République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Méthodes probabilistes pour des modèles financiers cas où la fonction d'utilité est logarithmique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHÉMATIQUES
Spécialité : ASSPA

par

Benmeddah **A**bdelkrim [1]

Sous la direction de

Dr N.Ait Ouali

Soutenue le 24 Mai 2017 devant le jury composé de

F. Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
N. Ait Ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
O. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : krimobm@hotmail.com

Dédicaces

Je dédis ce modeste travail à mes très chers au monde :

Ma chère mère que Dieu le tout puissant la garde et la protège.

Mes très chères sœur Fatima et Lamia.

Mon très cher frère Mohamed Amine.

Tous mes camarades en particulier R.Taibi, A.Belhadj .

"Le monde et la science ont leurs données propres, qui se touchent et ne se pénètrent pas. L'une nous montre à quel but nous devons viser, l'autre, le but étant donné, nous donne les moyens de l'atteindre."

[Henri Poincaré]

"Ce n'est pas de vivre selon la science qui procure le bonheur ; ni même de réunir toutes les sciences à la fois, mais de posséder la seule science du bien et du mal."

[Platon]

Ce mémoire a été rédigé en **LaTeX 2ε**.

Remerciement

"La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou de dogmes immuables ; loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot, elle cherche à cerner la vérité par approximations successives."
(Bertrand Russell/1872-1970)

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné le privilège d'étudier et de suivre le chemin de la science.

Ce travail doit beaucoup à la qualité du cadre de recherche dont j'ai bénéficié.

Je remercie, Dr N. Ait Ouali, de m'avoir proposé d'effectuer un mémoire sous sa direction, de ses remarques judicieuses, de l'encouragement constant et de la confiance qu'il m'a temoigné tout le long de ce travail.

Je suis trés honoré et remercie de part leur présence à mon jury de Master :
Dr F. Madani, pour l'honneur qu'il m'e fait de présider ce jury.

Pr A.Kandouci, qui a bien voulu accepter de juger ce travail et de faire partie du jury.

Mme O.Benzatout, qui a mis beaucoup de bonne volonté pour lire le mémoire et qui a accepté de faire partie du jury.

Je remercie vivement, Mlle F.Benziadi, pour son soutien et son aide précieuse en explications, documentation sur le sujet.

Finalement je remercie infiniment ma mère pour son soutien et qui m'a été bien utile pour mener à bien ce travail.

Table des matières

Introduction

On a remarqué, durant ces dernières années une révolution au sein des marchés financiers, qui ont connu une dynamique très forte gérée par une multitude variée de données et d'indices compliqués, qui ont rendu l'étude autant délicate qu'il faut parfois mettre en jeu beaucoup de facteurs, pour arriver à un schéma décisionnel qui met en considération l'utilité des transactions financières, et l'évaluer de façon à ce qu'on puisse connaitre ou prévoir certains paramètres. surtout à long terme.

Cet aspect incertain, et en tenant compte de cet environnement spécifique, a créée un ensemble de théories et d'outils mathématique qui ont permis de donner naissance à cette branche moderne de mathématique : les mathématiques financières, qui n'a cessé d'évoluer, notamment pendant cette décennie, les spécialistes cherchent toujours à poser des modèles et y appliquer des notions probabilistes, qui sont dans plusieurs cas, le meilleur procédé pour comprendre et étudier une situation financière.

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [1] intitulée Théorie de la spéculation et soutenue à la Sorbonne en 1900. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu en probabilité, et d'autre part celle des stratégies à temps continu pour la couverture de risque en finance. Du *côté* mathématique, sa thèse influença grandement les recherches de A.N.Kolmogorov sur les processus à temps continu dans les années 1920 et ceux de K.It*ô* l'inventeur du calcul stochastique dans les années 1950. En revanche en ce qui concerne la finance, l'approche de Bachelier fut oubliée durant près de trois quarts siècle, jusqu'en 1973 avec la parution des travaux de Black, Scholes et Merton [2].

Pour ce modeste mémoire, il est envisagé utiliser des méthodes probabilistes tel que le calcul stochastique des taux, et ce but ne sera atteint que si on fait intervenir la maximisation des fonctions d'utilité de type logarithmique, cette maximisation des fonctions

d'utilité de type logarithmique, cette maximisation est, en fait, le meilleur outil pour permettre à un financier de bien gérer son portefeuille pour des modèles financiers, donc il y a un problème d'optimisation qui se pose, c'est à dire chercher une stratégie optimale d'investissement.
Pour bien cerner ce problème, j'ai jugé utile de diviser ce mémoire en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous donnons quelques éléments mathématique nécessaire à la compréhension des modèles financiers. En particulier, nous introduisons la notions des martingales, le mouvement brownien et le calcul d'It$\hat{o}$ par la construction de l'intégrale stochastique. La formule d'It$\hat{o}$ multidimensionnelle ainsi que les équations différentielles stochastiques sont aussi évoqués dans ce chapitre.

Dans le second chapitre, nous passons en revue quelque préliminaires sur les marchés financiers. Nous étudierons les modèles financiers dans les marchés viable et complet avec une évaluation et une couverture des actifs conditionnels. Nous citons le modèles Black Scholes et des stratégies d'auto-financement et nous utilisons de présentation des martingales. Nous détaillons la formule de Black-Scholes.

Le dernier chapitre, porte sur le vif du sujet, en fait, on va introduire la fonction d'utilité de type logarithmique qui sera l'objet de maximisation sans restriction pour obtenir finalement une stratégie optimale d'investissements et de consommation, ainsi que la fonction valeur du problème en horizon fini, nous caractérisons la fonction valeur comme unique solution de l'équation d'Hamilton-Jacob Bellman correspondant.

La notion de maximisation des fonctions d'utilité est en réalité très vaste, nous allons nous concentrer uniquement sur les travaux de Merton [32], Karatzas et Sherve [29] et Korn [31]

Chapitre 1

Introduction au calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

1.1.1 Généralités

Prenons, à titre d'exemple, le prix d'un baril du Pétrole, il a connu au cours de ces cinq dernières années des fluctuations, qui ont tiré l'attention de beaucoup des spécialistes économiques. En effet, ce prix, dans la bourse, varie tout le temps, cette variation nous donne l'idée d'établir un processus aléatoire, ou encore un processus stochastique, d'où la modélisation par une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$, où T est l'ensemble des temps pendant lesquels le phénomène est observé. La famille $(X_t)_{t\in T}$ est appelée processus aléatoire, ou encore processus stochastique.
Dans le cas où $T = \mathbb{N}$ ou bien $T = \{0, 1, ..., N\}$, on dit alors que $(X_t)_{t\in T}$ est un processus à temps discret. Dans la pratique, les observations sont toujours faites de manière successive, c'est-à-dire que les seuls processus observés sont des processus discrets.

Commençons par préciser ce que l'on entend par processus à temps continu.

Définition 1.1.1.1. *On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace $\mathbb{E}$ muni d'une tribu $\mathcal{E}$, une famille $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$.*

Remarque 1.1.1.1.
- *Dans la pratique l'indice t représente le temps.*
- *Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω dans Ω on associe la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{E}$, $t \to X_t(\omega)$, appelée trajectoire du processus.*
- *Un processus peut être considéré comme une application de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans $\mathbb{E}$, nous supposerons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{A}$ et $\mathbb{E}$ de la tribu $\mathcal{E}$.*

Définition 1.1.1.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{A}$. La tribu $\mathcal{F}_t$ représente l'information dont on dispose à l'instant t. On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour chaque t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Remarque 1.1.1.2. *Dans la suite, les filtrations que l'on considérera, auront la propriété suivante :*

$$\textit{Si } A \in \mathcal{A} \textit{ et si } \mathbb{P}(A) = 0, \textit{ alors pour tout } t \text{ , } A \in \mathcal{F}_t$$

Ceci exprime que $\mathcal{F}_t$ contient tous les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{A}$.

Définition 1.1.1.3. *La filtration engendrée par un processus $\mathbf{X}$,notée $\mathcal{F}^{\mathbf{X}}$ est la suite croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X$ engendrées par $(X_s)_{s\leq t}$ i.e,*
$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$. Un temps d'arrêt modélise un temps aléatoire qui dépend du processus de façon non anticipante (à un instant donné t on sait si un temps d'arrêt est plus petit que t). Formellement, la définition est la suivante :

Définition 1.1.1.4. *On appelle temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que, pour tout $t \geq 0$:*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

On associe à un temps d'arrêt τ une tribu que l'on note $\mathcal{F}_\tau$, définie par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A} \text{ ,pour tout } t \geq 0 \; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Cette tribu représente les informations disponibles avant l'instant aléatoire τ.

Proposition 1.1.1.1.
- *Si S est un temps d'arrêt, S est $\mathcal{F}_S$ mesurable.*
- *Si S est un temps d'arrêt, fini presque sûrement,et $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus adapté continu, alors X_S est $\mathcal{F}_S$ mesurable.*
- *Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ $\mathbb{P}p.s.$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*
- *Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \wedge T = \inf(S, T)$ est un temps d'arrêt. En particulier si S est un temps d'arrêt et t est un temps déterministe $S \wedge T$ est un temps d'arrêt.*

1.2 Espérance conditionnelle

Définition 1.2.1. *Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité sur $\mathcal{F}$. Nous disons que $\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mathbb{P}(A) = 0$ alors $\mathbb{Q}(A) = 0$. Nous notons $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$.*

$\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est l'espace des classes d'équivalence des fonctions intégrables où f et g sont identifiées lorsque $f = g$ $\mathbb{P}$-pp. Le théorème suivant permet d'établir une relation entre deux mesures de probabilité absolument continues :*

Théorème 1.2.1. ***(Théorème de Radon-Nikodyme)*** *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures finies sur $\mathcal{F}$ telles que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Alors il existe une fonction $h \in \mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{Q}(A) = \int_A h d\mathbb{P}$. Nous notons $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = h$.*

Dans le théorème qui vient, nous verrons la construction d'un outil mathématique beaucoup utilisé, appelé l'espérance conditionnelle.

