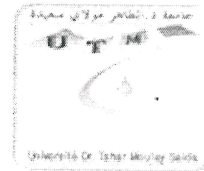




N° Attribué par la bibliothèque

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Année univ.: 2016/2017



Estimation de la densité conditionnelle avec l'approche de copule

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse stochastique, statistique des processus et
applications

par

Bentadj Ahlem¹

Sous la direction de

Dr F. Madani

Soutenue 25 mai 2017 devant le jury composé de

| | | |
|---------------------|------------------------------------|--------------|
| A. Kandouci | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| F. Madani | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Rapporteur |
| S. Rahmani | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |
| w. Benzatout | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |

1. e-mail : bentadj-ahlem12@yahoo.com

dédicace

A tous ceux qui me sont chers

Remerciements

Au début et avant tout, je rends grâce à dieu **ALLAH** tout puissant qui m'a aide à terminer ce travail. Merci pour me guider et être toujours avec moi.

Je souhait d'abord exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le **Dr. Fethi-Madani** pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail. Je remercie pour son appui scientifique, qui m'a été indispensable, et aussi pour ses encouragements aux initiatives personnelles, ses orientations, ses conseils et sa disponibilité.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Et remercies à ma mère, mon père, mes frères, mes soeurs, mes amies pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de la préparation de ce mémoire.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Table des figures | 5 |
| 1 Introduction | 7 |
| 1.1 Quelques notions sur les copules | 10 |
| 1.1.1 Propriétés d'une copule | 14 |
| 1.1.2 La densité de la copule | 17 |
| 1.2 Quelques familles de copules | 18 |
| 1.2.1 Copules d'indépendance | 18 |
| 1.2.2 Copule gaussienne | 18 |
| 1.2.3 Copules de Valeurs Extrêmes | 19 |
| 1.2.4 Les copules Student | 20 |
| 1.2.5 Les copules archimédiennes | 20 |
| 2 Estimation par les copules | 25 |
| 2.1 Estimation paramétrique | 26 |
| 2.1.1 La méthode des moments | 26 |
| 2.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance | 26 |
| 2.2 Estimation non paramétrique | 28 |
| 2.2.1 La copule empirique | 28 |
| 2.2.2 théorème sur le taux de Kendall et le rho de Spearman | 29 |
| 2.2.3 Estimation à noyau | 31 |
| 3 Estimation de la densité conditionnelle d'un quantile par l'approche de copule | 37 |
| 3.1 Introduction | 37 |
| 3.1.1 L'estimateur de la densité conditionnelle | 37 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.2 | Présentation de l'estimateur | 38 |
| 3.2.1 | La transformation de quantile | 38 |
| 3.2.2 | La représentation de copule | 39 |
| 3.2.3 | Construction de l'estimateur | 40 |
| 3.3 | résultats asymptotiques | 42 |
| 3.3.1 | Notations et hypothèses | 42 |
| 3.3.2 | La consistante forte de l'estimateur | 43 |
| 3.3.3 | Convergence en loi | 45 |
| 3.3.4 | Biais Asymptotique, Variance et erreur quadratique moyenne | 46 |
| 3.4 | Comparaison avec d'autres estimateurs | 47 |
| 3.4.1 | Présentation des estimateurs | 47 |
| 3.4.2 | Modèle et comparaison des résultats | 49 |
| 3.5 | Résultats auxiliaires | 51 |
| 3.5.1 | Approximation des pseudo-variables $F(X_i)$ par leurs estimations $F_n(X_i)$ | 51 |
| 3.5.2 | Convergence de l'estimateur de densité du noyau \hat{g}_n | 52 |
| 3.5.3 | Convergence de $c_n(u, v)$ | 54 |
| 3.5.4 | Une approximation de $\hat{c}_n(u, v)$ par $c_n(u, v)$ | 54 |
| 3.6 | Simulation | 56 |
| | bibliographie | 61 |

Table des figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Simulation de données pour comparer le comportement conjoint de deux variables aléatoires ayant chacune comme distribution marginale bêta(2,2) | 11 |
| 1.2 | Graphique des copules extrêmes | 14 |
| 1.3 | courbes de niveau des copules extrêmes | 14 |
| 1.4 | région contenant la courbe de niveau $C(u, v) = t_0$ d'une certaine copule C | 15 |
| 1.5 | Nuages de points de trois copules gaussiennes selon ρ | 19 |
| 1.6 | Densité de trois copules d'Archimède avec paramètre $\theta = 3$ | 23 |
| 3.1 | De gauche à droite, de haut en bas : densité réelle, estimateur quantile de copule, noyau double, polynôme local (coupé). | 50 |
| 3.2 | Comparaison à $x = 2$: densité conditionnelle = courbe épaisse, quantile de copule = ligne continue, double noyau = courbe pointillée, polynôme local = pointillé courbe. | 50 |
| 3.3 | Simulation des copules | 58 |

Résumé

Soit (X, Y) une couple de variables aléatoires dont la fonction de répartition $F(x, y)$ de loi conjointe. Si F_1 et F_2 sont les lois marginales de X et Y , on a $F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$, où C est une copule. Dans un premier temps, on détermine la distribution conjointe, Ce résultat a plusieurs applications intéressantes. Il permet d'abord de construire un algorithme relativement simple pour simuler. Nous présentons un nouvel estimateur de la densité conditionnelle. Il est basé sur une transformation efficace des données par transformation quantile. Par utilisation de la représentation copule, il s'avère avoir une forme se produit remarquable. Étudier ses propriétés asymptotiques et comparer son biais et sa variance aux concurrents Sur la base d'une régression, et utilise une simulation d'une copule sur \mathbb{R} .

Chapitre 1

Introduction

En statistique, une copule est un objet mathématique venant de la théorie des probabilités. L'introduction des copules est un phénomène relativement récent qui trouve sa source à la fin des années 50 dans des recherches portant initialement sur les tables de contingence. Au début, il était difficile de trouver des traces de la notion copule dans la littérature de la statistique. Mais à partir des années 70 et avec le développement de la théorie des processus empiriques, d'autres auteurs ont redécouvert le concept des fonctions copules sous d'autres appellations.

Alors, de quoi s'agit-il ?

Les copules constituent un sujet de recherche relativement moderne étant en plein essor depuis principalement les trois dernières. Provenant du nom latin "copulae", qui signifie "tout ce qui sert à attacher, lien, chaîne", la copule est un outil statistique qui modélise la dépendance entre des variables aléatoires, permettant ainsi de considérer de manière distincte la structure de dépendance décrite par fonction de distribution conjointe et le comportement marginal des variables considérées. En effet, soit un couple de n variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) tel que, pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, la fonction de répartition conjointe est donnée par :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

et la fonction de répartition marginale de la i^e variable aléatoire, pour $i \in (1, 2, \dots, n)$, est donnée par :

$$F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

Le célèbre théorème de Sklar[1], stipule que si les fonctions $F_i(\cdot)$ sont continues, alors il existe une unique fonction de répartition multivariée $\mathcal{C} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, que l'on appellera copule, dont les marges sont uniformes et telle que, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on peut écrire

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{C}\{F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\}$$

Autrement dit, il est possible d'associer la loi conjointe multivariée aux lois marginales univariées à l'aide de la fonction copule qui contient l'information nécessaire sur la structure de dépendance des variables aléatoires entre elles.

Bien que le terme copule fut utilisé comme objet mathématique pour la première fois en (1959) dans les travaux Sklar, mathématicien américain et professeur émérite à l'Illinois Institute of Technology, la fonction sous-jacente fut étudiée bien avant, sous d'autres appellations, par exemple dans les travaux de Fréchet(1951)[11], de Féron(1956)[12] et de plusieurs autres mathématiciens et statisticiens qui s'intéressaient aux fonctions de distribution multivariée ayant des lois marginales fixées, et généralisations du modèle proposé par Balack et Scholes(1973)[3], et Deheuvels(1978)[36].

On retrouve notamment plusieurs résultats à la base de la théorie des copules dans des travaux de Wassily Hoeffding(1940-1941)[18]. Dans ceux-ci, ce statisticien et probabiliste finnois décrivait des fonctions de distribution dont le domaine est le carré $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ et dont les marges sont uniformes sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Il travaille également sur les mesures de dépendance invariantes sous transformations strictement croissantes. Malgré l'apport notable de ses travaux, ces derniers ne furent pas immédiatement considérés à leur juste valeur notamment en raison de circonstances historique (Deuxième Guerre mondiale). D'ailleurs, Fréchet arriva à des conclusions semblables à celles obtenues par Hoeffding malgré le fait qu'elles lui étaient inconnues. De ce fait, aujourd'hui, lorsque l'on fait référence à certains résultats de

ce domaine dans la littérature, notamment concernant l'ordre stochastique, il n'est pas rare de trouver ces deux noms juxtaposés. Puis, en (1959), Sklar écrit un article en utilisant pour la première fois le mot "copule" avec le sens qu'on lui connaît à ce jour, alors qu'il travaillait avec Berthold Schweizer(1991)[45] sur la lecture.

Application de copules à un problème purement financier peut être attribuée à Rosenberg(1999)[43], et Patton(2001) est un des premiers à tenter de modéliser la structure de dépendance de façon dynamique à l'aide des copules, Patton montre que le théorème peut être généralisé et appliqué aux distributions conditionnelles.

L'importance du choix de la copule pour modéliser la structure de dépendance entre plusieurs actifs est démontrée par Berrada et al (2006)[2] et ensuite par Kole et al (2007)[39].

Le concept de copule dynamique généralisé proposé par Rémillard et Papageorgion(2010)[40].

Cet mémoire se compose de trois chapitres. Le premier chapitre est une introduction. On présente un état d'art sur les copules, leurs propriétés ainsi que la famille des copules.

Le second chapitre est consacré à l'estimation par l'approche de copules à travers les deux aspects, l'aspect paramétrique, à savoir la méthode des moments et méthode du maximum de vraisemblance, et l'aspect non paramétrique, à savoir méthode d'estimation par l'approche de copule empirique et méthode d'estimation à noyau

Le dernier chapitre est une étude qui porte sur l'estimation de densité conditionnelle par la copule, on présente notre estimation d'une manière explicite. L'étude asymptotique est présentée par la convergence en probabilité, la convergence presque sûre, et la normalité asymptotique. Les valeurs de biais et variance sont données d'une façon explicite. Nous terminant ce travail par une étude comparative des estimateurs proposées

1.1 Quelques notions sur les copules

les copules permettent de résumer la structure de dépendance d'une distribution conjointe en la séparant des comportements marginaux. Dans cette section, nous formalisons ce concept en donnant des définitions, en énonçant le fameux théorème de Sklar ainsi qu'en présentant quelques propriétés et quelques familles de copules.

Définition 1.1.1. Une copule C est une fonction de répartition sur $[0; 1]^d$ d -dimensionnelle, dont les lois marginales sont uniformes sur $[0; 1]$, où d est un entier strictement positif.

