REMERCIEMENTS

Je souhaite adresser mes plus vifs remerciements à mes professeurs qui m'ont enseigné, soutenu, entouré et aidé tout au long de mon cursus universitaire. Tous ont contribué, de près ou de loin, à l'elaboration de ce mémoire.
Cette étape de ma vie a été pour moi un véritable challenge que j'ai relevé.
Je souhaite remercier particulièrement Monsieur ***Seddik Ouakkas*** *professeur à l'université Dr. Moulay Tahar - Saida pour son accompagnement, ses précieux conseils et son encouragement tout au long de ce travail.*
Je tiens à remercier aussi toute l'équipe pédagogique de la formation du Master Géométrie Différentielle pour nous avoir permis d'effectuer ce projet.
Merci à toutes les personnes qui ont participé à cette étude et qui ont sacrifié de leur précieux temps pour répondre à mes questions me permettant aujourd'hui d'achever ce mémoire.
Quoi de plus agréable que de remercier les membres de jury : messieurs ***S.Abbas****,* ***K.djerfi*** *et madame* ***N.Bekkouche*** *de m'avoir fais l'honneur de participer au jury.*
Je dédie ce modeste trvail à mes parents, mon frère ***Imad Eddine****, mes sœurs* ***Boutheina*** *et* ***Kaouther Khaoula****, ma chére épouse* ***Nour El Houda*** *et tous les amis de la promo.*

Merci...

"Soit A un succès dans la vie. Alors $A = x + y + z$ où $x =$ travailler, $y =$ s'ammuser et $z =$ se taire."

Albert Einstein [1]

1. Mathématicien, Physicien, Scientifique (1879 - 1955)

Table des matières

Introduction

Ce mémoire constitue une introduction à la théorie du groupe fondamental et des revêtements.
Le groupe fondamental est l'une des premières notions de la topologie algébrique, introduite par **Henri Poincaré** dans son article **Analysis Situs**, paru en **1895**. Cette théorie permet d'associer à un espace topologique un groupe, son groupe fondamental, et à une application continue entre espaces topologiques un morphisme de groupes.
Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la notion d'homotopie, ce qui nous permettra de définir ensuite le groupe de **Poincarée** $\pi_1(X)$ d'un espace topologique pointé X. On introduira ensuite la notion de revêtement afin de démontrer plusieurs théorèmes.
La troisième partie est consacré à certaines applications de cette théorie, notamment l'exemple du théorème du point fixe de **Brouwer** dans lequel on démontre, par des arguments algébriques, un résultat de nature topologique.
Enfin l'annexe de ce mémoire est dédié au théorème de **Van Kampen** en introduisant la notion de produit libre et des sommes amalgamées.

Chapitre 1

Généralités

L'homotopie est une notion de topologie algébrique. Elle étudie la notion de déformation continue d'un objet à un autre. Deux lacets sont dit homotopes lorsqu'il est possible de passer continûment de l'un à l'autre. La théorie de l'homotopie associe à un espace topologique connexe X, une famille de groupes $(\pi_n(X))$ appelés groupes d'homotopie.

1.1 Homotopie des chemins

Définition 1.1.1. *Un chemin dans X est une application continue*

$$c : I \to X \qquad (I = [0,1])$$

telle que : $c(0)$ est l'origine de chemin c et $c(1)$ son extrémité.

Propriétés 1.1.1.

1. *Pour $x \in X$ on désigne par c_x le chemin constant d'origine et d'extrémité x, c'est-à-dire*

$$c_x(t) = x, \qquad \forall t \in I$$

2. *Si $c : I \to X$ est un chemin joignant x à y c'est-à-dire :*

$$c(0) = x, c(1) = y$$

on designe par $\overline{c}$ le chemin d'origine y et d'extrémité x, défini par :

$$\overline{c}(t) = c(1-t) \qquad \forall t \in I$$

$\overline{c}$ est dit le chemin inverse.

3. *Si c_1 est un chemin joignant x à y et c_2 est un chemin joignant y à z alors on peut définir un chemin c joignant x à z par :*

$$c(t) = \begin{cases} c_1(2t) & \textit{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \textit{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Proposition 1.1.1. *La relation $\sim$ dans X définie par :*

$$\forall x, y \in X, x\ y \Leftrightarrow \exists C : I \to X$$

$$\begin{cases} c(0) = x \\ c(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration : Il suffit de vérifier les trois propriétés d'une relation d'équivalence.
✓ L'homotpie est réflexive,l'application définie par :

$$F(x,t) = f(x)$$

étant une homotopie de f vers f.
✓ L'homotopie est symétrique. Si F est une homotopie de f vers g, l'application

$$F'(x,t) = F(x, 1-t)$$

est une homotopie de g vers f.
✓ L'homotopie est transitive. Considérons deux homotopies, F une homotopie de f vers g, et G de g vers h, et définissons une application H par :

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Le théorème de recollement nous assure la contiuté de l'application H. Des égalités :

$$H(x,0) = F(x,0) = f(x),$$

$$H(x,1) = G(x,1) = h(x),$$

$$H(a,t) = F(a,t) = G(a,t) = f(a) = g(a),$$

nous déduisons que H est une homotopie de f vers h.

Définition 1.1.2. *Deux chemins c et c' dans X sont dits homotopes s'il existe une application continue H telle que :*

$$H : I \times I \to X$$

$$(t,s) \to H(t,s),$$

telle que

$$\begin{cases} H(t,0) = c(t) \\ et \\ H(t,1) = c'(t) \qquad \forall t \in I \end{cases}$$

$$et$$

$$\begin{cases} H(0,s) = x \\ et \\ H(1,s) = y \qquad \forall s \in I \end{cases}$$

Définition 1.1.3. *Soient γ, $\gamma' : [0,1] \to X$ deux chemins tels que :*

$$\gamma'(0) = \gamma(1).$$

Le chemin composé de γ et γ' noté $\gamma\gamma'$ est défini par :

$$\gamma\gamma'(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & pour \ \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2s-1) & pour \ \ \frac{1}{2} \leq s \leq \ 1 \end{cases}$$

Théorème 1.1.1. *Soient c et γ deux chemins homotopes joignant x à y et soit c' et γ' deux chemins joignant y à z. Alors :*

a/ Les chemins inverses $\overline{c}$ et $\overline{\gamma}$ sont homotopes.
b/ Les chemins composés cc' et $\gamma\gamma'$ sont homotopes.

Démonstration :

- a/ Supposons que c soit homotope à γ, il existe alors une application continue

$$H : I \times I \to X$$

telle que

$$\begin{cases} H(t,0) = c(t) \\ et \\ H(t,1) = \gamma(t) \qquad \forall t \in I \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H(0,s) = x \\ et \\ H(1,s) = y \qquad \forall s \in I \end{cases}$$

On considère l'application :

$$F : I \times I \to X$$

$$(t,s) \to F(t,s)$$
$$F(t,s) = H(1-t,s)$$

F est bien une application continue et on a par un simple calcul :

$$\begin{cases} F(t,0) = H(1-t,0) = c(1-t) = \overline{c}(t) \\ et \\ F(t,1) = H(1-t,1) = \gamma(1-t) = \overline{\gamma}(t) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F(0,s) = H(1,s) = y \\ et \\ F(1,s) = H(0,s) = x \qquad \forall s \in I \end{cases}$$

donc F est une homotopie de $\bar{c}$ et $\bar{\gamma}$, et par suite $\bar{c}$ et $\bar{\gamma}$ sont homotopes.
- b/ On suppose que c soit homotope à γ et que c' est homotope à γ', alors

$$\exists H : I \times I \to X$$

et

$$\exists H' : I \times I \to X$$

telles que :

$$\begin{cases} H'(t,0) = c'(t), \quad H'(t,1) = \gamma'(t) & \forall t \in I \\ et \\ H'(0,s) = y, \qquad H'(1,s) = z & \forall s \in I \end{cases}$$

On considére l'application :

$$F : I \times I \to X$$

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s) & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(2t-1,s) & si \;\; \frac{1}{2} \leq t \leq \;1 \end{cases}$$

F est bien une application continue, on a

$$\begin{cases} F(t,0) = cc'(t) \\ F(t,1) = \gamma\gamma'(t) & \forall t \in I \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F(0,s) = x \\ F(1,s) = z \qquad \forall s \in I \end{cases} \Rightarrow cc' \text{ est homotope } \; \gamma\gamma'$$

donc F realise une homotopie entre les deux chemins cc' et $\gamma\gamma'$.

Définition 1.1.4. *Soit $x \in X$, un lacet de base x est un chemin dans X d'origine et d'extrémité x, c'est-à-dire un chemin*

$$\gamma : I = [0,1] \to X$$

vérifiant

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x.$$

Notons $\pi_1(X,x)$ l'ensemble $\pi_{x,x}(X)$ des classes d'homotopie de lacets de base x dans X.