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

Proposition 1.2.1.1. *Soient X une variable aléatoire à valeur réelle, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ une tribu et $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{B}$. Notons par $\mathbb{E}$ l'espérance sous $\mathbb{P}$. Alors nous avons les relations suivantes :*

(a) $\mathbb{E}(\alpha X + \alpha' X/\mathcal{B}) = \alpha\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) + \alpha'\mathbb{E}(X/\mathcal{B})$ *Linéarité.*

(b) *Si $X \geq 0$,alors $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) \geq 0$ p.s.positivité. Par conséquent si $X \leq Y$ avec **(a)**, alors* $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(Y/\mathcal{B})$

(c) *Si X est $\mathcal{B}$-mesurable, $\mathbb{E}(X/\mathcal{B}) = X$ p.s.*

(d) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$.

(e) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{B})/\mathcal{C}) = \mathbb{E}(X/\mathcal{C})$.

1.3 Martingale

La notion de martingale est trés importante en finance. En effet, la structure particulière de ces processus stochastique nous permet d'obtenir des solutions à des problèmes tels que la détermination du coût d'une option ou encore, d'une stratégie d'investissement optimale.

1.3.1 Cas discret

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace et $\mathcal{F}_n$ une filtration de cet espace.

Définition 1.3.1.1. *Une suite $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires intégrables réelles adaptée est :*

(i) *Une martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) = M_n$ pour tout $n \leq N - 1$.*

(ii) *Une sur martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq M_n$ pour tout $n \leq N - 1$.*

(iii) *Une sous martingale si $\mathbb{E}(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq M_n$ pour tout $n \leq N - 1$.*

Remarque 1.3.1.1. *Si* $(M_n)_n$ *est une martingale, alors* $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(M_0)$ *pour tout* n. *Ces définitions peuvent être étendues au cas multidimensionnel, par exemple une suite* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *est une martingale si chaque composante est une martingale. On peut aussi définir les martingales en temps continu.*

Définition 1.3.1.2. *Une suite* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ *de variables aléatoires est prévisible par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ *si pour tout* $1 \leq n \leq N$, H_n *est* $\mathcal{F}_{n-1}$ *mesurable.*
La proposition suivante permet de générer des martingales à partir d'une martingale et d'une suite prévisible.

Proposition 1.3.1.1. *Soit* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *une martingale et* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ *une suite prévisible par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. *Posons* $\Delta M = M_n - M_{n-1}$. *La suite* $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ *définie pour* $n \geq 1$ *par :*

$$X_0 = H_0M_0$$

$$X_n = H_0M_0 + H_1\Delta M_1 + \ldots\ldots + H_n\Delta \mathbf{M}_n$$

est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$. *La variable aléatoire* $(\mathbf{X}_n)_{0\leq n\leq N}$ *est appelée la martingale transformée de* $(M_n)_n$ *par* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$.

Démenstration : Pour tout n, la variable aléatoire X_n est une somme et produit de fonctions au plus $\mathcal{F}_n$-mesurable, elle est donc $\mathcal{F}_n$-mesurable pour $0 \leq n \leq N$. De plus pour tout n, en utilisant le fait que H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable et que M_n est une martingale, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}(M_{n+1} - M_n)/\mathcal{F}_n) \\
&= H_{n+1}\mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)/\mathcal{F}_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_n/\mathcal{F}_n) = X_n$, ce qui montre que $(X_n)_n$ est une martingale.
La proposition suivante permet de caractériser les martingales.

Proposition 1.3.1.2. *Une suite de variable aléatoires réelles adaptées* $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ *est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible* $(H_n)_{0\leq n\leq N}$, *nous avons :*

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} \mathbf{H}_n\Delta M_n) = 0$$

Démenstration : Soit $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite prévisible. Si $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale, la suite $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par $X_0 = 0$ et $X_n = \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n$ pour $1 \leq n \leq N$, est une martingale par la proposition (1.3.1.1) Alors

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = 0$$

Réciproquement, nous choisissons pour $j \in \{1, \ldots, N\}$ fixé, la suite $(H_n)_{0\leq n\leq N}$ par $H_n = 0$ pour $n \neq j+1$ et $H_{j+1} = \mathbb{1}_A$ où A est $\mathcal{F}_j$-mesurable.

La variable aléatoire H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable donc la suite $(H_n)_n$ prévisible par suite

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0$$

Par conséquent $\mathbb{E}(M_{j+1}/\mathcal{F}_j) = M_j$.

1.4 Le mouvement brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.4.1. *On appelle mouvement brownien un processus stochastique est $(W_t)_{t\geq 0}$ valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :*
- ***Continuité :*** *$\mathbb{P}p.s$ la fonction $s \to W_s(\omega)$ est une fonction continue.*
- ***indépendance des accroissements :*** *Si $s \leq t$, $W_t - W_s$ est indépendant de W_s.*
- ***stationnarité des accroissements :*** *Si $s \leq t$, la loi de $W_t - W_s$ est identique à celle de $W_{t-s} - W_0$.*

Théorème 1.4.1. *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, alors $W_t - W_0$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne rt et de variance $\sigma^2 t$, r et σ étant des constantes réelles.*

Définition 1.4.2. *Un mouvement brownien est dit* ***standard*** *si :*
- *$W_0 = 0$*
- *Pour tout $s \geq 0$ et pour tout $t > s$, $W_t - W_s$ à pour loi $\mathcal{N}(0, t-s)$.*

Théorème 1.4.2. *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien, si $0 \leq t_1 < \ldots\ldots < t_n$ alors $W_{t_1}, \ldots\ldots, W_{t_n}$ est un vecteur gaussien.*

Démenstration : Soit $0 \leq t_1 < \ldots\ldots < t_n$, alors le vecteur aléatoire $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots\ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ est composé de variable aléatoires gaussiennes (d'aprés le théorème 1.4.1) et indépendantes (par définition du mouvement brownien), ce vecteur est donc un vecteur gaussien. Il en est donc de même pour $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$.

Définition 1.4.3. *On appellera $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie :*

1. *Pour tout $t \geq 0$, W_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*
2. *Si $s \geq t$,$W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s$.*
3. *Si $s \geq t$, la loi de $W_t - W_s$ est identique à celle de $W_{t-s} - W_0$*

1.5 Martingale en temps continu

Comme dans le cas des modèles à temps discret, la notion de martingale est un outil essentiel pour expliciter la notion d'arbitrage. La définition suivante est une extension de celle du temps discret.

Définition 1.5.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variables aléatoires intégrable, (c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty$ pour tout t) est :*

- *Une martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) = M_s$.*
- *Une surmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \leq M_s$.*
- *Une sousmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t/\mathcal{F}_s) \geq M_s$.*

Remarque 1.5.1. *On déduit de cette définition que, si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, alors $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$, pour tout t.*

Proposition 1.5.1. *Si $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard :*

1. *W_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
2. *$W_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*
3. *$\exp(\sigma W_t - (\sigma^2/2)t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.*

Démenstration : Si $s \leq t$ alors $W_t - W_s$ est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_s$. Donc $\mathbb{E}(W_t - W_s/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s)$. Mais un mouvement brownien standard est centré , donc $\mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$.

On en déduit le premier point. Pour démontrer le deuxième, remarquons que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)/\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s) + 2W_s\mathbb{E}(W_t - W_s/\mathcal{F}_s)\end{aligned}$$

mais comme $(W_t)_{t\geq 0}$ est une martingale $\mathbb{E}(W_t - W_s/\mathcal{F}_s) = 0$ et donc :

$$\mathbb{E}(W_t^2 - W_s^2/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s)$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permettent de plus d'affirmer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((W_t - W_s)^2/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W_{t-s}^2) \\ &= t - s\end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que W_t suit une loi gaussienne centrée de variance t.

On en déduit que $\mathbb{E}(W_t^2 - t/\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$, si $s < t$.

Pour démontrer le dernier point, rappelons, tout d'abord que si g est une gaussienne centrée réduite, on a :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda g}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\lambda^2/2}$$

De plus, si $s < t$:

$$\mathbb{E}(e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2}/\mathcal{F}_s) = e^{\sigma W_s}\mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)}/\mathcal{F}_s)$$

car W_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable, et comme $W_t - W_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)}/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\sigma g\sqrt{t-s}}) \\ &= e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}}\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat annoncé.

Théorème 1.5.1. ***(Théorème d'arrêt :)*** *Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ étant une constante réelle finie, alors M_{τ_2} est intégrable et :*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} \ \mathbb{P}p.s$$

Remarque 1.5.2.
- *Ce résultat entraîne que, si τ est un temps d'arrêt borné, alors $\mathbb{E}(M_\tau) = \mathbb{E}(M_0)$ il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt avec $\tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$ et de prendre l'espérance des deux membres.*
- *Si M_t est une sousmartingale, on a le même théorème en remplaçant l'égalité précédente par :*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2}/\mathcal{F}_{\tau_1}) \geq M_{\tau_1} \ \mathbb{P}p.s$$

Le théorème d'arrêt permet aussi d'obtenir des estimations pour le maximum d'une martingale si M_t est une martingale, on peut borner le moment d'ordre 2 de $\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|$.Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Doob.

Théorème 1.5.2. ***(Inégalité de Doob)*** *Si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale continue, on a :*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_t|^2)$$

1.6 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

Les modèles utilisés pour décrire l'actif sont obtenus à partir du mouvement brownien. Or, une des propriétés importantes du mouvement brownien est que presque sûrement ses trajectoires sont nulle par différentiables. Autrement dit, si W_t est un mouvement brownien, il n'existe pas de points de $\mathbb{R}^+$ tels que $\frac{dW_t}{dt}$ ait un sens. On ne peut donc pas définir l'intégrale précédente pour :

$$\int_0^t f(s)dW_s = \int_0^t f(s)\frac{dW_s}{ds}ds$$

On peut donner, un sens précis à ce type d'intégrales par rapport au mouvement brownien. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe. On appelle ces intégrales des **"intégrales stochastiques"**.

1.6.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nous allons donner un sens à $\int_0^t f(s,w)dW_s$ On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires.Dans toute la suite, on fixe T un réel strictement positif et fini.

