appelle résolvante d'un opérateur l'ensemble ouvert dans \mathbb{C} ,

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } A - \lambda : D(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ est inversible d'inverse} \\ (A - \lambda)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(A) \subset \mathcal{H} \text{ borné} \end{array} \right\}.$$

On appelle spectre d'un opérateur l'ensemble :

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tels que } (\lambda - A) \text{ ne soit pas inversible} \}$$

$\sigma(A)$ est un fermé de \mathbb{C} tel que $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

La résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ est une fonction holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ dans $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Remarque 2.2.2. *On dit que λ est une valeur propre si $(\lambda - A)$ n'est pas injectif. Un spectre peut ne contenir aucune valeur propre ; c'est le cas de la multiplication par une fonction bornée qui n'est constante sur aucun ensemble de mesure > 0 dans $L^2(X)$.*

Minimax

La théorie spectrale de ces opérateurs est très simple : \mathcal{H} est somme directe hilbertienne des espaces propres qui sont de dimension finie. En particulier, \mathcal{H} admet une base orthonormée (non unique) formée de fonctions propres.

2.2.2 Calcul fonctionnel.

On suppose $(A, D(A))$ autoadjoint et $X = \sigma(A)$. Alors il existe un homomorphisme continu de l'algèbre des fonctions continues bornées sur $\sigma(A)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui envoie $(\lambda - x)^{-1}$ sur la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$.

On peut en particulier ainsi définir l'exponentielle e^{itA} , les fonctions e^{-tA} , $t > 0$ (si A à un spectre borné inférieurement) et les fonctions A^{-s} pour $\text{Im}(s) > 0$ si $0 \notin \sigma(A)$.

Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints

Si $(A, D(A))$ est autoadjoint, son spectre est un sous-ensemble fermé non vide de \mathbb{R} . Ce ne serait pas vrai si on n'avait pas pris la définition forte (avec domaine) d'opérateurs auto-adjoints.

Un opérateur A est dit à résolvante compacte si la résolvante $(\lambda - A)^{-1}$ est pour une valeur de λ et donc pour toutes un opérateur compact de \mathcal{H} . Dans ce cas, le spectre est constitué de valeurs propres de multiplicité finie s'accumulant seulement en l'infini et la résolvante est méromorphe sur \mathbb{C} .

Pour vérifier que A , supposé autoadjoint, est à résolvante compacte, il suffit de montrer que la boule unité de $D(A)$ pour la norme du graphe est une partie relativement compacte de \mathcal{H} .

Théorème 2.2.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Il existe une famille spectrale $(E_\gamma)_{\gamma \in \mathbb{R}}$ telle que*

$$D = \{u \in H, \int \gamma^2 d \langle E_\gamma u, v \rangle < +\infty\}$$

et pour tout $u, v \in D$,

$$\langle Au, v \rangle = \int \gamma d \langle E_\gamma u, v \rangle. \quad (2.11)$$

où $d \langle E_\gamma u, v \rangle$ est la mesure de Stieltjes associée à la fonction

$$\gamma \longmapsto \langle E_\gamma u, v \rangle.$$

Proposition 2.2.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Pour $u \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\text{dist}(\lambda, \sigma(A)) \|u\| \leq \|(A - \lambda)u\|. \quad (2.12)$$

On retrouve en particulier le fait que, pour un opérateur auto-adjoint,

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \|R_A(\lambda)\| = \frac{1}{\text{Im} \lambda}.$$

2.2.3 Opérateurs à trace.

On définit les valeurs singulières d'un opérateur compact A comme les racines carrées $\mu_j(A) \geq 0$ des valeurs propres de A^*A .

Un opérateur est dit de classe \mathcal{I}_p si la somme

$$\sum_j (\mu_j(A))^p$$

est finie.

La classe \mathcal{I}_1 est celle des opérateurs à trace. La classe \mathcal{I}_2 celle des opérateurs de Hilbert-Schmidt. On a un homomorphisme canonique appelé trace défini sur \mathcal{I}_1 et à valeurs complexes. Sur les opérateurs de rang fini, c'est la trace ordinaire et on prolonge par continuité au sens de la topologie naturelle de \mathcal{I}_1 . Attention : un opérateur à noyau continu même sur une variété compacte peut ne pas être à trace.

Penser à un opérateur de convolution sur le cercle, il sera à trace seulement si la série de Fourier est absolument convergente.

Trace au sens des distributions.

On peut souvent définir une trace au sens des distributions pour une famille d'opérateurs dépendant d'un paramètre réel. Soit $C(t)$ une telle famille d'opérateurs bornés et supposons que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, l'opérateur $\int_{\mathbb{R}} C(t)\varphi(t)dt$ soit à trace. L'application

$$\varphi \mapsto Tr \left(\int_{\mathbb{R}} C(t)\varphi(t)dt \right)$$

définit alors une distribution sur \mathbb{R} . C'est le cas pour le groupe unitaire

$$U(t) = e^{itA}$$

associé à un opérateur autoadjoint à résolvante compacte dont le spectre est à croissance polynomiale. On a alors :

$$\langle Tr(U(t)e^{-it}), \rho \rangle = \sum_j \int_{\mathbb{R}} e^{it(\lambda_j - \lambda)} \rho(t) dt = \sqrt{2\pi} \sum_j \hat{\rho}(\lambda - \lambda_j)$$

où

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} \rho(t) dt$$

est la transformée de Fourier de $\hat{\rho}$. On obtient ainsi la densité régularisée de valeurs propres, convolution de $\sum_j \delta(\lambda - \lambda_j)$ avec la fonction $\hat{\rho}$.

Chapitre 3

Résolution des problèmes de Laplace et de Helmholtz unidimensionnelle

Lorsqu'on cherche des solutions particulières de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \partial_x^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

où ∂_x^2 est le laplacien de \mathbb{R} agissant par rapport aux coordonnées d'espace, on les cherche souvent sous la forme

$$u(x, t) = a(x)e^{i\lambda(u(x)-t)}$$

où $a(x)$ est l'amplitude, $u(x)$ est la phase et λ est le nombre d'onde ($\lambda = \frac{2\pi}{l}$, l la longueur d'onde). On obtient alors l'équation

$$\partial_x^2(a(x)e^{i\lambda u(x)}) + \lambda^2 a(x)e^{i\lambda u(x)}$$

c'est-à-dire que la fonction $a(x)e^{i\lambda u(x)}$ est solution de l'équation aux dérivées partielles en les variables d'espace (le temps n'apparaît plus)

$$(\partial_x^2 + \lambda^2)w = 0.$$

Cette dernière équation s'appelle équation de Helmholtz.

3.1 Particule libre

Considérons une particule libre à une dimension. Nous commençons avec une analyse systématique du problème de diffusion libre sur \mathbb{R} (*cf.*[SHT.MZ]), lorsque l'Hamiltonien quantique est donné par :

$$H_0 = D_x^2 = -\partial_x^2$$

3.1.1 Solution de l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien

Soit à résoudre l'équation :

$$(H_0 - \lambda)u = 0 \tag{3.1}$$

On distingue deux cas :

1. $\lambda < 0$. La solution de l'équation s'écrit sous la forme

$$u(x) = Ae^{i\lambda x} + Be^{-i\lambda x} \tag{3.2}$$

où les coefficients A et B sont des constantes d'intégration. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la fonction $Be^{-i\lambda x}$ s'annule tandis que $|Ae^{i\lambda x}|$ devient infini, sauf pour $A = 0$. Les fonctions d'onde étant bornées nous devons poser $A = 0$.

Lorsque $x \rightarrow -\infty$, la fonction $Ae^{i\lambda x}$ s'annule tandis que $|Be^{-i\lambda x}|$ devient infini, sauf pour $B = 0$. Les fonctions d'onde étant bornées nous devons poser $B = 0$. La seule fonction d'onde convenable est donc la fonction d'onde $u(x) = 0$. Une telle fonction d'onde ne représente pas une particule qui serait présente quelque part sur Ox . On en déduit que $\lambda < 0$ n'appartient pas au spectre de l'Hamiltonien.

Ce résultat est conforme au résultat classique qui donne une valeur positive ou nulle à l'énergie cinétique.

2. $\lambda > 0$. La solution se met sous la forme

$$u(x) = Ae^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x}$$

tandis que A et B sont des constantes d'intégration arbitraires.

La solution la plus générale apparaît comme la superposition des deux solutions $u_+(x)$ et $u_-(x)$:

$$\begin{aligned} u_+(x) &= Ae^{i\lambda x} \\ u_-(x) &= Be^{-i\lambda x} \end{aligned}$$

On constate que λ étant positif arbitraire il existe toujours deux fonctions propres indépendantes u_+ et u_- , admettant λ pour valeur propre.

Le spectre de H_0 est donc continu et dégénéré d'ordre 2 pour $\lambda > 0$. En anticipant sur l'interprétation de $u_+(x)$ et $u_-(x)$ donnée au paragraphe suivant, soulignons que cette dégénérescence est liée à la possibilité de disposer de deux sources de particules : l'une située en $x = -\infty$, produit un flux de particules se dirigeant vers les x positifs ($x > 0$), l'autre source située en $x = +\infty$ produit un flux de particules se dirigeant vers les x négatifs ($x < 0$).

$$Ae^{i\lambda x} \text{ pour } x < 0, \quad Be^{-i\lambda x} \text{ pour } x > 0$$

les termes entrants, et

$$Ae^{i\lambda x} \text{ pour } x > 0, \quad Be^{-i\lambda x} \text{ pour } x < 0$$

les termes sortants.

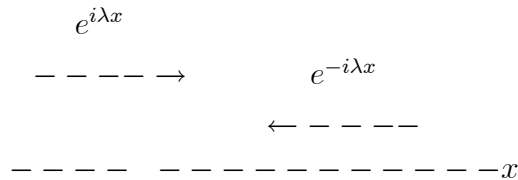


Figure 1 : schématisation des ondes et leur courant

Par conséquent, la solution $e_+(x, \lambda) := e^{i\lambda x}$ de (3.1) est entrant pour $x < 0$ et sortants pour $x > 0$. De même, la solution $e_-(x, \lambda) := e^{-i\lambda x}$ de (3.2) est entrant pour $x > 0$ et sortants pour $x < 0$. (cf.[TCa])

Remarque 3.1.1. Nous les appelons les ondes planes. Clairement, il n'existe aucune solution de (3.1) uniquement pour les termes entrants ou les termes sortants pour

$\lambda \neq 0$. Néanmoins, pour $\lambda = 0$, la solution $u \equiv 1$ est considéré comme un terme entrant et sortant. Bien que l'intuition physique sous-jacente à notre convention entrant et sortant n'a de sens que pour $\lambda > 0$, nous adopterons la même convention pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons que cela équivaut à une convention de prendre la racine carrée de l'énergie λ^2 .

3.1.2 Solution de l'équation aux valeurs propres de l'Hamiltonien non homogène

Considérons l'équation

$$(H_0 - \lambda^2)u = f \quad \text{pour } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (3.3)$$

La solution se met d'une façon unique sous la forme

$$u_\pm(x, \lambda) = \pm \frac{i}{2\lambda} \int f(y) e^{\pm i\lambda|x-y|} dy \quad (3.4)$$

où le signe plus (+) désigne la solution sortante et le signe moins (−) désigne la solution entrante.

Notons que l'unicité de la solution découle du fait qu'il n'ya pas de solution entrant ou sortant de l'équation propre (3.1) comme mentionné ci-dessus. Une caractérisation alternative de la solution sortant ou entrant u_\pm de (3.3) est que

$$u_+(x, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{pour } \text{Im } \lambda > 0$$

et

$$u_-(x, \lambda) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{pour } \text{Im } \lambda < 0$$

Nous avons aussi

$$u_+(x, \lambda) = \overline{u_-(x, \lambda)} = u_-(x, -\lambda). \quad (3.5)$$

3.1.3 Résolvante du Hamiltonien libre

L'Hamiltonien de la particule libre à une dimension se réduit à l'énergie cinétique, H_0 . On note

$$R_0(\lambda) = (H_0 - \lambda^2)^{-1}$$

la résolvante du Hamiltonien libre.

Dans cette définition de $R_0(\lambda)$, nous précisons le domaine de variation du nombre complexe λ et les singularités de $R_0(\lambda)$ attendues dans le plan complexe.

Nous pouvons maintenant définir la résolvante de la solution sortante de H_0 , $R_0(\lambda)$, par

$$u_+ = R_0(\lambda)f \quad \text{pour } f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

et $R_0(-\lambda)$ est alors définie comme la résolvante de la solution entrant qui vérifiée

$$u_- = R_0(-\lambda)f \quad \text{pour } f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

par (3.5). Notont que (3.4) implique

$$R_0(\lambda)(x, y) = \frac{i}{2\lambda} e^{i\lambda|x-y|} \quad (3.6)$$

Il est claire que, la résolvante sortante $R_0(\lambda)$ est bornée sur $L^2(\mathbb{R})$ pour $\text{Im } \lambda > 0$. En outre, sa norme est donnée par

$$\|R_0(\lambda)\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \frac{1}{d(\mathbb{R}^+, \lambda^2)} \quad (3.7)$$

où $d(\mathbb{R}^+, \lambda^2)$ désigne la distance entre λ^2 et l'axe réel positif \mathbb{R}^+ alors, $D(R_0(\lambda)) = L^2(\mathbb{R})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela découle de la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints (*cf.*[APa]).

Remarque 3.1.2. *Dans notre cas, il peut être vu directement à partir du théorème de Plancherel. En effet, pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, nous avons*

$$R_0(\lambda)f = \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{(\cdot)^2 - \lambda^2} \mathcal{F}f$$

où \mathcal{F} est la transformée de Fourier. Puisque

$$\left\| M_{\frac{1}{(\cdot)^2 - \lambda^2}} \right\|_{L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{1}{\xi^2 - \lambda^2} = \frac{1}{d(\mathbb{R}^+, \lambda^2)}$$

avec $M_g(u) = gu$ désignant l'opérateur de multiplication, (3.7) à lieu.

Proposition 3.1.1. *La résolvante*

$$R_0(\lambda) : L^2_{comp}(\mathbb{R}) \rightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R})$$

a une extension méromorphe pour $\lambda \in \mathbb{C}$ sauf éventuellement pour le pôle simple $\lambda = 0$.

Preuve 3.1.1. *En effet, nous avons*

$$R_0(\lambda) = \frac{P}{\lambda} + Q(\lambda)$$

avec

$$(Pf)(x) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} f(y) dy$$

pour $f \in L^2_{comp}(\mathbb{R})$ et

$$Q(\lambda) : L^2_{comp}(\mathbb{R}) \rightarrow L^2_{loc}(\mathbb{R})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.1.4 Décomposition spectrale H_0 .

La décomposition spectrale de H_0 peut être donnée par la transformée de Fourier de manière suivante (ici nous utilisons le même symbole de l'opérateur pour désigner son noyau de Schwartz)

$$H_0(x, y) = D_x^2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{i\lambda(x-y)} dy := \int_0^{\infty} \lambda^2 dE_\lambda(x, y) \quad (3.8)$$

avec la mesure spectrale dE_λ est donnée par

$$\begin{aligned} dE_\lambda(x, y) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\lambda(x-y)} + e^{-i\lambda(x-y)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} (e_+(x, \lambda) \overline{e_+(y, \lambda)} + e_-(x, \lambda) \overline{e_-(y, \lambda)}) d\lambda \\ &= \frac{\lambda}{i\pi} (R_0(\lambda) - R_0(-\lambda))(x, y) d\lambda \end{aligned} \quad (3.9)$$

où la dernière égalité découle de (3.7)(cf.[BG.ML]).

Remarque 3.1.3. Notons que (3.9) est un cas particulier d'un résultat général dans l'analyse fonctionnelle, à savoir la formule de Stone's, et de la décomposition spectrale en termes de fonctions propres généralisées. Pour le voir, nous devons clarifier la convention. Ecrivons

$$H_0 = \int_0^\infty z dE_z = \int_0^\infty \lambda^2 dE_\lambda \quad (z = \lambda^2)$$

comme d'habitude (notent que H_0 est un opérateur non négatif). Donc $dE_z = dE_\lambda$. Dans notre convention entrante et sortante, pour $\lambda > 0$,

$$R_0(\lambda) = R_0(z + i0)$$

et

$$R_0(-\lambda) = R_0(z - i0)$$

d'où la formule usuel de Stone's,

$$dE_z = \frac{1}{2\pi i} (R_0(z + i0) - R_0(z - i0)) dz$$

coïncide avec notre formule (3.9)(cf.[IMO]).

3.2 Particule non libre

3.2.1 Résolvante du Hamiltonien complet des ondes planes

Nous tenons à établir les mêmes résultats que nous avons pour H_0 dans la section précédente. Nous allons d'abord montrer l'existence de la résolvante

$$R_V(\lambda) = (H_V - \lambda^2)^{-1}$$

qui vérifiée, pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$(H_V - \lambda^2)R_V(\lambda)f = f \tag{3.10}$$

avec $R_V(\lambda)f$ étant la résolvante sortante.

Remarque 3.2.1. Ici, la signification de sortant (ou entrant) peut être considérée comme la section 1. Puisque $R_V(\lambda)f$ est une solution de (3.1) pour x assez grand.

On considère maintenant l'Hamiltonien complet sur \mathbb{R} (cf.[ReSi]) :

$$H_V = D_x^2 + V \quad \text{pour } V \in L_{comp}^\infty(\mathbb{R})$$

Théorème 3.2.1. *L'opérateur*

$$R_V(\lambda) : L_{comp}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R})$$

satisfaisant (3.10) existe comme une fonction méromorphe des opérateurs pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et il n'a pas de pôles pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Preuve 3.2.1. *Pour $\text{Im } \lambda > 0$, nous combinons l'opérateur $H_V - \lambda^2$ par la résolvante, nous obtenons*

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)R_0(\lambda) = I + VR_0(\lambda) \tag{3.11}$$

par (3.7), nous avons

$$\|VR_0(\lambda)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \ll 1 \quad \text{pour } \text{Im } \lambda \gg 0$$

donc, pour $\text{Im } \lambda \gg 0$,

$$(I + VR_0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-VR_0(\lambda))^k : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

existe et est holomorphe en λ .

