République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Les vitesses de convergence uniforme pour l'estimation non-paramétrique

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des processus et Applications

par

Moussaoui **A**icha [1]

Sous la direction de

Dr F. Madani

Soutenu le 25 Mai 2017 devant le jury composé de

A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
F. Madani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
N. Hachemi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
A. Benzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : moussaoui.aicha1992@gmail.com

Remerciements

Au début et avant tout, je rends grâce à dieu **ALLAH** tout puissant qui m'a aidé à terminer ce travail. Merci pour me guider et être toujours avec moi.

Je souhait d'abord exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le **Dr. Fethi-Madani** pour son soutien constant tout au long de la préparation de ce travail.je remercie pour son appui scientifique, qui m'a été indispensable et aussi pour ses encouragements aux initiatives personnelles,ses orientations, ses conseils et sa disponibilité.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Et remercies à ma mère, mon père, mes frères, mes soeurs, mes amies pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de la préparation de ce projet de fin d'étude.

Dédicaces

A tous ceux qui me sont chèrs

Table des matières

Introduction

Depuis de plus 50 ans, la statistique mathématique découvert le problème de l'estimateur, de la fonction de densité de probabilité de variable aléatoire continue d'un échantillon aléatoire. En (1956) Rosenblatt a ètè introduit pour la première fois l'estimateur du noyau pour l'estimateur de la densité et par Nadaraya (1964) et Waston (1964) pour l'estimateur de la régression. L'estimateur linéaire locale introduit par Stone (1977) est entré par le travail de Fan (1992,1993). En (1995) Andrews donna un ensemble complet des résultats concernant la cohérence uniforme du noyau d'estimateurs mais ne sont pas clairs. Masry (1996) calcule la vitesse pour une convergence uniforme presque sûre mais limite au cas de régression borne et place des conditions trop restrictives sur les fonctions de régression. En (2003) Fan et Yao on également donnent un ensemble de résultats mais ils sont restrictifs dans leur application.

La convergence uniforme pour les moyennes des noyaux a ètè introduit pour un certains des documents Peligrad (1991), Newey(1994), Andrews(1995), Liebscher(1996), Masry(1996), Bosq(1998), Fan et Yao(2003), et Ango NZe et Doukhan(2004). La vitesse uniforme que nous avons obtenue pour la fonction d'estimateur est optimal dans le sens de Stone (1982). Dans le temps discret, plusieurs auteurs, dont Bienens(1983), Andrews(1995), Liescher(1996), Masry(1996), Bosq(1998), Fan et Yao(2003), Harsen(2008), Kristensen(2009), Kong, Linton et Xia(2010) et Gao, Kanaya, Li et Tjøsthein(2015) ont étudié la convergence uniforme des estimateurs basés sur le noyau. Kutoyants(1999) et Vanzanten(2000) considèrent l'estimation de la densité pour les processus de deffision et présentent la convergence uniforme de l'estimateur de densité à base de noyau. Krinsenten(2008) considèrent les vitesses de convergence des estimateurs non paramétrique par rapport à la norme intégrale L_2.

L'estimation de la fonction de répartition conditionnelle dans un cadre fonctionnel a été introduite par Ferraty et al(2006). Ils ont construit un estimateur à double noyau pour la fonction de répartition conditionnelle et ils ont précisé la vitesse de convergence presque complète de cet estimateur lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Le cas des observation α-mélangeantes a été étudié par Ferraty et al(2005), et plusieurs auteurs ont traité l'estimation de la fonction de répertition conditionnelle comme une étude préliminaire de l'estimation des quantiles conditionnels, Ezzahrioui et Ould-saïd(2005, 2006) qui étudié la normalité asymptotique de cet estimateurs dans les deux cas ($i.i.det\alpha mlangeant$). Une autre méthode d'estimation pour les quantiles conditionnels a été proposée par Laksaci et al(2009).

La littérature sur l'estimation de la fonction de hasard conditionnlles est relativement restreinte en statistique fonctionnelle. L'article de Ferraty et al(2008), dans cette publication des auteurs les auteurs on établis la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de la fonction de hasard conditionnelle, lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Ezzahrioui(2007) a étudié la normalité asymptotique. Le cas α-mélangeant a été traité par Quintela-Del-Rio(2010). Ce dernier a établi la convergence presque complète et la normalité asymptotique de l'estimateur proposé par Ferraty et al(2008).

L'estimation de la fonction de densité conditionnelle, en statistique fonctionnelle, a été introduite par Ferraty et al(2006). Ces autres ont obtenu la convergence presque complète dans le cas $i.i.d.$ Ferraty el al(2005) ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau du mode conditionnel défini par la variable aléatoire maximisant la densité conditionnelle. Ezzahrioui et Ould-Saïd(2010) on étudiée la normalité asymptotique de l'estimateur a noyau dans les données dépendantes. Madani et al (2012) ont établila convergence uniforme et prêsque complète de l'estimateur linéaire local de la densité conditionnelle pour des données fonctionnelles.