Définition 1.6.1.1. *On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t(w) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(w)\mathbb{1}_{]t_{i-1},t_i]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T$ et ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mesurable et bornée.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition, le processus continu $(I(H)_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$:

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq k} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

Notons que $I(H)_t$ peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1\leq i\leq p} \phi_i(W_{t_i\wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t})$$

, Ce qui prouve la continuité de la fonction $t \longmapsto I(H)_t$.

Proposition 1.6.1.1. ***Propriétés de l'intégrale stochastique.*** *Sur l'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

(1) $\int_0^t H_s dW_s$ *est linéaire.*

(2) $\int_0^t H_s dW_s$ *est continue p.s.*

(3) $(\int_0^t H_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ *est un processus $\mathcal{F}$-adapté.*

(4) $\mathbb{E}[\int_0^t H_s dW_s] = 0$ *et* $\mathrm{Var}(\int_0^t H_s dW_s) = \mathcal{E}[\int_0^t H_s^2 dW_s]$.

(5) *propriété d'Isométrie :*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$$

(6) $(\int_0^t H_s dW_s)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale continue.*

Démonstration :

(1) La linéarité de l'intégrale est immédiate.

(2) La continuité de l'intégrale stochastique se lit sur sa deuxième écriture par la continuité des trajectoires du mouvement Brownien.

(3) La variable aléatoire $\int_0^t H_s dW_s$ est $\mathcal{F}$-mesurable, donc l'intégrale stochastique est un processus $\mathcal{F}$-adapté.

(4) Prenons $t = t_k$ quitte à rajouter un point à la suite $(t_i)_{0\leq 1\leq n}$. Alors, le calcul de l'espérance de $\int_0^t H_s dW_s$ donne :

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t H_s dW_s\Big] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[H_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[H_i \mathbb{E}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i}]] = 0$$

Le calcul de la variance est donné par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big(\int_0^t H_s dW_s\Big) &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^t H_s dW_s\Big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{k-1} H_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\Big)\Big)^2\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}[H_i^2(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2] + \\
&\quad 2\sum_{i<j} \mathbb{E}[H_i H_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} H_i^2 \mathbb{E}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2/\mathcal{F}_{t_i}] \times \\
&\quad 2\sum_{i<j} \mathbb{E}[H_i H_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})/\mathcal{F}_{t_i}] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} H_i^2 (t_{i+1} - t_i) + 0 = \int_0^t H_s^2 ds
\end{aligned}$$

Remarque 1.6.1.1. *On peut voir la démonstration plus détaillé dans* [5]

Finalement, l'intégrale stochastique d'un élément de $\mathcal{E}$ *est une martingale continue de carré intégrable.*

pour le moment, l'intégrale stochastique est une fonction de $\mathcal{E} \times [0,T]$ dans $\mathcal{M}_c^2([0,T])$ (l'ensemble des martingales continues de carré intégrable.)
On va maintenant, étendre la définition de l'intégrale stochastique à des processus adaptés ayant un moment d'ordre 2,i.e.à :

$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T]) = \{(H_t)_{0\le t\le T}$, *processus càdlàg $\mathcal{F}$-adapté tq* $\mathbb{E}[(\int_0^t H_s^2 ds)] < \infty\}$

Lemme 1.6.1.1. *L'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$ au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout $H \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$, il existe une suite H^n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que :*

$$\|H^n - H\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(H_s - H_s^n\right)^2 ds\right]^{1/2} \to 0$$

Théorème 1.6.1. *Il existe une unique application linéaire I de $H \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$ dans $\mathcal{M}_c^2([0,T])$ qui coincide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires $\mathcal{E}$ et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\forall t \le T \qquad \mathbb{E}[I(H)_t^2] = \mathbb{E}(\textstyle\int_0^t H_s^2 ds)$$

Démonstration :

- **Approximation :** Soit H un processus élément de $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega,[0,T])$. D'aprés le lemme admis, il existe une suite H^n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que :

$$\|H^n - H\|_2' = \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s - H_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \to 0$$

- **Convergence :** La propriété d'isométrie entre 0 et $t \le T$ sur l'intégrale stochastique du processus $(H^{n+p} - H^n)$ de $\mathcal{E}$ nous donne :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (H_s^{n+p} - H_s^n) dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^{n+p} - H_s^n)^2 ds\right] \le \mathbb{E}\left[\int_0^T (H_s^{n+p} - H_s^n)^2 ds\right]$$

ce qui s'écrit en terme de norme :

$$\left\|\int_0^t H_s^{n+p} dW_s - \int_0^t H_s^n dW_s\right\| \le \|H^{n+p} - H^n\|_2'$$

Comme H^n converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega,[0,T])$, elle est de Cauchy et donc $\int_0^t H_s^n dW_s$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Or $\mathcal{L}^2(\Omega)$ muni de $\|.\|_2$ est un espace de Banach donc complet, par conséquent la suite $\int_0^t H_s^n dW_s$ converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En notant $\int_0^t H_s dW_s$ sa limite, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s dW_s - \int_0^t H_s^n dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(H_s - H_s^n\right)^2 ds\right]$$

– **Unicité :** Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, en effet, si j'avais deux suites H_n et ϕ_n, la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\| \int_0^t H_s^n dW_s - \int_0^t \phi_s^n dW_s \right\|_2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^n - \phi_s^n)^2 ds\right]^{1/2} \leq \|H^n - \phi^n\|_2' \to 0$$

Donc les deux suites approximantes donnent la même limite $L^2(\Omega)$ qui sont donc égales p.s

– **Convergence dans $\mathcal{M}_c^2([0,T])$:** Le processus limite M est un élément de $\mathcal{M}_c^2([0,T])$ car chaque M_t s'écrit comme limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de M_t^n avec M^n une suite de martingale $\mathcal{F}$-adaptées telles que $\mathbb{E}[|M_t^n|^2] < \infty$ pour tout t.

– **Linéarité et Isométrie :** La linéarité est immédiate, et pour la propriété d'isométrie qui s'écrit en passant à la limite la propriété d'isométrie sur les éléments de $\mathcal{E}$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s^n dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_s^n)^2 ds\right] \Longrightarrow \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s^n dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 ds\right]$$

Remarque 1.6.1.2. *Sur $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega,[0,T])$, l'intégrale stochastique satisfait les mêmes propriétés que celles énoncées dans $\mathcal{E}$.*

1.6.2 Calcul d'Itô :

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.6.2.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration, $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \qquad \mathbb{P}p.s \quad \forall t \leq T$$

avec :

- X_0 *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*
- $(K_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ *des processus adaptés à* $\mathcal{F}_t$.
- $\int_0^T |K_s|ds < +\infty \quad \mathbb{P}p.s.$
- $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P}p.s.$

Proposition 1.6.2.1. *Soit* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale continue telle que :*

$$M_t = \int_0^t K_s ds \text{ avec } \mathbb{P} \ p.s \int_0^T |K_s|ds < +\infty$$

alors :

$$M_t = 0 \ \mathbb{P} \ p.s \ \forall t \leq T$$

Ceci entraîne que :
La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s$$

alors :

$$X_0 = X_0' \ \ d\mathbb{P}p.s. \qquad K_s = K_s' \ \ ds \times d\mathbb{P} \ p.p. \qquad H_s = H_s' \ \ ds \times d\mathbb{P} \ p.p.$$

- *Si* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *est une martingale de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

  alors $K_t = 0 \ dt \times d\mathbb{P} \ p.p.$.

La formule d'Itô prend la forme suivante

Théorème 1.6.2. ***(formule d'Itô)*** *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et f *une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

où pour définition

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

et

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s$$

De même si $(t,x) \to f(t,x)$ *est une fonction deux fois différentiable en* x *et une fois différentiable en* t*, ces dérivées étant continues en* (t,x) *(on dit dans ce cas que* f *est de classe* $\mathcal{C}^{1,2}$*) on a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

Proposition 1.6.2.2. ***(Formule d'intégration par parties)*** *Soient* X_t *et* Y_t *deux processus d'Itô,* $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$ *et* $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$*, Alors :*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y\rangle_t$$

avec la convention que :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

Démonstration :

On a, d'après la formule d'Itô :

$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s)d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds$

$X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds$

$Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 ds$.

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds$$

.

1.6.3 La formule d'Itô multidimensionnelle :

La formule d'Itô multidimensionnelle se généralise aux cas où la fonction f dépend de plusieurs processus d'Itô et lorsque ces processus d'Itô s'expriment en fonction de plusieurs mouvements browniens.

Définition 1.6.3.1. *On appelle $\mathcal{F}$-mouvement brownien d-dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(W_t)_{t\geq 0}$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^d)$,où les $(W_t^i)_{t\geq 0}$ sont des $\mathcal{F}_t$-mouvements browniens standards indépendants.*
On généralise la notion de processus d'Itô.

Définition 1.6.3.2. *On dit que $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô si :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^i dW_s^i$$

Où

- K_t *et les* (H_t^i) *sont adaptés à* $(\mathcal{F}_t)$.
- $\int_0^T |K_s| ds$ $\mathbb{P}$ *p.s.*
- $\int_0^T (H_s^i)^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$ *p.s.*

La formule d'Itô prend alors la forme suivante :

Proposition 1.6.3.1. *Soient $(X_t^1, \ldots, X_t^n)$ n processus d'Itô :*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j$$

alors si f est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t, x) :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \ldots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \ldots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) ds \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(s, X_s^1, \ldots, X_s^n) d\langle X^i, X^j \rangle_s \end{aligned}$$

où

- $dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^p H_s^{i,j} dW_s^j$,
- $d\langle X^i, X^j\rangle_s = \sum_{m=1}^p H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds$.