Pour $\text{Im } \lambda \gg 0$, soit

$$R_V(\lambda) = R_0(\lambda)(I + VR_0(\lambda))^{-1} \tag{3.12}$$

Il est clair que $R_V(\lambda)$ est une famille holomorphe d'opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R})$ qui satisfait (3.10). Nous devons montrer que les opérateurs

$$R_V(\lambda) : L_{comp}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R})$$

sont méromorphiquement continue pour $\text{Im } \lambda \gg 0$. C'est identiquement que l'extension

$$R_V(\lambda)\rho : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R})$$

méromorphiquement à \mathbb{C} pour tout $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, où ρ désigne l'opérateur de multiplication correspondant (cf.[BG.ML], [OLa]).

Notons qu'une fois que le prolongement méromorphe est établie, elle ne dépend pas de ρ dans le sens suivant :

$$\begin{aligned} & \text{si } \rho_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ avec } \rho_1 \equiv 1 \text{ sur } \text{Supp}\rho \\ & \text{ensuite nous avons } (R_V(\lambda)\rho_1)\rho = R_V(\lambda)\rho \end{aligned} \quad (3.13)$$

En effet, c'est évidemment vrai pour $\text{Im } \lambda \gg 0$, ensuite pour $\lambda \in \mathbb{C}$ par prolongement méromorphe. De plus, nous observons que, pour $\text{Im } \lambda \gg 0$ et $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho V \equiv V$,

$$R_V(\lambda)\rho = R_0(\lambda)\rho(I + VR_0(\lambda)\rho)^{-1} \quad (3.14)$$

par (3.12) et l'égalité

$$(I + VR_0(\lambda))^{-1}\rho = \rho(I + VR_0(\lambda)\rho)^{-1}$$

Ainsi, le prolongement méromorphe de $R_V(\lambda)$ est réduite à celle de $(I + VR_0(\lambda)\rho)^{-1}$. Cela découle de la théorie analytique de Fredholm, une fois que nous constatons que

$$VR_0(\lambda)\rho = V\rho R_0(\lambda)\rho$$

est une famille méromorphe d'opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R})$ comme

$$\rho R_0(\lambda)\rho : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow H_{comp}^2(\mathbb{R})$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est compact et $V : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ bornée (cf.[BG.ML]).

Pour compléter la démonstration du théorème (3.2.1), il reste à montrer qu'il n'y a pas de pôles pour $R_V(\lambda)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cela se fera en plusieurs étapes (cf.[BS]; [JS]).

Nous commençons par :

Proposition 3.2.1. *Si $R_V(\lambda)$ a un pôle à $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ en écrire*

$$R_V(\lambda) = \frac{P_N}{(\lambda - \lambda_0)^N} + \frac{P_{N-1}}{(\lambda - \lambda_0)^{N-1}} + \cdots + \frac{P_1}{\lambda - \lambda_0} + Q(\lambda) \quad (3.15)$$

pour λ près de λ_0 où $Q(\lambda)$ est holomorphe en λ_0 , alors $u \in P_N(L_{comp}^2(\mathbb{R}))$ est une solution sortante de $(H_V - \lambda_0^2)u = 0$.

Preuve 3.2.2. *Tout d'abord, notons que le développement (3.15) découle de la méromorphie de $R_V(\lambda)$. Ensuite, en appliquant l'opérateur $(\lambda - \lambda_0)^N(H_V - \lambda^2)$ à $R_V(\lambda)$ et ensuite on pose $\lambda = \lambda_0$, on voit que*

$$(H_V - \lambda_0^2)P_N \equiv 0.$$

Il reste à montrer que les éléments de $P_N(L_{comp}^2(\mathbb{R}))$ sont toujours sortant. Pour cela, nous avons $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho V \equiv V$. Par (3.14), nous pouvons écrire

$$(I + VR_0(\lambda)\rho)^{-1} = \frac{\tilde{P}_N}{(\lambda - \lambda_0)^N} + \dots + \frac{\tilde{P}_1}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{Q}(\lambda)$$

pour λ près de λ_0 où $\tilde{P}_j, \tilde{Q}(\lambda) : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, N$, et $\tilde{Q}(\lambda)$ est holomorphe en λ_0 . Alors (3.14) implique également que

$$P_N(\rho L^2(\mathbb{R})) = R_0(\lambda)\rho\tilde{P}_N(L^2(\mathbb{R})) \subset R_0(\lambda)(L_{comp}^2(\mathbb{R}))$$

ce qui signifie que les éléments de $P_N(L_{comp}^2(\mathbb{R}))$ sont sortants.

Ensuite, nous montrons qu'il n'y a pas de solution sortant à

$$(H_V - \lambda^2)u = 0 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Cela découle de la proposition suivante :

Proposition 3.2.2. *Supposons que*

$$(H_V - \lambda^2)u = 0 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

et soit

$$u(x) = \begin{cases} A_+e^{i\lambda x} + B_-e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \gg 0 \\ A_-e^{i\lambda x} + B_+e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \ll 0 \end{cases}$$

alors

$$|A_+|^2 + |B_+|^2 = |A_-|^2 + |B_-|^2 \tag{3.16}$$

Preuve 3.2.3. *Puisque λ est réel, \bar{u} satisfait également l'équation. Ainsi, le Wronskien de u et \bar{u}*

$$W(u, \bar{u}) = \begin{vmatrix} u & u' \\ \bar{u} & \bar{u}' \end{vmatrix} = \begin{cases} -2i\lambda(|A_+|^2 - |B_-|^2) & \text{pour } x \gg 0 \\ -2i\lambda(|A_-|^2 - |B_+|^2) & \text{pour } x \ll 0 \end{cases}$$

est constante. (3.16) suit immédiatement.

Proposition 3.2.3. *Supposons que $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ satisfait*

$$(D_x^2 + W)u = 0 \text{ pour } W \in L^\infty(\mathbb{R})$$

et $\text{supp } u \subset [0, \infty)$. Alors $u \equiv 0$.

Preuve 3.2.4. *Fixons $h > 0$. Soit $v = e^{-\frac{x}{h}}u$. Alors, le caractère borné et la propriété de support de u impliquent que $v \in L^2(\mathbb{R})$. Maintenant, nous avons*

$$\begin{aligned} \|e^{-\frac{x}{h}}(hD_x)^2e^{\frac{x}{h}}v\|_{L^2} &= \|(h^2D_x^2 - 2ihD_x - 1)v\|_{L^2} \\ &= \|(h\xi - i)^2\hat{v}\|_{L^2} \quad (\text{Par formule Plancherel}) \\ &\geq \|\hat{v}\|_{L^2} \text{ puisque } |h\xi - i| \geq 1 \text{ quand } h\xi \in \mathbb{R} \\ &= \|v\|_{L^2} \end{aligned}$$

et comme $v = e^{x/h}u$, on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{-\frac{x}{h}}u\|_{L^2} &\leq \|e^{-\frac{x}{h}}h^2D_x^2u\|_{L^2} \\ &= \|e^{-\frac{x}{h}}h^2Wu\|_{L^2} \\ &\leq \|W\|_{L^\infty}h^2\|e^{-\frac{x}{h}}u\|_{L^2} \end{aligned}$$

prenant

$$h^2 < \|W\|_{L^\infty}^{-1}$$

on obtient $e^{-\frac{x}{h}}u \equiv 0$, i.e. $u \equiv 0$.

Maintenant, nous pouvons terminer la preuve du théorème (3.2.1).

Preuve 3.2.5. *(du (3.2.1)) En effet, supposons qu'il existe un pôle de $R_V(\lambda)$ à $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La proposition (3.2.1) implique qu'il existe une solution sortante non nulle u de l'équation*

$$(H_V - \lambda_0^2)u = 0$$

La proposition (3.2.2) implique alors que u est en train de disparaître en dehors de certains compact de \mathbb{R} . Mais la proposition (3.2.3) dit que $u \equiv 0$, ce qui est une contradiction (cf.[SHT.MZ]).

Remarque 3.2.2. Proposition (3.2.2) est la seule partie de la preuve du théorème (3.2.1) qui est plus simple en dimension 1, toutes les parties restantes travaillent dans des dimensions supérieures.

Avec la construction de la résolvante $R_V(\lambda)$ en place, nous pouvons maintenant définir et obtenir les ondes planes distordues qui constituent le spectre continu de H_V .

Proposition 3.2.4. Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe des solutions uniques $e_{\pm}(x, \lambda)$ de

$$(H_V - \lambda_0^2)u = 0 \tag{3.17}$$

satisfaisant

$$e_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x} + \text{termes sortants.}$$

Preuve 3.2.6. Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons

$$e_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x} - R_V(\lambda)(V e^{\pm i\lambda x}) \tag{3.18}$$

ce qui est logique car du théorème (3.2.1). Il est clair que $e_{\pm}(x, \lambda)$ vérifie l'équation (3.17) et le dernier terme de (3.18) est sortants grâce à (3.14). L'unicité obtenue de nouveau à partir de l'inexistence de solution sortante (3.17) a prouvé dans le théorème (3.2.1).

Exemple 3.2.1. Pour établir l'analogie du (3.9), nous utilisons une technique standard des ODE pour représenter $R_V(\lambda)$ en termes de $e_{\pm}(x, \lambda)$. Tout d'abord, rappelons que, en général, la solution fondamentale des ODE

$$(\alpha \partial_x^2 + b(x))E(x, y) = \delta_y(x)$$

peut être écrite en termes de deux solutions linéairement indépendantes ψ_j , $j = 1, 2$ de

$$(\alpha \partial_x^2 + b(x))\psi_j = 0 \quad j = 1, 2$$

à savoir,

$$E(x, y) = \frac{1}{\alpha W} (\psi_1(x)\psi_2(y)(x-y)_+^0 + \psi_1(y)\psi_2(x)(x-y)_-^0) \tag{3.19}$$

où

$$W = \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_1' \\ \psi_2 & \psi_2' \end{vmatrix}$$

est le Wronskian de ψ_1 , ψ_2 et

$$(x - y)_{\pm}^0 = \begin{cases} 1 & \pm x > \pm y \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

désigne les fonctions d'Heaviside (cf. [EML. LDL]; [TR]).

Chapitre 4

Matrices et opérateurs de diffusion

4.1 Matrice de transmission

4.1.1 Solutions de Jost

On considère l'opérateur différentiel

$$H_V = D_x^2 + V \quad V \in L_{comp}^\infty(\mathbb{R})$$

sur \mathbb{R} , où le potentiel V est une fonction C^∞ à support compact pour simplifier. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. En dehors du support de V , toutes les solutions de l'équation

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)u = 0 \tag{4.1}$$

s'écrivent sous la forme

$$u(x, \lambda) = \alpha_+(\lambda) e^{i\lambda x} + \alpha_-(\lambda) e^{-i\lambda x} \tag{4.2}$$

pour certaines constantes $\alpha_\pm \in \mathbb{C}$ qui déterminent entièrement la solution u .

Définition 4.1.1. *On appelle solutions de Jost à droite chacune des solutions J_d^\pm de l'équation*

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)u = 0$$

définies par la relation (4.2) avec

$$\alpha_\pm(\lambda) = 1, \quad \alpha_\mp(\lambda) = 0 \text{ pour } x \gg 0.$$

On appelle solutions de Jost à gauche chacune des solutions J_g^\pm de l'équation

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)u = 0$$

définies par la relation (4.2) avec

$$\alpha_\pm(\lambda) = 1, \quad \alpha_\mp(\lambda) = 0 \text{ pour } x \ll 0$$

Remarque 4.1.1. Les solutions de Jost ne sont pas dans L^2 pour $E \in \mathbb{R}^+$ (c'est une remarque importante!), donc l'interprétation en termes de particule quantique peut paraître hasardeuse. On peut cependant s'y raccrocher en considérant des paquets d'ondes gaussiens.

Puisque le wronskien

$$W(u, v) = u'v - uv'$$

de J_g^+ et J_g^- , qui est constant, vaut $2i\sqrt{\lambda} \neq 0$, (J_g^+, J_g^-) est une base de l'espace des solutions de (4.1). C'est le cas aussi de (J_d^+, J_d^-) , et on note $T(\lambda)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, appelée matrice de transmission, définie par

$$\begin{pmatrix} J_g^+ \\ J_g^- \end{pmatrix} = T(\lambda) \begin{pmatrix} J_d^+ \\ J_d^- \end{pmatrix}$$

En remarquant que $(J_{g,d}^+)^* = J_{g,d}^-$, on voit que la matrice T s'écrit

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} t(\lambda) & r(\lambda) \\ r^*(\lambda) & t^*(\lambda) \end{pmatrix}$$

Ici on a utilisé la notation $f^*(x, \lambda) = \overline{f(\bar{x}, \bar{\lambda})}$, et on doit noter que dans le cas où f est une fonction holomorphe de x et λ , f^* l'est aussi. Enfin puisque les wronskiens de J_g^+ , J_g^- et de J_d^+ , J_d^- sont égaux, on trouve

$$\det T(\lambda) = t(\lambda)t^*(\lambda) - r(\lambda)r^*(\lambda) = 1.$$

Pour λ réel, on obtient bien sûr

$$|t(\lambda)|^2 - |r(\lambda)|^2 = 1, \tag{4.3}$$

ce qui entraîne en particulier que $t(\lambda)$ et $t^*(\lambda)$ ne s'annulent pas pour $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$.

Définition 4.1.2. On appelle coefficient de transmission et de réflexion respectivement les quantités

$$T(\lambda) = |s_{11}(\lambda)|^2 = \frac{1}{|t^*(\lambda)|^2}$$

et

$$R(\lambda) = |s_{21}(\lambda)|^2 = \frac{|r(\lambda)|^2}{|t^*(\lambda)|^2}$$

Remarque 4.1.2. La relation (4.3) donne encore $R + T = 1$. Les nombres R et T sont interprétés comme la probabilité pour une particule rentrante par la gauche d'être réfléchi ou transmise par la barrière de potentiel, compte tenu de la relation :

$$1.J_g^+ - = s_{11}J_d^+ + s_{21}J_g^-$$

Nous appliquons maintenant (3.19) à l'opérateur

$$H_V - \lambda^2 \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

et solutions $\psi_1 = e_+$, $\psi_2 = e_-$. Notons que, pour y fixe, à la fois $e_+(x, \lambda)(x - y)_+^0$ et $e_-(x, \lambda)(x - y)_-^0$ sont des solutions sortants et donc (3.19) nous donne la résolvante sortante.

Pour écrire $R_V(\lambda)(x, y)$ explicitement, il faut calculer le Wronskien des e_+ et e_- . Tout d'abord, observons que, par les propriétés caractérisant des e_{\pm} , nous pouvons écrire

$$e_{\pm}(x, \lambda) = \begin{cases} T_{\pm}(\lambda)e^{\pm i\lambda x} & \text{pour } \pm x \gg 0 \\ e^{\pm i\lambda x} + R_{\pm}(\lambda)e^{\mp i\lambda x} & \text{pour } \pm x \ll 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Le calcul du Wronskien W de e_+ et e_- pour x grand et x négatif grand respectivement, on obtient

$$W = -2i\lambda T_+(\lambda) = -2i\lambda T_-(\lambda)$$

En particulier,

$$T_+(\lambda) = T_-(\lambda) := T(\lambda) \quad (4.5)$$

$$\begin{array}{ccccccc} e_+(x, \lambda) & \xrightarrow{e^{i\lambda x}} & \xleftarrow{R_+(\lambda)e^{-i\lambda x}} & & & \xrightarrow{T(\lambda)e^{i\lambda x}} & \\ & - & \text{-----} & | & V & | & \text{-----} \\ e_-(x, \lambda) & & \xleftarrow{T(\lambda)e^{-i\lambda x}} & & & \xrightarrow{R_-(\lambda)e^{i\lambda x}} & \xleftarrow{e^{-i\lambda x}} \\ & - & \text{-----} & | & V & | & \text{-----} \end{array}$$

Figure 2

$T(\lambda)$ est appelé le coefficient de transmission et $R_{\pm}(\lambda)$ les coefficients de réflexion. Maintenant, nous pouvons écrire l'expression $R_V(\lambda)$ en termes de e_{\pm} de (3.19). Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nous avons

$$R_V(\lambda)(x, y) = \frac{1}{2i\lambda t(\lambda)} (e_+(x, y)e_-(y, \lambda)(x - y)_+^0 + e_+(y, \lambda)e_-(x, \lambda)(x - y)_-^0) \quad (4.6)$$

Cela implique le développement asymptotique utiles suivantes

$$R_V(\lambda)(\pm r, y) = \frac{1}{2i\lambda} e^{\pm i\lambda r} e_{\mp}(y, \lambda) \text{ for } r \gg 0. \quad (4.7)$$

La décomposition spectrale de H_V est maintenant donnée par

Théorème 4.1.1. *Soit e_{\pm} donné par la proposition (3.2.4). Alors*

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (e_+(x, \lambda)\overline{e_+(y, \lambda)} + e_-(x, \lambda)\overline{e_-(y, \lambda)})d\lambda + \sum_{j=1}^N e_j(x)\overline{e_j(y)}$$

et

$$H_V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \lambda^2 (e_+(x, \lambda)\overline{e_+(y, \lambda)} + e_-(x, \lambda)\overline{e_-(y, \lambda)})d\lambda + \sum_{j=1}^N E_j e_j(x)\overline{e_j(y)} \quad (4.8)$$

où $E_j = \lambda_j^2$, $j = 1, \dots, N$, λ_j 's sont des pôles de $R_V(\lambda)$ pour $\text{Im } \lambda > 0$, et $(H_V - E_j)e_j = 0$ avec $\|e_j\|_{L^2} = 1$.