Définition 1.1.5. *Sur $\pi_1(X,x)$, on définit l'application suivante notée $*$*
On définit la loi $*$ par :

$$* : \pi_1(X,x) \times \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,x)$$

$$[\gamma] * [\gamma'] \to [\gamma\gamma']$$

$$\gamma\gamma'(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \textit{pour} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2s-1) & \textit{pour} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq \ 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma\gamma'(0) = \gamma(0) = x \\ \gamma\gamma'(1) = \gamma'(1) = x \end{cases}$$

$*$ est bien une loi de composition interne dans $\pi_1(X, x)$.

Proposition 1.1.2.

1. *$*$ est associative*
   $\forall\ \gamma, \gamma', \gamma'' \in \pi_1(X, x)$ vérifiant

   $$\gamma(1) = \gamma'(0)$$

   et

   $$\gamma'(1) = \gamma''(0),$$

   on a :

   $$(\gamma\gamma')\gamma'' \simeq \gamma(\gamma'\gamma'').$$

   De plus

   $$([\gamma] * [\gamma']) * [\gamma''] = [\gamma] * ([\gamma'] * [\gamma''])$$

   et

   $$[(\gamma\gamma')\gamma''] = [\gamma(\gamma'\gamma'')].$$

2. *Soit C_x le chemin constant dans X défini par :*

   $$c_x(t) = x \qquad ,\forall t \in I$$

   alors $[c_x]$ est l'élément neutre dans $\pi_1(x, X)$.

3. *Soit γ un lacet de base x, on a*

   $$\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t),$$

   alors $\overline{\gamma}(t)$ est aussi un lacet de base x.
   De plus $[\overline{\gamma}]$ est l'inverse de $[\gamma]$ dans $\pi_1(X, x)$ c'est-à-dire :

   $$\gamma\overline{\gamma} \simeq \overline{\gamma}\gamma \simeq c_x.$$

Démonstration :

1. Définissons une homotopie entre les chemins $(\gamma\gamma')\gamma''$ et $\gamma(\gamma'\gamma'')$ par :

$$F(t,s) = \begin{cases} \gamma(\frac{4s}{t+1}) & si\ 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4}, \\ \gamma'(4s-t-1) & si\ \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4}, \\ \gamma''(\frac{4s-t-2}{2-t}) & si\ \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

   Donc $(\gamma\gamma')\gamma''$ est homotope à $\gamma(\gamma'\gamma'')$.

2. Définissons une homotopie entre γc_x et γ par :

$$F(t,s) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ \gamma(\frac{2s-t}{2-t}) & si\ \frac{t}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

   Donc γc_x et $c_x\gamma$ sont homotopes à γ.

3. L'homotopie entre c_x et le composé $\gamma\overline{\gamma}$ est donnée par :

$$F(t,s) = \begin{cases} \gamma(2s) & si\ 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ \gamma(t) & si\ \frac{t}{2} \leq s \leq 1-(\frac{t}{2}), \\ \gamma(2-2s) & si\ 1-(\frac{t}{2}) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

   Cette application vérifie :
   ✓ $F(s,0) = \gamma(0) = x = c_x(s)$.

$$\checkmark F(s,1) = \begin{cases} \gamma(2s) & si\ 0 \leq s \leq \frac{t}{2}, \\ \gamma(2-2s) = \overline{\gamma}(2s-1) & si\ 1-(\frac{t}{2}) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

   ✓ $F(0,t) = \gamma(0) = x$, et $F(1,t) = \gamma(0) = x$.

Définition 1.1.6. *Soit X un espace et $A \subset X$. Une rétraction par déformation de X sur A est une application $r : X \times I \to X$, telle que :*

- *i) $r(x,0) = x$ pour tout $x \in X$*

- *ii) $r(x,1) \in A$ pour tout $x \in X$*

– *iii) $r(a,t) = a$ pour tout $t \in I$*

Définition 1.1.7. *On dit qu'une application $r : X \to Y$ est une rétraction par déformation forte de X sur Y si r est une rétraction et $i \circ r$ homotope à Id_X relativement à Y.*

Définition 1.1.8. *On dit que Y est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation de X sur Y.*

Théorème 1.1.2. *Si R est un retracte d'un espace topologique X alors,*

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, r(x_0)).$$

Démonstration :
La démonstration est aisée. Considérons un lacet pointé sur x_0, comme R est un rétract de X on peut choisir x_0 sur le rétracte ce qui évitera de le projeter ($r(x_0) = x_0$).
Ce lacet (l'application de retraction étant continue) se rétracte sur un lacet de R (l'opération de rétraction réalise une homotopie) et ces deux lacets sont homotopes donc dans la même classe d'homotopie.
En clair on peut toujours trouver un bon représentant d'une classe d'homotopie dans le rectracte.

Exemple 1.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sphére S_n est un rétracte par déformation forte de*
$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. *En effet, si :*

$$i : S_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

est l'inclusion, et si

$$r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S_n$$

est définie par

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

alors

$$r \circ i = Id_{S_n}$$

et $i \circ r$ est homotope à l'application identique de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ par l'homotopie

$$h(x,t) = tx + (1-t)\frac{x}{\|x\|},$$

qui fixe S_n. En particulier, l'inclusion i de S_{n-1} et $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ont le même type d'homotopie.

Définition 1.1.9. *(espace contractile.)*
Un espace X est dit contractile s'il a le type d'homotopie d'un point.

1.2 Groupe fondamental

Le groupe fondamental d'un espace topologique (X,x) est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de X basés en x. C'est un groupe dont la loi de composition interne est induite par la concaténation des arcs.

Définition 1.2.1. *Soit (X,x_0) un espace topologique pointé, on appelle groupe fondamental de (X,x_0) l'ensemble des classes d'homotopies de lacets basés en x_0 et on le note :*

$$\pi_1(X,x_0) = \{[f]/f \in \Omega(X,x_0)\}.$$

On définit une loi de composition sur le groupe fondamental par :

$$\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$$

$$([f],[g]) \mapsto [f][g] := [f.g].$$

Lemme 1.2.1. *La loi de composition définie sur $\pi_1(X,x_0)$ est bien définie.*

Démonstration :
Soient $[f_1] = [f_2]$ et $[g_1] = [g_2] \in \pi_1(X,x_0)$.
On a bien

$$f_1 \approx f_2$$

et

$$g_1 \approx g_2.$$

Donc
$$f_1.g_1 \approx f_2.g_2,$$
en d'autres termes, $[f_1][g_1] = [f_2][g_2]$.

Proposition 1.2.1. *Soit x_0, x_1 deux points d'un espace topologique X. S'il existe un chemin γ reliant ces deux points, alors les groupes fondamentaux associés sont isomorphes, i.e.*
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$$

Démonstration :
Considérons l'application
$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$$
$$[f] \mapsto [\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma]$$
Montrons alors que φ est bien un isomorphisme.

– **a)** φ est un homomorphisme de groupe.
En effet,
$$\begin{aligned} \varphi([f][g]) &= [\overline{\gamma} \cdot f \cdot g \cdot \gamma] \\ &= [\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma][\overline{\gamma} \cdot g \cdot \gamma] \\ &= \varphi([f])\varphi([g]) \end{aligned}$$

– **b)** φ est surjective.
Soit $[g] \in \pi_1(X, x_1)$, alors,
$$[g] = \varphi([\gamma \cdot g \cdot \overline{\gamma}])$$

– **c)** φ est injective.
Soit $[f] \in \ker(\varphi), i.e.,$
$$[\overline{\gamma} \cdot f \cdot \gamma] = [C_{x_1}],$$
alors,
$$\begin{aligned} [f] &= [\gamma \cdot C_x \cdot \overline{\gamma}] \\ &= [\gamma \cdot \overline{\gamma}] \\ &= [C_{x_0}] \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1. *Si X est connexe par arcs, le choix du point de base n'influence pas le groupe fondamental à isomorphisme prés.*

Définition 1.2.2. *En vertu du corollaire précédent, on note $\pi_1(X)$ le groupe fondamental d'un espace X connexe par arcs, sans se soucier du point de base.*

Remarque 1.2.1. *L'isomorphisme entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ dépend du choix du chemin γ reliant x_0 et x_1.*
La proposition suivante éclaircit un peu ce point.