Définition 1.1.2. Une copule bivariée est une fonction $C : (I = [0, 1])^2 \rightarrow I = [0, 1]$ qui vérifie les conditions suivantes :

1. $C(u, 0) = C(0, u) = 0, \forall u \in I$. On dit que C est attachée ;
2. $C(u, 1) = C(1, u) = u, \forall u \in I$. Les marges des distributions sont des marges uniformes ;
3. C est 2-croissante :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 .$$

$$\forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, (v_1, v_2) \in [0, 1]^2 \text{ tel que } u_1 \leq u_2 \text{ et } v_1 \leq v_2$$

Un simple exemple : soient X et Y deux variables aléatoires ayant toutes deux comme distribution marginale bêta(2,2). Avec ces hypothèses de départ, on effectue deux simulations de 2000 données chacune et on obtient les deux graphiques présentés à la figure 1.1

On peut alors constater que, malgré le fait que X et Y soient de même distribution marginale dans chacune des simulations, la structure de dépendance entre ces deux variables est bien différente. En effet, dans le graphique de gauche, la concentration du nuage de points est plus prononcée pour de grandes valeurs de X , ce qui confère une meilleure prédiction des valeurs de Y lorsque l'on connaît de telles valeurs de X . c'est plutôt le cas pour les petites valeurs de X dans le graphique de droite. On verra plus tard que la première simulation sera associée à une copule gaussienne, alors que la deuxième sera associée à une copule Clayton

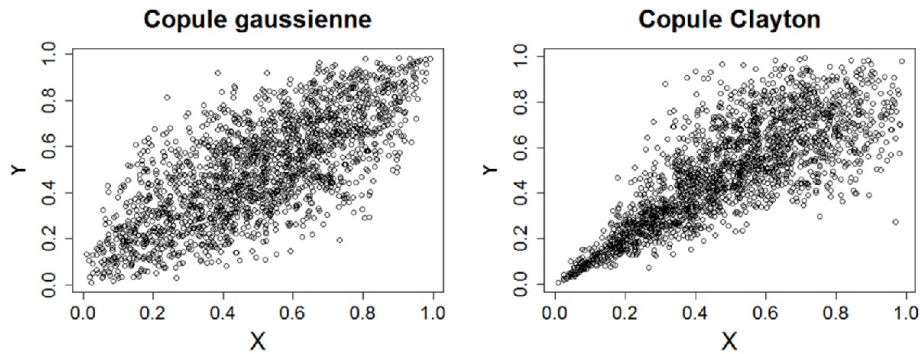


FIGURE 1.1 – Simulation de données pour comparer le comportement conjoint de deux variables aléatoires ayant chacune comme distribution marginale bêta(2,2)

Théorème 1.1.1. *Si C est une copule, si F_1 et F_2 sont deux fonctions de répartition, alors $F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$ est une fonction de répartition bivariée, ayant F_1 et F_2 pour marginales.*

Soit F une fonction de répartition bivariée de marginales F_1 et F_2 .

Il existe une copule C telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$$

Si de plus F_1 et F_2 sont continues, C est unique.

Preuve :

On a

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ &= \mathbf{P}(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2)) \\ &= C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \end{aligned}$$

Le théorème de Sklar implique que pour une distribution conjointe bidimensionnelle continue, les lois marginales et la structure de dépendance peuvent être dissociées de façon unique. De plus, la structure de dépendance est représentée par la copule C .

Remarque 1.1.1. *lorsque les marginales ne sont pas continues, il est toujours possible de définir une copule, mais celle-ci n'est plus unique et de ce fait perd beaucoup de son intérêt. En effet, on peut toujours poser :*

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$$

avec les " inverses généralisées " des marginales :

$$F_j^{-1}(u) = \inf\{t/F_j(t) \geq u\}$$

(ces fonctions sont également appelées fonctions quantiles empiriques).

Corollaire 1.1.1. *Soit F une fonction de répartition conjointe de marges continues F_1 et F_2 et C la copule associée à F . Alors, pour $(u, v) \in I^2$, on a*

$$C(u, v) = C(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad (1.1)$$

$$= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)). \quad (1.2)$$

Ainsi, du corollaire , nous avons une formule de départ pour construire une copule bivariée à partir d'une fonction de distribution conjointe et de lois marginales.

Par exemple, il est possible de déterminer les copules extrêmes, soient les bornes de Fréchet. Posons

$$C^-(u, v) = \max(0, u + v - 1) \text{ et } C^+(u, v) = \min(u, v)$$

Théorème 1.1.2. *Soit C une copule. Alors, pour tout $(u, v) \in I^2$, on a*

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v)$$

Démonstration : Soit $(u, v) \in I^2$.

$$\text{On a : } \begin{cases} C(u, v) \leq C(u, 1) = u, \\ C(u, v) \leq C(1, v) = v, \end{cases}$$

Alors

$$C(u, v) \leq \min(u, v) = C^+(u, v)$$

D'où la deuxième inégalité. Pour démontrer la première inégalité, nous utilisons le fait que $C(u, v) \geq 0$ et l'inégalité (1) :

$$\begin{aligned} C(1, 1) - C(1, v) - C(u, 1) + C(u, v) \geq 0 &\implies 1 - v - u + C(u, v) \geq 0 \\ &\implies C(u, v) \geq u + v - 1 \\ &\implies C(u, v) \geq \max(0, u + v - 1) \\ &\implies C(u, v) \geq C^-(u, v), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

La figure 1.2 : illustre les copules extrêmes. Ainsi, de la définition et du fait qu'une copule est uniformément continue sur son domaine, le graphique de toute copule C est un quadrilatère de surface continue compris dans le cube unitaire I^3 , limité par les copules extrêmes et ayant pour sommets les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(1,1,1)$.

La figure 1.3 : une autre manière de représenter graphiquement une copule est en utilisant les courbes de niveau, ou une courbe est déterminée par l'ensemble des points $(u, v) \in I^2$ tels que $C(u, v) = t$ pour un certain $t \in I$. En se basant sur celles des bornes de Fréchet présentées.

La figure 1.4 : nous pouvons déduire que, pour toute copule C , sa courbe de niveau pour un certain $t_0 \in [0, 1]$ doit se trouver dans la région ombragée.

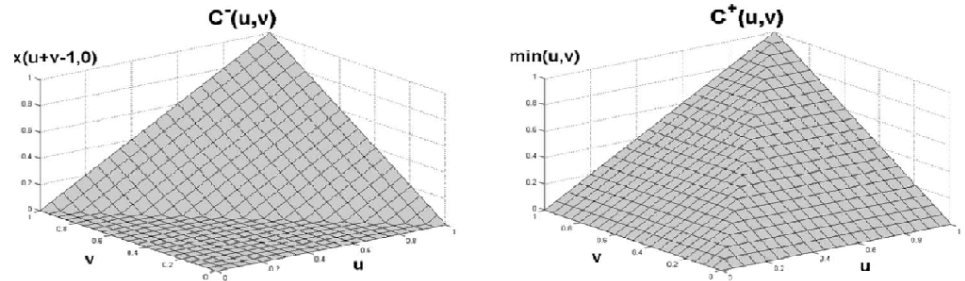


FIGURE 1.2 – Graphique des copules extrêmes

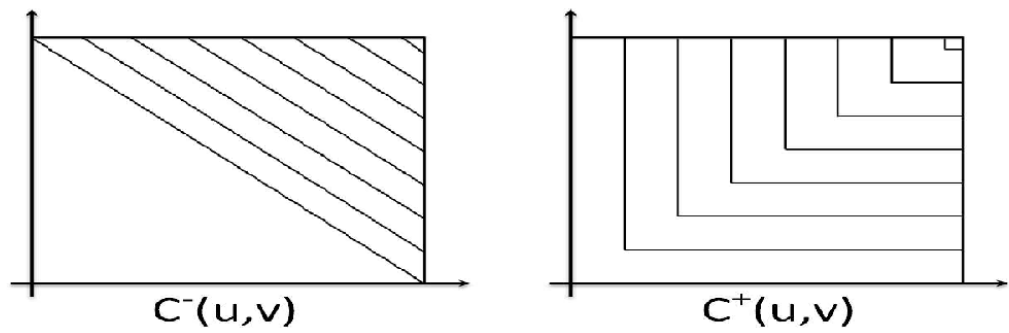


FIGURE 1.3 – courbes de niveau des copules extrêmes

1.1.1 Propriétés d'une copule

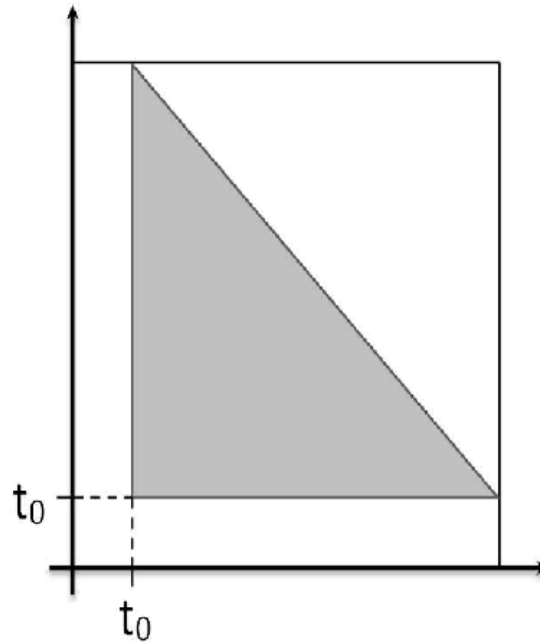


FIGURE 1.4 – région contenant la courbe de niveau $C(u, v) = t_0$ d'une certaine copule C

1. **Symétrique** :

Soient X , Y deux v.a continues, de fonction de répartition jointe F et de marginales F_1 et F_2 , et soit C une copule .

Définition 1.1.3. On dit que X , Y sont échangeable si seulement si $F_1 = F_2$ et $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $(u, v) \in I^2$.

Si $C(u, v) = C(v, u)$ pour tout $(u, v) \in I^2$, on dit que C est symétrique.

2. **Invariante** :

Ce théorème est essentielle à la théorie des copules.

Théorème 1.1.3. Soient deux v.a continues X , Y de marginales F_1 et F_2 et de copule $C_{X,Y}$, Si α et β sont deux fonctions strictement croissantes, alors :

$$C_{\alpha(X),\beta(Y)} = C_{X,Y}$$

La copule $C_{X,Y}$ est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

Preuve : On peut démontrer ce théorème facilement à l'aide de lois de probabilité, comme suit : soient F'_1, F'_2, F''_1, F''_2 les fonctions de répartition de $X, Y, \alpha(X)$ et $\beta(Y)$, respectivement.

Les fonctions α et β sont strictement croissantes, alors

$$F''_1 = P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^-(x)) = F'_1(\alpha^-(x))$$

aussi

$$F''_2 = P(\beta(Y) \leq y) = P(Y \leq \beta^-(y)) = F'_2(\beta^-(y))$$

$\forall x, y \in \bar{\mathbf{R}}$

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F''_1(x), F''_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^-(x), Y \leq \beta^-(y)) \\ &= C_{\alpha(X),\beta(Y)}(F'_1(\alpha^-(x)), F'_2(\beta^-(y))) \\ &= C_{X,Y}(F'_1(x), F'_2(y)) \end{aligned}$$

3. Ordonée :

Soit C_1, C_2 deux copules

Définition 1.1.4. On dit que C_1 est plus petite que C_2 ou C_2 est plus grande que C_1 et on note $C_1 < C_2$ si

$$C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \text{ pour tout } (u, v) \in [0, 1]^2$$

Exemple : La copule $W = \max(u + v - 1, 0)$ est la plus petite copule et $M = \min(u, v)$ est la plus grande copule .