Preuve 4.1.1. *le théorème (3.2.1) et la bornitude de V , H_V agissant sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ présente une extension auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$ dont le spectre est constitué d'un nombre fini de valeurs propres négatives (avec multiplicité) et une partie continue sur $[0, 1[$.*

Par conséquent

$$H_V(\lambda) = \sum_{j=1}^N E_j e_j \otimes \bar{e}_j + \int_0^{\infty} z dE_z = \sum_{j=1}^N E_j e_j \otimes \bar{e}_j + \int_0^{\infty} \lambda^2 dE_{\lambda} \quad (4.9)$$

où les E_j sont les valeurs propres de H_V et les e_j sont les fonctions propres normalisés correspondants. $(H_V - E_j)e_j = 0$, $\|e_j\|_{L^2} = 1$. (dans la deuxième égalité, nous employons la substitution $z = \lambda^2$. Dans notre convention on prend la racine carrée de

z , $E_j = \lambda_j^2$ où les λ_j sont les poles de $R_V(\lambda)$ pour $\text{Im } \lambda > 0$. Pour calculer dE_λ nous employons la formule de Stone suivantes

$$dE_\lambda = \frac{\lambda}{\pi i} (R_V(\lambda) - R_V(-\lambda)) d\lambda \quad (4.10)$$

Nous voulons exprimer le côté droit par les ondes planes distordues e_\pm . Pour cela, nous utilisons l'équation

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)R_V(\pm\lambda)(x, y) = \delta(x - y)$$

et la symétrie de $R_V(\pm\lambda)(x, y)$ en ce qui concerne x, y à écrire pour fixe x, y et grand r ,

$$\begin{aligned} (R_V(\lambda) - R_V(-\lambda))(x, y) &= \int_{-r}^r \left[\begin{array}{c} R_V(\lambda)(x, y')(D_{y'}^2 R_V(-\lambda)(y', y)) - (D_{y'}^2 R_V(\lambda)(x, y')) \\ R_V(-\lambda)(y', y) \end{array} \right] dy' \\ &= \left[\begin{array}{c} R_V(\lambda)(x, y')(D_{y'} R_V(-\lambda)(y', y) - D_{y'} R_V(\lambda)(x, y')) R_V(-\lambda) \\ (y', y) \end{array} \right] \Big|_{y'=-r}^{y'=r} \\ &= \frac{i}{2\pi} (e_+(x, \lambda) \overline{e_+(y, \lambda)} + e_-(x, \lambda) \overline{e_-(y, \lambda)}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

par (4.7). Le théorème (4.1.1) suit maintenant de la mise (4.11) dans (4.9) et (4.10).

4.1.2 Equation d'onde

Nous pouvons également envisager la relation à l'équation d'onde. Les solutions fondamentales E_\pm avancés et retardés sont encore caractérisés par :

$$\begin{aligned} (D_t^2 - (D_x^2 + V))E_\pm(t, x, y) &= \delta_0(t)\delta_y(x) \\ E_\pm(t, x, y) &= 0 \text{ pour } \pm t < 0. \end{aligned}$$

De nouveau, nous avons

$$E_\pm(t, x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int R_V(\pm\lambda)(x, y) e^{-it\lambda} d\lambda.$$

Nous avons plus ou moins établi dans le cas perturbé tous les résultats. Nous terminons cette section en discutant une classe d'opérateurs d'entrelacement A_\pm satisfaisant

$$H_V A_\pm = A_\pm H_0$$

qui sera utile plus tard. Plus précisément, nous voulons trouver des distributions $A_{\pm}(x, y)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} (D_x^2 + V)A_{\pm}(x, y) &= D_y^2 A_{\pm}(x, y) \\ A_{\pm}(x, y) &= \delta(x - y) \quad \pm x \gg 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pour montrer leur existence, nous allons d’abord construire des solutions de l’équation stationnaire, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (D_x^2 + V - \lambda^2)\phi_{\pm}(x, \lambda) &= 0 \\ \phi_{\pm}(x, \lambda) &= e^{-i\lambda x} \quad \pm x \gg 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

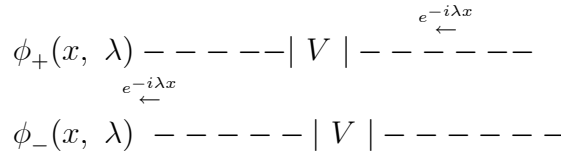


Figure 3

Lemme 4.1.1. *Il existe des solutions uniques $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ de (4.12) et pour x fixe, $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ sont des fonctions de $\lambda \in \mathbb{R}$ trempé.*

Preuve 4.1.2. *Posons*

$$\phi_{\pm}(x, \lambda) = \frac{1}{T(\mp\lambda)} e_{\pm}(x, \mp\lambda) \tag{4.14}$$

où $T(\lambda)$ est définie en (4.4) et (4.5). Alors $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ sont méromorphe dans $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous affirmons que $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ sont holomorphe sur \mathbb{R} . En effet, pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $T(\lambda) \neq 0$ autrement $e_{\pm}(x, \lambda)$ serait identiquement nulle par la proposition (3.2.3). Ensuite, supposons $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ a un pôle d’ordre $m > 0$ à $\lambda = 0$. Alors $\lambda^m \phi_{\pm}(x, \lambda)$ est holomorphe pour λ au voisinage de 0. Soit

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^m \phi_{\pm}(x, \lambda),$$

alors $\tilde{\phi}_{\pm}(x)$ est une solution de

$$(D_x^2 + V)\tilde{\phi}_{\pm}(x) = 0$$

$$\tilde{\phi}_{\pm}(x) = 0 \quad \pm x \gg 0.$$

d'où $\tilde{\phi}_{\pm}(x) \equiv 0$ par la proposition (3.2.3) ce qui est contradictoire. Bien que nous n'avons pas besoin de ce fait dans la démonstration du lemme, nous remarquons que l'argument ci-dessus montre en fait que $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ est définie et holomorphe pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ satisfont clairement (4.12), il reste à vérifier la température de $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ que $|\lambda| \rightarrow \infty$. Pour cela, rappeler par (3.6),

$$|(VR_0(\lambda)\rho)(x, y)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \quad \text{pour } |\lambda| \gg 0$$

où $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho V \equiv V$; également à partir de (3.14) nous avons

$$R_V(\lambda)\rho = R_0(\lambda)\rho \sum_{k=0}^{\infty} (R_0(\lambda)V)^k$$

(4.7) alors montre que

$$|e_{\pm}(x, \lambda)| \leq C \quad \text{pour } |\lambda| \gg 0 \quad (4.15)$$

De plus, nous avons

$$|T(\lambda)|^{-1} \leq C \quad \text{pour } |\lambda| \gg 0$$

Cela découle d'un argument similaire pour $|\lambda| \gg 0$.

$$T(\lambda) = 1 - e^{-i\lambda x} R_V(\lambda)(V e^{i\lambda})$$

ce qui implique

$$T(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{quand } |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.16)$$

Ceci termine la preuve de notre lemme.

Proposition 4.1.1. *Il existe des solutions uniques $A_{\pm}(x, y)$ pour (4.11). En outre, elles satisfont les propriétés suivantes :*

(a) $\text{Supp}A_{\pm}(x, y) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mp x \geq \mp y\}$

(b) $\delta_y A_{-}(x, y) = X(y - x) + Y(x + y)x \gg 0$.

Ici X, Y sont des distributions à support compact avec

$$\text{Supp}X \subset [-2(b - \alpha), 0] \quad (4.17)$$

$$\text{Supp}Y \subset [2\alpha, 2b]$$

où $[\alpha, b] = \text{ch Supp}V$.

Preuve 4.1.3. *Récrivant (4.11) légèrement, nous avons*

$$\begin{cases} D_x^2 - (D_y^2 - V(x))A_{\pm}(x, y) = 0 \\ A_{\pm}(x, y) = \delta(x - y) \end{cases} \quad \text{pour } \pm x \gg 0$$

Ainsi $A_{\pm}(x, y)$ satisfait l'équation d'onde avec x prenant la place du temps (ce choix est dicté par la condition imposée forçant). La partie unique suit alors des estimations d'énergie de l'équation d'onde.

Pour la partie de l'existence, nous posons

$$A_{\pm}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\pm}(x, \lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \quad (4.18)$$

qui est bien défini, grâce au lemme 4.1.1.

Maintenant $A_{\pm}(x, y)$ vérifie (4.11) à cause de (4.12).

(a) est alors une conséquence directe des estimations d'énergie, celle $\partial_y A_{-}(x, y)$ est de la forme donnée en

(b) pour $x \gg 0$ est tout simplement parce qu'elle satisfait l'équation d'onde :

$$(D_x^2 - D_y^2)\partial_y A_{-}(x, y) = 0 \text{ pour } x \gg 0.$$

Les propriétés de support de X et Y peuvent être vu maintenant sur la figure 4 qui montre le support de $\partial_y A_{-}(x, y)$ (la région entourée par les traits épais) et avec les

supports de $X(y - x)$ et $Y(y + x)$ indiqué.

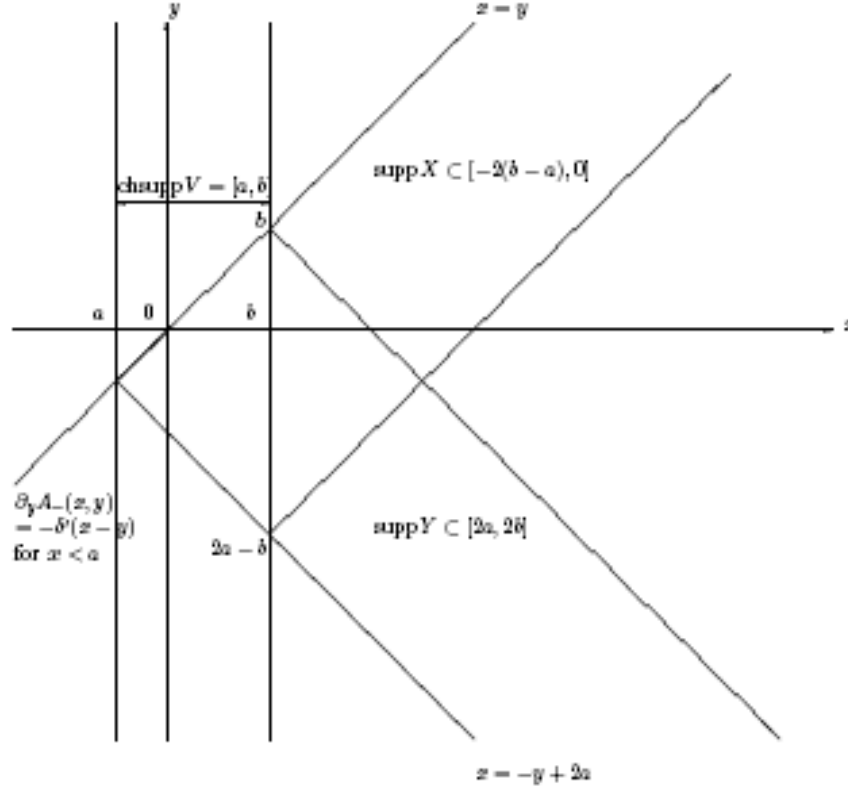


Figure 4 : Une construction directe de croisement des noyaux $A_{\pm}(x; y)$ sont importants dans les problèmes inverse.

Remarque 4.1.3. Une construction directe des noyaux entrelacés $A_{\pm}(x, y)$ est important dans les problèmes inverses.

4.2 Matrice de diffusion

On peut classer les solutions de Jost différemment, en fonction de la direction de leur vecteur d'onde (cf. la description de l'onde plane). Les fonctions J_g^+ et J_d^- sont entrantes : elles se dirigent vers la zone d'action du potentiel (là où $V \neq 0$) et J_d^+ et J_g^- sont sortantes. L'idée derrière la notion de diffusion est de relier les données sortantes aux données entrantes (cf.[TR]).

L'objet mathématique correspondant est la matrice de diffusion :

Définition 4.2.1. *On appelle matrice de diffusion (en anglais scattering) à énergie λ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par*

$$S(\lambda) = \frac{1}{t^*(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 & -r^*(\lambda) \\ r(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

donne immédiatement

$$\det S(\lambda) = \frac{t(\lambda)}{t^*(\lambda)} \quad (4.20)$$

Définition 4.2.2. *Toujours pour $\lambda \in \mathbb{R} + *$, la matrice $S(\lambda)$ est donc unitaire, et son déterminant est un nombre complexe de module 1, que l'on écrit*

$$\det S(\lambda) = e^{2i\Theta(\lambda)}, \quad \Theta(\lambda) = -\arg(t^*(\lambda))$$

où la fonction $\Theta(\lambda)$ est appelée phase de diffusion.

Remarque 4.2.1. *Un calcul simple permet de montrer que si une solution u de l'équation (4.1) s'écrit*

$$u(x) = A_+ J_g^+ + A_- J_d^- = B_+ J_d^+ + B_- J_g^-$$

alors

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = S(\lambda) \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

Autrement dit si les solutions entrantes (J^+g , J^-d) forment une base de l'espace des solutions, les solutions sortantes (J_d^+ , J_g^-) aussi, et $S(\lambda)$ est la matrice de passage de la base entrante à la base sortante.

Nous commençons par la définition de la matrice de diffusion associée à l'Hamiltonien

$$H_V = D_x^2 + V \quad V \in L_{comp}^\infty(\mathbb{R})$$

Pour tout solution u de

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)u = 0 \quad (4.21)$$

il a l'extension

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} A_+ e^{i\lambda x} + B_- e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \gg 0 \\ A_- e^{i\lambda x} + B_+ e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \ll 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

$$u(x, \lambda) \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{B_+ e^{-i\lambda x}} \quad \xrightarrow{A_- e^{i\lambda x}} \\ \text{-----} \quad \text{-----} \end{array} \quad | V | \quad \begin{array}{c} \xleftarrow{B_- e^{-i\lambda x}} \quad \xrightarrow{A_+ e^{i\lambda x}} \\ \text{-----} \quad \text{-----} \end{array}$$

Figure 5

Alors la matrice de diffusion (cf.[DaBiMaZw]) est définie comme étant l'opérateur qui fait correspondre les coefficients entrants aux coefficients sortants, à savoir

$$S(\lambda) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Théorème 4.2.1. *La matrice $S(\lambda)$ est méromorphe pour $\lambda \in \mathbb{C}$ où les pôles avec $\text{Im } \lambda > 0$ correspondent aux racines carrées des valeurs propres de H_V . Dans la notation (de la proposition 4.1.1) nous avons*

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{i\lambda}{\widehat{X}(\lambda)} & \frac{\widehat{Y}(\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)} \\ \frac{\widehat{Y}(-\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)} & \frac{i\lambda}{\widehat{X}(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

où \widehat{X} désigne la transformée de Fourier de X et

$$S(\lambda)S(\bar{\lambda})^* = S(\lambda)JS(-\lambda)J = I \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Preuve 4.2.1. *Pour trouver $S(\lambda)$, nous utilisons les deux solutions linéairement indépendantes de $\phi_{\pm}(x, \lambda)$ de (4.21) donnée par le lemme 4.1.1*

$$\phi_-(x, \lambda) = \begin{cases} A(\lambda)e^{i\lambda x} + B(\lambda)e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \gg 0 \\ e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \ll 0 \end{cases}$$

et

$$\phi_+(x, \lambda) = \begin{cases} e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \gg 0 \\ C(\lambda)e^{i\lambda x} + D(\lambda)e^{-i\lambda x} & \text{pour } x \ll 0 \end{cases}$$

où $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ satisfaisant

$$\overline{A(\lambda)} = A(-\lambda), \dots, \overline{D(\lambda)} = D(-\lambda) \quad (4.26)$$

et les conditions d'unitarité

$$|A(\lambda)|^2 + 1 = |B(\lambda)|^2, \quad |C(\lambda)|^2 + 1 = |D(\lambda)|^2 \quad (4.27)$$

la définition (4.23) de la matrice de diffusion donne

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{-A(\lambda)}{B(\lambda)C(\lambda)} & \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} \\ \frac{B(\lambda)D(\lambda)-1}{C(\lambda)B(\lambda)} & \frac{1}{B(\lambda)} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

la proposition (3.2.4), nous trouvons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$i\lambda\phi_-(x, \lambda) = \hat{X}(\lambda)\phi_+(x, \lambda) + \hat{Y}\phi_+(x, -\lambda) \quad (4.29)$$

utilisant (4.29), nous pouvons exprimer $A(\lambda), \dots, D(\lambda)$ sur le plan de $\hat{X}(\lambda)$ et $\hat{Y}(\lambda)$.

Un simple calcul donne

$$A(\lambda) = \frac{\hat{Y}(\lambda)}{i\lambda}, \quad B(\lambda) = \frac{\hat{X}(\lambda)}{i\lambda}, \quad (4.30)$$

$$C(\lambda) = \frac{-\hat{Y}(\lambda)}{i\lambda}, \quad D(\lambda) = \frac{-\hat{Y}(\lambda)}{i\lambda} \quad (4.31)$$

Pour ce calcul, nous avons utilisé le fait que X et Y sont réels et la condition d'unitarité

$$|A(\lambda)|^2 + 1 = |B(\lambda)|^2$$

ce qui implique

$$\hat{X}(\lambda)\hat{X}(-\lambda) = \lambda^2 + \hat{Y}(\lambda)\hat{Y}(-\lambda) \quad (4.32)$$

Plaçant (4.30) dans (4.28) nous obtenons (4.24). En particulier, $S(\lambda)$ est méromorphe sur \mathbb{C} à la fois X et Y représentent des distributions à support compact. Supposons $S(\lambda)$ a un pôle à λ_0 où $\text{Im } \lambda_0 > 0$, alors $\hat{X}(\lambda)$ a un zéro à λ_0 , ainsi $B(\lambda)$ a un zéro à λ_0 et $\phi_-(x, \lambda_0)$ devient une fonction propre de (4.21), c'est à dire, λ_0 est une racine carrée des valeurs propres de H_V . Enfin, les relations (4.25) peuvent être contrôlés directement en utilisant (4.24) et (4.32).

La matrice de diffusion $S(\lambda)$ concerne également des ondes planes déformées entrants et sortants $e_{\pm}(x, \lambda)$, défini dans la proposition (3.2.3).