Proposition 1.2.2. *Soient x_0 et $x_1 \in X$ ainsi que $\gamma_1, \gamma_2 \in C(I, X)$ deux chemins reliants x_0 et x_1, et notons β_{γ_1}, β_{γ_2} l'isomorphisme φ engendré par γ_1 et γ_2, alors β_{γ_1} et β_{γ_2} sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. i.e. il existe*

$$[h] \in \pi_1(X, x_0)$$

tel que

$$\beta_{\gamma_1}([f]) = [\overline{h}]\beta_{\gamma_2}([f])[h].$$

Démonstration :
En effet, nous avons :

$$\beta_{\gamma_1}([f]) = [\overline{\gamma_1} \cdot f \cdot \gamma_1],$$

donc

$$\begin{aligned}
\beta_{\gamma_1}([f]) &= [\overline{\gamma_1} \cdot \gamma_2 \cdot \overline{\gamma_2} \cdot f \cdot \gamma_2 \cdot \overline{\gamma_2} \cdot \gamma_1] \\
&= [\overline{\gamma_1} \cdot \gamma_2][\overline{\gamma_2} \cdot f \cdot \gamma_2][\overline{\gamma_2} \cdot \gamma_1].
\end{aligned}$$

Comme

$$[\overline{\gamma_2} \cdot f \cdot \gamma_2] = \beta_{\gamma_2}([f]),$$

alors

$$\beta_{\gamma_1}([f]) = \overline{[\overline{\gamma_2} \cdot \gamma_1]}\beta_{\gamma_2}([f])[\overline{\gamma_2} \cdot \gamma_1]$$

Théorème 1.2.1. *Le groupe fondamental induit un homéomorphisme π_1 de la catégorie des espaces topologiques pointés vers la catégorie des groupes.*
Plus précisement, π_1 agit sur les morphismes de la maniére suivante :

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

$$\Downarrow \pi_1$$

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

$$[c] \mapsto [f \circ c]$$

Démonstration

Commençons par montrer que $\pi_1(f)$ est bien définie.
Soit $[c_1], [c_2] \in \pi_1(X, x_0)$,
on a donc $c_1 \approx_H c_2$.
Ainsi, $f \circ H$ est une homotopie de chemins de $f \circ c_1$ vers $f \circ c_2$, i.e.

$$\pi_1(f)([c_1]) = [f \circ c_1] = [f \circ c_2] = \pi_1(f)([c_2])$$

Vérifions encore :

- I) $\pi_1(Id_X) = Id_{\pi_1(X,x_0)}$.
  En effet, soit $[c] \in \pi_1(X, x_0)$, on a alors :

$$\pi_1(Id_X)([c]) = [Id_X \circ c] = [c] = Id_{\pi_1(X,x_0)}([c]).$$

- II) $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$.
  En effet, soit

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0) \ et \ [c] \in \pi_1(X, x_0),$$

  on a alors

$$(\pi_1(f) \circ \pi_1(g))([c]) = \pi_1(f)([g \circ c]) = [f \circ g \circ c] = \pi_1(f \circ g)([c]).$$

Corollaire 1.2.2. *(Invariance topologique du groupe fondamental). Deux espaces homéomorphes ont leurs groupes fondamentaux isomorphes pour des points de bases associés, i.e. si*

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$$

est un homéomorphisme pointé, alors

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

Corollaire 1.2.3. *Si* $\pi_1(X, x_0) \ncong \pi_1(Y, y_0)$, *alors,* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *ne sont pas homémorphes.*

Afin de démontrer que le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie, nous démontrons le lemme suivant.

Lemme 1.2.2. *Soit* (X, x_0) *un espace topologique pointé,* Y *un espace topologique,* $\varphi : X \times I \to Y$ *une homotopie de* φ_0 *vers* φ_1 *et* $\gamma : I \to X$ *le chemin défini par* $\gamma(t) = \varphi_t(x_0)$ *reliant* $\varphi_0(x_0)$ *à* $\varphi_1(x_0)$*, alors, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, \varphi_0(x_0)) \arrow[d, "\beta_\gamma"] \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, bend left, "\pi_1(\varphi_0)"] \arrow[dr, bend right, "\pi_1(\varphi_1)"'] & \\
 & \pi_1(Y, \varphi_1(x, 0))
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

Soit γ_s la restriction de γ à l'intervalle $[0, s]$ reparamétrisée sur I, i.e.

$$\gamma_s(t) = \gamma(st).$$

Soit $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, alors l'application

$$H_s(t) = (\overline{\gamma_s}.\varphi_{(1-s)} \circ f.\gamma_s)(t)$$

est une homotopie de

$$\pi_1(\varphi_1)([f]) = [\varphi_1 \circ f] = [\overline{\gamma_0}.\varphi_1 \circ f.\gamma_0],$$

vers

$$\beta_\gamma(\pi_1(\varphi_0)([f]) = [\overline{\gamma}.\varphi_0 \circ f.\gamma] = [\overline{\gamma_1}.\varphi_0 \circ f.\gamma_1].$$

Théorème 1.2.2. *Soit* X *et* Y *deux espaces topologique de même type d'homotopie et* $\varphi \in C(X, Y)$ *une équivalence d'homotopie, alors, pour tout choix de point de base* x_0 *dans* X,

$$\pi_1(\varphi) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

est un isomorphisme.

Démonstration :
Soit $\psi \in C(Y,X)$ un inverse d'homotopie pour φ, c'est à dire que $\varphi\circ\psi \simeq Id_Y$ et $\psi \circ \varphi \simeq Id_X$. Considérons les applications

$$\pi_1(X,x_0) \xrightarrow{\pi_1(\varphi)} \pi_1(Y,\varphi(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(\psi)} \pi_1(\psi\circ\varphi(x_0)) \xrightarrow{\pi_1(\varphi)} \pi_1(Y,\varphi\circ\psi\circ\varphi(x_0))$$

Comme $\psi \circ \varphi \simeq Id_X$, le lemme précédent implique qu'il existe $\gamma \in C(I,X)$, un chemin, tel que $\pi_1(\psi)\circ\pi_1(\varphi) = \beta_\gamma$ qui est un isomorphisme.
Ainsi, $\pi_1(\varphi)$ est injective. Comme $\psi \circ \varphi \simeq Id_Y$, le lemme précédent implique également qu'il existe un chemin $\xi \in C(I,Y)$ tel que $\pi_1(\varphi)\circ\pi_1(\psi) = \beta_\xi$ qui est aussi un isomorphisme et donc, que $\pi_1(\varphi)$ est surjective.

Corollaire 1.2.4. *(Invariance homotopique du groupe fondamental).*
Pour les espaces topologiques connexes par arcs, le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie.

Corollaire 1.2.5. *Si X est un rétracte par déformation d'un espace Y, alors, X et Y ont le même groupe fondamental, i.e.*

$$\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(Y,x_0) \qquad\qquad \forall x_0 \in X$$

Démonstration
Par le Théorème, 1.1.2 X et Y ont le même type d'homotopie, et donc par le théorème 1.2.2, le même groupe fondamental, pour tout point x_0 de X

Corollaire 1.2.6. *Soit X, Y des espaces topologiques, alors,*

$$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)$$

1.3 Calcul du groupe fondamental

1.3.1 Groupe fondamental d'un espace numérique

On rappelle qu'un espace numérique est un espace topologique X tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que X soit homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (un tel espace est alors

nécessairement connexe par arcs).
Un tel espace X a donc un groupe fondamental $\pi_1(X)$ isomorphe à $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ qui est homéomorphe à $\pi_1((\mathbb{R}))^n$.
On s'est donc ramené au calcul du groupe fondamental de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.1.1. *L'espace topologique* $\mathbb{R}$ *est simplement connexe.*

Démonstration
Soit $c : I \to \mathbb{R}$ un lacet (de base 0) dans $\mathbb{R}$ et soit $H : I \times I \to \mathbb{R}$ l'application continue définie par $H(t, s) = sc(t)$.
Puisque $c(0) = c(1)0$, on a $H(0, s) = H(1, s) = 0$ pour tout $s \in I$. Par ailleurs $H(t, 0) = 0$ et $H(t, 1) = c(t)$ pour tout $t \in I$.
Par conséquent le chemin c est homotope au chemin constant c_0. $\mathbb{R}$ donc est simplement connexe.
Par conséquent tout espace numérique est simplement connexe.

1.3.2 Le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$

On rappelle que le cercle $\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs.$\mathbb{S}^1$ sera ici considéré comme l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Dans cette partie nous noterons $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la projection $t \mapsto e^{2i\pi t}$, et pour $n \in \mathbb{Z}$, γ_n désignera le lacet de base 1 dans $\mathbb{S}^1$, défini par $\gamma_n(t) = p(nt)$ pour tout $t \in I$.

Théorème 1.3.2.1. *Le groupe fondamental* $\pi_1(\mathbb{S}^1, *)$ *du cercle* $\mathbb{S}^1$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$*.*
Plus précisément, l'application $n \mapsto [\gamma_n]$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{Z}$ *sur* $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$*.*

(Puisque $\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs, pour tout $z \in \mathbb{S}^1$, $\pi_1(\mathbb{S}^1, z) = \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Il nous suffit donc de montrer que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$.)
Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.3.2.1. *Si* $c : I \to \mathbb{S}^1$ *est un lacet de base* 1 *dans* $\mathbb{S}^1$*, il existe un unique chemin* $\tilde{c}$ *dans* $\mathbb{R}$ *ayant* 0 *pour origine et tel que* $p \circ \tilde{c} = c$ *est alors appelé un* ***relèvement*** *de* c*.*

Démonstration :
La preuve sera vue dans la démonstration du Théorème 2.2.1

Définition 1.3.2.1. *Si $\tilde{c}$ est le chemin correspondant au lacet c dans le lemme précédent, le réel $\tilde{c}(1)$ est alors un entier appelé* **le degré du lacet** *c, et on le notera $deg(c)$. En particulier, on vérifie que le degré du lacet γ_n est n.*

Lemme 1.3.2.2. *Si H est une application continue de $I \times I$ dans $\mathbb{S}^1$ telle que $H(0,0) = 1$, alors il existe une unique application $\tilde{H}$ de $I \times I$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\tilde{H}(0,0) = 0$ et $p \circ \tilde{H} = H$.*

La démonstration de ce lemme est identique à celle du Lemme 1.3.2.1.