4. Convexe et concave :

Soit $(a, b), (c, d) \in [0, 1]^2$ et $\forall \lambda \in [0; 1]$

Définition 1.1.5. Une copule C est concave (convexe) si on a :

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \geq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d)$$

5. **Harmonique :**

Soit C une copule dont les dérivées partielles de second ordre sont continues dans $[0, 1]^2$

Définition 1.1.6. C est harmonique dans $[0, 1]^2$ si C satisfait l'équation de Laplace dans $[0, 1]^2$

$$\nabla^2 C(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} C(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} C(u, v) = 0$$

6. **Homogène**

Définition 1.1.7. Une copule C est homogène de degré k si $\exists k \in \mathbf{R}, \forall u, v, \lambda \in I; C(\lambda u; \lambda v) = \lambda^k C(u, v)$

1.1.2 La densité de la copule

Par la fonctions de répartition multivariées, les copules admettent des densités de probabilités. Si la densité $C(\cdot)$ associée à la copule $c(\cdot)$ existe alors est définie par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d c(u)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

Si la fonction de répartition multivariée $F(\cdot)$ est absolument continue et en utilisant le théorème de Sklar, nous pouvons exprimer la densité d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) en fonction de la densité de sa copule et de ses fonctions de répartition marginales $F_1(\cdot), \dots, F_d(\cdot)$ par

$$f(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i)$$

À partir de cette relation, nous pouvons calculer l'expression de la densité $C(\cdot)$ de la copule $c(\cdot)$ via l'expression

$$C(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d))}{\prod_{i=1}^d f_i(F_i^{-1}(u_i))}$$

Ce résultat est important pour l'estimation des paramètres de la loi de probabilité d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_d) par la méthode du maximum de vraisemblance.

1.2 Quelques familles de copules

1.2.1 Copules d'indépendance

Soient X , Y deux v.a continues, et H la fonction de répartition jointe dont les marginales sont F et G .

Définition 1.2.1. *Si X et Y sont indépendantes, alors la copule associée est le produit de ses marginales comme suit*

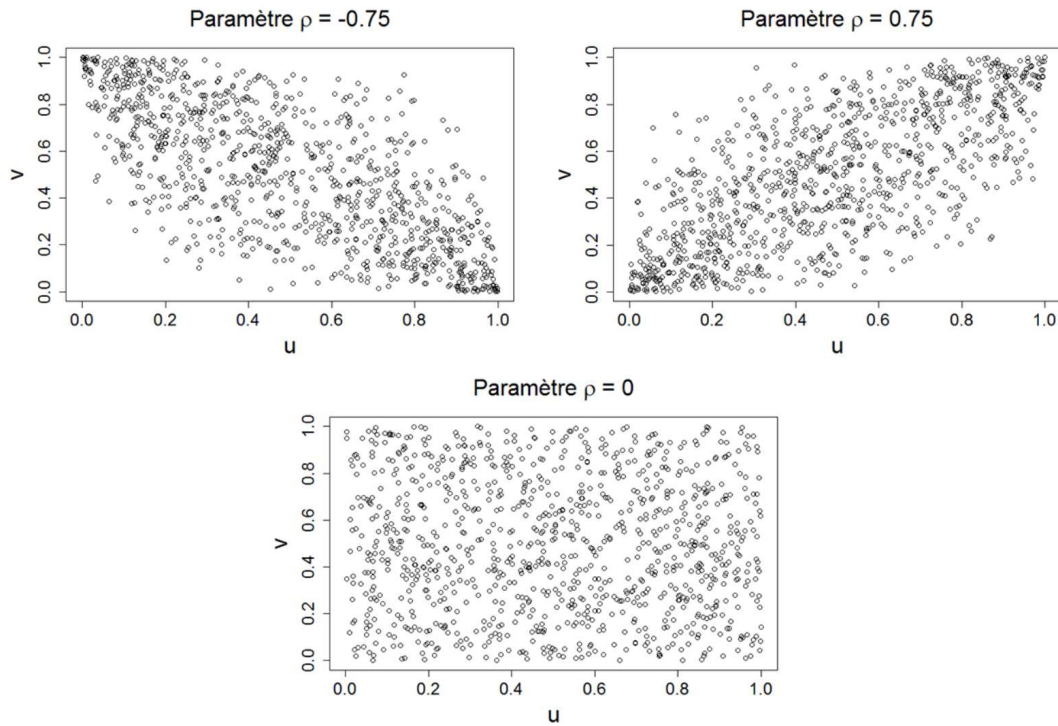
$$C_{X,Y}(x, y) = F(x)G(y)$$

1.2.2 Copule gaussienne

Soit Φ_n la fonction de répartition normale multivariée à n dimensions avec matrice de corrélation ρ . La copule normale C_ρ associée au paramètre Φ est, pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$,

$$C_\rho(u) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n), \rho)$$

On remarque que lorsque les marges sont normales, la copule gaussienne génère des distributions jointes normales multivariées.

FIGURE 1.5 – Nuages de points de trois copules gaussiennes selon ρ

1.2.3 Copules de Valeurs Extrêmes

Une autre classe particulière des copules est celle des valeurs extrêmes. Le nom "extreme value copula" suggère un lien entre la théorie des valeurs extrêmes et ses copules. Dans le cas bidimensionnel, Geoffroy [1958], Tiago de Olivera [1958] et Sibuya [1960] ont donné la forme générale des copules des valeurs extrêmes.

Définition 1.2.2. Une copule de Valeurs Extrêmes (VE) vérifie la relation suivante :

$$C(u_1^k, u_2^k) = C^k(u_1, u_2)$$

pour tout réel k positif.

Pour construire une distribution de valeurs extrêmes bidimensionnelle, il suffit ainsi de couple des marges issues de loi de la théorie de valeurs extrêmes avec une copule VE.

Par exemple, la copule de Gumbel est une copule de valeurs extrêmes :

$$\begin{aligned}
 C(u_1^k, u_2^k; \theta) &= \exp(-[(-\ln u_1^k)^\theta + (-\ln u_2^k)^\theta]^{1/\theta}) \\
 &= \exp(-(K^\theta [(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta])^{1/\theta}) \\
 &= [\exp(-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta})]^k \\
 &= C^k(u_1, u_2; \theta)
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

1.2.4 Les copules Student

Définition 1.2.3. *soit ρ le coefficient de corrélation. T la distribution de Student bivarée standardisée et $\Phi_{\rho,k}$ la distribution de student bivarée de matrice de corrélation associée à ρ et de degré de liberté $k \geq 3$. Alors, la copule Student bivarée C_T est définie de la manière suivante :*

$$C_T(u, v; \rho, k) = T_{\rho,k}\rho(T^{-1}(u), T^{-1}(v))$$

1.2.5 Les copules archimédiennes

Cette famille de copule a été nommé par Ling (1965), mais il a été reconnu par Schweizer et Sklar (1961) dans l'étude de t-norme. Avant d'être introduit dans la finance et aussi dans d'autres domaines. Mais avant de définir cette famille de copules, on a besoin de présenter quelque définitions, et propriétés

utiles pour définir les copules archimédiennes.

Définition 1.2.4. Une copule est dite Archimédienne avec fonction génératrice φ si elle l'exprime sous la forme suivante :

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), & \text{si } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0); \\ 0, & \text{si non} \end{cases}$$

avec φ vérifiant : $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(u) < 0$ et $\varphi''(u) > 0$ pour tout $0 \leq u \leq 1$

Remarque 1.2.1. Si $\varphi(0) = \infty$, alors φ est strictement décroissante.

Propriété

Cette copule est

– Symétrique

$$C(u, v) = C(v, u), \forall (u, v) \in [0, 1]^2.$$

– Associative

$$C(C(u, v), z) = C(u, C(v, z)), \forall (u, v, z) \in [0, 1]^3$$

– Convexe

$$\{(u, v) \in [0, 1]^2 : \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(k)\}, k > 0$$

– Densité

$$c(u, v) = \frac{-\varphi''(C(v, u)\varphi'(u)\varphi'(v))}{(\varphi'(C(v, u)))^3}$$

– Si c est une constante strictement positive, alors φ est un générateur de la copule C

La famille des copules archimédiennes

– Clayton

Considérons la fonction génératrice $\varphi(u^{-\alpha} - 1)$ et son inverse $\varphi^{-1}(s) = (s + 1)^{-1}$, alors la copule associée sera, pour $\alpha > 0$

$$C_{\rho}(u) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\alpha} - d + 1 \right)^{\frac{-1}{\alpha}}$$

– Gumbel

Considérons la fonction génératrice $\varphi(u) = (-\ln u)^{\alpha}$ et son inverse $\varphi^{-1}(s) = \exp(-t^{\frac{1}{\alpha}})$, alors la copule associée sera, pour $\alpha > 1$

$$C_{\rho}(u) = \exp \left(- \left\{ \sum_{i=1}^d (-\ln u_i)^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \right)$$

– Frank

Considérons la fonction génératrice

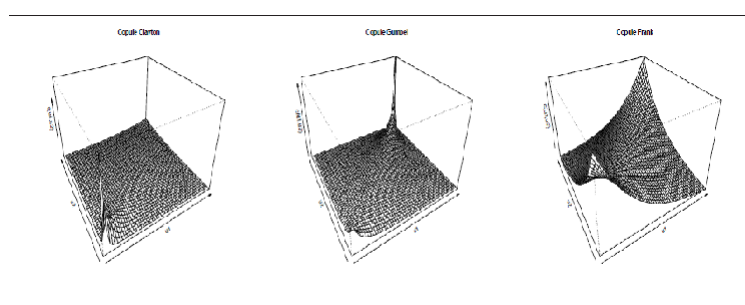
$$\varphi(u) = -\ln \left(\frac{\exp(-\alpha u) - 1}{\exp(-\alpha) - 1} \right)$$

et son inverse

$$\varphi^{-1}(s) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \exp(-s)(\exp(-\alpha) - 1))$$

Alors la copule associée sera, avec $\alpha > 0$

$$C_{\rho}(u) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (\exp(-\alpha u_i) - 1)}{(\exp(-\alpha) - 1)^{d-1}} \right)$$

FIGURE 1.6 – Densité de trois copules d'Archimède avec paramètre $\theta = 3$

Chapitre 2

Estimation par les copules

Dans le domaine statistique, l'estimation des copules a été traitée essentiellement dans le cadre des variables dites indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d). Il y a deux grandes méthodes d'estimation des copules : l'approche paramétrique et l'approche non-paramétrique. Pour cela, nous supposons que la copule $C(\cdot)$ appartient à une famille de copules paramétriques $C = C_\theta, \theta \in \Theta$. La première approche consiste à estimer les paramètres des marginales par la méthode du maximum de vraisemblance sans tenir compte de la copule ; puis on injecte ces estimations dans l'expression de la vraisemblance et par la suite, on estime le paramètre de la copule. Cependant, cette technique est peu efficace lorsque d est grand. Pour une étude complète portant sur cette procédure d'inférence, on peut consulter les travaux de Shih et Louis (1995) ou Joe et Xu (1996). La deuxième approche consiste à l'estimation de la copule est basée sur l'inférence non-paramétrique. La copule empirique est apparue pour la première fois dans l'introduction de la thèse de doctorat de Ruymgaart (voir Ruymgaart (1973), pp.6-13) et ensuite dans Rüschenendorf (1974, 1976). L'étude de la consistance de la copule empirique a été étudiée par Rüschenendorf (1974) et Deheuvels (1979b). Ce dernier auteur obtient également une loi uniforme du logarithme itéré et caractérise l'ensemble des copules empiriques possibles. Son étude est particulièrement développée dans le cas de marges indépendantes. Il obtient alors des lois exactes et asymptotiques pour certaines statistiques (statistiques de type Kolmogorov-Smirnov et Cramer-von-Mises) basées sur cette copule em-

pirique et qui s'expriment comme des fonctionnelles fondées sur le processus empirique de copule.