Proposition 4.2.1. *Nous avons les «équations fonctionnelles» suivants pour les ondes planes déformées $e_{\pm}(x, \lambda)$*

$$S(\lambda)^t J \begin{pmatrix} e_+(x, -\lambda) \\ e_-(x, -\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_+(x, \lambda) \\ e_-(x, \lambda) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Preuve 4.2.2. *Nous rappelons d'abord les relations entre ϕ_{\pm} et e_{\pm} à partir de (4.14)*

$$\phi_+(x, \lambda) = \frac{1}{T(\lambda)} e_+(x, \lambda) = \frac{\hat{X}(\lambda)}{i\lambda} e_+(x, \lambda) \quad (4.34)$$

$$\phi_-(x, \lambda) = \frac{1}{T(\lambda)} e_-(x, \lambda) = \frac{\hat{X}(\lambda)}{i\lambda} e_-(x, \lambda)$$

où nous avons utilisé

$$T(\lambda) = \frac{i\lambda}{\hat{X}(\lambda)} \quad (4.35)$$

qui peut être obtenu, par exemple, en comparant $e_-(x, \lambda)$ et $\phi_-(x, \lambda)$ pour $x \gg 0$ et (4.30). Pour une utilisation ultérieure, nous enregistrons également

$$R_{\pm}(\lambda) = \frac{\hat{Y}(\mp\lambda)}{\hat{X}(\lambda)} \quad (4.36)$$

qui (4.24) implique que

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T(\lambda) & R_-(\lambda) \\ R_+(\lambda) & T(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Maintenant, en mettant (4.34) dans (4.29) nous obtenons

$$i\lambda e_-(x, \lambda) = -\hat{X}(-\lambda) e_+(x, -\lambda) + \hat{Y}(\lambda) e_+(x, \lambda) \quad (4.38)$$

Ensuite, nous calculons

$$\begin{aligned} S(\lambda)^t J \begin{pmatrix} e_+(x, -\lambda) \\ e_-(x, -\lambda) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\hat{X}(\lambda)} \begin{pmatrix} i\lambda & \hat{Y}(-\lambda) \\ \hat{Y}(\lambda) & i\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_-(x, -\lambda) \\ e_+(x, -\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_+(x, \lambda) \\ e_-(x, \lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Preuve 4.2.3. *Où nous avons utilisé (4.38) dans la dernière égalité.*

La description des interactions

La description des interactions est plus utile pour décrire les interactions entre particules. Dans ce cas, aussi bien les états $\psi(t)$ que les opérateurs peuvent avoir une dépendance temporelle. Le principal avantage de cette description est qu'elle permet de traiter séparément la partie de l'hamiltonien qui causent les interactions (V dans notre cas). Les représentations des états sont reliées par une transformation unitaire

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t} u$$

On définit, dans la description des interactions l'opérateur

$$V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

de façon générale, les représentations des opérateurs sont reliées par la transformation unitaire

$$Q_I(t) = e^{iH_0 t} Q e^{-iH_0 t}$$

avec dépendance temporelle

$$i \frac{d}{dt} Q_I(t) = [Q_I(t), H_0]$$

qui ne dépend que de la partie H_0 de l'Hamiltonien.

Notre notion de comportement entrant et sortant a été motivée par l'équation de Schrödinger alors que la définition ci-dessus de la matrice de diffusion est purement stationnaire. À présent, Nous aimerions le relier au point de vue dynamique. Rappelons que si H est un opérateur auto-adjoint, le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} (i\partial_t - H)v = 0 \\ v|_{t=0} = u \end{cases} \quad (4.39)$$

est résolu par le groupe unitaire e^{-itH} , i.e.,

$$v(t) = e^{-itH} u$$

Nous voulons comparer les évolutions libres et perturbées correspondant aux opérateurs auto-adjoint respectivement H_0 et H_V . Tout d'abord, nous voulons montrer que

pour toute donnée initiale $u \in L^2(\mathbb{R})$ orthogonale à l'espace des fonctions propres de H_V , il existe $u_{\pm} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$e^{-itH_V}u \approx e^{-itH_0}u_{\pm} \quad \text{tend} \longrightarrow \pm\infty$$

Ceci est donné par le théorème classique suivant dont la preuve ne dépend pas de la dimension spatiale. Par conséquent, nous présentons le cas général dans notre cadre simple pour $V \in L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 4.2.2. *Soit*

$$H_V = -\Delta + V$$

où $V \in L^2_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n)$. Si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, les limites suivantes existent

$$W_{\pm}u = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_V} e^{-itH_0}u \quad (4.40)$$

en outre, nous avons

$$W_{\pm}H_0 = H_V W_{\pm} \quad (4.41)$$

et

$$\|W_{\pm}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}, \quad (4.42)$$

i.e., W_{\pm} sont des isométries partielles qui entrelacent les opérateurs H_0 et H_V .

Preuve 4.2.4. *Nous prouvons d'abord l'existence de W_{\pm} . Soit*

$$U(t) = e^{itH_V} e^{-itH_0}$$

puisque e^{itH_V} et e^{-itH_0} sont des opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui dérive du théorème spectral des opérateurs auto-adjoints, $U(t)$ est également unitaire, i.e.,

$$\|U(t)w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{pour toute } w \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

par conséquent, par un argument de densité standard, il suffit de prouver l'existence de limites en (4.40) pour u dans un sous-ensemble dense de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous prenons

$$D = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \hat{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\}.$$

alors D est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ parce que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ la transformée de Fourier est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Or, pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{itH_V} e^{-itH_0} u) &= ie^{itH_V} (H_V - H_0) e^{-itH_0} u \\ &= ie^{itH_V} V e^{-itH_0} u \end{aligned}$$

donc

$$U(s)u = u + i \int_0^s e^{itH_V} V e^{-itH_0} u dt$$

et W_\pm existe si

$$\int \| e^{itH_V} V e^{-itH_0} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt = \int \| V e^{-itH_0} u \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt < \infty \quad (4.43)$$

pour tous $u \in D$. On prend $u \in D$, alors il existe $0 < r < R$ tel que pour $\xi \in \text{Supp } \hat{u}$, nous avons $r < |\xi| < R$.

Soit

$$u_t(x) = (e^{-itH_0} u)(x)$$

soit si pour une constante C qui peut dépendre de u , on a

$$|u_t(x)| \leq \frac{C}{|t|^2} \quad (4.44)$$

Pour $x \in \text{Supp } V$ et pour t suffisamment grande. Pour ce faire, nous appliquons l'intégration par parties

$$\begin{aligned} u_t(x) &= e^{-itH_0} u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{r < |\xi| < R} e^{ix \cdot \xi - it|\xi|^2} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r < |\xi| < R} \left(\frac{1}{i(x_j - 2t\xi_j)} \partial_{\xi_j} \right)^2 e^{ix \cdot \xi - it|\xi|^2} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{r < |\xi| < R} e^{ix \cdot \xi - it|\xi|^2} \left(\partial_{\xi_j} \left(\frac{1}{i(x_j - 2t\xi_j)} \right) \right)^2 \hat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Nous obtenons (4.44) si nous observons que, comme $r < |\xi| < R$,

$$\left| \frac{1}{x_j - 2t\xi_j} \right| \leq \frac{C}{|t|}$$

pour x dans un ensemble compact et très grand. Comme nous l'avons prouvé, l'existence de W_\pm , (4.42) est claire car elles sont des limites fortes d'opérateurs unitaires. Enfin, (4.41) peut être vu comme suit. Pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$e^{isH_V} W_{\pm} e^{-isH_0} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i(s+t)H_V} e^{-i(s+t)H_0} = W_{\pm}$$

donc,

$$0 = \frac{1}{i} \partial_s (e^{isH_V} W_{\pm} e^{-isH_0}) = H_V W_{\pm} - W_{\pm} H_0$$

qui est (4.41).

Les opérateurs W_{\pm} définis dans le théorème (4.2.2) sont appelés opérateurs d'onde. Ils peuvent être condamnés dans des situations plus généralisées. Pour illustrer ceci, nous présentons l'exemple simple suivant.

Exemple 4.2.1. *Soit*

$$\begin{aligned} H_0 &= D_x \\ H_V &= D_x + V \end{aligned}$$

où $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors

$$e^{itH_0} u(x) = u(x+t)$$

et puisque

$$H_V = e^{-iF} H_0 e^{iF}$$

où $F' = V$, on a

$$\begin{aligned} e^{itH_V} u(x) &= e^{-iF} e^{itH_0} e^{iF} u(x) \\ &= e^{-iF(x)} e^{iF(x+t)} u(x+t) \end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} W_{\pm} &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_V} e^{-itH_0} u(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-iF(x)} e^{iF(x)} e^{iF(x+t)} u(x) \\ &= e^{i(F(\pm\infty) - F(x))} u(x) \end{aligned}$$

4.3 Opérateur de diffusion

Maintenant, en utilisant les mêmes opérateurs d'onde, nous pouvons définir l'opérateur de diffusion par

$$\mathcal{S} = W_+^* W_- \quad (4.45)$$

Dans notre exemple simple ci-dessus, \mathcal{S} est simplement l'opérateur de multiplication par la constante

$$e^{-i} \int_{\mathbb{R}} V(x) dx.$$

Le théorème suivant relie l'opérateur de diffusion à la matrice de diffusion définie dans (4.23).

Théorème 4.3.1. *L'opérateur de diffusion $\mathcal{S} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est unitaire et est donné par le multiplicateur de Fourier*

$$\mathcal{S} = \Phi^* S(\cdot) \Phi \quad (4.46)$$

où $\Phi : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow (L^2([0, \infty)))^2$ est défini par

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} \widehat{u}(\cdot) \\ \widehat{u}(-\cdot) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Preuve 4.3.1. *Nous prouvons d'abord (4.46). soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, soit*

$$u = (\Phi^* S(\cdot) \Phi)v$$

donc

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}(\lambda) \\ \widehat{u}(-\lambda) \end{pmatrix} = S(\lambda) \begin{pmatrix} \widehat{v}(\lambda) \\ \widehat{v}(-\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

et $u \in S(\mathbb{R})$. Nous avons besoin de prouver $\mathcal{S}v = u$ ou équivalentement

$$W_+ u = W_- v$$

Soit

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [e_+(x, \lambda) \widehat{v}(\lambda) + e_-(x, \lambda) \widehat{v}(-\lambda)] d\lambda \quad (4.49)$$

nous affirmons que

$$W_- v = w \quad (4.50)$$

en effet, nous avons

$$\begin{aligned} e^{-itH_V} w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [e_+(x, \lambda) \widehat{v}(\lambda) + e_-(x, \lambda) \widehat{v}(-\lambda)] e^{-it\lambda^2} d\lambda \\ &= e^{-iH_0} v(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [f_+(x, \lambda) \widehat{v}(\lambda) + f_-(x, \lambda) \widehat{v}(-\lambda)] e^{-it\lambda^2} d\lambda \end{aligned}$$

où

$$f_\pm(x, \lambda) = e_\pm(x, \lambda) - e^{\pm i\lambda x} = -R_V(\lambda)(V e^{\pm i\lambda x})$$

sont sortants et holomorphes dans

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0, \operatorname{Im} \lambda > 0\}$$

Maintenant, déformons le contour d'intégration dans la dernière intégrale de \mathbb{R}_+ à

$$\Gamma_+ = \{\mu + i\mu : \mu > 0\}$$

on voit que le dernier intégral tend vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$ comme $t \rightarrow -\infty$ une fois que nous observons les majorations

$$\| f_\pm(\cdot, \lambda) \|_{L^2} \leq C e^{C \operatorname{Im} \lambda}, \quad (4.51)$$

$$| \widehat{v}(\pm\lambda) | \leq C e^{C \operatorname{Im} \lambda} \quad (4.52)$$

sur Γ_+ . La première estimation vient de la majoration

$$\| R_V(\lambda) \|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}^2(\lambda)} \quad \text{sur } \Gamma_+$$

par le théorème spectral et la seconde estimation vient du fait que v est de support compacte. Ainsi, notre allégation est prouvé.

ensuite, nous supposons

$$\widetilde{w}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [e_+(x, -\lambda) \widehat{u}(-\lambda) + e_-(x, -\lambda) \widehat{u}(\lambda)] d\lambda \quad (4.53)$$

et nous pouvons prouver par un argument similaire que

$$W_+ u = \widetilde{w}$$

Notons que le changement de signe provient du fait que $e_\pm(x, -\lambda) - e^{\mp i\lambda x}$ est entrant et donc nous devons déformer le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur.

Nous remarquons également que, bien que la deuxième estimation de (4.51) n'attient pas pour u qui ne soit connue que par Schwartz a priori, (4.53) peut encore être obtenue par un argument d'approximation. (4.46) suivra si nous pouvons prouver $\tilde{w} = w$.
Maintenant

$$\begin{aligned}
 \tilde{w}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e_+(x, -\lambda), e_-(x, -\lambda)) \begin{pmatrix} \widehat{u}(-\lambda) \\ \widehat{u}(\lambda) \end{pmatrix} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e_+(x, \lambda), e_-(x, \lambda)) S(\lambda)^{-1} J \begin{pmatrix} \widehat{u}(-\lambda) \\ \widehat{u}(\lambda) \end{pmatrix} d\lambda \quad \text{par (4.33)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e_+(x, \lambda), e_-(x, \lambda)) \begin{pmatrix} \widehat{v}(\lambda) \\ \widehat{v}(-\lambda) \end{pmatrix} d\lambda \quad \text{par (4.48)} \\
 &= w(x).
 \end{aligned}$$

Remarque 4.3.1. Dans le contexte plus général, le multiplicateur que nous avons utilisé est lié à la décomposition spectrale du Laplacien libre, à savoir

$$dE_\lambda^0 = \Phi_0^*(\lambda) \Phi_0(\lambda) d\lambda$$

avec

$$\Phi_0(\lambda)u = (\widehat{u}(\lambda), \widehat{u}(-\lambda))$$

comme \mathcal{S} commute avec $H_0 = D_x^2$, nous avons formellement

$$\mathcal{S} = \int_0^\infty S(\lambda) dE_\lambda^0 \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \Phi_0^* S(\cdot) \Phi_0$$

Comme application, nous donnons la faible complétude asymptotique des opérateurs d'onde.

Proposition 4.3.1. Nous avons

$$\text{Ran}W_+ = \text{Ran}W_-.$$

Preuve 4.3.2. Ceci est une conséquence de l'unitarité de \mathcal{S} et peut être clairement

dessous.

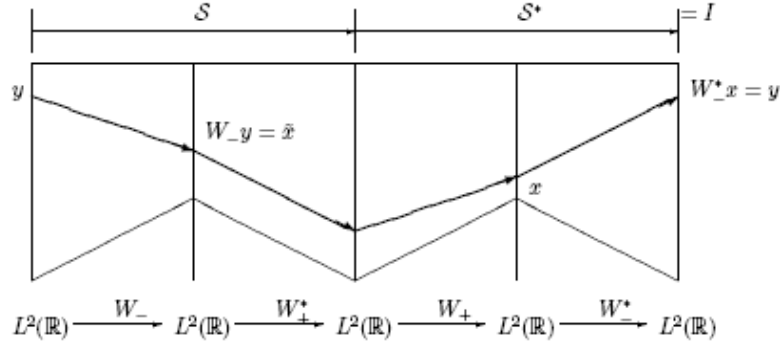


Figure 6

soit $x \in \text{Ran}W_+$, l'existence et l'unicité de \tilde{x} est clair à partir de la Figure 6. Nous avons maintenant

$$W_+W_+^*\tilde{x} = x$$

Ce qui implique $\tilde{x} = x$ puisque W_+ est une isométrie partielle.

Donc

$$\text{Ran}W_+ \subset \text{Ran}W_-$$

de même, en considérant

$$S^*S = I$$

au lieu de

$$SS^* = I$$

on a

$$\text{Ran}W_- \subset \text{Ran}W_+$$

En effet, le rang de W_+ (ou W_-) est caractérisé par le complément orthogonal des fonctions propres de H_V . Plus précisément,

Proposition 4.3.2. Nous avons

$$(\text{Ran}W_{\pm})^{\perp} = \text{Ker } W_{\pm}^* = \text{Span} \left\{ \phi_{-}(x, i\sqrt{-E_k}) \right\} \quad (4.54)$$

où les E_k sont les valeurs propres de H_V .

Preuve 4.3.3. *Le fait que $\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})$ donne une fonction propre correspondant à la valeur propre E_k est expliquée dans la démonstration du théorème (4.2.1). Notons que toutes les valeurs propres de H_V sont simples en raison du théorème d'unicité pour les équations différentielles ordinaires. La première égalité de (4.54) est un fait standard, nous avons seulement besoin de prouver la deuxième égalité là-bas.*

Tout d'abord, nous montrons

$$\text{Span} \left\{ \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \right\} \subset (\text{Ran} W_{\pm})^{\perp}.$$

Bien sûr, il suffit de le montrer pour $\text{Ran} W_-$ compte tenu de la proposition (4.3.1). pour cela, il faut vérifier

$$\langle w(x), \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle = 0$$

pour tout $w(x)$ de la forme

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [e_+(x, \lambda)\hat{v}(\lambda) + e_-(x, \lambda)\hat{v}(-\lambda)] d\lambda \quad v \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}),$$

voir (4.49), (4.50). Cela résulte, à son tour, $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \langle e_{\pm}(x, \lambda)\phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle &= \frac{1}{E_k} \langle e_{\pm}(x, \lambda), H_V \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle \\ &= \frac{1}{E_k} \langle H_V e_{\pm}(x, \lambda), \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle \\ &= \frac{\lambda^2}{E_k} \langle e_{\pm}(x, \lambda), \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle \end{aligned}$$

impliquant

$$\langle e_{\pm}(x, \lambda), \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \rangle = 0$$

comme $\frac{\lambda^2}{E_k} \neq 1$. Il reste à montrer

$$(\text{Ran} W_-)^{\perp} \subset \text{Span} \left\{ \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \right\}$$

ou équivalent

$$(\text{Span} \left\{ \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \right\})^{\perp} \subset \text{Ran} W_-.$$

Par la décomposition spectrale de H_V , le théorème (4.1.1), un élément générique de $(\text{Span} \left\{ \phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) \right\})^{\perp}$ est de la forme

$$\tilde{w}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [e_+(x, \lambda)\tilde{f}_+(\lambda) + e_-(x, \lambda)\tilde{f}_-(\lambda)] d\lambda$$

où

$$\tilde{f}_{\pm}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{e_{\pm}(y, \lambda)} f(y) dy, \quad f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Notons que $\tilde{f}_{\pm}(\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ comme $e_{\pm}(y, \lambda)$ est uniformément bornée. Nous pouvons alors trouver $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\hat{g}(\lambda) = \tilde{f}_+(\lambda)$ et $\hat{g}(-\lambda) = \tilde{f}_-(\lambda)$ pour $\lambda > 0$. Ainsi $\tilde{w}(x) \in \text{Ran } W_-$ ce qui complète la démonstration de la Proposition (4.3.2).