Définition 1.3.2.2. *L'application $\tilde{H}$ est appelée un relèvement de H.*

Proposition 1.3.2.1. *Deux lacets c et γ de base 1 dans $\mathbb{S}^1$ sont homotopes si et seulement s'ils ont le même degré.*

Démonstration :
Si c et γ ont même degré, alors leurs relèvements $\tilde{c}$ et $\tilde{\gamma}$ ont même extrémité. L'application continue $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{H}(t,s) = (1-s)\tilde{c}(t) + s\tilde{\gamma}(t)$ est alors une homotopie de $\tilde{c}$ à $\tilde{\gamma}$. Par conséquent on vérifie que $H = p \circ \tilde{H}$ est une homotopie de c à γ.
Réciproquement, si H est une homotopie de c à γ, et si $\tilde{H}$ est le relèvement de H, alors les applications $\tilde{c} : t \to \tilde{H}(t,0)$ et $\tilde{\gamma} : t \to \tilde{H}(t,1)$ sont les relèvements de c et γ, et $\tilde{c}(1) = \tilde{H}(1,0) = \tilde{H}(1,1) = \tilde{\gamma}(1)$.
Donc c et γ ont même degré.

Proposition 1.3.2.2. *Soient c et γ deux lacets de base 1 dans $\mathbb{S}^1$. On a alors $deg(c\gamma) = deg(c) + deg(\gamma)$.*

Démonstration :
Si $\tilde{c}$ et $\tilde{\gamma}$ sont des relèvements de c et γ, alors l'application $a : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(t) = \begin{cases} \tilde{c}(2t) & si \;\; 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(2t-1) + \tilde{c}(1) & si \;\; \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

est un relèvement de $c\gamma$.
Ces deux dernières propositions nous permettent de conclure que :
$\phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ définie par $\phi([c]) = deg(c)$ est un morphisme ayant pour inverse l'application $n \mapsto [\gamma_n]$.
Cette dernière application est donc un isomorphisme de groupe et donc :

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

Chapitre 2

Revêtements

La théorie des revêtement, présentée dans ce chapitre, occupe une position privilégiée en Mathématiques, comportant des applications en Géométrie Différentielle, Analyse Complexe, Théorie des Nombres, etc.
En topologie algébrique, c'est l'archétype d'une situation qui s'algébrise trés bien. Les propriétés topologiques des revêtement étant déterminées par les groupes fondamentaux des espaces intervenant. Ce chapitre contient les propriétés classiques de relèvements d'applications et d'homotopies.

2.1 Définitions

La notion de connexe joue un rôle important dans ce chapitre. Mentionnons briévement que si x est un point d'un espace X, la composante connexe de x est la plus grande partie connexe de X contenant x.
Un espace localement connexe est un espace dans lequel tout ouvert contenant un point x contient aussi un voisinage connexe de x, i.e. c'est un espace admettant une base de voisinages connexes.
En remplaçant "connexe" par "connexe par arcs", nous obtenons la notion de composante connexe par arcs et d'espace localement connexe par arcs. Dans un espace localement connexe par arcs, les camposantes connexes et les camposantes connexes par arcs coïncident, elles sont à la foi ouvertes et fermées dans X.

Définition 2.1.1. *Une application continue, $p : E \to X$, est un revêtement*

de X si les espaces X et E sont connexes par arcs et localement connexes par arcs et si tout point $x \in X$ admet un voisinage connexe, U, tel que $p^{-1}(U)$ soit une union disjointe d'ouverts U_i, tel que la restriction $p/_{U_i} : U_i \to U$ soit un homéomorphisme.
L'application p s'appelle la projection. L'espace $p^{-1}(x)$ est appelé la fibre au-dessus de $x \in X$, l'espace E est l'espace total et l'espace X la base du revêtement. L'ouvert U est appelé ouvert élémentaire ou ouvert trivialisant et les ouverts U_i sont appelés les feuillets de $p^{-1}(U)$ ou feuillets au-dessus de U.

Remarquons que les feuillets sont les composantes connexes de $p^{-1}(U)$ et que tout ouvert connexe inclus dans un ouvert trivialisant est aussi trivialisant.

Exemple 2.1.1. *Si F est un espace discret, c'est-à-dire un espace muni de la topologie discrète, la projection $X \times F \to X$ est un revêtement, appelé revêtement trivial.*

Définition 2.1.2. *Soit $p_1 : E_1 \to X$ et $p_2 : E_2 \to X$ deux revêtements de X. Un homomorphisme de revêtements, de p_1 vers p_2, est une application continue $f : E_1 \to E_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$.*
Un isomorphisme entre deux revêtements est la donnée de deux homomorphismes f, de p_1 vers p_2, et g, de p_2 vers p_1, tels que $f \circ g = Id_{E_2}$ et $g \circ f = Id_{E_1}$. Si $p_1 = p_2 = p$, un isomorphisme est appelé automorphisme de p.
Avec la loi de composition des applications, l'ensemble des automorphismes du revêtement p est un groupe noté $A(p)$.

Proposition 2.1.1. *Soit $p : E \to X$ un revêtement. L'application p est surjective, ouverte et les feuilles des images réciprioques d'ouverts trivialisants forment une base fondamentale de voisinages dans E.*

Démonstration :
Si $x \in X$ et si U est un ouvert trivialisant contenant x, de $p(p^{-1}(U)) = U$ nous déduisons que x est dans l'image de p et que p est surjective.

Soit $\tilde{x} \in E$ et V un voisinage ouvert connexe de $\tilde{x}$. Choisissons un voisinage trivialisant U de $x = p(\tilde{x})$ et notons U_{i_0} le feuillet de $p^{-1}(U)$ contenant $\tilde{x}$. Comme $U_{i_0} \bigcap V$ est un ouvert de U_{i_0}, l'ensemble $p(U_{i_0} \bigcap V)$ est un ouvert de U, inclus dans $p(V)$. Ainsi, l'application p est ouverte. De plus, le feuillet, au dessus de l'ouvert trivialisant $p(V \bigcap U_{i_0})$, contenant $\tilde{x}$, est un voisinage de $\tilde{x}$ inclus dans V ; les feuillets forment donc une base de voisinages dans l'espace total.

Proposition 2.1.2. *Soit $p : E \to X$ un revêtement et soit Y un espace connexe.*
Si $f_0, f_1 : Y \to E$ sont deux applications continues telles que

$$p \circ f_0 = p \circ f_1,$$

alors l'ensemble

$$F = \{y \in Y / f_0(y) = f_1(y)\}$$

est vide ou égal à Y tout entier.

Démonstration :
Nous allons démontrer que F est à la fois ouvert et fermé dans l'espace Y ; ce qui implique le résultat.
✓ **F est un ouvert**
Soit $y \in F$, nous choisissons un voisinage trivialisant, U de $x = p(f_0(y))$.
Si U_i est le feuillet de $p^{-1}(U)$ contenant $f_0(y) = f_1(y)$, alors l'intersection $f_0^{-1}(U_i) \bigcap f_1^{-1}(U_i)$ est un ouvert contenant y sur lequel $f_0 = f_1$ car $p : U_i \to U$ est un homéomorphisme.
Donc $f_0^{-1}(U_i) \bigcap f_1^{-1}(U_i)$ est un ouvert contenant y et inclus dans F.
✓ **F est un fermé**
Montrons que le complémentaire $Y \backslash F$ est ouvert. Soit$y \notin F$, nous choisissons un voisinage trivialisant , U, de $x = p(f_0(y))$.
Les points $f_0(y)$ et $f_1(y)$ appartiennent à des feuillets différents, U_i et U_j,de $p^{-1}(U)$.Le même argument que ci-dessus implique que l'ouvert $f_0^{-1}(U_i) \bigcap f_1^{-1}(U_i)$ contient y et ne rencontre pas F.

2.2 Relèvements d'applications

Dans cette section, nous montrons que les propriétés de relèvement de chemins et d'homptopies, établies pour l'exponentielle complexe, sont valables pour tout revêtement.
Nous donnons également une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du relèvement d'une application quelconque à valeurs dans la base d'un revêtement.

Théorème 2.2.1. *Soit $p : E \to X$ un revêtement, $\tilde{x}_0$ un point de E et $x_0 = p(\tilde{x}_0)$.*
Pour tout chemin $\alpha : [0,1] \to X$ tel que $\alpha(0) = x_0$, il existe un, et un seul, chemin $\tilde{\alpha} : [0,1] \to E$ tel que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ et $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. Le chemin $\tilde{\alpha}$ est appelé relèvement de α.