2.1 Estimation paramétrique

Dans cette section, on explique les méthodes d'estimation par la méthode des moments, méthode de maximum de vraisemblance .

2.1.1 La méthode des moments

cette méthode consiste à estimer les paramètres $\beta_i, i = 1, \dots, n$ des lois marginales et le paramètre α de la copule par la méthode des moments, ie :

1. Résoudre le système des n équations à n inconnues

$$\begin{cases} \bar{X}_t = f(\beta_1, \dots, \beta_n), \\ S_t^2 = g(\beta_1, \dots, \beta_n), \\ \mu_{3,t} = h(\beta_1, \dots, \beta_n), \\ \vdots \end{cases}$$

où n désigne la dimension de α , f, g et h sont les expressions des moments (ordinaires) d'ordre 1, 2, et 3 en fonction des paramètres β_i . Répéter cette étape pour toutes les marginales

2. Inverser le tau de Kendall ou le rho de Spearman pour obtenir le paramètre α de la copule

2.1.2 Méthode du maximum de vraisemblance

Soit C_θ une copule paramétrique multivariées de paramètre θ . On estime sous les deux hypothèses suivantes

$$H_0 : C \in C_0$$

telle que $C_0 = \{C_\theta : \theta \in \Theta\}$; où Θ est un sous ensemble de \mathbf{B}^p pour tout entier $p \geq 1$, et

$$H'_0 = F_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, F_d \in \mathcal{F}_d$$

telle que F_j pour $j = 1, \dots, d$ sont les lois marginales de X_1, \dots, X_d et $\mathcal{F}_j = \{F_{\gamma_j} : \gamma_j \in \Gamma_j\}$, où Γ_j est un sous ensemble de \mathbf{B} et en maximisant la fonction log- vraisemblance $L(\theta)$ définie par

$$L(\theta) = \sum_{j=1}^n \ln f(x_j)$$

telle que $f(x_1, \dots, x_d)$ est la fonction de densité jointe de X_1, \dots, X_d . Comme on peut voir la fonction $L(\theta)$ peut s'écrire

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(c_\theta(F_1(x_{i1}), \dots, F_{id}(x_{id}))) \prod_{j=1}^d f_j(x_j) \quad (2.1)$$

$$= \sum_{i=1}^n \ln(c_\theta(F_1(x_{i1}), \dots, F_{id}(x_{id}))) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \ln f_i(x_j) \quad (2.2)$$

où c représente la densité de la copule C_θ , alors l'estimateur de θ , noté $\hat{\theta}_n^{MV}$ est

$$\hat{\theta}_n^{MV} = \arg \max L(\theta)$$

Cet estimateur est consistant et vérifie la propriété de normalité asymptotique

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) \rightarrow N(0, I^{-1}(\theta))$$

telle que $I(\theta)$ est la matrice d'information de Fisher. Cette matrice est estimée par l'inverse de la matrice Hessien de la fonction de vraisemblance.

2.2 Estimation non paramétrique

2.2.1 La copule empirique

Définition 2.2.1. Soit $\{(x_t^1, \dots, x_t^n)\}_{t=1}^T$ un échantillon d'un vecteur aléatoire X de dimension n , la fonction de répartition empirique est donnée par :

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbb{1}_{(X_i^1 < x^1, \dots, X_i^n < x^n)}$$

où $\mathbb{1}$ est la fonction indicatrice.

cas bivarié

Définition 2.2.2. Soit $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un échantillon de taille n d'un couple de variable aléatoire. La copule empirique est la fonction \widehat{C} définie par :

$$\widehat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_{(i)} \text{ et } y \leq y_{(j)}}{n},$$

où $x_{(i)}$ et $y_{(j)}$ représentent les statistiques d'ordre associées à l'échantillon

La fonction densité empirique de la copule C notée \widehat{c} est donnée par :

$$\widehat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } (x_{(i)}, y_{(j)}) \text{ est un élément d'échantillon;} \\ 0, & \text{si non.} \end{cases}$$

Parfois elle est appelée " fréquence empirique de la copule" il existe une relation entre \widehat{C} et \widehat{c} donnée par :

$$\widehat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j \widehat{c}\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

et

2.2.2 théorème sur le taux de Kendall et le rho de Spearman 29

$$\widehat{c}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \widehat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \widehat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - \widehat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + \widehat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

Les copules empiriques peuvent être utilisées pour estimer les mesures de dépendance à savoir le ρ de Spearman et le τ de Kendall

2.2.2 théorème sur le taux de Kendall et le rho de Spearman

Le tau de Kendall

Soit (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) de vecteurs aléatoires continues, indépendants et identiquement distribués de fonction de répartition jointes F . Le tau de Kendall du vecteur aléatoire (X, Y) est défini par :

$$\tau_{X,Y} = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

On peut définir le tau de Kendall en fonction d'une copule C , utilisant la fonction Q définie par

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_{I_2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Le théorème suivant représente la relation entre le tau de Kendall et les copules.

Théorème 2.2.1. *Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C . Le tau de Kendall de X et Y est défini par*

$$\tau_{(X;Y)} = Q(C, C) = 4 \int_{I_2} C(u, v) dC(u, v) - 1,$$

car les variables aléatoires $U = F(x)$ et $V = G(y)$ sont des variables aléatoires uniformes, alors l'équation précédent devient

$$\tau_{(X;Y)} = 4E(C(U, V)) - 1$$

Le rho de Spearman

Soient $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2)$ et (X_3, Y_3) des couples indépendants du vecteur aléatoire (X, Y) . Le rho de Spearman, noté $\rho(X, Y)$, est défini par $\rho_{(X,Y)} = 3(P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3)\}) < 0$. Comme le tau de Kendall, nous pouvons définir le rho de Spearman en fonction d'une copule C grâce au théorème suivant :

Théorème 2.2.2. *Soient X, Y deux variables aléatoires continues dont la copule est C . Le rho de Spearman de X et Y est donnée par*

$$\begin{aligned} \rho_{(X,Y)} &= 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3 \\ &= 12 \int_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \end{aligned}$$

Le rho de Spearman empirique (estimateur du Rho de Spearman)

Soit un échantillon de taille n de données bivariées $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ la version empirique du rho de Spearman est définie par :

$$\rho_n = \frac{12}{n(n^2-2)} \sum_{i=1}^n R_i S_i - 3 \left(\frac{n+1}{n-1} \right)$$

telle que, R_i est le rang de X_i parmi les X_1, \dots, X_n et S_i est le rang de Y_i parmi les Y_1, \dots, Y_n .

Remarque 2.2.1. *Contrairement au coefficient de corrélation de Pearson, le tau de Kendall et le rho de Spearman sont complètement caractérisés pas la copule et les distributions marginales sont inutiles.*

2.2.3 Estimation à noyau

Des estimateurs de la copule peuvent être obtenus en employant une approche basée sur les noyaux. Considérons un vecteur aléatoire n-dimensionnel X de fonction de répartition F , d'un copule C et de fonction marginales $F_i, i = 1, \dots, n$ telle que :

$$F(X_1, \dots, X_n) = C(F_1(X_1), \dots, F_n(X_n))$$

Soit l'échantillon $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$. Pour construire notre estimateur on doit introduire des noyaux, i.e, des fonctions k_i intégrables définies de \mathbf{R} dans \mathbf{B} tels que :

$$\int_{\mathbf{R}} k_i(x) dx = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Soit le noyau n-dimensionnel

$$k(x) = \prod_{i=1}^n k_i(x_i),$$

et sa fonction de répartition

$$K(x) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^x k_i(x_i) = \prod_{i=1}^n K_i(x_i)$$

Pour la simplicité, nous choisissons de travailler ici avec des produits des noyaux univariés . Nous pouvons cependant prolonger facilement nos résultats aux noyaux plus généraux, i.e.

$$k(x, h) = \prod_{i=1}^n k_i\left(\frac{x_i}{h_i}\right) \text{ et } K(x, h) = \prod_{i=1}^n K_i\left(\frac{x_i}{h_i}\right)$$

Où h est une matrice diagonale, avec des éléments $h_i, i=1, \dots, n$ et un déterminant $|h|$ dit la fenêtre de lissage.

Les fenêtres de lissage individuelles h_i sont des fonctions de T telles que :

$$h_i \longrightarrow 0 \text{ quand } T \longrightarrow \infty$$

Les estimateurs à noyau des densités marginales des X_i^t au points x_i sont données par :

$$\hat{f}_i(x_i) = \frac{1}{Th_i} \sum_{t=1}^T k_i \left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i} \right)$$

et la fonction de densité conjointe de X^t au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{T|h|} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n k(x - X^t; h)$$

Par conséquent un estimateur de la fonction de répartition conjointe de X_i^t est donnée comme suit :

$$\hat{F}_i(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \hat{f}_i(y) dy$$

et un estimateur de la fonction de répartition de X^t au point $x = (x_1, \dots, x_n)$ par :

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \hat{f}(y) dy$$

Si on définit le noyau gaussien :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

les estimateurs à noyau de $F'_i(x)$ et $F(x)$ sont alors

$$\hat{F}'_i(x_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \phi \left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i} \right)$$

et

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{x_i - X_i^t}{h_i}\right)$$

où

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$$

Dans la pratique, on choisit d'habitude $h_i = \widehat{\sigma}_i(4/3T)^{1/5}$, où σ_i est l'écart-type de l'échantillon $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}_{t=1}^T$. Définissons \widehat{q} le vecteur où la i_{ime} composante est le u_i -quantile de \widehat{F}_i ,

$$\widehat{q}_i = \inf_{x \in \mathbf{R}} \{x : \widehat{F}_i \geq u_i\}, \quad u_i \in [0, 1]$$

L'estimateur à noyau de la copule C est simplement donné par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(\widehat{q})$$

Dans les conditions de régularité, l'estimateur à noyau est asymptotiquement Gaussien, on peut montrer que

$$\left(T \prod_{i=1}^n h_i\right)^{1/2} (\widehat{C}(u) - C(u)) \rightarrow^d \mathcal{N}(0, C(u))$$

Après la construction de l'estimateur à noyau, on peut le différencier par rapport à u_i . Il est ainsi facile d'obtenir un estimateur de la dérivée partielle de la copule par rapport à une(ou plus) variable. Par exemple l'estimateur à noyau de dérivée partielle du premier ordre de la copule C par rapport à u_i est donnée par :

$$\frac{\partial \widehat{C}(u)}{\partial u_i} = \frac{\partial \widehat{C}(u)}{\partial u_i} = \frac{1}{\widehat{f}_i(\widehat{q}_i(u_i))} \partial_i \widehat{F}(\widehat{q}(u))$$

avec $u = (u_1, \dots, u_n)$ et \widehat{f}_i est l'estimateur à noyau de la densité marginale de X_i ,

$$\widehat{f}(x_i) = \frac{1}{Th_i} \sum_{t=1}^T \varphi\left(\frac{x_i - x_i^t}{h_i}\right)$$

et $\partial_i \widehat{F}$ est la dérivée partielle de \widehat{F} par rapport à la i^{me} variable.