Chapitre 5

Résonances et formules de trace

5.1 Résonances

Nous avons vu dans le théorème (4.1.1) que les pôles de la résolvante sortante $R_V(\lambda)$ dans le demi-plan supérieur $\{\text{Im } \lambda > 0\}$ correspond aux valeurs propres de H_V . Dans le théorème (3.2.1), nous avons vu que $R_V(\lambda)$ Comme opérateur

$$R_V(\lambda) : L_{comp}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R})$$

a une suite méromorphe dans \mathbb{C} . Ses pôles sont des objets les plus importants dans la théorie de la diffusion et sont appelés résonances ou pôles de diffusion. Nous fournirons plus de motivation et de justification plus tard (*cf.* [RF], [MH] et [BS]).

Définition 5.1.1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $-2\theta_0 < \arg(\lambda) \leq 0$. On dit que λ est une résonance de H s'il existe $\theta \in]0, \theta_0[$ tel que $\arg(\lambda) > -2\theta$ et $\lambda \in \sigma_{disc}(H_\theta)$. L'ensemble des résonances de H est noté $\Gamma(h)$.

Voici pour terminer le lien entre la matrice de diffusion et les résonances de H

Proposition 5.1.1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $-2\theta_0 < \arg \lambda < 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in \Gamma(h)$.
2. L'équation $Hu = \lambda u$ admet une solution purement sortante, i.e. J_d^+ et J_g^- sont proportionnelles.

3. λ est un pôle de la matrice de diffusion, i.e. $t^*(\lambda) = 0$.

Supposons pour finir que λ est une résonance de H , et notons $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la fonction résonante correspondante, i.e. la fonction vérifiant $H_\theta u = \lambda u$ pour un certain θ , et qu'on suppose normalisée : $\|u\|_{L^2} = 1$. Alors

$$\varphi(t, x) = e^{-it\lambda}u(x)$$

appartient à L^2 pour tout t , mais

$$\|\varphi(t, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = e^{-t \operatorname{Im} \lambda}$$

Autrement dit l'énergie associée à φ décroît au cours du temps. Physiquement, on dit que cette fonction φ correspond à une pseudo-particule de durée de vie $1/\operatorname{Im} \lambda$. En particulier, on s'attend à ce que les résonances proches de l'axe réel correspondent à des phénomènes physiques observables.

Nous commençons par quelques préliminaires sur la multiplicité.

Proposition 5.1.2. *Si la multiplicité d'un pôle $\lambda_0 \neq 0$ de $R_V(\lambda)$ est défini par*

$$m_R(\lambda_0) = \operatorname{rank} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_0} R_V(\lambda) d\lambda, \quad (5.1)$$

alors

$$\begin{aligned} m_R(\lambda_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\widehat{X}'(\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)} d\lambda \\ &= \text{L'ordre de disparition de } \widehat{X}(\lambda) \text{ à } \lambda_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $X \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est défini dans la Proposition (3.2.4).

Preuve 5.1.1. *Rappelons que $\phi_\pm(x, \lambda)$ sont une paire de solutions linéairement indépendantes pour*

$$(H_V - \lambda^2)u = 0$$

définie dans le lemme 4.1.1. Appliquons (4.7) à l'opérateur $H_V - \lambda^2$ et utilisant

$$\psi_1 = \phi_+(x, -\lambda) \text{ et } \psi_2 = \phi_-(x, -\lambda),$$

nous obtenons

$$R_V(\lambda)(x, y) = \frac{1}{2\widehat{X}(\lambda)} (\phi_+(x, -\lambda)\phi_-(x, \lambda)(x-y)_+^0 + \phi_+(y, -\lambda)\phi_-(x, \lambda)(x-y)_-^0) \quad (5.3)$$

utilisant (4.29), tel que

$$i\lambda\phi_+(x, \lambda) = \widehat{X}(\lambda)\phi_+(x, \lambda) + \widehat{Y}(\lambda)\phi_+(x, -\lambda)$$

on obtient de (5.3) et (5.1) que

$$m_R(\lambda_0) = \text{rank } \text{Res}_{\lambda_0} \left(\frac{\widehat{Y}(\lambda)}{2i\lambda\widehat{X}(\lambda)} \phi_+(\cdot, -\lambda) \otimes \phi_+(\cdot, \lambda) \right)$$

Supposons maintenant l'ordre d'annulation pour $\widehat{X}(\lambda)$ à λ_0 est $k+1$, alors le résidu de

$$\frac{\widehat{Y}(\lambda)}{2i\lambda\widehat{X}(\lambda)} \phi_+(\cdot, -\lambda) \otimes \phi_+(\cdot, \lambda)$$

à λ_0 est donné par, comme $\widehat{Y}(\cdot)$ et $\phi_+(x, \cdot)$ sont entiers,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2ik!} \partial_\lambda^k \left(\frac{\widehat{Y}(\lambda)}{\lambda} \phi_+(\cdot, -\lambda) \otimes \phi_+(\cdot, \lambda) \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &= \left[\sum_{l=0}^k \partial_\lambda^l \phi_+(\cdot, -\lambda) \otimes \left(\sum_{j_1, j_2 \geq 0, j_1 + j_2 + l = k} c_{j_1, j_2, l} \partial_\lambda^{j_1} \left(\frac{\widehat{Y}(\lambda)}{\lambda} \right) \partial_\lambda^{j_2} \phi_+(\cdot, -\lambda) \right) \right]_{\lambda=\lambda_0} \end{aligned}$$

pour certaines constantes non nulles $c_{j_1, j_2, l}$. L'opérateur ci-dessus est de rang $k+1$ parceque

(i) $\partial_\lambda^j \phi_+(x, -\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$, sont des fonctions linéairement indépendantes alors

$$\partial_\lambda^j \phi_+(x, -\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = (ix)^j e^{i\lambda_0 x} \text{ pour } x \gg 0$$

et

(ii) Le coefficient de $\partial_\lambda^j \phi_+(x, -\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$, $j = 0, \dots, k$, alors $\widehat{Y}(\lambda_0) \neq 0$ par la relation d'unitarité (4.32). Ceci termine la démonstration de la Proposition (5.1.1).

Le théorème (4.2.1) montre que les pôles de la résolvante coïncident avec les pôles de la matrice de diffusion. Pour la fonction méromorphe à valeur matricielle (ou plus généralement pour la fonction meromorphe valorisée par l'opérateur (cf. [ReSi]; [BaCo]), la notion naturelle de multiplicité de pôles est donnée par

$$m_s(\lambda_0) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\lambda_0} \text{tr}(S(\lambda)^{-1} S'(\lambda)) d\lambda \quad (5.4)$$

qui est le même que l'ordre des pôles de $\det S(\lambda)$ parce que

$$\frac{(\det S(\lambda))'}{\det S(\lambda)} = \text{tr}(S(\lambda)^{-1} S'(\lambda)). \quad (5.5)$$

Proposition 5.1.3. *La définition des multiplicités donnée par (5.1) et (5.4) sont liés par*

$$m_s(\lambda) = m_R(\lambda) - m_R(-\lambda) \quad (5.6)$$

Preuve 5.1.2. *En utilisant (4.24), nous calculons*

$$\det S(\lambda) = \frac{-X(-\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)} \quad (5.7)$$

La proposition (5.1.2) donne alors la proposition (5.1.1).

Remarque 5.1.1. *Si $\text{Im } \lambda < 0$, $m_R(\lambda) \neq 0$ seulement pour λ^2 étant une valeur propre de H_V . Avec un léger abus de terminologie, nous disons que les pôles de $S(\lambda)$ et $R_V(\lambda)$ coïncident avec des multiplicités. Nous allons maintenant donner quelques motivations pour l'étude des résonances. Nous commençons par l'opérateur de temporisation. Pour simplifier, écrire $\chi_r(x) = 1_{\{|x| < r\}}$. Pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on pose*

$$S_r(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\chi_r e^{-itH_V} W_- f\|^2 dt$$

Remarque 5.1.2. *et*

$$S_r^0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\chi_r e^{-itH_0} f\|^2 dt$$

où W_- est l'un des opérateurs d'ondes. Définir un opérateur \widetilde{T}_r par sa forme quadratique correspondante

$$\langle \widetilde{T}_r f, f \rangle = S_r(f) - S_r^0(f),$$

alors l'opérateur de temporisation \widetilde{T} est donné par

$$\langle \widetilde{T} f, f \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \langle \widetilde{T}_r f, f \rangle. \quad (5.8)$$

La proposition suivante garantit l'existence de la limite. On notera ici que, par définition de W_- ,

$$e^{-itH_V} W_- f \sim e^{-itH_0} f \quad \text{comme } t \longrightarrow -\infty.$$

Proposition 5.1.4. *Par conséquent, $W_- f$ et f évoluent de la même manière sous la propagation perturbée et libre respectivement pour les grands temps négatifs.*

Proposition 5.1.5. *(Formule Eisenbud-Wigner) L'opérateur \widetilde{T} donné par (5.8) existe et*

$$\widetilde{T} = \Phi^* T(\cdot) \Phi \quad (5.9)$$

où

$$T(\lambda) = -2\lambda i S(\lambda)^* \frac{d}{d\lambda} S(\lambda)$$

et Φ est comme dans le théorème (4.2.2).

Preuve 5.1.3. (5.9) est équivalent à, pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{T}f(\lambda)} \\ \widehat{\widetilde{T}f(-\lambda)} \end{pmatrix} = -2i\lambda S(\lambda)^* S'(\lambda) \begin{pmatrix} \widehat{f(\lambda)} \\ \widehat{f(-\lambda)} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

qui à son tour équivalent à

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{T}f, f \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{T}f)(x) \overline{f(x)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widetilde{T}f(\lambda)} \overline{\widehat{f(\lambda)}} d\lambda \quad \text{Par la formule de Plancherel} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{\widetilde{T}f(\lambda)} \overline{\widehat{f(\lambda)}} + \widehat{\widetilde{T}f(-\lambda)} \overline{\widehat{f(-\lambda)}}) d\lambda \quad (5.11) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{\widehat{f(\lambda)}}, \overline{\widehat{f(-\lambda)}}) \begin{pmatrix} \widehat{\widetilde{T}f(\lambda)} \\ \widehat{\widetilde{T}f(-\lambda)} \end{pmatrix} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\overline{\widehat{f(\lambda)}}, \overline{\widehat{f(-\lambda)}}) (-2i\lambda S(\lambda)^* S'(\lambda)) \begin{pmatrix} \widehat{f(\lambda)} \\ \widehat{f(-\lambda)} \end{pmatrix} d\lambda \end{aligned}$$

pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Maintenant, en utilisant l'expression de $S(\lambda)$ en termes de coefficients de transmission et de réflexion donnés en (4.37), on obtient

$$S(\lambda)^* S'(\lambda) = \begin{pmatrix} T(-\lambda)T'(\lambda) + R_+(-\lambda)R'_+(\lambda) & T(-\lambda)R'_-(\lambda) + R_+(-\lambda)T'(\lambda) \\ R_-(-\lambda)T'(\lambda) + T(-\lambda)R'_+(\lambda) & R_-(-\lambda)R'_-(\lambda) + T(-\lambda)T'(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

ainsi, nous devons prouver que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_r(f) - S_r^0(f))$$

existe et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (S_r(f) - S_r^0(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (-2i\lambda) \begin{bmatrix} a\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)} + d\widehat{f}(-\lambda)\overline{\widehat{f}(-\lambda)} + b\widehat{f}(-\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)} + \\ c\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{f}(-\lambda)} \end{bmatrix} d\lambda \quad (5.13)$$

calculer $S_r(f) - S_r^0(f)$, Nous utilisons la formule pour W_- donnée par (4.49) et (4.50), on

$$\begin{aligned} S_r(f) &= \int_{-\infty}^\infty \|\chi_r e^{-itH_V} W_- f\|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty \|\chi_r W_- e^{-itH_0} f\|^2 dt \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-r}^r \left| \int_0^\infty (e_+(x, \xi) \widehat{e^{-itH_0} f}(\xi) + e_-(x, \xi) \widehat{e^{-itH_0} f}(-\xi)) d\xi \right|^2 dx dt \\ &\quad \text{par (4.49)} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-r}^r \left| \int_0^\infty e^{-it\xi^2} (e_+(x, \xi) \widehat{f}(\xi) + e_-(x, \xi) \widehat{f}(-\xi)) d\xi \right|^2 dx dt \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-r}^r \int_{-\infty}^\infty \left| \int_0^\infty \mathcal{F}_{t \rightarrow u} (e^{-it\xi^2} (e_+(x, \xi) \widehat{f}(\xi) + e_-(x, \xi) \widehat{f}(-\xi))) d\xi \right|^2 d\mu dx \\ &\quad \text{par la formule de Plancherel} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \int_{-\infty}^\infty \left| \int_0^\infty \delta_0(\mu + \xi^2) (e_+(x, \xi) \widehat{f}(\xi) + e_-(x, \xi) \widehat{f}(-\xi)) d\xi \right|^2 d\mu dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \int_0^\infty \left| e_+(x, \sqrt{\mu}) \widehat{f}(\sqrt{\mu}) + e_-(x, \sqrt{\mu}) \widehat{f}(-\sqrt{\mu}) \right|^2 d\mu dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \int_0^\infty 2\lambda \left| e_+(x, \lambda) \widehat{f}(\lambda) + e_-(x, \lambda) \widehat{f}(-\lambda) \right|^2 d\lambda dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-r}^r 2\lambda (e_+(x, \lambda) e_+(x, -\lambda) \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{f}(\lambda)} + e_-(x, \lambda) e_-(x, -\lambda) \widehat{f}(-\lambda) \overline{\widehat{f}(-\lambda)} \\ &\quad + e_-(x, \lambda) e_+(x, -\lambda) \widehat{f}(-\lambda) \overline{\widehat{f}(-\lambda)} + e_+(x, \lambda) e_-(x, -\lambda) \widehat{f}(\lambda) \overline{\widehat{f}(-\lambda)}) dx d\lambda \end{aligned} \quad (5.14)$$

de même, nous avons

$$S_r^0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\chi_r e^{-itH_0} f\|^2 dt \quad (5.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-r}^r 2\lambda(\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)} + \widehat{f}(-\lambda)\overline{\widehat{f}(-\lambda)} + e^{-i\lambda x}\widehat{f}(-\lambda)\overline{\widehat{f}(\lambda)} + e^{i\lambda x}\widehat{f}(\lambda)\overline{\widehat{f}(-\lambda)})dx d\lambda$$

ainsi, pour prouver (5.13), nous avons besoin

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{-r}^r 2\lambda(e_{\pm}(x, \lambda)e_{\pm}(x, -\lambda) - 1)dx \widehat{f}(\pm\lambda)\overline{\widehat{f}(\pm\lambda)}d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} (-2i\lambda) [T(-\lambda)T'(\lambda) + R_{\pm}(-\lambda)R'_{\pm}(-\lambda)] \widehat{f}(\pm\lambda)\overline{\widehat{f}(\pm\lambda)}d\lambda$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{-r}^r 2\lambda(e_{\pm}(x, \lambda)e_{\mp}(x, -\lambda) - e^{\pm i\lambda x})dx \widehat{f}(\pm\lambda)\overline{\widehat{f}(\mp\lambda)}d\lambda$$

$$= \int_0^{\infty} (-2i\lambda) [T(-\lambda)R'_{\pm}(\lambda) + R_{\mp}(-\lambda)T'(\lambda)] \widehat{f}(\pm\lambda)\overline{\widehat{f}(\mp\lambda)}d\lambda$$

Une autre motivation pour l'étude des résonances est le fait que, dans un sens faible, les résonances remplacent des valeurs propres en expansion par des modes (fonctions propres) (cf.[Hu]).

Nous rappelons que si nous

$$H_V = D_x^2 + V \quad \text{sur } [a, b]$$

avec la condition de frontière de Dirichlet (ou Neumann), le problème

$$\begin{cases} (H_V - \lambda^2)u = 0 & \text{sur } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

a un ensemble distinct de solutions $(i\sqrt{-E_k}, v_k), (\lambda_j, u_j)$ avec

$$E_N < \dots < E_1 < 0 < \lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \dots \longrightarrow \infty$$

et

$$\int_a^b |u_j|^2 dx = \int_a^b |v_k|^2 dx = 1$$

Si l'on considère l'équation d'onde

$$\begin{cases} (D_t^2 - H_V)w = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times (a, b) \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{sur } [a, b] \\ \partial_t w(0, x) = w_1(x) & \text{sur } [a, b] \\ w(t, a) = w(t, b) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}, \end{cases}$$

puis

$$\begin{aligned}
w(t, x) &= \sum_{k=1}^N \cosh(t\sqrt{-E_k}) a_k v_k(x) + \sum_{k=1}^N \sinh(t\sqrt{-E_k}) b_k v_k(x) \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty} \cos(t\lambda_j) c_j u_j(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sin(t\lambda_j) d_j u_j(x)
\end{aligned} \quad (5.16)$$

où

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_a^b w_0(x) \bar{v}_k(x) dx, & b_k &= \int_a^b w_1(x) \bar{v}_k(x) dx, \\
c_j &= \int_a^b w_0(x) \bar{u}_j(x) dx, & d_j &= \int_a^b w_1(x) \bar{u}_j(x) dx.
\end{aligned}$$

Nous donnons maintenant un analogue de (5.16) pour des problèmes sur des domaines ouverts impliquant des résonances. Dans sa preuve, nous avons besoin de

Lemme 5.1.1. *On suppose $V \in L_{comp}^{\infty}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\rho \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\rho V = V$, voici les constantes A', C, T en fonction du soutien de ρ tel que*

$$\| \rho R_V(\lambda) \rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{|\lambda|} e^{T|\operatorname{Im} \lambda|} \quad (5.17)$$

pour

$$\operatorname{Im} \lambda \geq -A' - \delta \log(\lambda)$$

et λ suffisamment grand. Ici ρ est une constante dépendant uniquement du support de V . En particulier, il n'y a que très peu de résonances dans la région

$$\{\operatorname{Im} \lambda \geq -A - \log \langle \lambda \rangle\}$$

pour tout A .