1.7 Equations différentielles stochastiques EDS :

Les équations différentielles stochastiques procurent un lien entre les probabilités et la théorie bien plus développée des équations différentielles ordinaires, où les conséquences affluent dans les deux directions. On va définir la notion d'équation différentielle stochastique. Typiquement, elle est donnée par :

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad X_0 = x \tag{1.1}$$

1.7.1 Le cas général :

Définition 1.7.1.1. *Un processus X est solution de l'équation $(1,1)$ si c'est un processus $\mathcal{F}$-adapté (ou $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien W) satisfaisant*

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)dW_s < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}\text{ -p.s.}$$

et qui vérifie

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P}\text{ -p.s.}$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, on a besoin de deux types de conditions.
Une première qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lipschitz) des fonctions μ et σ :

- ***Condition 1 :*** *Il existe $K > 0$ tel que tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$, on ait :*

  $$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

  Et une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien définit sur tout $\mathbb{R}^+$.
- ***Condition 2 :*** *Il existe $L > 0$ tel que tout $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on ait :*

  $$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2)$$

Théorème 1.7.1.1. *Considérons l'EDS* $(1,1)$*. Si* μ *et* σ *satisfont les conditions 1 et 2, alors l'EDS admet une unique solution. De plus cette solution vérifie*

$$\mathbb{E}(\sup_{0<t<T} |X_t|^2) < \infty$$

La démonstration de ce théorème utilise, comme toujours pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles, le théorème du point fixe.

1.7.2 Le cas du mouvement Brownien géomètrique :

On considère :

$$dX_t = \mu X_t + \sigma X_t dW_t \qquad \text{avec} \qquad X_0 = x_0 > 0$$

Où les coefficients $-\infty < \mu < +\infty$ et $\sigma > 0$ sont constants . Nous allons utiliser la formule d'Itô pour résoudre cette EDS rechercher une solution de la forme $X_t = f(t, W_t)$. On obtient :

$$dX_t = f_t(t, W_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(tW_t)dt + f_x(tW_t)dW_t$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\mu f(t,x) = f_t(t,x) + \tfrac{1}{2} f_{xx}(t,x) \quad \text{et} \quad \sigma f(t,x) = f_x(t,x).$$

La solution de la seconde équation est $f(t,x) = \exp(\sigma x + g(t))$. Introduisons cette solution dans la première équation, on trouve :

$$\mu f(t,x) = g'(t) f(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f(t,x) \Rightarrow g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$$

donc :

$$X_t = x_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$$

C'est le mouvement Brownien géomètrique de drift μ et de volatilité σ^2 qui est vérifie l'équation

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

de condition initiale $X_0 = x_0$.

Cette équation, très célèbre en mathématiques financières pour décrire l'évolution des prix des actifs, elle est connue sous le nom d'équation **Black et scholes**.

Chapitre 2

Modèles en temps continu : Formules de Black et Scholes

Le but de ce chapitre est de fournir une introduction aux méthodes mathématiques utilisées dans la modélisation des marchés financiers. On s'intéressera plus particulièrement aux problèmes de couverture et de valorisation d'options notamment européennes. Les prérequis pour ce chapitre sont des connaissances basiques en calcul stochastique qui fournissent les outils mathématiques adéquats à la description des aléas financiers et des méthodes de calcul de prix d'actifs financiers. On va introduire les principes fondamentaux de modèles de marchés financiers dont le modèle de Black-Scholes est une référence standard. Les modèles en temps continu sont des modèles où les agents sont autorisés à négocier continûment sur le marché et où doit donc modéliser l'évolution des prix des actifs comme des processus en temps continu. Comme les investissements sur les marchés sont exécutés sur des intervalles de temps trés courts (relativement à l'horizon d'investissements), ces modèles sont une approximation raisonnable des marchés réels.

Le modèle de Black et Sholes constitue l'objet important de notre étude, puisque on va s'en servir pour étudier l'investissements et la consommation.

2.1 Introduction aux marchés financiers

Un marché financier est un lieu (parfois virtuel) où l'on achète et vend des titres financiers appelés aussi actifs financiers qui sont des actions, obligations, et des produits dérivées .

En plus des matières premières (or, Pétrole, produits agro-alimentaires...) et des devises, on distingue trois grands types de produits :

- Actions (représentent un part du capital de l'entreprise)
- Obligations (représentent une part de la dette de l'entreprise.)
- Produits dérivés (options, contrats à terme,....).

les actions :

Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant a son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit a l'information et aux benefices (nommés dividendes).

les obligations :

Une obligation est une fraction d'un emprunt de long terme émis par une entreprise ou un état et coté sur un marché. La rémunération de l'obligation (qui détermine son rendement) est fixée contractuellement. En cas de faillite de l'émetteur, les détenteurs d'obligations sont remboursés prioritairement (ils sont dits "créanciers résiduels")par rapport aux actionnaires. En revanche, la détention d'obligations n'ouvre pas le droit à la participation à la gestion de l'entreprise, comme c'est le cas pour les actions.

Produits dérivés : Un produit dérivé (derivative)ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre appelé actif sous-jacent (underlying asset). On en distingue deux grands types.

Contrat à terme :

Un contrat à terme (forward ou future en englais) est un contrat entre deux parties (l'acheteur et le vendeur) pour une opération différée dans le temps : elles se mettent d'accord pour l'achat ou la vente d'un actif à une certaine date future (échéance) et à un prix fixé à l'avance. L'intérêt des contrats à terme pour les intervenants est de figer des cours dans le futur :il s'agit dans ce cas d'une opération de couverture.

option :

Une option est un titre donnant à son détenteur le droit, et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance. La description précise d'une option se fait à partir des éléments suivants :

La nature de l'option : on parle, suivant la terminologie anglo-saxonne, de call pour une option d'achat et de put pour une option de vente.

L'actif sous-jacent : sur lequel porte l'option, dans la pratique, il peut s'agir d'une action, d'une obligation etc.

le montant : ,c'est-à-dire la quantité d'actif sous-jacent à acheter ou à vendre.

l'échéance ou date d'expiration : qui limite la durée de vie de l'option ; si l'option peut être exercée à n'importe quel instant précédant l'échéance, on parle d'**option américaine**, si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance, on parle d'**option européenne**.

le prix d'exercice : qui est le prix (fixé d'avance) auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option.

La notion d'arbitrage :

L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage (absence d'opportunité d'arbitrage A.O.A), c'est-à-dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques.

La relation de partié call-put :

D'après cette simple hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage , on peut établir des relations entre les prix d'un call et d'un put européen de même échéance T et de même prix d'exercice K, sur une action de cours S_t à l'instant t. Nous supposerons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux constant r.

Désignons par C_t et P_t les prix respectifs du call et du put à l'instant t. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation suivante, pour tout $t < T$ et appelée "relation de parité call-put" :

$$C_t - P_t = S_t - K\exp(-r(T-t))$$

2.2 Description du modèle de Black et Scholes

2.2.1 L'évolution des cours

Le modèle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t).

On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modèles discrets). On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$.

On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{2.1}$$

où μ et σ sont deux constantes et (W_t) un mouvement brownien standard. Le modèle est étudié sur l'intervalle $[0, T]$ oú T est la date d'échéance de l'option à étudier.
Comme nous l'avons vu (cf. chapitre 1,paragraphe 7.2), l'équation (2,1) se résout, explicitement :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t),$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle, la loi de S_t est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale).
Compte tenu de la définition 4.1 du chapitre 1, cela signifie que le processus (S_t) vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires,
- indépendance des accroissements relatifs : si $u \leq t, S_t/S_u$ ou (ce qui revient au même), l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu $\sigma(S_v, v \leq u)$,
- stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$ la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$.

Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

2.2.2 Les stratégies autofinancées

Une stratégie financées sera définie par un processus $\phi = (\phi_t)_{0\leq t\leq T} = (\phi_t^0, \varphi_t)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, adapté à la filtration naturelle $\mathcal{F}_t)$ du mouvement brownien, les composantes ϕ_t^0 et φ_t de ϕ_t donnant, à l'instant t, les quantités d'actif sans risque et d'actif risqué respectivement détenues en portefeuille. La valeur du portefeuille à l'instant t est alors donnée par :

$$X_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

. Dans les modèles discrets, nous avons caractérisé les stratégies autofinancées par l'égalité :

$$X_{n+1}(\phi) - X_n(\phi) = \phi_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$$

La transposition de cette égalité à temps continu conduit à écrire la condition d'autofinancement sous la forme suivante :

$$dX_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t. \tag{2.2}$$

Pour que cette égalité ait un sens on imposera la condition :

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt < +\infty p.s \quad et \quad \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty p.s \tag{2.3}$$

Donc, une stratégie autofinancée est définie par un processus $\phi = (\phi_t)_{0\leq t\leq T} = (\phi_t^0, \varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant les conditions (2.2) et (2.3).

Définition 2.2.2.1. *autofinancée est définie par un couple ϕ de processus adaptés $(\phi_t^0)_{0\leq t\leq T}$ et $(\varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. $\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty$ *p.s.*
2. $\phi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \varphi_0 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \varphi_u dS_u$ *p.s.,pour tout* $t \in [0, T]$.

Nous noterons $\tilde{S} = e^{-rt} S_t$ le cours actualisé de l'actif risqué.

Proposition 2.2.2.1. *Soit $\phi = ((\phi_t^0, \varphi_t))_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, vérifiant*

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T \varphi_t^2 dt < +\infty p.s.$$

On pose :

$$X_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t \quad et \quad \tilde{X}_t(\phi) = e^{-rt} X_t(\phi).$$

Alors, ϕ définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\tilde{X}_t(\phi) = X_0(\phi) + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \quad p.s \tag{2.4}$$

pour tout $t \in [0, T]$

Démonstration : Supposons la stratégie ϕ autofinancée. De l'égalité :

$$d\tilde{X}_t(\phi) = -r\tilde{X}_t(\phi)dt + e^{-rt}dX_t(\phi)$$

qui résulte de la différenciation du produit des processus (e^{-rt}) et $(X_t(\phi))$, on déduit :

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \varphi_t S_t)dt + e^{-rt}\phi_t^0 d(e^{rt}) + e^{-rt}\varphi_t dS_t \\ &= \varphi_t(-re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t) \\ &= \varphi_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

D'où l'égalité (2.4). La démonstration de la réciproque repose sur un raisonnement analogue.

2.3 Changement de probabilité. Théorème de représentation des martingales

2.3.1 Probabilités équivalentes

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est dite absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si :

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$$

.