Démonstration :
Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts trivialisants. Nous choisissons un entier naturel n tel que $\frac{1}{n}$ soit inférieur au nombre de Lebesgue du recouvrement $\alpha^{-1}(U_i)_{i \in I}$ de $[0,1]$. Pour tout $j = 0, \ldots, n-1$, il existe donc $i(j) \in I$ tel que $\alpha\left(\left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]\right) \subset U_{i(j)}$.
Soit C_0 le feuillet de $p^{-1}(U_{i(0)})$ contenant $\tilde{x_0}$. La restriction $p : C_0 \to U_{i(0)}$ étant un homéomorphisme, nous pouvons définir $\tilde{\alpha} : [0, \frac{1}{n}] \to E$ par
$\tilde{\alpha} = p^{-1} \circ \alpha$.
Notons C_1 le feuillet de $p^{-1}(U_{i(1)})$ contenant $\tilde{\alpha}(\frac{1}{n})$. La restriction
$p : C_1 \to U_{i(1)}$ est un homéomorphisme. La construction précédente peut donc être répétée en définissant $\tilde{\alpha} : [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \to E$ par $\tilde{\alpha} = p^{-1} \circ \alpha$.
L'application $\tilde{\alpha} : [0, \frac{2}{n}] \to E$, obtenue en réunissant les deux étapes précédentes, est continue.
L'unicité découle de la Proposition 2.1.2.

Proposition 2.2.1. *Soit $p : E \to X$ un revêtement et Y un espace localement connexe par arcs. Pour tout couple d'applications continues, $f_0 : Y \to E$ et $f : Y \times [0,1] \to X$ telles que $p(f_0(y)) = f(y, 0)$, il existe une application continue*

$$\tilde{f} : Y \times [0,1] \to E$$

telle que

$$p \circ \tilde{f} = f \text{ et } \tilde{f}(y,0) = f_0(y),$$

pour tout $y \in Y$.

Démonstration :
L'énoncé peut se résumer par le diagramme commutatif suivant, dans lequel $j_0(y) = (y,0)$ et l'application $\tilde{f}$ est à construire.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
Y \times [0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & X.
\end{tikzcd}$$

Si $y \in Y$, nous notons $\tilde{f}_y : [0,1] \to E$ le relèvement du chemin $f(y,-)$ tel que $\tilde{f}_y(0) = f_0(y)$. L'application

$$\tilde{f} : Y \times [0,1] \to E,$$

$$(y,t) \mapsto f_y(t),$$

fait commuter le diagramme ci-dessus ; il reste à établir sa continuité. Fixons $y \in Y$ et montrons la contnuité de $\tilde{f}$ en (y,t), avec $t \in [0,1]$.

Pour tout $t \in [0,1]$, nous choisissons un produit d'ouverts connexes par arcs, $V(y,t) \times W(y,t) \subset Y \times [0,1]$, contenant le point $(y,t) \in Y \times [0,1]$ et dont l'image par f est incluse dans un ouvert trivialisant $U(t)$.
Grâce au nombre de Lebesgue d'un recouvrement, il existe un entier n tel que tout intervalle de longueur n soit inclus dans l'un des voisinages $W(y,t)$. En particulier, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, il existe $t_i \in [0,1]$ tel que

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \subset W(y,t_i).$$

Soit $V(y)$ un voisinage connexe par arcs de y, inclus dans $\bigcap_{i=1}^{n} V(y,t_i)$. Par construction, on a, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$f\left(V(y) \times \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]\right) \subset f(V(y,t_i) \times W(y,t_i)) \subset U(t_i).$$

Construisons une application continue

$$\hat{f} : V(y) \times [0,1] \to E$$

telle que

$$p(\hat{f}(z,t)) = f(z,t) \ et \ \hat{f}(z,0) = f_0(z).$$

Cette construction suit un schéma désormais classique : supposons avoir défini

$$\hat{f}_{k-1} : V(y) \times \left[0, \frac{k-1}{n}\right] \to E$$

vérifiant les conditions imposées. Dans le diagramme commutatif suivant, $\hat{f}_{k-1}$ dénote aussi sa restriction à $V(y) \times \{\frac{k-1}{n}\}$ et l'application g_k est à construire :

$$\begin{tikzcd}
V(y) \times \left\{\frac{k-1}{n}\right\} \arrow[r, "\hat{f}_{k-1}"] \arrow[d, hook] & C_k \subset p^{-1}U(t_k) \arrow[d, "p"] \\
V(y) \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "g_k"] & U(t_k).
\end{tikzcd}$$

Par connexité de $V(y)$, l'application $\hat{f}_{k-1}$ envoie $V(y) \times \{\frac{k-1}{n}\}$ dans un feuillet de $p^{-1}(U_k(y))$. La restriction de p à C_k étant un homéomorphisme entre C_k et $U(t_k)$. Nous définissons g_k par $g_k = p^{-1} \circ f$, comme celà a déjà été fait à plusieurs reprises. L'application $\hat{f}_k$ s'obtient alors à partir de $\hat{f}_{k-1}$ et g_k; et elle est continue.
Par unicité du relèvement, pour tout $(z,t) \in V(y) \times [0,1]$, nous avons :

$$\hat{f}(z,t) = \tilde{f}(z,t).$$

En conséquence, $\tilde{f}$ est continue en (y,t).

Corollaire 2.2.1. *Soit $p : E \to X$ un revêtement. Si g_0, $g_1 : [0,1] \to E$ sont deux chemins de même origine, $g_0(0) = g_1(0)$, tels que $p \circ g_0 \simeq p \circ g_1$ rel $\{0,1\}$, alors g_0 est homotope à g_1. relativement à $\{0,1\}$. En particulier, l'application induite*

$$\pi_1(p) : \pi_1(E, \tilde{x}) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

est injective, pour tout $\tilde{x} \in E$.

Démonstration : :
L'homotopie F entre $p \circ g_0$ et $p \circ g_1$ vérifie :

$$F(s,0) = p(g_0(s)),$$

$$F(s,1) = p(g_1(s)),$$

et

$$F(0,t) = p(g_0(0)) = p(g_1(0)) = x_0,$$
$$F(1,t) = p(g_0(1)) = p(g_1(1)) = x_1.$$

Nous construisons une application $G : [0,1]^2 \to E$ en appliquant la Proposition 2.2.1, ce qui donne le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, hook, "j_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\
{[0,1]^2} \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "G"] & X
\end{tikzcd}$$

Détaillons les propriétés de G.
✓ Par construction, l'application $s \mapsto G(s,0)$ coïncide avec g_0.
✓ L'application $t \mapsto p(G(0,t)) = F(0,t)$ étant constante sur x_0 et la fibre $p^{-1}(x_0)$ étant discrète, l'application $t \to G(0,t)$ est constatnte sur
$G(0,0) = g_0(0)$.
✓ L'applications$s \mapsto G(s,1)$ vérifie $p(G(s,1)) = F(s,1) = p(g_1(s))$ et
$G(0,1) = x_0$. Par unicité du relèvement du chemin $p \circ G(-,1) = p \circ g_1$, le chemin $s \mapsto G(s,1)$ est égal au chemin $s \mapsto g_1(s)$.
✓ L'application $t \mapsto G(1,t)$ est constante sur $G(1,0) = g_0(1)$ et donc
$g_0(1) = g_1(1)$.
L'application G est donc une homotopie entre g_0 et g_1, relativement à $\{0,1\}$.

Corollaire 2.2.2. *Si $p : E \to X$ est un revêtement, $p^{-1}(x)$, $x \in X$, muni de la topologie induite, sont des espaces discrets, de même cardinal pour tout $x \in X$. Par définition, un revêtement à k feuillets est un revêtement dont les fibres ont k éléments.*

Démonstration :
Soit U un ouvert trivialisant contenant x, de feuillets $(U_i)_{i\in I}$. Les singletons $p^{-1}(x)\cap U_i$ sont des ouverts de $p^{-1}(x)$ pour la topologie induite ; l'espace topologique $p^{-1}(x)$ est donc un espace discret.
Considérons deux points x_0, x_1 de X et un chemin $\alpha : [0,1] \to X$ tel que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$. A tout point $\tilde{x}_0$ de $p^{-1}(x_0)$, le Théorème 2.2.1 associe un unique chemin $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} : [0,1] \to \tilde{X}$ telle que $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0$ et $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) \in p^{-1}(x_1)$. Définissons $\Phi(\alpha) : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ par $\Phi(\alpha)(\tilde{x}_0) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1)$. L'application $\Phi(\bar{\alpha})$, ou $\bar{\alpha}$ est le chemin d'origine x_1, de but, x_0, défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, est un inverse pour $\Phi(\alpha)$, car $\alpha.\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}.\alpha$ sont homotopes à l'application constante.
Nous avons ainsi construit une bijection entre les ensembles $p^{-1}(x_0)$ et $p^{-1}(x_1)$.