Preuve 5.1.4. *Tout d'abord, notez l'estimation évidente suivante de la resolvent libre*

$$\| \rho R_0(\lambda) \rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{|\lambda|} e^{T|\operatorname{Im} \lambda|} \quad (5.18)$$

Pour une certaine constante T en fonction du support de ρ , (3.9) puisque nous avons, de (4.1),

$$\rho R_V(\lambda) \rho = \rho R_0(\lambda) \rho (I + V R_0(\lambda) \rho_1)^{-1}$$

où $\rho_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction satisfaisant à $\rho\rho_1 = \rho_1$, (5.17) se trouve dans la région où

$$\|VR_0(\lambda)\rho_1\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Notre lemme suit clairement (5.18). Notez que la constante δ Ne dépend pas ρ comme nous pouvons choisir ρ_1 avec un support aussi proche de celui de V que nous aimons.

Remarque 5.1.3. Ici, on tire une conséquence du Lemme 5.1.1. alors

$$(D_x^2 + V - \lambda^2)\rho R_V(\lambda)\rho = \rho^2 I + [D_x^2, \rho] R_V(\lambda)\rho$$

nous avons

$$D_x^2(\rho R_V(\lambda)\rho) = \rho^2 I + (D_x^2 \rho + 2D_x \rho \cdot D_x) R_V(\lambda)\rho - V \rho R_V(\lambda)\rho + \lambda^2 \rho R_V(\lambda)\rho$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \| \rho R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C \| D_x^2 \rho R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} \\ & \leq C \left(1 + \| \rho_1 R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} + \| D_x \rho \|_{L^\infty} \| \rho_1 R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow H^1} \right. \\ & \quad \left. + (1 + \lambda^2) \| \rho R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow L^2} \right) \end{aligned}$$

où $\rho_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho_1 \rho = \rho$. Si $\|D_x \rho\|_{L^\infty}$ est petit, nous avons pour les grandes λ ,

$$\| \rho R_V(\lambda)\rho \|_{L^2 \rightarrow H^2} \leq C |\lambda| e^{T'|\text{Im } \lambda|} \quad (5.19)$$

dans la région $\text{Im } \lambda \geq -A' - \delta \log \langle \lambda \rangle$. Maintenant nous pouvons énoncer l'analogie de (5.16).

Théorème 5.1.1. Supposons que $w(t, x)$ soit la solution de

$$\begin{cases} (D_t^2 - H_V)w(t, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ w(0, x) = w_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \\ \partial_t w(0, x) = w_1(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.20)$$

où $w_0 \in H_{comp}^1(\mathbb{R})$, $w_1 \in L_{comp}^2(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } w_0, \text{supp } w_1 \subset \{|x| < \mathbb{R}\}$. Alors, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{\text{Im } \lambda > 0} \text{Re } s[(iR_V(\lambda)w_1 + \lambda R_V(\lambda)w_0)e^{-i\lambda t}] \\ &+ \sum_{0 < -\text{Im } \lambda \leq A + \delta \log(\lambda)} \text{Re } s[(iR_V(\lambda)w_1 + \lambda R_V(\lambda)w_0)e^{-i\lambda t}] + E_A(t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

où $E_A(t)$ satisfait à l'estimation

$$\|1_{\{|x|<K\}}E_A(t)\| \leq C_{K,R}e^{-(A-\varepsilon)(t-T')}(\|w_0\|_{H^1} + \|w_1\|_{L^2}) \quad (5.22)$$

pour toute $\varepsilon > 0$ et quelques constantes T', K suffisamment grandes.

Remarque 5.1.4. 1. Pour toute $A > 0$, la somme dans (5.21) est fini à cause du lemme 5.1.1.

2. Le premier terme sur le côté droit de (5.21) correspond aux valeurs propres de H_V et peut être écrit comme

$$\sum_{k=1}^N (a_k \cosh t\sqrt{-E_k}\phi_-(x, i\sqrt{-E_k}) + b_k \sinh t\sqrt{-E_k}\phi_-(x, i\sqrt{-E_k}))$$

où E_k , $k = 1, \dots, N$ sont les valeurs propres de H_V et $\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})$ les fonctions propres correspondantes comme expliqué dans le théorème (5.1.1), les a_k , b_k sont donnés par

$$a_k = \frac{1}{\|\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})\|_{L^2}} \int w_0(x)\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})dx$$

$$b_k = \frac{1}{\|\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})\|_{L^2}} \int w_1(x)\phi_-(x, i\sqrt{-E_k})dx$$

Preuve du théorème (5.1.1). Pour simplifier, nous supposons que H_V n'a pas de valeurs propres négatives car leur contribution à (5.21) est claire. En outre, nous ne considérerons (5.20) avec $w_0 \equiv 0$ comme la preuve ci-dessous fonctionne clairement dans le cas $w_1 \equiv 0$ si nous remplaçons $\frac{\sin t\lambda}{\lambda}$ par $\cos t\lambda$ dans la formule pour $w(t, x)$. Le cas général est alors obtenu en prenant des combinaisons linéaires.

Avec les simplifications ci-dessus comprises, par le théorème spectral, la solution de (5.20) peut être écrite comme

$$w(t) = \int_0^\infty \frac{\sin t\lambda}{\lambda} dE_\lambda(w_1).$$

Utilisant la formule de Stone pour écrire dE_λ en termes de $R_V(\lambda)$, nous obtenons

$$w(t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \sin t\lambda (R_V(\lambda) - R_V(-\lambda))w_1 d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{it\lambda} - e^{-it\lambda}}{2i} (R_V(\lambda) - R_V(-\lambda)) w_1 d\lambda \quad (5.23) \\
&= \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{i} \right) \left[\int_{-\infty}^\infty e^{it\lambda} R_V(\lambda) w_1 d\lambda - \int_{-\infty}^\infty e^{-it\lambda} R_V(\lambda) w_1 d\lambda \right]
\end{aligned}$$

Or, comme $R_V(\lambda)$ est holomorphe dans le demi-plan supérieur, on peut déformer le contour d'intégration du premier terme sur le côté droit de (5.23) au contour illustré dans la Figure 7.

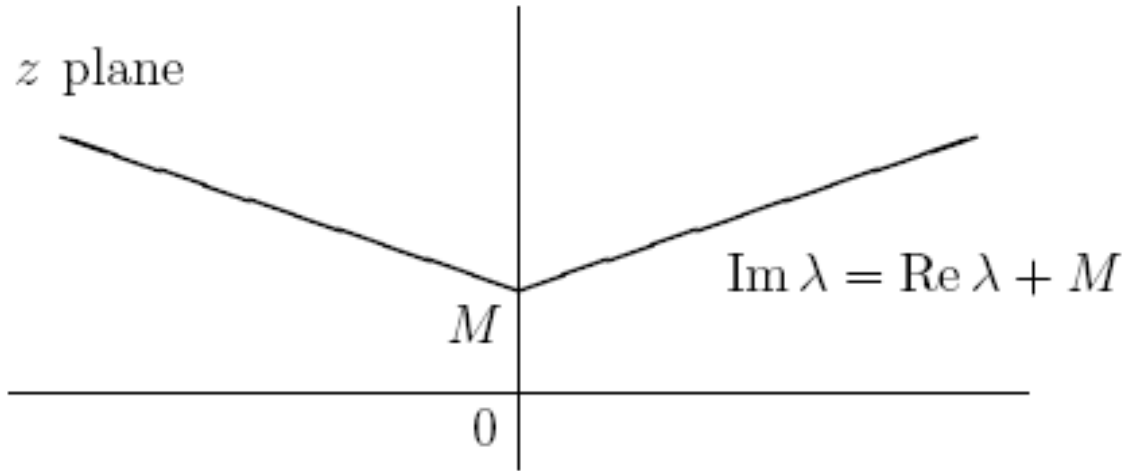


Figure 7

en fait tendre $M \rightarrow \infty$, nous pouvons l'éliminer de (5.23).

Ensuite, pour K assez grand, nous pouvons choisir $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho V = V$, $\rho 1_{\{|x| < K\}} = \rho$, $\rho 1_{\{|x| < K\}} = 1_{\{|x| < K\}}$ telle que (5.17), nous avons alors

$$\rho w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty e^{-it\lambda} \rho(iR_V(\lambda)) p w_1 d\lambda$$

par (5.19), on peut déformer le contour d'intégration au contour illustré sur la Figure

8.

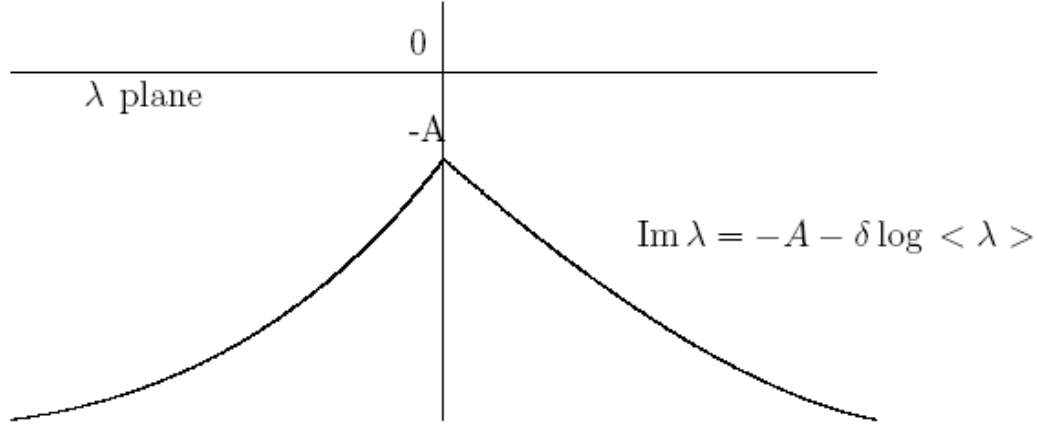


Figure 8

et nous avons

$$pw(t) = \sum_{0 < \text{Im } \lambda \leq -A + \delta \log \langle \lambda \rangle} \text{Re } s((i\rho R_V(\lambda)w_1)e^{-i\lambda t}) + E_{A,\rho}(t)$$

avec

$$\|E_{A,\rho}(t)\|_{H^1} \leq C_\rho e^{-(A-\varepsilon)(t-T')} (\|w_1\|_{L^2})$$

Soit K et support de ρ aller à l'infini, nous obtenons (5.21) et (5.22).

La comparaison du théorème (5.1.1) avec l'expansion du mode normal (5.16) montre que les résonances sont l'analogie naturelle des valeurs propres pour les problèmes de diffusion. Or, il est classique que pour H_V sur $[a, b]$, soit avec les conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, nous avons

$$\#\{\lambda_j : \lambda_j \leq r\} = \frac{b-a}{\pi} r + O(1).$$

Il existe également un résultat analogue pour les résonances.

Théorème 5.1.2. Soit $m_R(\lambda)$ la multiplicité des résonances données par (5.1), alors

$$\sum_{\lambda \leq r} m_R(\lambda) = \frac{2 |ch \text{ Supp } V|}{\pi} (r + o(1)) \quad (5.24)$$

où $ch \text{ supp } V$ est la coque convexe du support de V .

Preuve 5.1.5. *Par la Proposition (5.1.1), le Théorème (4.2.2) est une affirmation sur la distribution des zéros de toute la fonction $\widehat{X}(\lambda)$. Pour le prouver, nous avons besoin de la généralisation suivante aux distributions d'un résultat classique de Titchmarsh.*

Lemme 5.1.2. *Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, alors*

$$N_{\widehat{u}}(r) = \frac{|ch \text{ Supp } V|}{\pi} (r + o(1)) \quad (5.25)$$

où

$$N_f(r) = \sum_{|z| \leq r} \frac{1}{2\pi i} \oint_z \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

est la fonction de comptage des zéros de f .

Preuve 5.1.6. *Rappelons que la théorie classique de Titchmarsh donne le Lemme 5.1.2 quand $u \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$. Nous devons l'étendre à $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Tout d'abord, remarquons que le théorème de Titchmarsh implique que pour $u, v \in L^1_{comp}(\mathbb{R})$, nous avons*

$$ch \text{ supp}(u * v) = ch \text{ supp } u + ch \text{ supp } v \quad (5.26)$$

en fait, puisque $\widehat{u * v} = \widehat{u} \widehat{v}$, (5.25) implique

$$|ch \text{ supp } u * v| = |ch \text{ supp } u| + |ch \text{ supp } v|$$

et nous avons facilement

$$ch \text{ supp } u * v \subset ch \text{ supp } u + ch \text{ supp } v.$$

Ainsi, (5.26) a lieu. Maintenant (5.26) peut être généralisé facilement à des distributions de support compact. Pour voir cela, soient $u, v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ être pris dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} & ch \text{ supp}(u * \phi_\varepsilon) + ch \text{ supp}(v * \phi_\varepsilon) \\ &= ch \text{ supp}((u * v) * (\phi_\varepsilon * \phi_\varepsilon)) \subset ch \text{ supp } u * v + (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \end{aligned}$$

en fait tendre $\phi_\varepsilon \longrightarrow \delta_0$ comme $\varepsilon \longrightarrow 0$, nous obtenons

$$ch \text{ supp } u + ch \text{ supp } v \subset ch \text{ supp}(u * v)$$

Comme l'inclusion inverse est claire, on obtient (5.26) pour $u, v \in \varepsilon'(\mathbb{R})$. Maintenant, pour voir (5.25) pour $u \in \varepsilon'(\mathbb{R})$, Nous appliquons le théorème de Titchmarsh à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $u * \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour que

$$\frac{\pi}{r} N_{\hat{u}}(r) = \frac{\pi}{r} (N_{\hat{u}\hat{\phi}}(r) - N_{\hat{\phi}}(r)) \sim |ch \text{ supp } u * \phi| - |ch \text{ supp } \phi| = |ch \text{ supp } u|$$

où nous avons utilisé (5.26) dans la dernière égalité. Pour en revenir à la démonstration du théorème (5.1.2), il est maintenant évident qu'il est suffisant de montrer que

$$ch \text{ supp } X = [-2(b-a), 0] \quad \text{où} \quad [a, b] = ch \text{ supp } V. \quad (5.27)$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire pour certains $\varepsilon_-, \varepsilon_+ \geq 0, \varepsilon_- + \varepsilon_+ > 0$, nous avons

$$ch \text{ supp } X = [-2(b-a) + \varepsilon_-, \varepsilon_+].$$

Nous avons besoin de ce qui suit

Lemme 5.1.3. *Supposons que $V \in L_{comp}^\infty(\mathbb{R})$. Alors $X - \delta'_0(x) \in C([-2(b-a), 0])$. Cela montre immédiatement que $\varepsilon_+ = 0$ et pour obtenir des contradictions, nous supposons que $\varepsilon_- > 0$. Rappeler la relation d'unitarité,*

$$\hat{X}(\lambda)\hat{X}(-\lambda) = \lambda^2 + \hat{Y}(\lambda)\hat{Y}(\lambda).$$

La densité des zéros du côté gauche est donnée par $2c/\pi$, où $c = 2(b-a) - 2\varepsilon_-$. Puisque la coque convexe de $YY(-\bullet) - \delta''$ est le même que $ch \text{ supp } Y - ch \text{ supp } Y$ il s'ensuit que

$$ch Y = [d_-, d_+] \neq [2a, 2b]$$

supposons que $d_- > a$. Alors $\partial_y A_-(x, y)$ doit nul dans $|x - d_-/2| < d_-/2 - y$ par causalité. Mais cela signifie que $V(x)\delta(x-y) = 0$ pour $x < d_-/2 > a$ ce qui contredit

ch $\text{supp } V = [a, b]$. Un argument similaire utilisant A_+ montre que $d_+ = 2b$.

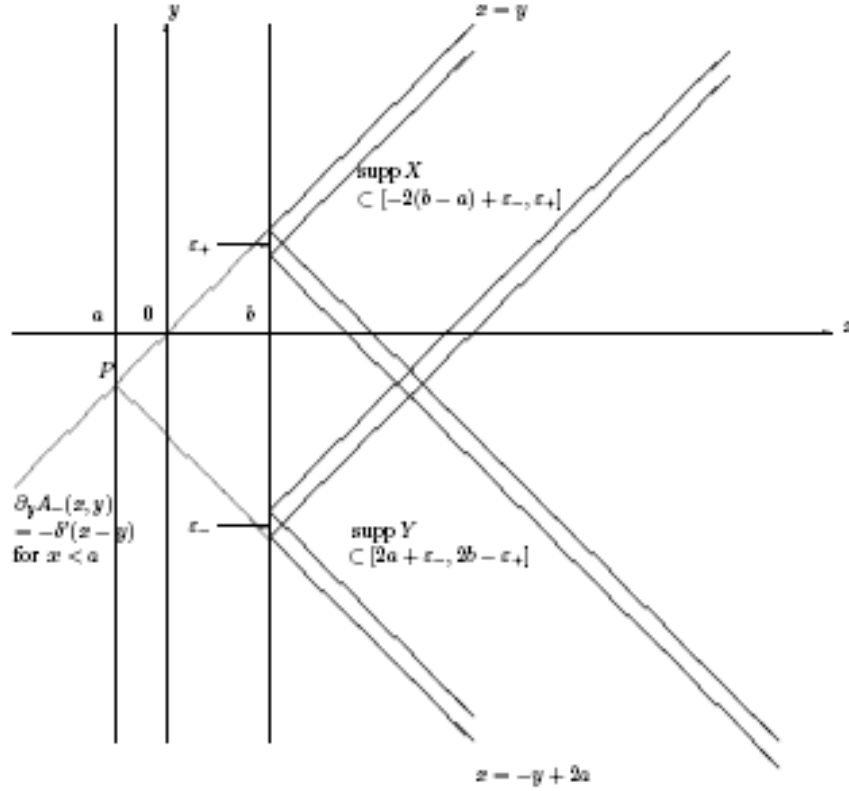


Figure 9

Finalement, nous discutons d’une caractérisation importante des résonances qui découle de la méthode de l’échelle complexe. Il est particulièrement clair dans le cas d’un potentiel de support compact sur \mathbb{R} . Pour l’introduire, nous examinons d’abord la restriction de l’opérateur différentiel holomorphe sur \mathbb{C} pour lisser les courbes.