Théorème 2.3.1.1. *$\mathbb{Q}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ si, et seulement si, il existe une variable aléatoire Z à valeurs positives ou nulles sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{A} \;\; \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(w) d\mathbb{P}(w),$$

Z est appelée densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et parfois notée $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

2.3.2 Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, indexé par l'intervalle de temps $[0, T]$.
Le théorème suivant, que nous admettrons, est connu sous le nom de théorème de Girsanov (plus détail voir [17], chapitre 8)

Théorème 2.3.2.1. *Soit $(\Theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus adapté vérifiant $\int_0^T \Theta_s^2 ds < \infty$ p.s. et tel que le processus $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ défini par :*

$$L_t = \exp(-\int_0^t \Theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta_s^2 ds)$$

soit une martingale. Alors, sous la probabilité $\mathbb{P}^{(L)}$ de densité L_T par rapport à $\mathbb{P}$,le processus $(W_t^*)_{0\leq t\leq T}$ défini par $W_t^* = W_t + \int_0^t \Theta_s ds$, est un mouvement brownien standard.

Remarque 2.3.2.1. *Une condition suffisante pour que $(L_t)_{0\leq t\leq T}$ soit une martingale est que l'on ait :*

$$\mathbb{E}(\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \Theta_t^2 dt)) < \infty.$$

.

2.3.3 Théorème de représentation des martingales browniennes

Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien standard construit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration naturelle. D'après la proposition de la chapitre 1 on a si $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 dt) < \infty$, le processus $(\int_0^t H_s dW_s)$ est une martingale de carré intégrable, nulle en 0. Le théorème suivant montre que toute les martingales browniennes peuvent se représenter à l'aide de l'intégrale stochastique.

Théorème 2.3.3.1. *Soit $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ une martingale de carré intégrable, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ .Il existe un processus adapté $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$ et :*

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s p.s.$$

Noter que cette représentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement brownien.
Il résulte du théorème que si U est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable, on peut l'écrire sous la forme :

$$U = \mathbb{E}(U) + \int_0^T H_s dB_s p.s.$$

où (H_t) est une processus adapté tel que $\mathbb{E}(\int_0^T H_t^2 ds) < +\infty$. Il suffit pour cela de considérer la martingale $M_t = \mathbb{E}(U/\mathcal{F}_t)$.

2.4 Evaluation et couverture des options dans le modèle de Black et Scholes

2.4.1 Une probabilité sous laquelle $(\tilde{S}_t)$ est une martingale

Nous avons déja vu que pour calculer le prix d'investissement il faut trouver une probabilité équivalente à la probabilité initiale $\mathbb{P}$, sous laquelle le prix actualisé $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ de l'action est une martingale. Utilisant l'équation différentielle stochastique vérifiée par (S_t) on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t) \end{aligned}$$

et par conséquent, si on pose $W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t^*. \tag{2.5}$$

D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\mathbb{P}^*$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle $(W_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ est un mouvement brownien standard. On admettra, par la suite, que la définition de l'intégrale stochastique est invariante par changement de probabilité équivalente. Alors si on place sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, on déduit de l'égalité (2,2) que $(\tilde{S}_t)$ est une martingale et que :

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t^* - \sigma^2 t/2)$$

2.4.2 Pricing

Définition 2.4.2.1. *Une stratégie* $\phi = (\phi_t^0, \varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ *est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée* $\tilde{X}_t(\phi)$ *du portefeuille correspondant est positive pour tout* t*, et si* $\sup_{0\leq t\leq T} \tilde{X}_t$ *est de carré intégrable sous* $\mathbb{P}^*$.
On dit qu'une option est réplicable ou simulable si sa valeur à l'échéance est égale à la valeur finale d'une stratégie admissible. Donc pour qu'une option de fonction de paiement h *soit simulable il est nécessaire que* h *soit de carré intégrable sous* $\mathbb{P}^*$*. Dans le cas d'un call* $(h = (S_T - K)_+)$*, cette propriété est bien vérifiée puisque* $\mathbb{E}^*(S_T)^2 < \infty$*. Nous désignons par* $\mathbb{E}^*$ *l'espérance par rapport à la mesure* $\mathbb{P}^*$.

Théorème 2.4.2.1. *Dans le modèle de Black et Scholes, toute option définie par une variable aléatoire* h *positive,* $\mathcal{F}_T$*-mesurable et de carré intégrable sous la probabilité* $\mathbb{P}^*$ *est simulable et la valeur à l'instant* t *de tout portefeuille simulant est donnée par*

$$X_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$$

La valeur de l'option à l'instant t *est donc définie de façon naturelle par l'expression* $\mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$.

Démonstration :
Supposons tout d'abord qu'il existe une stratégie admissible $\phi = (\phi^0, \varphi)$ simulant l'option. La valeur à l'instant t du portefeuille est donnée par :

$$X_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

et l'on a par l'yhpothèse $X_T(\phi) = h$. Soit $\tilde{X}_t = X_t e^{-rt}$, la valeur actualisée :

$$\tilde{X}_t = \phi_t^0 + \varphi_t \tilde{S}_t$$

Puisque la stratégie est autofinancée, on a, d'aprés la proposition (2.2.2.1) et l'égalité (2.3),

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= X_0 + \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u \\ &= X_0 + \int_0^t \varphi_u \sigma \tilde{S}_u dW_u^*\end{aligned}$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, la borne supérieure $\sup_{0\le t\le T}\tilde{X}_t(\phi)$ est de carré intégrable, d'aprés la définition des stratégies admissibles. Il en résulte que $(\tilde{X}_t)$ est, sous $\mathbb{P}^*$, une martingale de carré intégrable. D'où

$$\tilde{X}_t(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{X}_T/\mathcal{F}_t)$$

et par conséquent :

$$\tilde{X}_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$$

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer que l'option est bien simulable, c'est à dire à trouver des processus (ϕ_t^0) et (φ_t) définissant une stratégie admissible et tels que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$$

Sous la probabilité $\mathbb{P}^*$, le processus défini par $M_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT}h/\mathcal{F}_t)$ est une martingale de carré intégrable car, d'après l'inégalité de Jensen,

$$\mathbb{E}^*(M_t^2) = e^{-2rT}\mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(h/\mathcal{F}_t)^2) \le \mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(h^2/\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}^*(h^2) < \infty$$

pour tout t. Ensuite, la filtration $(\mathcal{F}_t)$, filtration naturelle de (W_t), est aussi la filtration naturelle de (W_t^*) et, d'après le théorème de représentation des martingales browniennes, il existe un processus adapté $(K_t)_{0\le t\le T}$ tel que $\mathbb{E}^*(\int_0^t K_t^2 dt) < +\infty$ et :

$$M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s^* \quad p.s$$

pour tout $t \in [0,T]$. La stratégie $\phi = (\phi^0, \varphi)$, avec $\varphi_t = K_t/(\sigma\tilde{S}_t)$ et $\phi_t^0 = M_t - \varphi_t\tilde{S}_t$, est alors, d'près la proposition (2.2.2.1) et l'égalité (refeqe), une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant t est donnée par :

$$X_t(\phi) = e^{rt}M_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)}h/\mathcal{F}_t)$$

et il est clair dans cette expression que $X_t(\phi)$ est une variable aléatoire positive, que $\sup_{0\le t\le T}$ est de carré intégrable sous $\mathbb{P}^*$ et que $X_t(\phi) = h$. On a donc bien une stratégie admissible simulant h.

2.4.3 Evaluation et couverture dans le cas où $h = f(S_T)$

Dans la section 1.4, nous avons montré qu'il existait une stratégie de couverture pour toute option européenne de carré intégrable sous la mesure $\mathbb{P}^*$. Pour le calcul pratique il est important de savoir calculer cette stratégie. Dans cette section nous allons faire le calcul pour une fonction de paiement de la forme $h = f(S_T)$. Nous avons vu qu'il existait une stratégie $\phi = (\phi_t)_{0 \le t \le T}$ avec $\phi_t = (\phi_t^0, \varphi_t)$ dont la valeur de portefeuille vaut

$$X_t(\phi) = \mathbb{E}^*(\exp(-r(T-t))f(S_T)/\mathcal{F}_t) \tag{2.6}$$

Nous pouvons représenter S_T comme

$$S_T = S_t \exp(\mu_1(T-t) + \sigma(W_T^* - W_t^*))$$

où $\mu_1 = r - \sigma^2/2, W_T^* = W_t + \theta t, \theta = (\mu - r)/\sigma$. Comme le processus W_T^* est un mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{P}^*$, l'égalité (1.6) implique que

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t(\phi) &= \mathbb{E}^*(e^{-rT} f(S_t e^{\mu_1(T-t)+\sigma(W_T^*-W_t^*)}/\mathcal{F}_t) = e^{-rt}F(t, S_t) \\
F(t, S_t) &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(xe^{\mu_1(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})e^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

On peut vérifier directement que toutes les dérivées partielles de cette fonction sont continues par rapport à x et par rapport à t. Ensuite, en posant $\tilde{F}(t, x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt})$, on obtient d'après la formule d'Ito que

$$d\tilde{X}_t(\phi) = d\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = A(t) + \tilde{F}'_x(t, \tilde{S}_t)d\tilde{S}_t \tag{2.8}$$

où $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$ et vérifie l'équation (2.5) et

$$A(t) = \tilde{F}'_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}_t^2 \tilde{F}''_{xx}(t, \tilde{S}_t)$$

Comme nous l'avons déjà vu, le processus $\tilde{X}_t(\phi)$ est une martingale sous la mesure $\mathbb{P}^*$. ce qui veut dire que la partie régulière dans la différentielle stochastique (1.8) est égale à zéro, c'est à dire $A(t) = 0$ p.s pour tout $t \in [0, T]$ Donc la fonction $\tilde{F}(t, x)$ vérifie l'équation suivante :

$$\tilde{F}'_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2 \tilde{S}_t^2 \tilde{F}''_{xx}(t, x) = 0 \tag{2.9}$$

Et en comparant les équations différentielles stochastique (1.4) et (1.8) nous obtenons que

$$\varphi_t = \tilde{F}'_x(t, \tilde{S}_t) \qquad \phi^0_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - \tilde{F}'_t(t, \tilde{S}_t)\tilde{S}_t \tag{2.10}$$

Notons que pour obtenir une stratégie autofinancée de couverture nous pouvons prendre n'importe quell fonction $\tilde{F}(t, x)$ qui vérifie l'équation (1.10) avec la condition au bord $\tilde{F}(T, x) = e^{-rT} f(xe^{rT})$.