Les premiers résultats en statistique non paramétrique fonctionnelle ont été élaborés par Ferraty et vieu(2006) et ils concernent l'estimation de la fonction de régression à variable explicative de dimension fractale. Ils ont établi la convergence presque complète d'un estimateur à noyau de ce modèle non paramétrique dans la théorie des probabilités de petites boules, Ferraty et vieu(2004) ont généralisé ces derniere résultats au cas α-mélangeant et ils ont exploité l'importance de la modélisation non paramétrique des données fonctionnelles. Dans le cadre d'observations fonctionnelles α-mélangeantes, Masry(2005) a montré la normalité asymptotique de l'estimateur de Ferraty et vieu(2004) pour la fonction de régression. La convergence en moyenne quadratique a été étudiée par Ferraty et al(2007). Plus précisêment, ils ont explicite le terme asymptotique exacte de l'erreur quadratique. Les résultats sur l'uniforme intégrabilité ont été établis par Delsol(2007, 2009) et Delsol et al(2011). D'autres travaux se sont intéressés à l'estimation de la fonction de régression en utilisant différentes approches : la méthode des K plus proche voisins par Burba et al(2008), les techniques robustes par Azzidinne et al(2008), Attouch et al(2009) et

Granbes et al(2008), l'estimation par la methode simplifiée de polynôme locaux par Barrientos-Marin et al(2010). Koo et Linton(2012) considèrent une sorte de modèle à disparaitre semi paramétrique variable dans la temps et présentent les résultat de convergence uniformes pour tous estimateurs semi paramétriques.

Dans cet mémoire, nous nous intéressons à la convergence uniforme de l'estimateur non paramétrique de la fonction de hazard conditionnel pour variable explicative fonctionnelle et une variable réponse réelle. On présente aussi quelques résultats sur la convergence uniforme presque complète d'estimateurs non paramétriques pour certains modèles conditionnels.

Dans le premier chapitre, nous nous intéresson à l'estimateurs par la méthode a noyau pour la fonction de régression conditionnelle et la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle et nous étudions la convergence uniforme presque complète de ces estimateurs en précissant leurs vitesses.

Dans le second chapitre, on présenté quelques résultats asymptotiques de la fonction de hasard conditionnelle pour les deux cas , le premier cas est celui des données complètes et le deuxième est pour des données incomplètes.

Chapitre 1

Quelques résultats asymptotiques pour des modèles conditionnels en dimension infinie

1.1 L'entropie de Kolomogorov

1.1.1 Définition

Soit S un sous-ensemble de l'espace métrique $\mathcal{F}$, et soit $\epsilon > 0$, un ensemble fini de points $X_1, X_2, ...X_N$ dans $\mathcal{F}$ est appelé un ϵ-net pour S si $S \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_k, \epsilon)$.
La quantité $\psi_S(\epsilon) = \log(N\epsilon(S))$ où $N\epsilon(S)$ est le nombre minimal de boules ouvertes en $\mathcal{F}$ de royon ϵ qui est nécessaire pour couvrir S, s'appelle l'entropies de Kolmogorov de S.

Ce concept a été introduit par Kolmogorov au milieu des années 1950 (voir Kolmogorov et Tikhomirov 1959) et il représente sa mesure de la complexité d'un ensemble dans le sens où une l'entropie élevée signifie que beaucoup d'information est nécessaires pour écrire un élément avec une précision ϵ. Par conséquent le choix de la structure topologique (autrement dit, le choix de la semi métrique), et jouons un rôle professionnel quand on regarde les résultats asymptotiques uniformes sur certains sous-éléments $S_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$. Plus précisément, nous avons, par la suite, ce semi métrique peut également augmenter la concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle X pour minimiser ϵ l'entropie de sous ensemble $S_{\mathcal{F}}$.
Ferraty et al, (2006) nous avons souligné le phénomène de concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle en calculant les probabilités de petite boule dans diverses normes situation. Enfin s'intéresser à ces deux (probabilités d'entropie

et de petite boule) ou à l'utilisation de ϵ l'entropie de Kolmogorov dans les problèmes de réduction de la dimensionnalité pour se référes à Kulbs et Li (1993) ou Odoros et Yannis(1997).

1.2 Présentation des modèles

Soit (X, Y) un couple des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathcal{F}$ est un espace semi-métrique. On note d est un semi-métrique de $\mathcal{F}$ la complexité de l'espace fonctionnelle n'écéssite un ensemle d'hypothèses, dans la suite on présente qu'elle que hypothèses qui se figurs dans la plupart des ces résultats qu'on un présenter par la suite.

1.2.1 Hypothèses

(H1) $\forall x \in S_{\mathcal{F}}, 0 < C\phi(h) \leq \mathrm{P}(X \in B(x,h)) \leq C'\phi(h) < \infty.$

(H2) Il existe $b > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in S_{\mathcal{F}}, \mid m_{\varphi}(x_1) - m_{\varphi}(x_2) \mid \leq Cd^b(x_1, x_2).$$

(H3) $\forall m \geq 2, \quad \mathcal{F}(\mid \varphi(Y) \mid^m /X = x) \leq \delta_m(x) < C < \infty$ avec $\delta_m(.)$ continue sur $S_{\mathcal{F}}$.