Corollaire 2.2.3. *Tout homomorphisme de revêtement est un revêtement.*

Démonstration :
Soit f un homomorphisme de revêtement, de source $p_1 : E_1 \to X$ et de but $p_2 : E_2 \to X$.
Montrons d'abord la surjectivité de l'application f.
Soit $\tilde{y} \in E_2$. Nous choisissons un point $\tilde{x}_1 \in E_1$ et posons $\tilde{x}_2 = f(\tilde{x}_1)$, $x_0 = p_2(\tilde{x}_2) = p_1(\tilde{x}_1)$. Si α est un chemin de E_2, de source $\tilde{x}_2$ et de but $\tilde{y}$, il existe un unique chemin h de E_1 tel que $h(0) = \tilde{x}_1$ et $p_1 \circ h = p_2 \circ \alpha$. Notons $\tilde{x} = h(1)$ et remarquons que $f \circ h$ et α vérifient $(f \circ h)(0) = \alpha(0) = \tilde{x}_2$ et $p_2 \circ (f \circ h) = p_1 \circ h = p_2 \circ \alpha$.
Par unicité du relèvement, ces deux chemins coïncident, d'où :

$$f(\tilde{x}) = (f \circ h)(1) = \alpha(1) = \tilde{y}.$$

Etablissons l'exitence d'ouverts trivialisants.
Soit $\tilde{y} \in E_2$ et U un ouvert, contenant $p_2(\tilde{y})$, trivialisant pour p_1 et pour p_2. Décomposons $p_2^{-1}(U)$ en composantes connexes, $p_2^{-1}(U) = \cup_i W_i$, avec $\tilde{y} \in W_1$, et décomposons chaque $f^{-1}(W_i)$ en composantes connexes,

$$f^{-1}((W_i) = \cup_j C_{i,j}.$$

Comme $p_2 \circ f = p_1$, on a $p_1^{-1}(U) = \cup_i \cup_j C_{i,j}$.
Soit maintenant C une composante connexe de $p_1^{-1}(U)$. L'image $f(C)$ étant

connexe, C est contenu ans $f^{-1}(W_i)$ pour un certain i et donc C est l'un des $C_{i,j}$. Par définition même du revêtement, la restriction de p_1 à chaque $C_{i,j}$ est un homéomorphisme sur U.
Le diagrame commutatif ci-dessus montre que la restriction de f à $C_{i,j}$ est un homéomorphisme sur W_i.

$$\begin{tikzcd} C_{i,j} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\cong", "p_1"'] & & W_i \arrow[dl, "\cong"', "p_2"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Nous nous intéressons maintenant à l'existence de relèvement d'applications de source un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs quelconques.

Théorème 2.2.2. *Soit $p : E \to X$ un revêtement et Y un espace connexe par arcs et localement connexe par arcs.*
Fixons deux point $y_0 \in Y$, $x_0 \in E$ et notons $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Si $f : Y \to X$ est une application continue telle que $f(y_0) = x_0$, alors il existe une, et une seule, application continue $\tilde{f} : Y \to E$ telle que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ et $p \circ \tilde{f} = f$ si, et seulement si, on a $f * \pi_1(Y, y_0) \subseteq p * \pi_1(E, \tilde{x}_0)$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Ce théorème ramène l'existence d'une application continue à la vérification d'une inclusion de groupes.
Signalons l'existence d'un exemple, dû a **Zeeman** montrant la nécessité de l'hypothèse de connexité locale sur X.
Démonstration :
1) Supposons que l'application $\tilde{f}$ existe. La commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(E, \tilde{x}_0) \arrow[dd, "p"] \\
\pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & \pi_1(X, x_0),
\end{tikzcd}$$

implique $f * \pi_1(Y, y_0) \subset p * \pi_1(E, \tilde{x}_0)$.
2) Réciproquement, supposons avoir cette inclusion entre les images des groupes fondamentaux. Il nous faut construire une application continue$\tilde{f}$: $Y \to E$. Pour tout point y de Y, nous choisissons un chemin $\gamma : [0,1] \to Y$, tel que $\gamma(0) = y_0$ et $\gamma(1) = y$.
Le chemin $f \circ \gamma$ se relève en un chemin $g : [0,1] \to E$ tel que $g(0) = \tilde{x}_0$ et nous définissons $\tilde{f}(y) = g(1)$.
Montrons que l'application $\tilde{f}$ ne dépend pas du choix du chemin γ. Pour cela, soit β un autre chemin de Y, de source y_0 et de but y. (Si β est dans la même classe d'homotopie que γ, nous savons déjà que leurs relevés ont même extrimités,(Corollaire 2.2.1.))
Nous avons $[\gamma][\beta]^{-1} \in \pi_1(Y, y_0)$. Comme $f * ([\gamma][\beta]^{-1}) \in p * \pi_1(E, \tilde{x}_0)$, les chemins $(f \circ \gamma).(f \bar{\circ} \beta).(f \circ \beta)$ et $f \circ \beta$ ont des relevés de même extrémités.
Les chemins $(f \circ \gamma).(f \bar{\circ} \beta).(f \circ \beta)$ et $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma$ étant homotopes, les chemins $f \circ \gamma$ et $f \circ \beta$ ont comme relevés des chemins de même extrémités.
Montrons maintenant que $\tilde{f}$ est continue au point $y \in Y$.

Nous utilisons la Proposition 2.1.1 :
Soit U un ouvert trivialisant de X contenant $f(y)$, U' la composante connexe de $f^{-1}(U)$ contenant $\tilde{f}(y)$ et V un ouvert connexe par arcs tel que $f(V) \subset U$.
Si $y' \in V$, nous choisissons un chemin α de V, de source y et de but y'. la restriction $p :' \rightarrow U$ étant un homéomorphisme, le chemin α se relève en $p^{-1} \circ f \circ \alpha$. Nous en déduisons $\tilde{f}(y') \in U'$ et la continuité de $\tilde{f}$.
L'unicité du relèvement provient de la Proposition 2.1.2.

Chapitre 3

Quelques théorèmes et applications

3.1 Théorème de Brouwer

Notons le disque unité fermé du plan E^2, et soit $\mathbb{S}^1$ son bord.

Théorème 3.1.1. *Toute application continue du disque unité*

$$E^2 = \{z \in \mathbb{C} \quad : |z| \leq 1\}$$

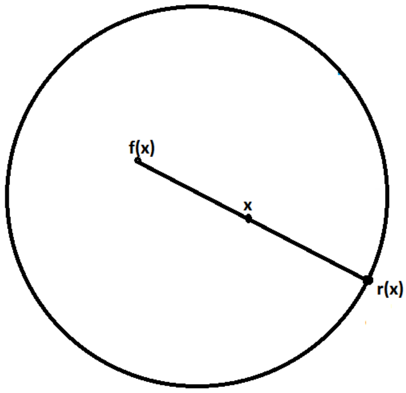
dans lui-même admet (au moins) un point fixe.

Démonstration :

Par l'absurde. Supposons qu'il existe une application continue $f : E^2 \to E^2$ sans point fixe, c'est à dire $f(x) \neq x$, $\forall x \in E^2$.

La droite passant par les points x et $f(x)$ est donc parfaitement définie. Considérons la demi-droite ouverte, d'origine $f(x)$ dirigé vers x.

L'intersection de cette demi-droite $[f(x), x)$ avec le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est notée $r(x)$. Cette association définit une application continue $r : E^2 \to \mathbb{S}^1$ dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ est l'application identité.



En conséquence, le cercle $\mathbb{S}^1$ est un rétracte du disque E^2 et nous avons une injection de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ dans $\pi_1(E^2) = \{1\}$, ce qui est absurde puisque $\mathbb{S}^1$ et E^2 n'ont pas le même groupe fondamental.

Corollaire 3.1.1. *Quand on est à Paris et qu'on déplie un plan de Paris, il y a un point du plan qui est exactement à sa position réelle dans Paris.*

3.2 Théorème de Borsuk-Ulam

On sait que la sphère $\mathbb{S}^2$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ formé des points de norme 1.

Théorème 3.2.1. *Pour toute application continue $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, il existe un point $x \in \mathbb{S}^2$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Comme exemple du résultat de ce théorème, sur le globe terreste, il existe toujours deux points antipodaux ayant même altitude et même température. Pour démontrer ce théorème on a besoin des trois lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. *Soit $f : \mathbb{S}^n \to X$ une application continue. Si f admet une extention continue au disque unité fermé, $\hat{f} : E^{n+1} \to X$, alors f est homotope à une application constante. En particulier, si $X = \mathbb{S}^1$ et $n = 1$, le degré de f vaut 0.*

Démonstration :
Définissons une application continue $F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to E^{n+1}$ par $F(z,t) = tz$.

L'application composée $\hat{f} \circ F : \mathbb{S}^n \times [0,1] \to X$ vérifie :
✓ $(\hat{f} \circ F)(z,0) = \hat{f}(0)$
✓ $(\hat{f} \circ F)(z,1) = \hat{f}(z) = f(z)$.
Ainsi f est homotope à l'application constante sur $\hat{f}(0)$.

Lemme 3.2.2. *Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ une application continue vérifiant $f(z) = -f(-z)$ pour tout $z \in \mathbb{S}^1$. Alors, f est de degré impaire.*

Démonstration :
L'application f peut aussi s'exprimer comme une application $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ telle que $f(t + \frac{1}{2}) = -f(t)$.
On note $\hat{f}$ un revêtement de f. L'égalité $f(\frac{1}{2}) = -f(0)$ implique que la différence $\hat{f}(\frac{1}{2}) - \hat{f}(0)$ correspond à un nombre de tours complet du cercle plus un demi-tour, autrement dit $\hat{f}(\frac{1}{2}) - \hat{f}(0) = n + \frac{1}{2}$, pour un $n \in \mathbb{Z}$.
On construit maintenant un deuxième relèvement $\hat{g}$ de f par :

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} \hat{f}(t), & si \;\; t \leq \frac{1}{2}, \\ \hat{f}(\frac{1}{2}) + \hat{f}(t - \frac{1}{2}) - \hat{f}(0), & si \;\; t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Alors $deg f = \hat{g}(1) - \hat{g}(0) = 2(\hat{f}(\frac{1}{2}) - \hat{f}(0)) = 2n + 1$. Donc f est de degré impair.