Par ailleurs, puisque ϕ est un portefeuille simulant, la valeur à l'instant t de l'option est égale à $X_T(\phi) = F(t, S_t)$ et vérifie

$$F'_t + rxF'_x + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 F''_{xx} - rF = 0$$

appelée équation aux dérivées partielles de Black-Scholes.

Remarque 2.4.3.1. *Dans le cas du call, on a :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = N(d)$$

dans le cas du put :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = -N(-d)$$

Cette quantité est souvent appelée le "delta" de l'option par les particiens. Plus généralement, lorsque la valeur à l'instant t d'un portefeuille peut s'écrir $\psi(t, S_t)$, la quantité $(\partial\Psi/\partial x)(t, S_t)$, qui mesure la sensibilité du portefeuille aux variations du cours à l'instant t, est appelée le "delta" du portefeuille. On parle de "gamma" pour la dérivée seconde $\Psi(t, S_t)$, la quantité $(\partial^2\psi/\partial x^2)(t, S_t)$, de "thêta" pour la dérivée par rapport au temps et de "véga" pour la dérivée de ψ par rapport à la volatilité σ.

2.4.4 Formule de Black et scholes

Il s'agit de la célèbre formule donnant le prix d'un call dans notre contexte

Proposition 2.4.4.1. *Le prix C_t d'un call européen sur l'actif risqué (de strike K et d'échéance T) est donné par :*

$$C_t = S_t N(d_1(t, S_t)) - ke^{-r(T-t)} N(d_2(t, S_t)) \tag{2.11}$$

où

$$d_1(t,x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2(t,x) = \frac{\log(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

et où N est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$. Dans ce cas, la composition du portefeuille de couverture est donnée par :

$$\varphi_t = N(d_1(t,S_t)) > 0 et \phi_t^0 = -Ke^{-rT}N(d_2(t,S_t)) < 0 \tag{2.12}$$

Démonstration

D'après (2.7) :

$$C_t = F(t,S_t)$$

$$F(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{2.13}$$

Or montre facilement que

$$xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)} \geq 0 \leftrightarrow y \geq -d_2(t,x)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int_{-d_2}^{+\infty} (xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} (xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \end{aligned}$$

En séparant les deux intégrales et en faisant dans la première le changement de variables $z = y + \sigma\sqrt{T-t}$ on obtient

$$F(t,x) = xN(d_1(t,x)) - Ke^{-r(T-t)N(d_2(t,x))}.$$

On en déduit 2.12 dont 2.13 découle immédiatement.

Chapitre 3

consommation et l'investissement en temps continu cas où la fonction d'utilité est logarithmique

Les marchés offrent de nombreuses opportunités d'investissement dans divers produits financiers. Chaque gestionnaire de fond doit alors choisir dans quels actifs investir, dans quelles proportions et sur quelle période. Etant donnée une fonction d'utilité U caractérisant ses préférences ou celles des investisseurs qu'il represente, le gestionnaire cherche donc une stratégie optimale d'investissement dans un panier d'actif S lui permettant de maximiser l'utilité de ses revenus futurs.

3.1 Consommation et investissement en temps continu

3.1.1 Modèle du marché financier

Dans ce chapitre, on considère un marché de d+1 actifs financier de type Black-Scholes ayant comme base $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$, consistant en un actif sans risque et d actifs risqués. Leurs prix $(S_0(t))_{0\leq t\leq T}$ et $(S_i(t))_{0\leq t\leq T}$ pour $i = 1, \ldots\ldots, d$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} dS_0(t) = r_t S_0(t)dt & S_0(0) = 1 \\ dS_i(t) = S_i(t)d\zeta_i(t) & S_i(0) = s_i \\ d\zeta_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t) & \zeta_i(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour tout $t \geq 0$ on note, par $W_t = (W_1(t), W_2(t), \ldots\ldots, W_d(t))$ un mouvement brownien standard de dimension d, par $r_t \in \mathbb{R}$ le taux d'intérêt sans risque, par $\mu_t = (\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots\ldots, \mu_d(t))$ le taux de risque , par $\sigma_t = (\sigma_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq d}$ la matrice de la volatilité. et les coefficients r_t, μ_t et σ_t sont des fonctions déterministes mesurables.

Dans tout ce qui suit ,$(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ est la filtration naturelle engendrée par le processus $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ c'est-à-dire que $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_u, 0 \leq u \leq t\}$.

Soient, $\phi_t \in \mathbb{R}$ la quantité investie dans l'actifs sans risque et $\varphi_t = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots\ldots, \varphi_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ la quantité investie dans les actifs risqués à l'instant t.

Dans ce cas, une stratégie financière est définie par un processus aléatoire $(\phi_t, \varphi_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. Le processus

$$X_t = \phi_t S_0(t) + \sum_{j=1}^{d} \varphi_j(t) S_j(t) \quad t \geq 0 \tag{3.2}$$

S'appelle le processus richesse ou la valeur du portefeuille à l'instant t.

Définition 3.1.1.1. *Un processus du consommation $(c_t)_{0\leq t\leq T}$ est une vitesse de la consommation sur l'intervalle [0 ; T], c'est-à-dire que c'est un processus non negatif progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ et presque sûrement intégrable sur l'intervalle [0, T].*

$$\int_0^T c_t dt < \infty \quad p.s$$

Une stratégie financière $((\phi_t, \varphi_t))_{t>0}$ *avec une consommation* $(c_t)_{t\geq 0}$ *est dite autofinancée si le processus richesse correspondant vérifie l'équation stochastique suivante*

$$X_t = x + \int_0^t \phi_u dS_0(u) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \varphi_j(u) dS_j(u) - \int_0^t c_u du \quad t \geq 0 \tag{3.3}$$

Où $x > 0$ *est la richesse initiale et l'integrale* $\int_0^t c_u du$ *de ce processus représente le montant consommé sur l'intervalle [0, T].*

Remarque 3.1.1.1. *Nous allons travailler avec les quantités relatives par rapport au processus de richesse. On pose*

$$\pi_j(t) = \frac{\varphi_j(t) S_j(t)}{X_t} \text{ pour j=1,....,d} \quad \text{et } \upsilon_t = \frac{c_t}{X_t}$$

Alors $(\pi_t = (\pi_1(t), \ldots\ldots, \pi_d(t))')_{0\leq t\leq T}$ *est appelée le processus de portefeuille et* $(\upsilon_t)_{0\leq t\leq T}$ *le processus de consommation.*
En tenant compte de ces définitions, nous réécrivons l'équation pour X_t *comme*

$$dX_t = X_t(r_t + y_t'\theta_t - \upsilon_t)dt + X_t y_t' dW_t \quad X_0 = x > 0 \tag{3.4}$$

Où

$$y_t = \sigma_t' \pi_t \quad et \quad \theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbb{1})$$

avec $\mathbb{1} = (1, \ldots\ldots, 1) \in \mathbb{R}^d$.
On fait l'hypothèse que

$$\|y\|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 \, dt < \infty \qquad \|\theta\|_T^2 = \int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \infty \tag{3.5}$$

D'ailleurs, on suppose que la fonction $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ *ne s'anulle pas dans* $\mathcal{L}_2[0, T]$*, ie*

$$\|\theta\|_T^2 = \int_0^T |\theta_t|^2 \, dt > 0 \tag{3.6}$$

Décrivons maintenant l'ensemble des processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0}$ *avec* $\nu_t = (y_t, \nu_t)$.

3.1.2 Le processus de contrôle

Introduisons, un ensemble de processus de contrôle $(y_t, c_t)_{0\leq t\leq T}$, on choisit un processus de consommation $(c_t)_{t\geq 0}$ de sorte qu'il correspond à $\nu_t X_t$, donc on a :

$$c_t = \nu_t X_t$$

Où $(\nu_t)_{t\geq 0}$ est mesurable pour les valeurs [0,1]. Pour cette consommation nous définissons le processus de contrôle $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0}$ comme étant $\nu_t = (y_t, c_t)$, où $(y_t)_{t\geq 0}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant 3.5. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est défini par l'équation 3.4 , qui a, dans ce cas, la forme suivante (pour bien insister sur le fait que le processus de richesse correspond à certains processus ν, qu'on les note X^ν)

$$dX_t^\nu = X_t^\nu(r_t - \nu_t + y_t'\theta_t)dt + X_t^\nu y_t' dW_t, \quad t > 0, \quad X_0^\nu = x \tag{3.7}$$

On note l'ensemble de tels processus de contrôle ν par $\mathbb{U}$.
Il est à noter que pour chaque $\nu \in \mathbb{U}$, et à l'aide de la formule d'Itô, l'équation 3.7 admet une solution.

$$X_t^\nu = xe^{R_t - V_t + (y,\theta)_t}\xi_t(y) \tag{3.8}$$

Où

$$R_t = \int_0^t r_u du, \quad V_t = \int_0^t \nu_u du et \quad (y,\theta)_t = \int_0^t y_u'\theta_u du \tag{3.9}$$

De plus, $\xi(y)$ indique l'exponentiel stochastique défini comme suit :

$$\xi_t(y) = \exp(\int_0^t y_u' dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t |y_u|^2 du)t \geq 0$$

Cependant, pour tout $\nu \in \mathbb{U}$, le processus $(X_t^\nu)_{t\geq 0}$ est positive et continu. Une généralisation normale de $\mathbb{U}$ sera donc l'ensemble des contrôles.

Définition 3.1.2.1. *Un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t\geq 0} = ((y_t, v_t))_{t\geq 0}$ est dit admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\|y\|_T^2 = \int_0^T |y_t|^2 dt < \infty et \int_0^T v_t dt < +\infty$$

De plus on suppose que 3.4 a une forte solution unique presque sûrement positive sur l'intervalle [0,T]. Nous désignons par $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les processus du contrôle admissible.