Chapitre 3

Estimation de la densité conditionnelle d'une quantile par l'approch de copule

3.1 Introduction

3.1.1 L'estimateur de la densité conditionnelle

Soit X et Y deux variables, l'estimateur de la densité conditionnelle $f(y/x)$ de Y sachant $X=x$ est donné par

$$f(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Où f_{XY} la fonction de densité conjointe de (X,Y) , par l'introduction de l'estimateur à noyau de Parzen-Rosenblatt l'estimateur

$$\begin{aligned}\hat{f}_{n,XY}(x,y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K'_{h'}(X_i - x) K_h(Y_i - y) \\ \hat{f}_{n,X}(x,y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K'_{h'}(X_i - x)\end{aligned}$$

Où $K_h(\cdot) = \frac{1}{h}K(\cdot/h)$ et $K'_{h'}(\cdot) = \frac{1}{h'}K'(\cdot/h')$ sont des noyaux avec leur suite des paramètres de lissage associées a chacun : $h = h_n$ et $h' = h'_n$

tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Par conséquence, l'estimateur de $f(y/x)$ est donné par :

$$\widehat{f}_n^R(y/x) = \frac{\widehat{f}_{n,XY}(x,y)}{\widehat{f}_{n,X}(x)}$$

Cet estimateur a d'abord été introduit par Rosenblatt[31], Hyndman et al[7], ont proposer une amélioration à cet estimateur.

3.2 Présentation de l'estimateur

Pour simplifier l'exposition de notre estimateur, nous limitons cette présentation au cas unidimensionnel pour une valeur réelle X . Cependant, tous les résultats peut-être facilement étendu au cas multivariée.

3.2.1 La transformation de quantile

L'idée de transformer les données n'est pas nouvelle. Il a été utilisé pour améliorer l'applicabilité et la performance des techniques classiques d'estimation, par exemple. Pour traiter les données incomplètes (voir par exemple. Devroye et Lugosi[27] chapitre 14, et aussi Van der Vaart[53] chapitre 3.2 pour le sujet de la stabilisation dans un contexte paramétrique). Pour faire une inférence sur Y de X , une question naturelle qui se pose alors, quelle est la "meilleure" transformation?. Comme on peut le constater dans les références ci-dessus, la meilleure transformation est très liée à la distribution des données. Nous verrons ci-dessous que, pour notre problème, le candidat naturel est la transformation du quantile.

La transformation du quantile est une astuce probabiliste bien connue qui sert à réduire les preuves, par exemple dans la théorie des processus empiriques et pour des variables aléatoires réelle X a celles de la variable aléatoire U uniformément réparties sur l'intervalle $[0,1]$. Il est basé sur le fait que chaque fois que F est continu, la variable aléatoire $U = F(X)$ est uniformément répartie sur $[0, 1]$ et à l'inverse, lorsque F est arbitraire, si U est un aléatoire uniformément distribué sur $[0, 1]$, X est égal en loi à $F^{-1}(U)$, où $F^{-1} = Q$ est la fonction inverse ou quantile généralisée de X . (voir par exemple[16], chapitre 1).

En conséquence, compte tenu d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires avec des valeurs communes continue F assis sur un espace de probabilité (Ω, A, P) , on peut toujours agrandir cet espace de probabilité pour transporter une séquence (U_1, \dots, U_n) de variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ telles que $U_i = F(X_i)$, c'est-à-dire construire un Pseudo-échantillon avec une distribution marginale uniforme prescrite.

3.2.2 La représentation de copule

Formellement, une copule est une fonction de distribution bi- (ou multi) variable dont les propriétés marginales les fonctions de distribution sont uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, Sklar[1] a prouvé le résultat fondamental suivant :

$$F_{X,Y}(x, y) = C(F(x), G(y)), x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Théorème 3.2.1. *Pour toute fonction de distribution cumulative bivariée $F_{X,Y}$ sur \mathbf{R}^2 , avec des fonctions marginales de distribution cumulative F de X et G de Y , il existe une certaine fonction $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, appelée fonction dépendance ou copule, tel que*

$$C(u, v) = F_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v)), \quad -\infty \leq x, y \leq +\infty \quad (2)$$

Si F et G sont continus, cette représentation est unique par rapport à (F, G) . La fonction copule c'est elle-même une fonction de distribution cumulative sur $[0, 1]^2$ avec marginaux uniformes

Ce théorème donne une représentation de la fonction de densité conditionnelle dans le cas bivariée comme chaque fonction dans le cas univarié. En d'autres termes, la fonction copule gère la structure dépendance parmi les composants X et Y du vecteur (X, Y) , indépendamment de la distribution marginale F et G . Il permet de traiter l'aspect aléatoire de la structure de dépendance et le caractère aléatoire des marginaux séparément.

Les copules semblent être naturellement liées à la transformation quantile en formule (2) implique que $C(u, v) = F_{X,Y}(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$. Pour plus

de détails concernant les copules et leurs propriétés, on peut consulter par exemple le livre de Joe[17]. Les Copules ont été témoin d'un intérêt renouvelé pour les statistiques, notamment en finance, depuis le travail de Deheuvels[37], qui a introduit la copule pour les processus empiriques. La convergence de la copule du processus empirique a été étudiée par Deheuvels[37], Van der Vaart et Wellner[54], Fermanien, Radulovic et Wegkamp[24]. Pour l'estimation de la densité de la copule, on se réfère à Gijbels et Mielniczuk[19], Fermanian[22] et Fermanian et Scaillet[23].

À partir de maintenant, nous supposons que la fonction copule $C(u, v)$ a une densité $c(u, v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^2$ et que F et G sont strictement croissante et différentiable avec des densités f et g . $C(u, v)$ et $c(u, v)$ sont alors la fonction de distribution cumulée et la densité respectivement de les variables $(U, V) = (F(X), G(Y))$. Nous obtenons la densité jointe,

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x)g(y)c(F(x), G(y))$$

Où $c(u, v) = \frac{\partial^2 c(u, v)}{\partial u \partial v}$ est la densité de copule mentionnée ci-dessus. Finalement, on peut obtenir la formule explicite suivante de la densité conditionnelle

$$f_{Y/X}(x, y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f(x)} = g(y)c(F(x), G(y)). \quad (3)$$

3.2.3 Construction de l'estimateur

À partir du produit précédent pour la formule (3), une approche naturelle pour construire un estimateur de la densité conditionnelle est utilisé pour

- Un estimateur non paramétrique de la densité marginale g de Y par le noyau Parzen-Rosenblatt

$$\widehat{g}_n(y) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K_0 \left(\frac{y - Y_i}{h_n} \right)$$

– Les fonctions de distribution empirique $F_n(x)$ et $G_n(y)$ pour $F(x)$ et $G(y)$ respectivement,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{X_j \leq x} \text{ et } G_n(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{Y_j \leq y}$$

Concernant la densité de copule $c(u,v)$, est la densité des variables $(U,V) = (F(X),G(Y))$. Donc, $c(u,v)$ peut être estimé par un estimateur non paramétrique de la densité par le noyau de Parzen-rosenblatt de type bivarié.

$$c_n(u, v) = \frac{1}{na_nb_n} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{u - U_i}{a_n}, \frac{v - V_i}{b_n} \right) \quad (4)$$

Où K est le noyau bivarié et a_n, b_n les paramètres de lissage associés. Pour simplifier les calculs, on prend : $K(u, v) = K_1(u)K_2(v)$, avec $a_n = b_n$.

Toutefois, comme F et G sont inconnus, les variables aléatoires $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ ne sont pas observables, c-à-d c_n n'est pas une véritable statistique. Par conséquent, nous nous rapprochons du pseudo-échantillon $(U_i, V_i)_{i=1, \dots, n}$ par l'approximation empirique $(F_n(X_i), G_n(Y_i))_{i=1, \dots, n}$. Nous obtenons donc un véritable estimateur de $c(u, v)$

$$\widehat{c}_n(u, v) = \frac{1}{na_n^2} \sum_{i=1}^n K_1 \left(\frac{u - F_n(X_i)}{a_n} \right) K_2 \left(\frac{v - G_n(Y_i)}{b_n} \right) \quad (5)$$

Éventuellement, l'estimateur de la densité conditionnelle est donné :

$$\widehat{f}_n(y/x) = \left[\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K_0 \left(\frac{y - Y_i}{h_n} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{na_n^2} \sum_{i=1}^n K_1 \left(\frac{F_n(x) - F_n(X_i)}{a_n} \right) K_2 \left(\frac{F_n(y) - G_n(Y_i)}{a_n} \right) \right]$$

Où, sous une forme plus forte par :

$$\widehat{f}_n(y/x) = \widehat{g}_n(y) \widehat{c}_n(F_n(x), G_n(y)). \quad (6)$$

Remarque 3.2.1. :À notre connaissance, l'estimateur étudié n'a jamais été proposé dans la littérature. Cependant, certaines travaux ont été faites par la méthode des k -plus proche voisin proposé par Stute[55], [56] et [57] pour la fonction de distribution conditionnelle cumulative et Gasser et Mürull [50] et Priestley et Chao[29] dans le contexte de l'estimation de la régression.

3.3 résultats asymptotiques

3.3.1 Notations et hypothèses

Nous notons le i ème moment du noyau (éventuellement multivarié) K comme $m_i(K) = \int u^i K(u) du$, et \mathbb{L} la norme de la fonction h par $\|h\|_p = \int h^p$. Nous utilisons le signe \simeq pour désigner l'ordre du paramètre de lissage, c'est-à-dire $h_n \simeq u_n$ signifie que $h_n = c_n u_n$ avec $c_n \rightarrow c > 0$. le support de la fonction de densité f et c sont noté par $supp(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$ et $supp(c) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, c(u, v) > 0\}$, respectivement. Pour indiquer nos résultats, nous devons faire des hypothèses de régularité sur les noyaux et les densités qui, bien que loin d'être minimales, sont d'habitude dans l'estimation de la densité du noyau. ensemble x et y deux points fixes à l'intérieur de $supp(f)$ et $supp(g)$ respectivement. Dans le reste de cet article, nous supposons toujours cette

- la fonction de densité conditionnelle F de X et G de Y sont strictement croissantes et différentiables
- la densités g et c sont deux fois différentiables avec des dérivées seconde bornées et continues sur leur support.

En outre, nous supposons que les noyaux K_0 et K vérifient les hypothèses suivantes :

- K et K_0 sont de support borné et de variation bornée
- $0 \leq K \leq C$ et $0 \leq K_0 \leq C$ pour une constante C

- K et K_0 sont les noyaux de premier ordre $m_0(K) = 1$, $m_1(K) = 0$ et $m_2(K) < +\infty$ Et le même pour K_0

De plus, afin de rapprocher \hat{c}_n par c_n , nous imposerons un peu plus hypothèse stricte sur le noyau bivarié K , qu'il est deux fois différentiable avec des dérivées partielles bornées.