Soit $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$. Si $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une courbe lisse et $u \in C^\infty(\Gamma)$, nous définissons

$$(\partial_z|_\Gamma)u = (z'(t))^{-1}\partial_t u$$

où $\Gamma = \{z(t)\}$ est une paramétrisation de Γ . De toute évidence, notre définition de $\partial_z|_\Gamma$ est indépendante du choix de paramétrisation.

Avec ce préliminaire, en ce qui concernent D_x^2 comme un opérateur différentiel holomorphe ∂_z^2 sur \mathbb{C} , nous pouvons restreindre l’opérateur H_V à n’importe quelle courbe $\Gamma \subset \mathbb{C}$ à la propriété qui

$$\text{Supp } V \subset \Gamma \cap \mathbb{R}.$$

La courbe Γ hérite d'une mesure de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} . Nous définissons $L^2(\Gamma)$ en utilisant cette mesure.

Théorème 5.1.3. *Fixant $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Supposons $\text{Supp}V \subset \{|x| < R\}$. Soit Γ_θ être une courbe sur \mathbb{C} satisfaisant*

$$\Gamma_\theta \cap \{|z| \leq R\} = [-R, R]$$

et

$$\Gamma_\theta \cap \left\{ \begin{array}{l} |z| \geq 2R \\ \pm \text{Re } z \geq 0 \end{array} \right\} = \pm e^{i\theta} [2R, \infty)$$

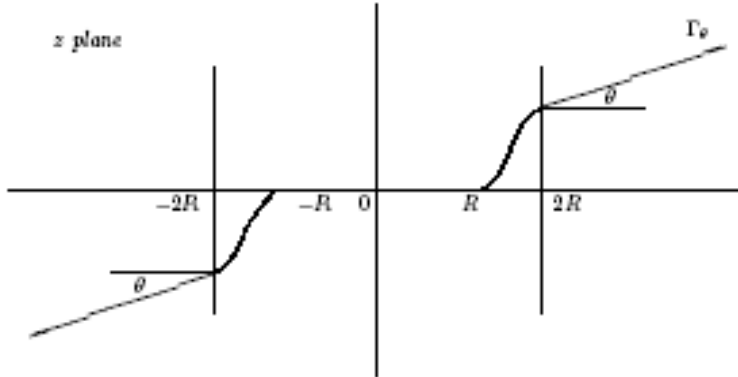


Figure 10

Posons $H_\theta \stackrel{\text{déf}}{=} H_V|_{\Gamma_\theta}$. Alors pour $-\theta < \arg \lambda < 0$ (rappelons que $z = \lambda^2$ est le paramètre spectral), le spectre de H_θ coïncide avec les résonances de H_V en comptant avec la multiplicité.

Preuve 5.1.7. *Pour simplifier, nous écrivons Γ_θ comme Γ ci-dessous. Tout d'abord, nous voulons montrer que le spectre de H_θ est discrète ou, en d'autres termes, $(H_\theta - \lambda^2)$ est méromorphe pour $-\theta < \arg \lambda < \varepsilon$, où ε est un nombre positif. Comme dans la démonstration du théorème (3.2.1), c'est la même chose de montrer que*

$$(I + V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1})^{-1}$$

est méromorphe pour $-\theta < \arg \lambda < \varepsilon$. Par la théorie analytique de Fredholm de l'Annexe, il découlera de la compacité de l'opérateur

$$V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1} \text{ sur } L^2(\Gamma)$$

pour $-\theta < \arg \lambda < \varepsilon$ et la borné

$$\|V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1}\rho\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad \text{pour } \operatorname{Im} \lambda > 0 \quad (5.28)$$

pour toute $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\rho V \equiv V$ qui garantira l'existence de $(I+V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1})^{-1}$. Pour les grands λ avec $\operatorname{Im} \lambda > 0$ par un argument de la série de Neumann maintenant nous avons

$$(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1}u(x) = \frac{2i}{\lambda} \int_\Gamma e^{i\lambda((x-y)^2)^{\frac{1}{2}}} u(y) dy$$

où la branche de racine carrée est choisie pour être positive sur l'axe réel positif. Pour $|y| \gg 0$ sur Γ , nous avons

$$y = \pm e^{i\theta} r \quad \text{pour } r > 0,$$

ainsi $((x-y)^2)^{\frac{1}{2}} \sim e^{i\theta} r$ pour $|x| < R$ et $r \gg 0$. Donc, $-\theta < \arg \lambda < \varepsilon$, $|x| < R$, nous avons

$$\left| e^{i\lambda((x-y)^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \sim e^{-r|\lambda| \sin(\theta + \arg \lambda)}$$

décroît exponentiellement quand $r \rightarrow \infty$. De là, nous voyons que $V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1}$ définit un opérateur compact sur $L^2(\Gamma)$. Prochain (5.28), nous observons simplement que

$$V(D_z^2|_\Gamma - \lambda^2)^{-1}\rho \equiv V(D_x^2 - \lambda^2)^{-1}\rho \quad \text{Si } \operatorname{supp} \rho \subset \{|x| < R\}$$

et (5.28) découle alors de (5.18). Ayant établi que le spectre de H_θ est discrète pour $-\theta < \arg \lambda < \varepsilon$, Nous devons montrer qu'il coïncide avec l'ensemble de résonance de H_V . Pour rendre l'argument clair, nous supposons la valeur propre simple ou la résonance. L'argument pour la multiplicité suit la même ligne. Maintenant, supposons que λ_0 est une résonance simple de H_V ce qui signifie que $\widehat{X}(\lambda)$ a un zéro simple à λ_0 et donc (voir (4.30))

$$\phi_-(x, \lambda_0) = \begin{cases} C e^{i\lambda_0 x} & x \gg 0 \\ e^{-i\lambda_0 x} & x \ll 0 \end{cases}$$

Pour $|x| \geq R$, $\phi_-(x, \lambda_0)$ clairement analytiquement continue dans x à \mathbb{C} et satisfait $(D_z^2 - \lambda_0)\phi_-(z, \lambda_0) = 0$ là. Ceci veut dire cela $(H_\theta - \lambda_0^2)(\phi_-|_\Gamma) = 0$. Notez également que

$$e^{\pm iz\lambda_0} \Big|_{\Gamma \cap \{|z| \geq R, \pm \operatorname{Re} z \geq 0\}} \in L^2(\Gamma \cap \{|z| \geq R, \pm \operatorname{Re} z \geq 0\})$$

Ainsi $\phi_-|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ et est une fonction propre de H_{θ} de valeur propre λ_0^2 . La valeur propre est simple sinon la solution de

$$(H_{\theta} - \lambda_0^2)^2 u = 0, u \in L^2(\Gamma)$$

donnerait une solution à

$$(H_V - \lambda_0^2)^2 v = 0$$

avec

$$v = \begin{cases} Ae^{i\lambda_0 x} & x \gg 0 \\ Be^{-i\lambda_0 x} & x \ll 0 \end{cases}$$

En contradiction avec la simplicité de la résonance. De même, une valeur propre simple de correspond à une simple résonance de H_V .

5.2 Formules de trace

De quoi s'agit-il ? Pour les systèmes non complètement intégrables et en particulier les systèmes chaotiques, on ne dispose pas d'accès direct aux valeurs propres semi-classiques par la construction de quasi-modes. L'idée des formules de traces est d'évaluer directement, dans le régime semi-classique, la fonction de partition quantique pour en déduire par un mécanisme simple de transformée de Fourier la densité d'état régularisée (cf.[YCV]).

5.2.1 Principe des formules de traces

Quel est le principe formel des formules de traces? Si on a un hamiltonien quantique H dépendant de h , petit paramètre et ayant un spectre discret (ou une partie de spectre discret) $(E_j(h))$, on essaie de calculer la trace de $f(H)$, où f est une fonction bien choisie, de 2 façons différentes :

1) Comme somme sur les valeurs propres :

$$Tr(f(H)) = \sum f(E_j(h))$$

2) A partir d'un noyau explicite (matrice de l'opérateur $f(H)$); si

$$f(H)u(x) = \int_X K_f(x, y) u(y) dy$$

on a :

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_X K_f(x, x) dy$$

En identifiant les 2 expressions de la trace, on obtient une relation :

$$\sum f(E_j(h)) = \int_X K_f(x, x) dy$$

appelée formule de traces. La partie gauche ne dépend que du spectre, alors que f est choisie pour que la partie droite contienne une information exploitable. Il y a évidemment d'innombrables possibilités. On distingue suivant la nature des fonctions f et suivant que les formules sont exactes ou asymptotiques en h .

5.2.2 Analyse asymptotique des spectres.

Soit $E_j(h)$ une suite finie de nombres (un spectre) de l'intervalle $[E_-, E_+]$ telle que

$$\#\{E_j(h)\} = O(h^{-N})$$

Soit $D_h(E) = \sum \delta(E_j)$ la distribution associée à ce spectre, $D_h(E)$ est la densité spectrale ou densité d'état. Soit $\rho \in S(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{\rho}(t)$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varkappa(E) \in C^\infty(]E_-, E_+[, \mathbb{R})$. Considérons l'expression

$$\widetilde{D}_h(E) = \sum X \varkappa(E_j) \frac{1}{h} \rho\left(\frac{E - E_j}{h}\right)$$

Nous appellerons $\widetilde{D}_h(E)$ la densité régularisée du spectre à l'échelle h . On souhaite décrire le comportement asymptotique de $\widetilde{D}_h(E)$ quand $h \rightarrow 0$.

Soit $A_h : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ donné par

$$A_h f(E) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}(E-F)t} \varkappa(E) \widehat{\rho}(t) f(t) dt dF$$

On peut voir A_h comme un ΨDO compactement supporté de symbole $\gamma(E) \widehat{\rho}(t)$. La densité régularisée $\widetilde{D}_h(E) = A_h(D_h(E))$ est déterminée par une analyse microlocale de D_h dans le rectangle $\mathbb{R} = \text{Supp}(\varkappa) \times \text{Supp}(\rho)$. On a donc mis en place l'idée principale :

le comportement asymptotique de la densité d'états régularisée $\widetilde{D}_h(E)$ est gouverné par l'analyse microlocale de la densité d'état $D_h(E) = \sum \delta(E_j)$.

5.2.3 Formules de trace

Pour motiver les formules de trace, nous considérons à nouveau la réalisation de Dirichlet de H_V sur un intervalle compact $[a, b]$, désignant l'opérateur auto-adjoint correspondant par H_V^D . Le spectre de H_V^D est discret,

$$E_N < E_{N-1} < \dots < E_1 < 0 < \lambda_0^2 < \lambda_1^2 < \dots \longrightarrow \infty.$$

Alors pour $f \in S(\mathbb{R})$, nous avons

$$\text{Tr } f(H_V^D) = \sum_{j=0}^{\infty} f(\lambda_j^2) + \sum_{k=1}^N f(E_k) \quad (5.29)$$

et

$$\text{Tr } f(H_V^D) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \frac{dN}{d\lambda}(\lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^N f(E_k) \quad (5.30)$$

où

$$N(\lambda) = \# \{ \lambda_j^2 : \lambda_j^2 \leq \lambda^2 \}$$

est la fonction de comptage des valeurs propres positives et $g(\lambda)$ est la fonction pair définie par $g(\lambda) = f(\lambda^2)$.

Dans cette section, nous prouvons les analogues théoriques de diffusion de (5.29) et (5.30).

Bien que pour H_V^D , (5.29) et (5.30) sont essentiellement les mêmes une fois que nous observons que

$$\frac{dN}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta(\lambda - \lambda_j),$$

leurs analogues de diffusion sont néanmoins tout à fait différents (*cf.*[RBM]). Nous commençons par l'analogique de (5.30).

Théorème 5.2.1. (*Formule Birman Kerin*) *Supposons $f \in S(\mathbb{R})$ et $g(\lambda) = f(\lambda^2)$. Alors $f(H_V) - f(H_0)$ est un opérateur de classe trace et*

$$\text{Tr}(f(H_V) - f(H_0)) = \int_0^{\infty} g(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda) d\lambda + \sum_{k=1}^N f(E_k) + \frac{\theta}{2} g(0) \quad (5.31)$$

où $\theta = 1$ si $\widehat{X}(0) \neq 0$ ou 0 si $\widehat{X}(0) = 0$, aussi

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \log \det S(\lambda) \quad \text{avec } \sigma(0) = 0 \quad (5.32)$$

Preuve 5.2.1. Pour voir la propriété de la classe trace, nous appliquons la formule Helffer-Sjöstrand et l'identité pertinente pour obtenir

$$f(H_V) - f(H_0) = \frac{-1}{\pi} \int \bar{\partial}_z \tilde{f}(z) (H_V - z)^{-1} V (H_0 - z)^{-1} dz \quad f \in S(\mathbb{R}) \quad (5.33)$$

rappelons que \tilde{f} est une extension presque analytique de f et satisfait

$$|\bar{\partial} \tilde{f}(z)| \leq C_N |\operatorname{Im} z|^N \langle z \rangle^{-N}$$

pour tous $N \in \mathbb{N}$.

Puisque

$$H_0(H_0 - z)^{-1} = I + z(H_0 - z)^{-1}$$

nous avons

$$\begin{aligned} \|H_0\|_{H^2 \rightarrow L^2} \|(H_0 - z)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow H^2} &= \|H_0(H_0 - z)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \\ &= \|I + z(H_0 - z)^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \geq 1 + \frac{|z|}{|\operatorname{Im} z|} \end{aligned}$$

ce qui implique

$$V(H_0 - z)^{-1} = O\left(\frac{|z|}{|\operatorname{Im} z|}\right) : L^2 \longrightarrow H_{\text{comp}}^2([-R, R]) \quad (5.34)$$

où $\operatorname{Supp} V \subset [-R, R]$.

ce qui impliquent que $V(H_0 - z)^{-1}$ est la classe trace et

$$\|(H_V - z)^{-1} V (H_0 - z)^{-1}\|_{\operatorname{Tr}} \leq \frac{C \langle z \rangle}{|\operatorname{Im} z|^2} \quad (5.35)$$

combinant (5.33), (5.34), (5.35), nous avons

$$f(H_V) - f(H_0) \in L_1(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})).$$

Maintenant nous pouvons prouver (5.31). Pour simplifier, nous supposons que H_V n'a pas de valeur propre négative (puisque leur contribution est assez claire). Ainsi, par le théorème (4.1.1), on peut écrire

$$f(H_V)(x, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e_+(x, \lambda)e_+(x, -\lambda) + e_-(x, \lambda)e_-(x, -\lambda))g(\lambda)d\lambda, \quad (5.36)$$

et nous avons aussi

$$f(H_0)(x, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty 2g(\lambda) d\lambda. \quad (5.37)$$

En utilisant le théorème de Lidskii et (5.36), (5.37), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Tr}(f(H_V) - f(H_0)) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r (f(H_V)(x, x) - f(H_0)(x, x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{-r}^r [e_+(x, \lambda)e_+(x, -\lambda) + e_-(x, \lambda)e_-(x, -\lambda) - 2] dx g(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty \int_{-r}^r [e_+(x, \lambda)e_+(x, -\lambda) + e_-(x, \lambda)e_-(x, -\lambda) - 2] dx g(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (5.38)$$

pour éliminer l'intégration dans x , nous appliquons la formule suivante "Réduction aux limites". La formule résultante (5.42) est connue comme la formule de Maass-Selberg. Nous avons

$$(H_V - \lambda^2)e_\pm(x, \lambda) = 0. \quad (5.39)$$

Différenciation par rapport à λ , nous obtenons

$$(H_V - \lambda^2)\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda) = 2\lambda e_\pm(x, \lambda) \quad (5.40)$$

donc, pour $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} &e_\pm(x, \lambda)e_\pm(x, -\lambda) \\ &= \frac{(H_V - \lambda^2)}{2\lambda} (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))e_\pm(x, -\lambda) - \frac{1}{2\lambda} (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))(H_V - \lambda^2)e_\pm(x, -\lambda) \\ &= \frac{1}{2\lambda} (D_x^2 (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))e_\pm(x, -\lambda) - (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))D_x^2 e_\pm(x, -\lambda)) \end{aligned} \quad (5.41)$$

où nous avons utilisé (5.39) et (5.40) dans la première égalité. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_{-r}^r e_\pm(x, \lambda)e_\pm(x, -\lambda) dx \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_{-r}^r [-\partial_x^2 (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))e_\pm(x, -\lambda) + \partial_\lambda e_\pm(x, \lambda)\partial_x^2 e_\pm(x, -\lambda)] dx \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int_{-r}^r \partial_x (\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))\partial_x e_\pm(x, -\lambda) - \partial_x \partial_\lambda e_\pm(x, \lambda)e_\pm(x, -\lambda) dx \\ &= \frac{1}{2\lambda} [(\partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))(\partial_x e_\pm(x, -\lambda)) - (\partial_x \partial_\lambda e_\pm(x, \lambda))e_\pm(x, -\lambda)]_{-r}^r \end{aligned} \quad (5.42)$$

plaçon ceci dans (5.38), nous obtenons

$$\text{Tr}(f(H_V) - f(H_0)) = \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \quad (5.43)$$

$$\left(\sum_{\pm} [(\partial_\lambda e_{\pm}(x, \lambda))(\partial_x e_{\pm}(x, -\lambda)) - (\partial_x \partial_\lambda e_{\pm}(x, \lambda))e_{\pm}(x, -\lambda)]_{-r}^r - 8r\lambda \right) \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda.$$