Lemme 3.2.3. *Il n'existe pas d'application continue $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ telle que $f(-z) = -f(z)$, $\forall z \in \mathbb{S}^2$.*

Démonstration : On va le démontrer par l'absurde. Supposons qu'une telle fonction existe.
Nous construisons maintenant un chemin $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ comme suit :

$$\gamma(x,y) = f(x,y,0).$$

Ce chemin s'étend en une application continue $\hat{\gamma} : E^2 \to \mathbb{S}^1$ par

$$\hat{\gamma}(x,y) = f(x,y,\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

D'après le Lemme 3.2.1, le degré du chemin γ vaut 0.
Mais d'après le Lemme 3.2.2, l'égalité $f(-z) = -f(z)$ implique que le degré de γ est impair.

Nous nous retrouvons donc dans une contradition.

Démonstration du Théorème 3.2.1 *(Théorème de Borsuk-Ulam)*
On effectue un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il n'esxiste pas un point $x \in \mathbb{S}^2$ tel que $f(x) = -f(x)$, c'est à dire $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{S}^2$, alors nous avons le droit de définir une application continue $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Remarquons que :

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\|f(-x) - f(x)\|} = -g(x).$$

Une telle application contredit le Lemme 3.2.3.

3.3 Théorème de Lusternik et Schnirelmann

Théorème 3.3.1. *Soit A_1, A_2 ,A_3 un recouvrement de la sphère $\mathbb{S}^2$ par 3 ensembles fermés, alors, au moins un des A_i contient une paire $(x, -x)$ de points antipodaux.*

Démonstration :
Si F est un fermé d'un espace topologique X et $x \in X$, notons alors $d(x, f)$ la borne inférieure des nombres $d(x, y)$ telle que $y \in F$.
nous définissons une application continue $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$g(x) = (d(x, A_1), d(x, A_2)).$$

D'aprés le Théorème de **Borsuk-Ulam**, il existe un point $x_0 \in \mathbb{S}^2$ vérifiant $g(x_0) = g(-x_0)$ c'est à dire :

$$d(x_0, A_1) = d(-x_0, A_1)$$

et

$$d(x_0, A_2) = d(-x_0, A_2).$$

Remarquons que :

$$si\ x_0 \in A_1 \Leftrightarrow d(x_0, A_1) = d(-x_0, A_1) = 0,$$
$$\Leftrightarrow -x_0 \in A_1.$$

De même si $x_0 \in A_2$, on a

$$d(x_0, A_2) = d(-x_0, A_2) = 0 \Leftrightarrow -x_0 \in A_2.$$

Maintenant, si

$$x_0 \notin A_1 \cup A_2,$$

alors

$$-x_0 \notin A_1 \cup A_2,$$

d'où

$$x_0 \in A_3 \Leftrightarrow -x_0 \in A_3.$$

3.4 Théorème d'invariance de la dimension

Théorème 3.4.1. $\mathbb{R}^2$ *n'est pas homéomorphe à* $\mathbb{R}^n$*, pour tout* $n \neq 2$.

Démonstration :
Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ un homémorphisme.
Le cas où $n = 1$ est évident car $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ est connexe par arcs alors que $\mathbb{R} \backslash \{\varphi(0)\}$ ne l'est pas.
Maintenant pour $n > 2$, on ne peut pas distinguer $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ et $\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\}$ par leurs composantes connexes par arcs, mais on peut le faire par leurs groupes fondamentaux.
En effet, $\mathbb{R}^n \backslash \{*\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et on a :

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \backslash \{\varphi(0)\} \cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R})$$

$$\cong \pi_1(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Or pour $n = 2$ on a $\mathbb{Z}$ et pour $n > 2$ on a 0, ce qui prouve qu'un tel homéomorphisme φ n'existe que si $n = 2$.

3.5 Théorie homotopique des fibrés

Définition 3.5.1. *Soient* E, B, F *des espaces topologiques. Soit* $p : E \to B$ *une application continue surjective.*
On appelle (E, B, F, p) *un espace fibré, ou simplement fibré, si pour tout point*

de B, il existe un voisinage U de ce point tel qu'il existe un homéomorphisme $h : p^{-1}(U) \to U \times F$, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

où pr_1 est la projection sur le premier facteur.

Définition 3.5.2. *On appelle E l'espace total, B la base, F la fibre, et p la projection de l'espace fibré (E, B, F, p). L'homéomorphisme h est appelé la trivialisation locale relative à l'ouvert trivialisant U.*

Notation :

On notera le fibré (E, B, F, p) par :

$$F \to E \xrightarrow{p} B$$

Dans certains ouvrages, on l'appelle parfois espace fibré localement trivial pour distinguer une situation où l'on n'aurait pas la condition de trivialité locale.

Définition 3.5.3. *Soit $p : E \to B$ une application surjective. Pour tout $b \in B$, la fibre au-dessus de b, notée F_b, est la préimage du point b par p. Autrement dit :*

$$F_b := p^{-1}(b).$$

Lemme 3.5.1. *Soit $p : E \to B$ un revêtement.*
Pour tout $b \in B$, $p^{-1}(b) = F_b$ muni de sa topologie de sous-espace de E est un espace discret.

Démonstration :

Soit $b \in B$. Soit U un voisinage de b et U_i ouverts de E comme dans la Définition 2.1.1 du revêtement. Soit $x \in F_b$. Par définition, il existe un unique i tel que $x \in U_i$, si bien que $\{x\} = U_i \cap F_b$. Ainsi le singleton $\{x\}$ est ouvert dans F_b, pour tous $x \in F_b$.

Proposition 3.5.1. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que chaque fibre au-dessus d'un point de B soit de même cardinal. Alors il existe F, un espace discret, tel que $F \to E \xrightarrow{p} B$ soit un fibré.*

Lemme 3.5.2. *Soient X un espace topologique, et Y un ensemble quelconque. Soit $f : X \to Y$ une application localement constante (c'est-à-dire pour tout point x de X, il existe un voisinage U_x de x tel que f est constante sur U_x). Si X est connexe, alors f est constante sur X.*

Démonstration :
Fixons $x_0 \in X$ et posons $y = f(x_0)$. Considérons maintenant

$$U := \bigcup_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} U_x$$

$$V := \bigcup_{\substack{x \in X \\ f(x)\neq y}} U_x$$

On a : $U \cup V = X$ et $U \cap V = \emptyset$. Or B est connexe, donc $U = X$ et $V = \emptyset$. Donc f est constante sur X.

Proposition 3.5.2. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose B connexe. Alors les fibres au-dessus de chaque point de B sont toutes en bijection (c'est à dire de même cardinal).*

Démonstration :
Il suffit de considérer une application f qui associe à tout point b de B le cardinal de sa fibre F_b.
Remarquons pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage U défini comme dans la définition 2.1.1 du revêtement, si bienque les fibres au-dessus des points de ce voisinage sont toutes en bijections avec F_b, autrement dit f est localement constante.
Comme B est connexe, on applique le Lemme 3.5.2.

Corollaire 3.5.1. *Tout revêtement $p : E \to B$ définit un fibré $F \to E \xrightarrow{p} B$, avec F un espace discret, si l'espace B est connexe.*

Annexe A

Annexe (Théorème de Van Kampen)

Le théorème de Van Kampen permet de décrire le groupe fondamental d'un espace topologique X à partir d'une décomposition de X en deux sous-espaces A et B. Il permet donc de faire des calculs explicites de groupes fondamentaux.

A.1 Quelques compléments d'algèbre

Avant d'aller au théorème de Van Kampen, il nous faut introduire la notion de produit libre et la somme amalgamée.
Définissons alors le produit libre de deux groupes, et la somme amalgamée de deux groupes au dessus d'un troisième, par leur propriété universelle.