3.3.2 La consistante forte de l'estimateur

Ce théorème porte sur la convergence forte de l'estimateur,

Théorème 3.3.1. : *soit les conditions de régularité sur les densités et les noyaux étaient satisfaites, si h_n et a_n tendent vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ telle que $nh_n \rightarrow \infty$, $na_n^2 \rightarrow \infty$ alors*

$$\hat{f}(y/x) = f(y/x) + O_P \left(\frac{1}{\sqrt{nh_n}} + h_n^2 + \frac{1}{\sqrt{na_n^2}} + a_n^2 \right)$$

Preuve : Rappelons de (4) et (5) que c_n et \hat{c}_n sont des estimateurs de la densité de copule c basés respectivement sur des pseudo-données non observables $(F(X_i), G(Y_i))$, et leurs l'approximations $(F_n(x), G_n(y))$ L'ingrédient principal de la preuve suit de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y/x) - f(y/x) &= \hat{g}_n(y)\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - g(y)c(F(X_i), G(y)) \\ &= [\hat{g}_n(y) - g(y)]\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) \\ &\quad + g(y)[\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - c(F(x), G(y))] \\ &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

Nous procédons un peu plus loin dans la décomposition de chaque termes,

$$\begin{aligned} D_1 &= [\hat{g}_n(y) - g(y)][\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - \hat{c}_n(F(X_i), G(y))] \\ &\quad + [\hat{g}_n(y) - g(y)][\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - c_n(F(x), G(y))] \\ &\quad + [\hat{g}_n(y) - g(y)][\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - c(F(x), G(y))] \\ &\quad + [\hat{g}_n(y) - g(y)][c(F(x), G(y))] \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= g(y)[\widehat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - \widehat{c}_n(F(X_i), G(y))] \\
&+ g(y)[\widehat{c}_n(F(x), G(y)) - c_n(F(x), G(y))] \\
&+ g(y)[\widehat{c}_n(F(x), G(y)) - c(F(x), G(y))] \quad (8)
\end{aligned}$$

Les résultats de la convergence des estimateurs à noyau de la densité de la section 3.5.2 entraîne que :

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_n(y) - g(y) &= O_p(h_n^2 + 1/\sqrt{nh_n}) \\
c_n(F(x), G(y)) - c(F(x), G(y)) &= O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{nh_n^2})
\end{aligned}$$

par les lemmes 2 et 3 Les lemmes 4 et 5 entraîne :

$$\widehat{c}_n(F(x), G(y)) - c_n(F(x), G(y)) = O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{na_n^2}) \quad (3.1)$$

$$\widehat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - \widehat{c}_n(F(x), G(y)) = O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{nh_n^2}) \quad (3.2)$$

Par la suite, on obtient :

$$D_1 = O_p(h_n^2 + 1/\sqrt{nh_n})O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{na_n^2}) + O_p(h_n^2 + 1/\sqrt{nh_n}) \quad (3.3)$$

$$D_2 = O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{nh_n^2}) + O_p(a_n^2 + 1/\sqrt{na_n^2}) \quad (3.4)$$

et les conditions $a_n \rightarrow 0$, $h_n \rightarrow 0$, $na_n^2 \rightarrow +\infty$, $nh_n \rightarrow +\infty$ entraîne la convergence de l'estimateur

Remarque 3.3.1. : Comme corollaire, on obtient la vitesse de convergence, en choisissant les paramètres de lissage qui équilibrent le biais et la variance, pour un choix optimal par $h_n \simeq n^{-1/5}$ et $a_n \simeq n^{-1/3}$, on obtient :

$$\widehat{f}(y/x) = f(y/x) + O_P(n^{-1/3})$$

Par conséquent, notre estimateur possède une vitesse de convergence optimale dans le sens où il atteint la valeur minimale $n^{-1/3}$ de la convergence, selon Stone[7].

Dans la suite on présente un résultat sur la consistance fort de l'estimateur par le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *soit les conditions de régularité sur les densités et les noyaux étaient satisfaites. Si en plus $nh_n/(\ln \ln n) \rightarrow \infty$ et $na_n^2/(\ln \ln n) \rightarrow \infty$, alors*

$$\widehat{f}_n(y/x) = f(y/x) + O_{a.s} \left(a_n^2 + \sqrt{\frac{\ln \ln n}{na_n^2}} + h_n^2 + \sqrt{\frac{\ln \ln n}{nh_n}} \right)$$

Remarque 3.3.2. *pour $h_n \simeq (\ln \ln n/n)^{1/5}$ et $a_n \simeq (\ln \ln n/n)^{1/6}$ qui est la balance optimale entre le biais et le terme stochastique, on obtient la vitesse optimale $(\ln \ln n/n)^{1/3}$*

3.3.3 Convergence en loi

Théorème 3.3.3. *Sous les conditions de régularité sur les densités et les noyaux. $h_n \rightarrow \infty$ et $a_n \rightarrow \infty$ et $na_n^2 \rightarrow \infty$, alors*

$$\sqrt{na_n^2}(\widehat{f}_n(y/x) - f(y/x)) \rightsquigarrow^d \mathcal{N}(0, g(y)f(y/x)\|K\|_2^2)$$

pour $h_n \simeq n^{-1/5}$, $a_n \simeq n^{-1/6}$, on obtient une vitesse usuelle $n^{-1/3}$

Preuve Avec les conditions sur paramètres de lissage, tous les termes de la décomposition précédente 7 et 8 sont négligeables par rapport à $(na_n^2)^{-1/2}$, sauf $c_n(F(x), G(y)) - c(F(x), G(y))$, qui est asymptotiquement normal par le lemme 3.

$$\sqrt{na_n^2}g(y)[c_n(F(x), G(y)) - c(F(x), G(y))] \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, g^2(y)c(F(x), G(y))\|K\|_2^2)$$

3.3.4 Biais Asymptotique, Variance et erreur quadratique moyenne

Le biais asymptotique est calculé dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.4.1. *Avec les hypothèses du théorème 3.3.2, nous avons*

$$B_0 = E(\widehat{f}(y/x)) - f(y/x) = g(y)B_K(c, x, y)\frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$$

$$\text{Avec } B_K(c, x, y) = m_2(K_1)\frac{\partial^2 c(F(x), G(y))}{\partial u^2} + m_2(K_2)\frac{\partial^2 c(F(x), G(y))}{\partial v^2}$$

La variance asymptotique a déjà été dérivée dans le théorème 3.3.1

$$V_0 = \text{Var}(\widehat{f}(y/x)) = 1/(na_n^2)g(y)f(y/x)\|K\|_2^2 + o(1/(na_n^2))$$

Le calcul du biais asymptotique et la variance asymptotique, on obtient l'asymptotique erreur quadratique moyenne comme un corollaire :

Corollaire 3.3.1. *Avec les hypothèses précédentes, l'asymptotique erreur quadratique moyenne asymptotique (AMSE) à (x, y) est*

$$MSE = B_0^2 + V_0 \tag{3.5}$$

$$= \frac{a_n^4 g^2(y) (B_k(c, x, y))^2}{4} + \frac{g(y)f(y/x)\|K\|_2^2}{na_n^2} + o\left(a_n^4 + \frac{1}{na_n^2}\right) \tag{3.6}$$

Qui donne, pour le choix le parametre de lissage.

$$MSE = n^{-2/3}g^2(y)\left(\frac{B_K^2(c,x,y)}{4} + c(F(x), G(y))\|K\|_2^2\right) + o(n_{-2/3})$$

3.4 Comparaison avec d'autres estimateurs

3.4.1 Présentation des estimateurs

Pour plus de commodité, nous rappelons ci-dessous la définition des autres estimateurs de la densité conditionnelle figurant dans la littérature et résumons les propriétés de leur biais et de variance. Notée le biais de l'estimateur $\widehat{f}_n^i(y/x)$ par E_i et sa variance par V_i .

1. Estimateur à double du noyau :

$$\widehat{f}_n^{(1)}(y/x) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K'_{h_1}(X_i - x) K_{h_2}(Y_i - y)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K'_{h_1}(X_i - x)}$$

où h_1 et h_2 sont les paramètres de lissage. On a alors

– Biais :

$$B_1 = \frac{h_1^2 m_2(K)}{2} \left(2 \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{\partial f(y/x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial x^2} + \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial y^2} \right) + o(h_1^2 + h_2^2)$$

– Variance :

$$V_1 = \frac{|K|_2^2 f(y/x)}{n h_1 h_2 f(x)} \left(|K|_2^2 - h_2 f(y/x) + o\left(\frac{1}{n h_1 h_2}\right) \right)$$

2. Estimateur local linéaire :

$$R(\theta, x, y) = \sum_{i=1}^n \left(K_{h_2}(Y_i - y) - \sum_{j=0}^r \theta_j (X_i - x)^j \right)^2 K'_{h_1}(X_i - x)$$

Alors l'estimateur local linéaire est défini comme :

$$\widehat{f}_n^{(2)}(y/x) = \widehat{\theta}_0$$

où $\widehat{\theta}_{xy} = (\widehat{\theta}_0, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_r)$ est la valeur de θ Minimisant $R(\theta, x, y)$. Cet estimateur polynomial local, bien qu'il a un biais supérieur à celui du noyau. Comme résultat de [22], Le biais de l'estimateur local linéaire ([21] P.256) est :

– Biais

$$B_2 = \frac{h_1^2 m_2(K')}{2} \frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial^2 x} + \frac{h_2^2 m_2(K)}{2} \frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial^2 y} + o(h_1^2 + h_2^2)$$

– Variance :

$$V_2 = \frac{|K|_2^2 |K'|_2^2 f(y/x)}{nh_1 h_2 f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_1 h_2}\right)$$

3. **Estimateur local paramétrique** comme dans [43] et [21] est

$$R_1(\theta, x, y) = \sum_{i=1}^n (K_{h_2}(Y_i - y) - A(X_i - x, \theta))^2 K'_{h_1}(X_i - x)$$

où $A(x, \theta) = l\left(\sum_{j=0}^r \theta_j (X_i - x)^j\right)$ et $l(\cdot)$ est une fonction monotone $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, par exemple $l(u) = \exp(u)$ Alors,

$$\widehat{f}_n^{(3)}(y/x) = A(0, \widehat{\theta}) = l(\widehat{\theta}_0).$$

– Biais :

$$B_3 = h_1^2 \eta(K') \left(\frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A(0, \theta_{xy})}{\partial x^2} \right) + \frac{h_2^2 m_2(K)}{2} \frac{\partial^2 f(y/x)}{\partial y} + o(h_1^2 + h_2^2)$$

– Variance :

$$V_3 = \frac{\tau(K, K')^2 f(y/x)}{nh_1 h_2 f(x)} + o\left(\frac{1}{nh_1 h_2}\right)$$

où η et τ Sont des noyaux dépendantes.

3.4.2 Modèle et comparaison des résultats

Dans cette partie nous présentons un modèle de simulation sur un échantillon de taille $n = 100$ de variables (X_i, Y_i) , X et Y sont les distributions marginales de lois $\mathcal{N}(0, 1)$ résumé par la copule de Frank

$$C(u, v, \theta) = \frac{\ln[\theta + \theta^{u+v} - \theta^u - \theta^v / (\theta - 1)]}{\ln\theta}$$

avec parametre $\theta = 100$

, pour le choix du noyau, on introduit le noyau d'Epachnikov pour $\hat{g}(y)$ et les autres estimateurs. on trace a densité conditionnelle sur le domaine $x \in [-5, 5]$ et $y \in [-3, 3]$. les résultats de simulation montrent la consistance de l'estimateur introduit par l'approche de copules.

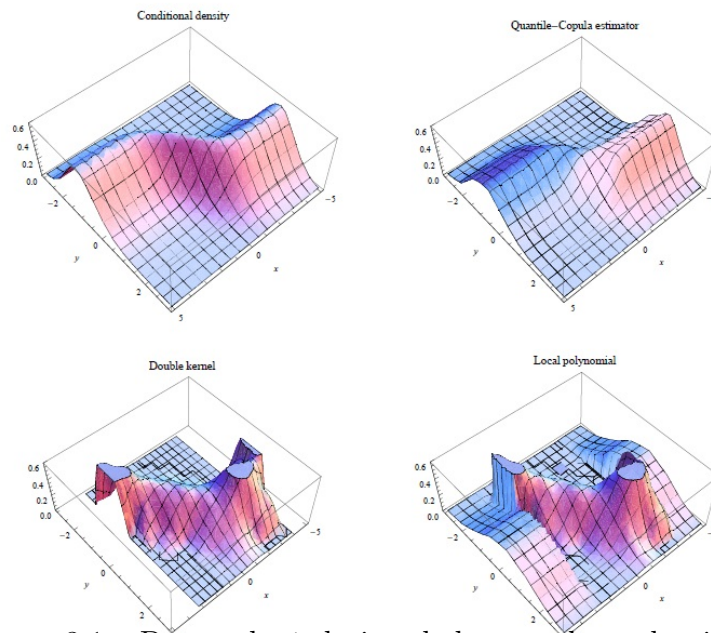


FIGURE 3.1 – De gauche à droite, de haut en bas : densité réelle, estimateur quantile de copule, noyau double, polynôme local (coupé).