Maintenant, comme nous connaissons les comportements de $e_{\pm}(x, \lambda)$ pour $|x| \gg 0$, le reste de la preuve quivaut à un calcul direct, mais assez fastidieux. Tout d'abord, nous enregistrons les formules de $e_{\pm}(x, \lambda)$ et leurs premières dérivées pour $|x| \gg 0$. Dans les formules suivantes, en règle générale, la ligne supérieure donne le comportement pour $x \gg 0$ et la rangée inférieure pour $x \ll 0$,

$$\begin{aligned} e_+(x, \lambda) &= \begin{cases} T(\lambda)e^{i\lambda x} \\ e^{i\lambda x} + R_+(\lambda)e^{-i\lambda x} \end{cases} \\ e_-(x, \lambda) &= \begin{cases} e^{-i\lambda x} + R_-(\lambda)e^{i\lambda x} \\ T(\lambda)e^{i\lambda x} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_x e_+(x, \lambda) &= \begin{cases} i\lambda T(\lambda)e^{i\lambda x} \\ i\lambda e^{i\lambda x} - i\lambda R_+(\lambda)e^{-i\lambda x} \end{cases} \\ \partial_x e_-(x, \lambda) &= \begin{cases} -i\lambda e^{-i\lambda x} + i\lambda R_-(\lambda)e^{i\lambda x} \\ -i\lambda T(\lambda)e^{-i\lambda x} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda e_+(x, \lambda) &= \begin{cases} (T'(\lambda) + ixT(\lambda))e^{i\lambda x} \\ ix e^{i\lambda x} + (R'_+(\lambda) - ixR_+(\lambda))e^{-i\lambda x} \end{cases} \\ \partial_\lambda e_-(x, \lambda) &= \begin{cases} -ix e^{-i\lambda x} + (R'_-(\lambda) + ixR_-(\lambda))e^{i\lambda x} \\ (T'(\lambda) - ixT(\lambda))e^{-i\lambda x} \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant, par utilisation de (5.44), nous calculons

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pm} (\partial_{\lambda} e_{\pm}(x, \lambda)) (\partial_x e_{\pm}(x, -\lambda)) \Big|_{-r}^r \\
= & (T'(\lambda) + irT(\lambda)) e^{i\lambda r} (-i\lambda T(-\lambda)) e^{-i\lambda r} \\
& - (-ire^{-i\lambda r} + (R'_+(\lambda) + irR_+(\lambda)) e^{i\lambda r}) (-i\lambda e^{i\lambda r} + i\lambda R_+(-\lambda)) e^{-i\lambda r} \\
& + (-ire^{-i\lambda r} + (R'_-(\lambda) + irR_-(\lambda)) e^{i\lambda r}) (i\lambda e^{i\lambda r} - i\lambda R_-(-\lambda)) e^{-i\lambda r} \\
& (T'(\lambda) + irT(\lambda)) e^{i\lambda r} (i\lambda T(-\lambda)) e^{-i\lambda r} \\
= & -i\lambda(T'(\lambda)T(-\lambda) + irT(\lambda)T(-\lambda)) - [-r\lambda + i\lambda R_+(-\lambda)(R'_+(\lambda) + irR_+(\lambda)) \\
& + r\lambda R_+(-\lambda) e^{-2i\lambda r} - i\lambda(R'_+(\lambda) + irR_+(\lambda)) e^{2i\lambda r}] \\
& -i\lambda(T'(\lambda)T(-\lambda) + irT(\lambda)T(-\lambda)) - [-r\lambda + i\lambda R_-(-\lambda)(R'_-(\lambda) + irR_-(\lambda)) \\
& + r\lambda R_-(-\lambda) e^{-2i\lambda r} - i\lambda(R'_-(\lambda) + irR_-(\lambda)) e^{2i\lambda r}] \\
= & -i\lambda(2T'(\lambda)T(-\lambda) + R'_+(\lambda)R_+(-\lambda) + R'_-(\lambda)R_-(-\lambda)) + 4r\lambda \\
& + \text{Termes du formulaire } \lambda h(r, \lambda) e^{\pm 2i\lambda r} \text{ avec fonction lisse et tempérée } h \text{ notez que}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \lambda h(r, \lambda) e^{\pm 2i\lambda r} \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda = 0$$

Comme $g \in S(\mathbb{R})$. Donc,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \left(\sum_{\pm} (\partial_{\lambda} e_{\pm}(x, \lambda)) (\partial_x e_{\pm}(x, -\lambda)) \Big|_{-r}^r - 4r\lambda \right) \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\
= & \frac{1}{8\pi i} \int_{\mathbb{R}} (2T'(\lambda)T(-\lambda) + R'_+(\lambda)R_+(-\lambda) + R'_-(\lambda)R_-(-\lambda)) g(\lambda) d\lambda \quad (5.45) \\
= & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma}{d\lambda} g(\lambda) d\lambda.
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé l'expression de $S(\lambda)$ donnée dans (4.37) pour calculer $\frac{d\sigma}{d\lambda}$. En-

suite, nous regardons à

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \left(\left[\sum_{\pm} -(\partial_x \partial_\lambda e_{\pm}(x, \lambda)) e_{\pm}(x, -\lambda) \right]_{-r}^r - 4r\lambda \right) \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \left[\sum_{\pm} -\partial_\lambda ((\partial_x e_{\pm}(x, \lambda)) e_{\pm}(x, -\lambda)) \right]_{-r}^r \\
&\quad - \left(\sum_{\pm} (\partial_x e_{\pm}(x, \lambda)) (\partial_\lambda e_{\pm})(x, -\lambda) \Big|_{-r}^r - 4r\lambda \right) \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\
&= : (I) + (II)
\end{aligned}$$

où le fractionnement en deux sommes correspond aux deux signes de sommation. Par un changement de variable, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{(II)}{8\pi}$ est exactement le même que le terme calculé dans (5.45). Donc, jusqu'à présent nous obtenons

$$Tr(f(H_V) - f(H_0)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda} d\lambda + \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} (I). \quad (5.46)$$

finalement, nous devons calculer

$$\frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} (I) = \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \sum_{\pm} -\partial_\lambda ((\partial_x e_{\pm}(x, \lambda)) e_{\pm}(x, -\lambda)) \Big|_{-r}^r \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda$$

en utilisant (5.44), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \sum_{\pm} -\partial_\lambda ((\partial_x e_{\pm}(x, \lambda)) e_{\pm}(x, -\lambda)) \Big|_{-r}^r \\
&= -\partial_\lambda \left\{ i\lambda [(R_+(\lambda) + R_-(\lambda)) e^{2i\lambda r} - (R_+(-\lambda) + R_-(-\lambda)) e^{-2i\lambda r}] \right\}
\end{aligned}$$

comme précédemment, si nous intégrons le terme

$$-i\lambda \partial_\lambda \left\{ (R_+(\lambda) + R_-(\lambda)) e^{2i\lambda r} - (R_+(-\lambda) + R_-(-\lambda)) e^{-2i\lambda r} \right\} \frac{g(\lambda)}{\lambda}$$

dans λ et soit $r \rightarrow \infty$, on obtient zéro. Donc

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} (I) \\
&= \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} \sum_{\pm} -\partial_\lambda ((\partial_x e_{\pm}(x, \lambda)) e_{\pm}(x, -\lambda)) \Big|_{-r}^r \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda \\
&= \frac{1}{8\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} [(R_+(\lambda) + R_-(\lambda)) e^{2i\lambda r} - (R_+(-\lambda) + R_-(-\lambda)) e^{-2i\lambda r}] \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)} [(R_+(\lambda) + R_-(\lambda))e^{2i\lambda r}] \frac{g(\lambda)}{\lambda} d\lambda. \quad (5.47)$$

Dans le calcul de (5.47), on peut supposer que g est total en rapprochant f par des fonctions de Schwartz avec un côté de transformée de Fourier à support compacte et déformons le contour d'intégration comme le montre la *Figure 11* suivante :

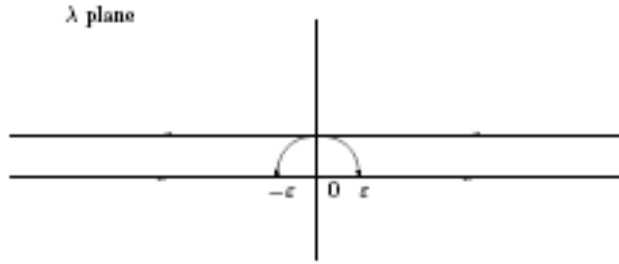


Figure 11

Ceci est admissible car $R_+(\lambda)$ et $R_-(\lambda)$ sont holomorphes dans le demi-plan supérieur et $e^{2i\lambda r}$ décroît exponentiellement quand $r > 0$ existe. Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, r \rightarrow \infty} (I) &= -\frac{1}{4} \left(\operatorname{Re} s_0((R_+(\lambda) + R_-(\lambda))e^{2i\lambda r} \frac{g(\lambda)}{\lambda}) \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \widehat{X}(0) = 0 \\ -\frac{1}{4} \left(\frac{2\widehat{Y}(0)}{\widehat{X}(0)} \right) g(0) & \text{si } \widehat{X}(0) \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\text{car } R_{\pm}(\lambda) = \frac{\widehat{Y}(\mp\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)}.$$

Finalement on obtient (5.31) en mettant (5.48) en (5.46) et on observe que $\frac{d\sigma}{d\lambda}$ est une fonction paire et $\widehat{Y}(0) = -\widehat{X}(0)$ par (4.29) et (4.32).

Remarque 5.2.1. $\sigma(\lambda)$ définie dans (5.32) s'appelle la phase de diffusion qui est un analogue naturel de la fonction de comptage de valeurs propres $N(\lambda)$. Nous donnons maintenant l'analogie de (5.29) en termes de résonances.

Théorème 5.2.2. (Formule de Poisson) Soit $f(\lambda)$ une fonction telle que si $g(\lambda) = f(\lambda^2)$, on a $\widehat{g}(t) \in t^3 C_0^\infty([0, \infty))$, alors

$$\text{Tr}(f(H_V) - f(H_0)) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_R(\lambda) g(\lambda) + g(0)$$

où

$$m_R(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \widehat{X}(0) = 0 \\ 0 & \text{si } \widehat{X}(0) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve 5.2.2. En utilisant le théorème (5.2.1), nous devons montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda) d\lambda = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_R(\lambda) g(\lambda) - 2 \sum_{k=1}^N f(E_k) - m_R(0) g(0)$$

où nous avons utilisé la régularité de g et $\frac{d\sigma}{d\lambda}$. Rappelons que

$$\det S(\lambda) = -\frac{\widehat{X}(-\lambda)}{\widehat{X}(\lambda)}$$

alors en utilisant le théorème (5.1.2) et la factorisation de Hadamard, nous avons

$$\widehat{X}(\lambda) = e^{a_0 + a_1 \lambda} P(\lambda) \quad \text{où} \quad P(\lambda) = \prod_{\text{les } \lambda_j \text{ sont résonances}} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_j}}$$

Soit G une fonction telle que $G' = g$. Notons que ce G existe et est unique comme $\widehat{g}(0) = 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda) d\lambda &= - \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) \frac{d^2\sigma}{d\lambda^2} d\lambda \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) \left(\sum_j \left(\frac{1}{(\lambda - \lambda_j)^2} - \frac{1}{(\lambda + \lambda_j)^2} \right) \right) d\lambda \end{aligned}$$

Puisque $\widehat{G} \in t^2 C_0^\infty([0, \infty))$, pour $\text{Im } \lambda \leq 0$. Encore une fois, en utilisant l'estimation du nombre de résonances dans le théorème (5.1.2), nous pouvons déformer le contour d'intégration le long du demi-plan inférieur. On a

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) \frac{d\sigma}{d\lambda} d\lambda \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{C}_- \setminus \{0\}} m_R(\lambda) g(\lambda) - \sum_{\lambda \in \mathbb{C}_+} m_R(\lambda) g(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_R(\lambda) g(\lambda) - 2 \sum_{k=1}^N f(E_k) - m_R(0) g(0). \end{aligned}$$

Les ouvrages dont on trouvera les références ci-dessous, ne sont pas tous cités dans le cours du text. Beaucoup d'entre eux ont été une source d'inspiration pour la présentation de divers notions exposées dans ce mémoire. Ils constituent une bonne base documentaire à laquelle le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances pourra se reporter.

Bibliographie

- [A.M] A. MB. Simon, Resonances in one dimension and Fredholm determinants, *J. Funct. Anal.* 178(2000), 396-420.
- [AMe] A. Messiah, *Mécanique quantique*, 2 vols, Dunod, Paris, 1959.
- [APa] A. Pankov, *Introduction to Spectral Theory of Schrödinger Operators*, Departement of Mathematics Vinnista State Pedagogical University, 21100 Vinnitsa, Ukraine.
- [BaCo] E. Balslev, and J.M. Combes, "Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilatation-analytic interactions". *Comm. Math. Phys.* 22 (1971), p280-294.
- [BC.GL. JR] Bardos, C., Guillot, J . C., and Ralston, J.V. Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities, *Invent. Math.* 90, 77-114 (1987).
- [BG.ML] Benjamin GRAILLE et Mathieu LEWIN, *Introduction À la Théorie Spectrale des Opérateurs de Schrödinger*, sous la direction de Vladimir GEORGESCU, Université de Cergy-Pontoise.
- [BS] B. Simon, Resonances in one dimension and Fredholm determinants, *J. Funct. Anal.* 178(2000), 396-420.
- [CC.T] C. Cohen-Tanoudji, *Mécanique Quantique*, vol. I,II.
- [DaBiMaZw] David Bindel and Maciej Zworski. *Theory and computation of resonances in 1d scattering*, 2006.
- [DY] D. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory*, Am. Math. Soc. 1992

- [ED] E. Davies, Spectral theory and differential operators, vol. 42 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [EML.LDL] E.M. Lifshitz and L.D. Landau Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory, Third Edition, Elsevier, 1977.
- [EML.LD] E.M. Lifshitz and L.D. Landau Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory, Third Edition, Elsevier, 1977.
- [GM.MW. WS] G. Majda, M. Wei, and W. Strauss, Numerical computational of the scattering frequencies for acoustic wave equations, J. Comp. Phys. 75(1988), 345-358.
- [HeMa] B. Helffer, A. Martinez, "Comparaison entre les divers notions de résonances". Helv. Phys, Vol. 60 (1987). p992-1003.
- [HeSj] B. Helffer et J. Sjöstrand, "Résonances en limite semi-classique" Mem. Soc. Math. Fr. N.S. (1986) 114, 3
- [Hu] W. Hunziker, "Distortion analyticity and molecular resonance curves" Ann. I.H.P. Phys. Theor. 45, (1986) 339-358.
- [IMO] I. M. OLEINIK, On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold, Math. Notes. 54 : 934-939, 1993.
- [JS] J. Sjöstrand, Lectures on resonances,
- [L.P] Translation representations for automorphic solutions of the wave equation in non-Euclidean spaces, *I, II and III*, Comm. Pure Appl. Math. 37,
- [LaPh] P.D. Lax and R. Phillips : Scattering theory for transport, Proc. Conf. on Func. Anal, Univ. of California at Irvine, (1966).
- [LDF] FADDEEV, L. D., Sov. Phys. JETP 12 (1961) 1014.
- [LP.RP] P. Lax and R. Phillips, Scattering theory. Academic Press, 1969.
- [Ma2] A. Martinez, "Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer" Ann. I.H.P. Phys. Theor.

- [MaMe] A. Martinez, and B. Messirdi, "Resonances of diatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation" *Commun. Pure Appl. Math.* 19, (1994) 1139–1162
- [Me2] B. Messirdi, "Problèmes de résonances en limite semi-classique". Thèse de Doctorat d'Etat es-sciences, University of Oran, Algeria, (1994).
- [MH] M. Hitrik, Bounds on scattering poles in one dimension, *Comm. Math. Phys.* 208(1999), 381-411.
- [MRB.SJ] Melrose, R. B., and Sjostrand, J . Singularities of boundary problems, I and II, *Comm. Pure Appl. Math.* 31,593-617 (1978) ; 35, 129-168 (1982)
- [MZ] Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles of radial potentials, *J. Funct. Anal.*, to appear.
- [MZ] J. Sjöstrand, Lectures on resonances,
- [OLa] Olivier LabléeOlivier Lablée, Spectre du laplacien et de l'équation de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique, *Gazette des Mathématiques*, 2008.
- [PB. JMC. PD] P. Briet, J.-M. Combes, and P. Duclos, On the location of resonances in the semi-classical limit II, *Comm. Math. Phys.* 12(1987), 201-222.
- [PdRS] Scattering Theory Revised Edition H. Bass, A. Borel, J. Moser, and S.-T. Yau, editors Paul A. Smith and Samuel Eilenberg, founding editors.
- [RBM] R.B. Melrose, Trace formula for resonances in one dimension, unpublished, 1985.
- [ReSi] M. Reed- B. Simon, "Methods of modern mathematical physics" (vol 4). Analysis operators. Academic press, New York (1979).
- [RF] R. Froese, Asymptotic distribution of resonances in one dimension, *J. of Diff. Equations*, 137(2), (1997), 251-272.
- [ScMi] H. Schenker and Michael Aizenman. The creation of spectral gaps by graph decoration. *Lett. Math. Phys.*, 53(3) :253{262, 2000.

- [Se] A. Senoussaoui, "Opérateurs h-admissibles matriciels à symboles opérateurs" African diaspora journal of mathematics.
- [SHT.MZ] S.H. Tang and M. Zworski, Potential scattering on the real line,
- [StSv] Stephen P. Shipman and Stephanos Venakides. An exactly solvable model for nonlinear resonant scattering. *Nonlinearity*, 25 :2473-2501, 2012.
- [StTw] Stephen P. Shipman and Aaron T. Welters. Resonant electromagnetic scattering in anisotropic layered media. *J. Math. Phys.*, 54(10) :103511-1-40, 2013.
- [TCa] T. CARLEMAN, Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger, *Ark. Mat. Astr. Fys.* 24B 11 :1-7, 1934.
- [TR] T. Ramond, Semiclassical study of quantum scattering on the line, *Comm. Math. Phys.* 177(1996), 221-254.
- [TR] T. Regge, Analytic properties of the scattering matrix, *Nuovo Cimento*, 10(1958), 671-679.
- [Va] B.R. Vainberg, "On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils". *Mat. Sb.* 77 (119), 1986, n°2, *Math. USSR Sb.*, 6 (1968), n°2.
- [YCV] Yves Colin de Verdière Méthodes semi-clasiques et théorie spectrale <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ycolver/yves.colin-de-verdiere@ujf-grenoble.fr>
- [ZB.CY] Z. Bai and C. Yang, From Self-Consistency to SOAR : Solving Large-Scale Nonlinear Eigenvalue Problems, *SIAM News* 39(3)(2006).