A.1.1 Produit et groupe libres

Définition A.1.1.1. *(Produit libre)*
Soient G_1 et G_2 deux groupe. Leurs produit libre $G_1 * G_2$ est le groupe défini par l'ensemble des mots du type $a_1 \ldots a_n$ avec $a_i \in G_1 \backslash \{e\} \cup G_2 \backslash \{e\}$ tel que si $a_i \in G_1$ alors $a_{i+1} \in G_2$ et inversement ainsi que le mot vide noté "e".
Le produit libre de deux élèments $a_1 \ldots a_n$ et $b_1 \ldots b_m$ et donné par :
**) $a_1 \ldots a_{n-1} a_n b_1 b_2 \ldots b_m$ si a_n et b_1 n'appartiennet pas au même groupe.*
**) $a_1 \ldots a_{n-1} c b_2 \ldots b_m$ avec $c = a_n b_1$ si les deux élèments appartiennent au*

même groupe.
**) Si $a_n = b_1^{-1}$ alors il s'agit du produit $(a_1 \dots a_{n-1})(b_2 \dots b_m)$ dans $G_1 * G_2$.*
**)Le mot vide est l'élèment neutre à gauche et à droite pour ce produit.*

Proposition A.1.1.1. *(Universalité)*
Si $\phi_k : G_k \to K$ pour $k = 1, 2$ sont des morphismes de groupes alors il existe un unique $\phi : G_1 * G_2 \to K$ tel que

$$\phi \circ i_k = \phi_k \qquad \forall k = 1, 2$$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[drr, "\phi_1"] & & \\
& G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\phi"] & K \\
G_2 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, "\phi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Démonstration :
Unicité :
Si $a_1 \dots a_n \in G_1 * G_2$ avec par exemple

$$\begin{cases} a_i \in G_1 & \text{pour } i \text{ paire} \\ a_i \in G_2 & \text{pour } i \text{ impaire} \end{cases}$$

alors :

$$\begin{aligned} \phi(a_1 \dots a_n) &= \phi(a_1) \dots \phi(a_n) \\ &= \phi(i_1(a_1))\phi(i_2(a_2)) \dots \\ &= \phi_1(a_1)\phi_2(a_2) \dots \end{aligned}$$

est bien déterminé.
Existence : La formule

$$\phi(a_1 \dots a_n) = \phi_1(a_1) \dots \phi_n(a_n)$$

définit bien un morphisme de groupes.

Définition A.1.1.2. *(Groupe libre). On appelle groupe libre à n générateurs le produit itéré* $\overbrace{C * (C * (C * \ldots))}^{n\ fois}$ *où C est le groupe cyclique infini ($\simeq \mathbb{Z}$). Si t_i désigne le générateur de la $i^{éme}$ copie de C, le groupe libre est noté $\langle t_i, \ldots, t_n \rangle$.*

Corollaire A.1.1.1. *(Propriété universelle) Si $g_1 \ldots g_n$ sont des élèments d'un groupe G alors il existe un unique morphisme de groupe :*

$$\phi : \langle t_i, \ldots, t_n \rangle \to G$$

tel que

$$\phi(t_i) = g_i \quad \textit{pour } i = 1, \ldots n$$

.

Abélianisation :

Définition A.1.1.3. *Si G est un groupe libre, on note $[G, G]$ le groupe des commutateurs de G, c'est à dire le sous-groupe de G engendré par les élèments de la forme $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ tel que α, $\beta \in G$.*

Proposition A.1.1.2. *$[G, G]$ est le plus petit sous-groupe normal H de G tel que $G/_H$ est abélien.*

Corollaire A.1.1.2. *Soit $\phi : G \to K$ un morphisme de groupes, K un groupe abélien. Alors il existe un unique $\bar{\phi} : G/_{[G,G]} \to K$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & K \\
G/[G,G] \arrow[ur, dashed, "\exists!\overline{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Notation : Le quotient $G/_{[G,G]}$ est souvent noté G_{ab}, c'est l'abélianisé de G.

Proposition A.1.1.3. $\langle t_1, \dots t_n \rangle \simeq \mathbb{Z}^n$.

Démonstration :

- 1) $\exists! \phi : \langle t_1, \dots t_n \rangle \to \mathbb{Z}^n$ telle que

  $$\phi(t_i) = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$$

  avec un 1 à la $i^{\text{éme}}$ place. ϕ induit un homomorphisme $\bar{\phi} : \langle t_1, \dots t_n \rangle_{ab} \to \mathbb{Z}^n$.
- 2) on définit $\psi : \mathbb{Z}^n \to \bar{\phi} : \langle t_1, \dots t_n \rangle_{ab}$ comme l'unique morphisme de groupe abélien tel que :

  $$\psi(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0) = [t_i]$$

  avec un 1 à la $i^{\text{éme}}$ place.

Ces deux morphismes de groupes sont inverses l'un à l'autre.

A.1.2 Sommes amalgamées

Définition A.1.2.1. *Soient $\phi_1 : K \to G_1$ et $\phi_2 : K \to G_2$. La somme amalgamée $G_1 *_K G_2$ est le quotient de $G_1 * G_2$ par le sous groupe normal de $G_1 * G_2$ engendré par les élèments $\phi_1(k)\phi_2(k)^{-1}$, $\forall k \in K$. Pour $l = 1, 2$ on note i_l la composée :*

$$i_l : G_1 \to G_1 * G2 \xrightarrow{q} G_1 *_k G2$$

Proposition A.1.2.1. *(Propriètè universelle). Si*

$$\begin{array}{ll} \phi_1 : K \to G_1 & \qquad \phi_2 : K \to G_2 \\ f_1 : G_1 \to L & \qquad f_2 : G_2 \to L \end{array}$$

des morphismes de groupes tels que $f_1 \circ \phi_1 = f_2 \circ \phi_2$, alors il existe un unique $f : G_1 *_K G_2 \to L$ tel que $f \circ ß_1 = f \circ ß_2$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G_1 \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & G_1 \ast_K G_2 \arrow[dr, dashed, "\exists ! f"] & \\
& & L
\end{tikzcd}$$

A.2 Théorème de Van Kampen

Énoncé du théorème :

Soit X un espace topologique, U, V deux ouverts de X tels que :

$$\begin{cases} X = U \cup V \\ x_0 \in U \cap V \\ U \cap V \qquad \textit{est connexe par arcs.} \end{cases}$$

On note :

$$\begin{cases} i_u : U \cap V \to U & \qquad i_v : U \cap V \to V \\ j_u : U \to U \cup V & \qquad j_v : V \to U \cup V \end{cases}$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, x_0) \arrow[r, "\pi_1(i_{\mathcal{U}})"] \arrow[d, "\pi_1(i_{\mathcal{V}})"'] & \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddr, bend left, "\pi_1(j_{\mathcal{U}})"] & \\
\pi_1(\mathcal{V}, x_0) \arrow[r, "i_2"'] \arrow[drr, bend right, "\pi_1(j_{\mathcal{V}})"'] & \pi_1(\mathcal{U}, x_0) \star_{\pi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})} \pi_1(\mathcal{V}, x_0) \arrow[dr, dashed, "\exists ! \phi"] & \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

avec ϕ obtenu par la propriété universelle de sommes amalgamées.

Théorème A.2.1. *(De Van Kampen) ϕ est un isomorphisme de groupes.*

Nous ne démontrerons pas le théorème de Van Kampen, mais nous donnerons seulement une application en rapport avec ce théorème.

A.2.1 Application

$\pi_1(\mathbb{S}^n)$, $n \geq 2$

Une sphère $\mathbb{S}^n$ peut s'écrire comme la réunion de deux hémisphères H_N et H_S ouverts chacun homéomorphe à D^n.

Si x est un point de l'équateur $\mathbb{S}^{n-1}$, on a :

$$\begin{cases} \pi_1(H_N, x) = \{1\} \\ \pi_1(H_S, x) = \{1\} \end{cases}$$

L'intersection $H_N \cap H_S$ est connexe par arcs (c'est homéomorphe à $I \times \mathbb{S}^{n-1}$).

Donc par le théorème de Van Kampen on a :

$$1 \simeq \pi_1(H_N) * \pi_1(H_S) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^n, x).$$

Bibliographie

[1] M. Arkowitz. Introduction to Homotopy Theory.(25 juillet 2011).

[2] R. Brown. Topology. A geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid. Second edition. Ellis Horwood, (1988).

[3] J. Calais. Eléments de théorie des groupes. Mathématiques. Presses Universitaires de. France, Paris, (1984).

[4] T. T. Dieck. Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics, (2008).

[5] A. Dold. Lectures on algebraic topology, Springer Verlag, (1980).

[6] Y. Félix, D. Tanré. Topologie algébrique, Belgique (août 2010).

[7] C. Godbillon. Éléments de topologie algébrique, France (1994)

[8] A. Gramain. Topologie des surfaces. Presses Universitaires de France, Paris, (1971).

[9] M. Greenberg, J. Harper. Algebraic topology, a first course. Addison-Wesley, (1981).

[10] P. Griffiths, J. Harris. Principles of Algebraic Geometry, Wiley Classics Library, (1994).

[11] A. Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[12] I. M. James. General topology and homotopy theory. Berlin, springer, (1984).

[13] W. Massey. Algebraic Topology : An Introduction. Springer, Graduate Texts in Mathematics, (1987).

[14] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam theorem, springer, (2003).

[15] J. P May. A concise course in algebraic topology. Chicago lectures in mathematics, (1 septembre 1999).

[16] F. Paulin. Topologie algébrique élémentaire. Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure, France (2009-2010).

[17] J. C. Pont. La topologie algébrique des origines à Poincaré, Presse Univ. France, (1974).

[18] P. Selick. Introduction to homotopy theory.

[19] J. P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2. Société Mathématique de France, Paris, (1977).

[20] P. Théo. Topologie algébrique, ENS Ker Lann.

[21] E. R. Van Kampen. On the connection between the fundamental groups of some related spaces, (1933).