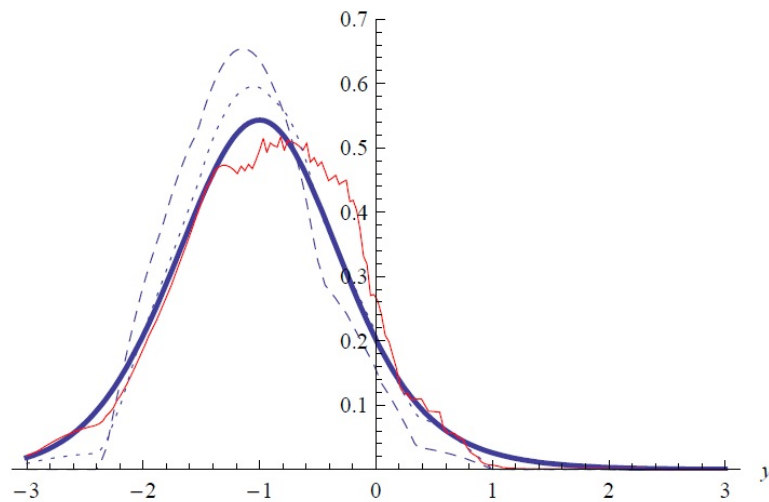


FIGURE 3.2 – Comparaison à $x = 2$: densité conditionnelle = courbe épaisse, quantile de copule = ligne continue, double noyau = courbe pointillée, polynôme local = pointillé courbe.

3.5 Résultats auxiliaires

3.5.1 Approximation des pseudo-variables $F(X_i)$ par leurs estimations $F_n(X_i)$

Pour $(X_i, i = 1, \dots, N)$ et échantillon d'une variable aléatoire réelle X i.i.d avec commune la fonction de densité conditionnelle F , la statistique Kolmogorov-Smirnov est définie comme $D_n = \|F_n - F\|_\infty$. Glivenko-Cantelli, Kolmogorov et Smirnov, Chung, Donsker parmi d'autres ont étudié ses propriétés de convergence dans une généralité croissante (voir [16] et [54] pour les comptes récents). Pour notre but, nous n'avons qu'à formuler ces résultats dans la forme approximative suivante :

Lemme 1. *Pour un échantillon i.i.d d'un F continu*

$$\|F_n - F\|_\infty = o_{p.c} \left(\frac{\ln \ln n}{n} \right) \quad (3.7)$$

$$\|F_n - F\|_\infty = o_P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (3.8)$$

Comme F est inconnu, les variables aléatoires $U_i = F(X_i)$ ne sont pas observées. Comme un conséquence du lemme1, on peut naturellement se rapprocher de ces variables par les statistiques $F_n(X_i)$. Effectivement,

$$|F(X_i - F_n(X_i))| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - F_n(x)| = \|F_n - F\|_\infty, p.c$$

Ainsi, $|F(X_i - F_n(X_i))|$ n'est plus que $O_P((\ln \ln n / n)^{1/2})$ ou $O_{p.c}(n^{-1/2})$. Ces taux d'approximation semblent être plus rapides que la statistique d'estimation densités, comme indiqué dans la prochaine subsection.

3.5.2 Convergence de l'estimateur de densité du noyau \hat{g}_n

Nous rappelons ci-dessous quelques résultats classiques sur la convergence de l'estimateur non paramétrique du noyau Parzen-Rosenblatt f_n d'une densité d -variable. Depuis sa création par Rosenblatt [30] et Parzen [6], il a été étudié par beaucoup d'auteurs. Voir par exemple Scott [58], Prakasa Rao [?], Nadaraya [10] pour plus de détails. Voir aussi Bosq [8] chapitre 2. Il est bien connu que le biais de l'estimateur de densité du noyau dépend de la degré de douceur de la densité sous-jacente, mesuré par son nombre de dérivés ou son ordre Lipschitz. Afin d'obtenir la convergence du biais à zéro, il suffit de supposer que la densité est continue (voir [9]). Obtenir plus d'informations sur le taux de convergence de l'estimateur, il est nécessaire pour faire d'autres hypothèses. En outre, pour les fonctions du noyau sans bornées, le taux de convergence dépend aussi du comportement de la noyau (voir Stute [55]). Par conséquent, pour de l'exposition et la simplicité de les notations, nous ferons les hypothèses habituelles selon les quelles la densité est deux fois différentiable et que le noyau est un support bornée. Nous avons alors les résultats suivants :

1. Biais : avec les hypothèses précédentes, pour un x à l'intérieur de $\text{supp}(f)$, $h_n \rightarrow 0$ et nh_n^d implique que

$$E\hat{f}_n(x) = f(x) + \frac{h_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j K(z) dz + o(h_n^2).$$

Avec le noyau multivarié K comme produit d'un ordre, un noyau K_i , la somme ci-dessus se réduit aux termes diagonale.

$$E\hat{f}_n(x) = f(x) + \frac{h_n^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{1 \leq i, \leq d} m_2(K_i) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} + o(h_n^2).$$

2. Variance : avec les mêmes hypothèses,

$$\text{Var}[\hat{f}_n(x)] = \frac{f(x)}{nh_n^d} \|K\|_2^2 + o\left(\frac{1}{nh_n^d}\right).$$

3. La normalité asymptotique du point,

$$\sqrt{nh_n^d}(\hat{f}_n(x) - \mathbb{E}\hat{f}_n(x)) \rightsquigarrow^d \mathcal{N}(0, f(x) \|K\|_2^2).$$

Pour un choix le paramètre de lissage comme $h_n \simeq n^{-1/(d+4)}$, qui réalise compromis optimal entre le biais et la variance, on obtient le taux $n^{-2/(d+4)}$, quelle est la vitesse optimale de convergence au sens minimal dans la classe de fonctions de densité avec secondes dérivées bornées, selon [7].

4. Point de convergence presque sur : si par ailleurs $nh_n^d/(\ln \ln n) \rightarrow \infty$
Nous avons cela

$$\hat{f}_n(x) - \mathbb{E}\hat{f}_n(x) = O_{p.c} \left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{nh_n^d}} \right)$$

Pour choisie le paramètre de lissage comme $h_n \simeq ((\ln \ln n)/n)^{1/(d+4)}$,
Nous obtenons le taux de convergence $((\ln \ln n)/n)^{1/(d+4)}$:

$$\hat{f}_n(x) - f(x) = O_{p.c} \left(\left(\frac{\ln \ln n}{n} \right)^{2/(d+4)} \right)$$

Appliqué à notre cas ($d = 1$), nous pouvons résumer ces résultats pour plus d'informations Dans le lemme suivant pour l'estimateur \hat{g}_n de la densité g de Y :

Lemme 2. *Avec les hypothèses précédentes, pour un point y à l'intérieur de Le support de g , et un paramètre de lissage choisie comme $h_n \simeq n^{-1/5}$, nous avons*

$$|\hat{g}_n(y) - g(y)| = O_p(n^{-2/5})$$

$$n^{-2/5}[\hat{g}_n(y) - g(y)] \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, g(y) \| K_0 \|_2^2).$$

Avec les mêmes hypothèses, mais pour un choix de paramètre de lissage comme $h_n \simeq ((\ln \ln n)/n)^{1/5}$,

$$\hat{g}_n(y) - g(y) = O_{p.c} \left(\left(\frac{\ln \ln n}{n} \right)^{2/5} \right).$$

3.5.3 Convergence de $c_n(u, v)$

Comme les hypothèses selon lesquelles F et G peuvent être différentiables et strictement croissant implique que c est la densité des variables transformées $(U, V) = (F(x), G(y))$. Par conséquent, une fois que $c_n(u, v)$ est simplement l'estimateur du noyau de la densité bivariable $c(u, v)$ de la Pseudo-variables (U, V) , on tire directement ses propriétés de convergence en applique les résultats de la subsection précédente avec $d = 2$

3.5.4 Une approximation de $\hat{c}_n(u, v)$ par $c_n(u, v)$

Le lemme de cette section donne le taux d'approximation d'estimateur de la densité de copule du noyau $c_n(u, v)$ calculé sur les données réelles $(F_n(X_i), G_n(Y_i))$ par son analogique $c_n(u, v)$ calculé sur les pseudo-données $(U_i, V_i) = (F(X_i), G(Y_i))$. le similaire du résultat, mais avec une preuve différente, a été obtenu en Fermanian [23] théorème 1

Lemme 3. *Pour un choix de $a_n \simeq n^{-1/6}$, pour tout $(u, v) \in (0, 1)^2$, le similaire de résultat du lemme 2 pour \hat{c}_n avec un taux de convergence de $n^{-1/3}$ et $(\ln \ln n/n)^{1/3}$ respectivement.*

Le lemme de cette section donne le taux d'approximation de l'estimateur de densité de copule du noyau $\hat{c}_n(u, v)$ Calculé sur les données réelles $(F_n(X_i), G_n(Y_i))$ Par son analogue $c_n(u, v)$ Calculé sur les pseudo-données $(U_i, V_i) = (F(X_i), G_n(Y_i))$. Un similaire de résultat, mais avec une preuve différente, a été obtenu en Fermanian [9] théorème 1.

Lemme 4. *soit $(u, v) \in (0, 1)^2$. pour le noyau $K(u, v) = K_1(u)K_2(v)$ est deux fois différentiable avec les secondes dérivées bornées, puis*

$$|\hat{c}_n(u, v) - c_n(u, v)| = o_p(a_n^2 + 1/\sqrt{na_n^2}) \quad (3.9)$$

$$|\hat{c}_n(u, v) - c_n(u, v)| = o_{a.s.} \left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{na_n^2}} \right) \quad (3.10)$$

Lemme 5. *Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme précédent, nous avons*

$$\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - \hat{c}_n(F(x), G(y)) = o_P \left(a_n^2 + \frac{1}{\sqrt{na_n^2}} \right) \quad (3.11)$$

$$\hat{c}_n(F_n(x), G_n(y)) - \hat{c}_n(F(x), G(y)) = O_{a.s.} \left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}} \right) \quad (3.12)$$