Définition 3.1.2.2. *Pour une richesse initiale $x > 0$ et pour un processus du contrôle $(\nu_t)_{t\geq 0}$ dans $\mathbb{V}$, nous introduisons la fonction objectif définit comme suit :*

$$J(x,\nu) = \mathbb{E}_x\left(\int_0^T U(c_t)dt + h(X_T^\nu)\right) \tag{3.10}$$

Où $\mathbb{E}_x$ est l'espérance conditionelle sachant que $X_0^\nu = x$, $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la fonction d'utilité et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la fonction d'héritage.

Le but de l'investissement et de la consommation est de maximiser la fonction objectif 3.10, c'est-à-dire :

$$\max_{\nu\in\mathbb{V}} J(x,\nu) \tag{3.11}$$

Pour résourdre ce problème, nous allons utiliser la méthode de programmation dynamique stochastique de Bellman qui est basé sur les théorèmes de vérification pour les équations différentielles stochastiques.

3.1.3 Théorème de Vérification

On considère le problème du contrôle stochastique pour le processus d'Itô scalaire sur l'intervalle [0,T]

$$\begin{cases} dX_t^\nu = a(t, X_t^\nu, \nu_t)dt + (b(t, X_t^\nu, \nu_t))'dW_t \\ \\ X_t^\nu = x > 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

On suppose que le processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0\leq t\leq T}$ prend ses valeurs dans un ensemble $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^d$ et que les coefficients

$$a : [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{K} \to \mathbb{R} \quad et \quad b : [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}^d$$

sont des fonctions non aléatoires et que pour tout $t \in [0,T]$ les fonctions $a(t,.,.)$ et $b(t,.,.)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{K}$, tel que pour tout $k \in \mathbb{K}$ l'equation 3.12 avec $\nu \equiv k$ a une solution unique forte et positive presque sûrement sur l'intervalle [0,T].
De plus, soit

$$U : [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{K} \to \mathbb{R}$$

une fonction d'utilité et

$$h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

une fonction d'héritage.
On suppose que les fonctions U et h sont continus.
Dans cette section nous allons modifier la définition de l'admissibilité pour l'équation 3.12 de la façon suivante.

Définition 3.1.3.1. *On dira qu'un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0\leq t\leq T}$ est admisible s'il est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$ et l'équation 3.12 a une solution unique forte $(X_t^\nu)_{0\leq t\leq T}$ positive presque sûrement sur l'intervalle [0,T] telle que*

$$\int_0^T (|a(t, X_t^\nu, \nu_t)| + |b(t, X_t^\nu, \nu_t)|^2 dt < \infty p.s \tag{3.13}$$

et

$$\mathbb{E}[U(t, X_t^\nu, \nu_t))_- dt + (h(X_T^\nu))_-] < \infty \tag{3.14}$$

où $(a)_- = \min(0, a)$.On désigne par $\mathbb{V}$ l'ensemble de tous les processus du contrôle admissibles.
On définit les fonctions objectifs, on posant

$$J(t, x, \nu) = \mathbb{E}_{t,x}[\int_t^T U(s, X_s^\nu) + h(X_T^\nu)], \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.15}$$

où $\mathbb{E}_{t,x}$ est l'espérance conditionnelle sachant que $X_t^\nu = x$.
Notre but est de résoudre les problèmes d'optimisation suivants

$$J^*(t, x) = \sup_{\nu\in\mathcal{V}} J(t, x, \nu), \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.16}$$

Pour cela, introduisons l'Hamiltonien définit par

$$H(t, x, z_1, z_2) = \sup_{v\in\mathbb{K}} H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) \tag{3.17}$$

avec

$$H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) = a(t, x, \vartheta)z_1 + \frac{1}{2}|b(t, x, \vartheta)|^2 z_2 + U(t, x, \vartheta)$$

Pour trouver une solution du problème 3.16, il faut étudier l'équation de ***Hamilton-Jacobi-Bellman***

$$\begin{cases} z_t(t, x) + H(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x)) = 0 & t \in [0, T] \\ \\ z(T, x) = h(x) & x > 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Ici z_t désigne la dérivée partielle de z par rapport à t. On va utiliser les mêmes notations pour toutes les dérivées partielles.
On suppose que :

H_1) *pour tout $\nu \in \mathcal{V}$, la fonction $U(s, X_s^\nu, \nu_s)$ est absolument intégrable dans l'intarvalle [t, T],ie pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x \in \Gamma$ on a*

$$\mathbb{E}_{t,x} \int_t^T |U(s, X_s^\nu, \nu_s)| ds < \infty$$

H_2) *Il existe une fonction $z : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes.*

1. *Il existe une fonction $z_t(.,.)$ tel que pour tout $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ et pour tout $x > 0$*

$$z(t_2, x) - z(t_1 - x) = \int_{t_1}^{t_2} z_t(u, x) du \tag{3.19}$$

   De plus, $z_t(u, .)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

2. *Pour tout $N \geq 1$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \sup_{x,y \in K_N, |x-y| < \varepsilon} |Z_t(u, x) - Z_t(u, y)| dt = 0 \tag{3.20}$$

   où $K_N = [N^{-1}, N]$.

3. *La fonction z est deux fois dérivable par rapport à x et les dérivées partieles $z_x(.,.)$ et $z_{x,x}(.,.)$ sont continus sur $[0, T] \times (0, \infty)$*

4. *Il existe un ensemble $\Gamma \subseteq [0, T]$ avec $\Lambda(\Gamma) = T$ ($\Lambda(.)$ est la mesure de Lebesgue) et pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$ la fonction $z(t, x)$ représente une solution du problème...*

H_3) *Il existe une fonction mesurable $\vartheta^* : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathcal{K}$ telle que*

$$H(t, x, z_x(t, x), z_{xx}(t, x), z_{xx}(t, x), \vartheta^*(t, x))$$

pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$.

H_4) *Il existe une solution unique forte presque sûrement positive de l'équation d'Itô suivante*

$$dX_t^* = a^*(t, X_t^*) dt + (b^*(t, X_t^*))' dw_t, \quad X_0^* = x \tag{3.21}$$

où $a^*(t, x) = a(t, x, \vartheta^*(t, x))$ et $b^*(t, x) = b(t, x, \vartheta^*(t, x))$.De plus le processus du contrôle optimal $\nu^* = (\nu_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\nu_t^* = \vartheta^*(t, X_t^*)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{V}$

H_5) Pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$, on a :

$$\mathbb{E}_{t,x} \sup_{t \leq s \leq T} |z(s, X_s^*)| < \infty \tag{3.22}$$

Maintenant, on montre que le processus ν^* mène à la résolution des problèmes

Théorème 3.1.3.1. [27] *On suppose que $\mathcal{V} \neq \emptyset$ et que les hypothèses $H_1 - H_5$ sont satisfaites. De plus, on suppose que*

$$z_* = \inf_{0 \leq t \leq T} \inf_{x > 0} z(t, x) > -\infty \tag{3.23}$$

Alors, pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$z(t, x) = J^*(t, x) = J^*(t, x, \nu^*)$$

où la stratégie ν^* est définie dans les hypothèses $H_3 - H_5$.

3.2 Investissement et consommation optimales

Dans cette section, nous introduisons la fonction de côut, pour la richesse initiale $x > 0$ et pour un processus du contrôle $(\nu_t)_{t \geq 0}$ dans $\mathcal{V}$, qui est basé sur une fonction d'utilité de type logarithmique de la consommation et de la richesse en T.

$$J(x, \nu) = E_x\left(\int_0^T \ln(c_t) dt + \ln(X_T^\nu)\right), \quad \nu \in \mathcal{V} \tag{3.24}$$

Où E_x est l'espérance conditionnelle sachant que $X_0^\nu = x$.

3.2.1 Le problèmes et la solution

Le problèmes d'optimisation

On va étudier le problème sans condition. Soit $x > 0$ la richesse initiale et on note par $\zeta > 0$ une certaine limite de risque.

Le problème

$$\max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) \tag{3.25}$$

Théorème 3.2.1. *Le problème (3.25) a la solution suivante :*
La valeur optimale de $J(x, \nu)$ est donnée par

$$J^*(x) = \max_{\nu \in \mathcal{V}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = A(0) \ln x + B(0) \tag{3.26}$$

où le contrôle optimal $\nu^* = (y^*, \upsilon^*)$ a la forme suivante

$$y_t^* = \theta_t \ et\ \upsilon_t^* = \frac{1}{A(t)},\ pour\ tout\ 0 \leq t \leq T \tag{3.27}$$

le processus richesse optimal $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ représente une solution de :

$$dX_t^* = X_t^* \left(r_t + |\theta_t|^2 - \frac{1}{A(t)} \right) dt + X_t^* |\theta_t| \, dW_t \quad X_0^* = x \tag{3.28}$$

i.e

$$X_t^\nu = x \exp \left(\int_0^t \beta_u^* du + \int_0^t |\theta_u| \, dW_u \right), \quad t \geq 0$$

où

$$\beta_t^* = r_t^* - 1/A(t) = r_t + |\theta_t|^2 /2 - 1/A(t) \quad t \geq 0$$

Remarque 3.2.1. *Pour formuler les solutions, on pose*

$$r_t^* = r_t + |\theta_t|^2 /2, \quad t \geq 0 \tag{3.29}$$

et on définit pour $0 \leq t \leq T$

$$A(t) = 1 + T - t \quad B(t) = \int_t^T (r_t^* A(u) - \ln A(u) - 1) du \tag{3.30}$$

Démonstration

Nous appliquons le théorème (3.1.3.1) à l'équation différentielle stochastique du contrôle (3.4). Les coefficients dans le modèle (3.12) et (3.15) sont alors définis comme suit

$$a(t, x, \nu) = x(r_t + y'\theta_t - \upsilon), \quad \nu = (y, \upsilon)$$

$$b(t, x, \nu) = x \, |y| \,, \quad U(t, x, \nu) = \ln x, \quad h(x) = \ln x$$

De plus, $\Gamma = \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. La définition (3.1.2.1) de l'ensemble $\mathcal{V}$ implique immédiatement $\mathbf{H}_1$).