3.6 Simulation

```
library(VineCopula)
```

```
mar=c(3,3,3,7)
par(mfrow = c(2, 2),mar=c(3.1,4.1,3.1,5.1),cex.main = 1.7, cex.lab =
1,cex.axis = 1)
```

```
nf <- layout(matrix(c(1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,0,7,7,0), 4, 4, byrow=TRUE),
respect=FALSE)
```

```
dat = BiCopSimn = 1000, family = 5, par = BiCopTau2par(family = 5,
tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[,1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 5, par = BiCopTau2par(family = 5,
main = "Frank"))
```

```
dat = BiCopSimn = 1000, family = 2, par = BiCopTau2par(family =
1,
tau = -0.5), par2=3)
BiCopMetaContour(u1 = dat[,1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2),
family = 2, par = BiCopTau2par(family = 1,
tau = -0.5), par2=3,margins="norm", main = "Student-t")
```

```
dat = BiCopSimn = 1000, family = 23, par = BiCopTau2par(family
= 23,
tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[, 1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
```

```
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 23, par = BiCopTau2par(family = 23,
tau = -0.5), margins="norm", main = "Clayton 90 degrees")

dat = BiCopSimn = 1000, family = 33, par = BiCopTau2par(family =
33,
tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[, 1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 33, par = BiCopTau2par(family = 33,
tau = -0.5), margins="norm",
main = "Clayton270 degrees")

dat = BiCopSimn = 1000, family = 24, par = BiCopTau2par(family =
24,
tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[, 1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 24, par = BiCopTau2par(family = 24,
tau = -0.5), margins="norm",
main = "Gumbel 90 degrees")

dat = BiCopSimn = 1000, family = 34, par = BiCopTau2par(family =
34,
tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[, 1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
levels = c(0.01,
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 34, par = BiCopTau2par(family = 34,
tau = -0.5), margins="norm",
main = "Gumbel 270 degrees")

dat = BiCopSimn = 1000, family = 1, par = BiCopTau2par(family =
1, tau = -0.5))
BiCopMetaContour(u1 = dat[, 1], u2 = dat[, 2], bw = 1, size = 100,
```

```
levels = c(0.01,  
0.05, 0.1, 0.15, 0.2), family = 1, par = BiCopTau2par(family =1, tau  
= -0.5),  
margins="norm", main = "Gaussian")
```

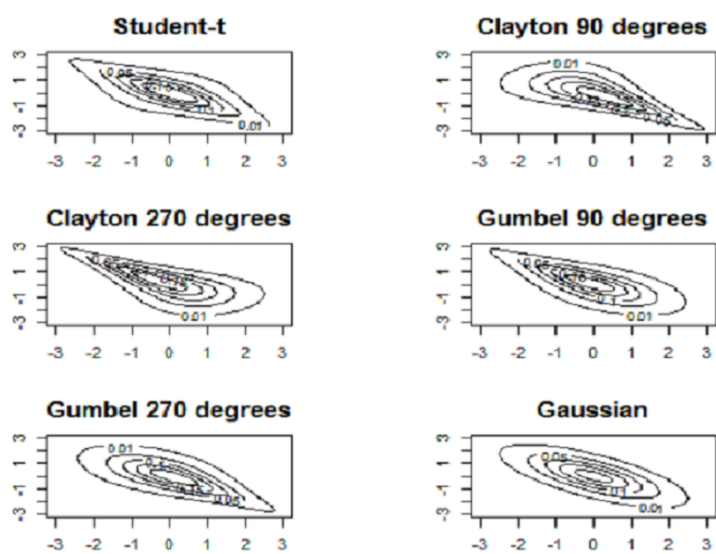


FIGURE 3.3 – Simulation des copules

Conclusion

Notre travail porte sur l'estimation de la densité conditionnelle par l'approche de copule, dans un premier temps on a présenter cette approche, on a donner l'écriture explicite de l'estimateur. Une étude asymptotique a été faite pour confirmer la consistance de l'estimateur. Notre travail est achevé par des résultats de simulation qui confirme l'étude théorique et montre que cette approche donne un estimateur très fiable.

bibliographie

Bibliographie

- [1] A.Sklar(1959) Fonction de répartition à n-dimonsion et leurs marges. Publ Inst Statist Univ Paris8
- [2] Berrada, T, Du puis, D, Jacquier, E, Papageorgion, N, et Remillard, B.(2006), "Credit migration and derivatives pricing copulas", Journal of Computational Finance
- [3] Black, F. et scholes , M.(1973), "the pricing of options and corporate liabilities", Journal of Political Economy
- [4] Berrada, T, Du puis, D, Jacquier, E, Papageorgion, N, et Remillard, B.(2006), "Credit migration and derivatives pricing copulas", Journal of Computational Finance
- [5] B. L. S. Prakasa Rao. Nonparametric functional estimation. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1983.
- [6] C. Lacour. Adaptive estimation of the transition density of a markov chain. Ann. Inst. H. Poincar ´e Probab. Statist., 43(5) :571-597, 2007.
- [7] C. J. Stone. Optimal rates of convergence for nonparametric estimators. Ann. Statist., 8(6) :1348-1360, 1980.
- [8] D. Bosq. Nonparametric statistics for stochastic processes, volume 110 of Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, New York, second edition,1998. Estimation and prediction.
- [9] E. Parzen. On estimation of a probability density function and mode. Ann. Math. Statist., 33 :1065-1076, 1962.

-
- [10] E. A. Nadaraya. Nonparametric estimation of probability densities and regression curves, volume 20 of Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by Samuel Kotz.
- [11] Fréchet M(1951) Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Univ Lyon Sect A 9
- [12] Féron R(1956) sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, cas de l'espace à trois dimensions. publ Inststatist Univ Paris 5 :3-12
- [13] Guillaume Bergeon :Évaluation d'options bivariées à l'aide de copules dynamiques sous des processus GARCH, Sciences de la gestion, Décembre 2009, these
- [14] Genest C, MacKay J(1986b) the joy of copulas : Bivariate distribution with uniform marginals. Amer Statist 40 :280.285
- [15] Genest, L.-P. Rivest, A characterization of Gumbel's family of extreme value distributions, Statistics and Probability Letters 8 (1989) pp. 207-211.
- [16] G. R. Shorack and J. A. Wellner. Empirical processes with applications to statistics. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley , Sons Inc, New York, 1986
- [17] H. Joe. Multivariate models and dependence concepts, volume 73 of Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman , Hall, London, 1997.
- [18] Hoeffding.W . Masstabinvariante Korrelationstheorie. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin, 5(3) :179-233, 1940. Réimprimé sous Scale-invariant correlation theory. Fisher NI, Sen PK (eds) The Collected Works of Wassily Hoeffding. Springer, New York pages 57-107.
- [19] I. Gijbels and J. Mielniczuk. Estimating the density of a copula function. Comm. Statist. Theory Methods, 19(2) :445-464, 1990.

-
- [20] J. Fan and Q. Yao. Nonlinear time series. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, second edition, 2005. Nonparametric and parametric methods
- [21] J. Fan, Q. Yao, and H. Tong. Estimation of conditional densities and sensitivity measures in nonlinear dynamical systems. *Biometrika*, 83(1) :189-206, 1996
- [22] J.-D. Fermanian. Goodness-of-fit tests for copulas. *J. Multivariate Anal.*, 95(1) :119-152, 2005.
- [23] J.-D. Fermanian and Scaillet O. Nonparametric estimation of copulas for time series. *Journal of Risk*, 5(4) :25-54, 2003
- [24] J.-D. Fermanian, D. Radulovi ´c, and M. Wegkamp. Weak convergence of empirical copula processes. *Bernoulli*, 10(5) :847-860, 2004
- [25] J. Gustafson, M. Hagmann, J.P. Nielsen, and O. Scaillet. Local transformation kernel density estimation of loss distributions. Forthcoming in *Journal of Business and Economic Statistics*, 2007.
- [26] L. Gyorfı and M. Kohler. Nonparametric estimation of conditional distributions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 53(5) :1872-1879, 2007.
- [27] L. Devroye and G. Lugosi. Combinatorial methods in density estimation. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [28] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1988). Families of Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association*. 84. 834-841.
- [29] M. B. Priestley and M. T. Chao. Non-parametric function fitting. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 34 :385-392, 1972.
- [30] M. Rosenblatt. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.*, 27 :832-837, 1956.
- [31] M. Rosenblatt. Conditional probability density and regression estimators. In *Multivariate Analysis, II (Proc. Second Internat. Sympos., Dayton, Ohio, 1968)*, pages 25-31. Academic Press, New York, 1969.
- [32] Nelsen, R.B. (1999). *An introduction to copulas*. Springer Verlag.

- [33] N.K. Estimation Non-Paramétrique de la distribution et densité de copules, these doctorat, Faculté sciences univ sherbrooke, Quebec, Canada, avril 2014
- [34] Olivier P. Fangeres : A quantile-copula approach to conditional density estimation, these, Submitted on 12 Jun 2008
- [35] P. Deheuvels. Conditions nécessaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278 :1217-1220, 1974
- [36] P. Deheuvels. La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance. *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*(5), 65(6) :274-292, 1979.
- [37] P. Deheuvels. A Kolmogorov-Smirnov type test for independence and multivariate samples. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 26(2) :213-226, 1981
- [38] P. D. Hoff. Extending the rank likelihood for semiparametric copula estimation. *Annals Appl. Stats.*, 1(1) :265-283, 2007.
- [39] Kole, E, Koedijk, K. et Verbeek, M.(2007), "Selecting copulas for risk management", *Journal of Banking and Finance*
- [40] Rémillard, B. et Papageorgion, N.(2010), "Dynamic copulas", Geard
- [41] Roger B. Nelsen : An Introduction to Copulas. Springer Series in Statistics. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2e édition, 2006.
- [42] R. J. Hyndman, D. M. Bashtannyk, and G. K. Grunwald. Estimating and visualizing conditional densities. *J. Comput. Graph. Statist.*, 5(4) :315- 336, 1996.
- [43] R. J. Hyndman and Q. Yao. Nonparametric estimation and symmetry tests for conditional density functions. *J. Nonparametr. Stat.*, 14(3) :259- 278, 2002.
- [44] Sklar. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8 :229-231, 1959.

- [45] SCHWEIZER B. 1991 Thirty years of copula, Advances in probability distributions with given marginals : beyond the copulas, ed. by G. Dall'Aglio, S. Kotz and G. Salinetti, Mathematics and its applications, v. 67, Kluwer Academic Publishers, 13-50.
- [46] Shorack, G.R. et J.A. Wellner 1986, Empirical Processes with Applications to Statistics, John Wiley, Sons, New York
- [47] S. X. Chen. Beta kernel estimators for density functions. *Comput. Statist.Data Anal.*, 31(2) :131-145, 1999
- [48] Tarek Zari : contribution à l'étude du processus empirique de copule, these de doctorat, Submitted 19 May 2010
- [49] Tenbusch. Nonparametric curve estimation with Bernstein estimates. *Metrika*, 45 :1-30, 1997.
- [50] T. Gasser and H.-G. Müller. Kernel estimation of regression functions. In *Smoothing techniques for curve estimation (Proc. Workshop, Heidelberg, 1979)*, volume 757 of *Lecture Notes in Math.*, pages 23-68. Springer, Berlin, 1979.
- [51] Vitale. R. A Bernstein polynomial approach to density estimation. In M.Puri (Ed.), *Statistical Inference and Related Topics*. Academic Press, New York, 2 :87-99, 1975.
- [52] W. Stute. On almost sure convergence of conditional empirical distribution functions. *Ann. Probab.*, 14(3) :891-901, 1986.
- [53] W.A. van der Vaart. *Asymptotic statistics*, volume 3 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [54] W.A. van der Vaart and J. A. Wellner. *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to statistics.
- [55] W. Stute. A law of the logarithm for kernel density estimators. *Ann. Probab.*, 10(2) :414-422, 1982.
- [56] W. Stute. Asymptotic normality of nearest neighbor regression function estimates. *Ann. Statist.*, 12(3) :917-926, 1984.

- [57] W. Stute. Conditional empirical processes. *Ann. Statist.*, 14(2) :638-647,1986.
- [58] W.D. Scott. *Multivariate density estimation*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Applied Probability and Statistics. John Wiley et Sons Inc., New York, 1992. Theory, practice, and visualization, A Wiley-Interscience Publication.