Pour vérifier $\mathbf{H}_2) - \mathbf{H}_4)$, nous calculons la fonction de Hamilton pour notre problème. Nous avons pour $\vartheta = (y, \upsilon)$

$$H(t, x, z_1, z_2) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{K}} H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta)$$

où

$$H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta) = (r_t + y'\theta_t)xz_1 + \frac{1}{2}x^2 |y|^2 z_2 + \ln(\upsilon x) - \upsilon x z_1$$

Pour $z_2 < 0$ nous trouvons

$$H(t, x, z_1, z_2) = H_0(t, x, z_1, z_2, \vartheta_0) = r_t x z_1 + \frac{1}{2|z_2|} z_1^2 |\theta_t|^2 - \ln z_1 - 1 \tag{3.31}$$

où $\vartheta_0 = \vartheta_0(t, x, z_1, z_2) = (y_0(t, x, z_1, z_2), \upsilon_0(t, x, z_1, z_2))$ avec

$$y_0(t, x, z_1, z_2) = \frac{z_1}{x|z_2|}\theta_t \text{ et } \upsilon_0(t, x, z_1, z_2) = \frac{1}{xz_1} \tag{3.32}$$

Nous nous intéressons maintenant à la résolution de l'équation (3.18), qui a la forme suivante :

$$\begin{cases} z_t(t,x) + r_t x z_x(t,x) + \frac{z_x^2(t,x)|\theta_t|^2}{2|z_{xx}(t,x)|} - \ln z_x(t,x) = 1 \\ \\ z(T,x) = \ln x \end{cases} \tag{3.33}$$

On rappelle que nous voulons prouver que la valeur optimale $J^*(0, x)$ est égale à la partie droite de l'équation (3.26). Par conséquence, la solution de (3.18) a la forme suivante :

$$z(t, x) = A(t) \ln x + B(t), \quad t \geq 0, \quad x > 0 \tag{3.34}$$

La condition de limite $(z(T, x) = \ln x)$ implique que $A(T) = 1$ et $B(T) = 0$.L'équation (3.33) implique pour $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$ l'égalité suivante :

$$\frac{dA(t)}{dt} \ln x + \frac{dB(t)}{dt} + r_t^* A(t) + \ln x - \ln A(t) - 1 = 0$$

où r_t^* est défini en (3.29). La solution de cette équation donne la définition des fonctions $A(.)$ et $B(.)$ dans (3.30).

Maintenant de (3.31) et (3.32), nous trouvons la solution $z(t,x)$ de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman comme définie en (3.34) et (3.30)

$$H(t,x,z_x(t,x),z_{xx}(t,x)) = H_0(t,x,z_x(t,x),z_{xx}(t,x),\vartheta^*(t,x))$$

où

$$\vartheta^*(t,x) = \vartheta_0(t,x,z_x(t,x),z_{xx}(t,x)) = (y_t^*, \upsilon_t^*)$$

$$y_t^* = y_0(t,x,z_x(t,x),z_{xx}(t,x)) = \frac{z_x(t,x)}{xz_{xx}(t,x)}\theta_t = \theta_t$$

$$\upsilon_t^* = \upsilon_0(t,x,z_x(t,x),z_{xx}(t,x)) = \frac{1}{xz_x(t,x)} = \frac{1}{A(t)}$$

Cependant, $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{H}_3$ en résulte. De plus, l'équation (3.21) n'est que l'équation (3.28), qui a une solution forte et unique, i.e la condition $\mathbf{H}_4$ est respectie.

Finalement, nous vérifions $\mathbf{H}_5$. De (3.8), on part de la valeur initiale $X_t^\nu = x$

$$\ln X_s^\nu = \ln x + \int_t^s |\beta_u du| + \int_t^s |y_u|\, dW_u, \quad t < s < T$$

où $\beta_u = r_u - \upsilon_u + y_u'\theta_u - \frac{1}{2}|y_u|^2, \quad u \geq 0.$

Cependant, pour tout $0 < t < T$, de l'inégalité de Doob pour les intégrales stochastiques, on trouve :

$$\begin{aligned}
E_{t,x}\sup_{t\leq s\leq T}|\ln X_s^*| &\leq E_{t,x}\sup_{t\leq s\leq T}|\ln X_s^*| + E_{t,x}\sup_{t\leq s\leq T}\left|\int_t^s |y_u dW_u|\right| \\
&\leq |\ln x| + \textstyle\int_t^T |r_u|\,du + \int_t^T \theta_u^2 du + E_{t,x}\int_t^T y_u^2 du + \\
&\quad \sqrt{E_{t,x}\sup_{t\leq s\leq T}\left(\int_t^s |y_u|\,dW_u\right)^2} \\
&\leq |\ln x| + \textstyle\int_t^T |r_u|\,du + \int_t^T \theta_u^2 du + E_{t,x}\int_t^T y_u^2 du + 2\sqrt{E_{t,x}\int_t^T y_u^2 du}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$E_{t,x}\sup_{t\leq s\leq T}|\ln X_s^*| < \infty, \quad 0 \leq t \leq T, x > 0$$

En faisant appel à (3.30) et (3.34), nous obtenons $\mathbf{H}_5$. Cela prouve le problème sans restriction.

Conclusion et perspectives

En conclusion, nous avons pu voir clairement l'intérêt énorme qu'a représenté la technique d'application du calcul stochastique sur des modèles financiers, et comme exemple d'application, on a abordé la fonction d'utilité de type logarithmique, en vue de la maximiser, tout cela pour servir à l'investisseur qui sera guidé pour bien gérer son portefeuille.

Cet intérêt nous permet de dire sans exagération que, par extension les mathématiques appliquées sont devenus la voie d'accés aux métiers de la finance du marché.

et comme perspective, et étant donné que les marchés financiers sont très compliqués, l'étude ne doit pas se limiter au cas déterministe, mais elle doit s'élargir pour trouver des fonctions d'utilité qui nous aideront dans le cas aléatoire. C'est une autoroute, l'avenir dira ce qu'il en est.

Bibliographie

[1] L. Bachelier :*Théorie de la spéculation, thèse, Annales scientifiques de l'école normale supérieure,* Série 3, [janvier 1900, 17 : 21-86].

[2] A. Belqadhi :*Etude du calcul stochastique : martingales, mouvement Brownien et intégration d'Itô,*Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, [14 janvier 2008].

[3] B. Biais, T. Bjork, J. Cvitanié, N. El Karoui, E. Jouini, and J.C. Rochet :*Financial mathematics,* In W. Runggaldier editor , Financial Mathematics, Bressanone, [1996, volume 1656] of Lecture Notes in Maths., pages 133-158. Springer-Verlag, Berlin, [1997].

[4] F. Black, M. Scholes : *The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy,*81 : 637-654, [May-June,1973].

[5] B.Bouchard, *Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage*, [Janvier 2007].

[6] C. Chorro, :*Cours de calcul stochastique master M2 IRFA*, [Septembre 2006].

[7] D.Dacunha-Castelle, M.Dulfo, :*Probabilité et statistique,tome 2,problème à temps mobil*, Masson, [1983]

[8] M. Diener, F. Diener : *Marches aléatoires et applications à la finance*,14 février 2000.

[9] R.M. Dudley :*Wiener functionals as Itô intégrals,*The Annals of Prob., 5 :140-141, [1977].

[10] N. El Karoui, E. Gobet :*Modèles stochastiques en finance Première partie : introduction au calcul stochastique*, [édition 2004].

[11] N.EL Karoui, M.Jeanblanc-Picqué, S.Shreve, *Robustness of the Black and Scholes formula, mathematical finance*, vol.8,Issue 2,93-126, [1998].

[12] N. El Karoui and L. Mazliak : *Backward stochastic differential Equations*,Longman, Pitman research notes in Mathematics series, 364, Harlow, [1997].

[13] R.ELIE, *Calcul stochastique appliqué à la finance*, [Avril 2006].

[14] S. Emmer,C. Kluppelberg, and R. Korn :*Optimal portfolios with bounded downside risks.Technical Report. Munich University of Technology*, [2000].

[15] S. Emmer,C. Kluppelberg, and T. Korn :*Optimal portfolios with bounded Capital-at-Risk*,Math.Finance 11,365-384, [2001].

[16] J.M.Harrison,S.Pliska, *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, stochastic processes and their applications*, [11,215 − 260, 1981].

[17] E. Janvresse, S.Pergamenchtchikov,P. Raynaud de Fitte, *Mathématiques pour la finance et l'assurance*, [Septembre 2005].

[18] M. Jeanblanc :*Cours de Calcul stochastique,* [Septembre 2002].

[19] M. Jeanblanc, T. Simon : *Elements de calcul stochastique*, [Septembre 2005].

[20] I. Karatzas, and S.E. Shreve :*Methods of mathematical Finance*,Springer, Berlis, [2001].

[21] I. Karatzas, S.E.Shreve :*Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, [1988].

[22] C. Kluppelberg, and S.Pergamenchtchikov :*Optimal consumption and investment with bounded Capital-at-Risk*, [2005].

[23] C. Kluppelberg, and S. Pergamenchtchikov, :*Optimal consumption and investment with bounded downside risk measures for logarithmic utility functions*, [December 3, 2007].

[24] R. Korn, :*Optimal Portfolios*,World Scientific,Singapore, [1997].

[25] D. Lamberton, B. Lapeyre :*Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*,Ellipses Edition Marketing, [1997].

[26] O. Lévèque : *Cours de probabilités et calcul stochastique*,Semestre d'hiver, [2004-2005].

[27] R.C.Merton :*Continuous-Time Finance*, Blackwell,Cambridge MA, [1990].

[28] M. Meyer :*Continuous Stochastic calculus with applications to Finance* ,Applied mathematics 17.

[29] H. PHAM, :*Introduction aux mathématiques et modèles stochastiques des marchés financiers* , [2006 − 2007].

[30] C. Rogers , :*Equivalent martingale measures and no-arbitrage*, Stoch.Rep, [1994].

[31] D. Revuz, M. Yor :*Continuous Martingales and Brownian Motion,* Springer, [1991].

[32] M. Schroder, and C.Skiadas, :*Optimal consumption and portfolio selection with stochastic differential utility*, J.Economic Theory 89,68-126, [1999].

[33] G.L.Xu, and S.E. Shreve, :*A duality method for optimal investment under short-selling prohibitior*, General market coefficients.Ann.Appl.Prob.2(1),87-112, [1992].