(H4) K est un noyau borné et Lipchitz sur son support [0, 1], et si K(1)=0, le noyau K doit remplir la condition supplémentaire
$-\infty < C < K'(t) < C' < 0.$

(H5) Les fonction ϕ et $\psi_{S_{\mathcal{F}}}$ sont tel que

(H5$_a$) $\exists C > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall \eta < \eta_0, \phi'(\eta) < C$ et si $K(1) = 0$, les fonction $\phi(.)$ doit remplir la condition supplémentaire

$$\exists C > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall 0 < \eta < \eta_0, \int_0^{\eta} \phi(u)du > C_{\eta}\phi(\eta).$$

(H5$_b$) Pour n assez grande

$$(\log n)^2/n\phi(h_K) < \psi_{S_{\mathcal{F}}} < (\log n/n) < n\phi(h_K)/\log n.$$

(H6) ϵ- L'entropie de kolmogorov de $S_{\mathcal{F}}$ satisfait

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp\left\{(1-\beta)\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\} < \infty$$

pour certains $\beta > 1$.

Les conditions (H1)-(H2) sont très standard dans le cadre non paramétrique. En ce qui concerne (H5a), la limite de la dérivée de ϕ autour du zéro permet de considérer ϕ comme une fonction Lipschitzienne.
En outre, d'un point de vue théorique, il faut séparer le cas où K(.) est un noyau continu (c'est-à-dire K(1)=0) et le cas où K(.) n'est pas continu (qui contient, par exemple, le noyau uniforme). Le cas où K(1)=0 est plus délicat et on doit introduire une hypothèse supplémentaire agissant sur le comportement ϕ d'environ zéro. L'hypothèse (H5b) traite de considérations topologiques par l'entropie de $S_{\mathcal{F}}$. Pour un reyon pas trop grand, on exige que $\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\log n/n)$ n'ait pas trop petit et pas trop grand. Par ailleurs (5b) implique que $\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\log n/n)(n\phi(h_k))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. L'hypothèse (H6) s'agit sur l'entropie de Kolomogorov de $S_{\mathcal{F}}$. Cependant, si l'on considère le même cas particulier que précédemment, il est facile de voir que (H6) est vérifié que $\beta > 2$.

1.3 Estimation de la fonction de régression

Estimation de la fonction de régression dans cette section, nous considérons le problème de l'estimation de régression généralisée définie comme comme suit

$$m_\varphi(x) = \mathbb{E}[\varphi(Y)\backslash X = x],$$

où φ une fonction mesurable connue (voir Ferraty et Vieu (2006)). Notons que cette fonction peut regrouper plusieurs modèles non paramétriques tels la régression classique pour $\varphi = Id$ (Ferraty et Vieu(2002)).

Soit $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ des couples ayant la même loi que (X, Y). On considère un estimateur pour la fonction de régression classique, noté $\hat{m}_\varphi$ défini par :

$$\hat{m}_\varphi(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i)\varphi(Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x, X_i))}, \qquad \forall x \in \mathcal{F}.$$

où K est un noyau et h_K est une suite réels positifs.

Théorème 1.1. *Sous hypothèses (H1)-(H6) nous avons*

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \widehat{m_\varphi}(x) - m_\varphi(x) \mid = o(h_k^b) + o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n\phi(h_k)}}\right) \qquad p.c.$$

Preuve Nous désignerons, pour tout i=1...N, par

$$K_i(x) = K(h_K^{-1} d(x, X_i))$$

et

$$H_i(x) = H(h_H^{-1}(y, Y_i)).$$

Tout d'abord, selon (H1) et (H4) il est clair que si $K(1) > C > 0$,

$$\forall x \in S_{\mathcal{F}}, \exists 0 < C < C' < \infty, C\phi(h_K) < \mathrm{E}[K(1)(x)] < C'\phi(h_K). \tag{1.1}$$

On définil $\epsilon = \frac{\log n}{n}$.

La preuve du théorème 1.1 est basée sur la décomposition suivante :

$$\widehat{m_\varphi}(x) - m_\varphi(x) = \tfrac{1}{f(x)}[\widehat{g_\varphi}(x) - \mathbb{E}(\widehat{g_\varphi}(x))] + \tfrac{1}{f(x)}[\mathbb{E}(\widehat{g_\varphi}(x)) - m_\varphi(x)]$$
$$+ [1 - \hat{f}(x)]\frac{m_\varphi(x)}{\hat{f}(x)} \tag{1.2}$$

où

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}[K(h_K^{-1} d(x, X_1))]} \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(x, X_i))$$

et

$$\widehat{g_\varphi}(x) = \frac{1}{n\mathbb{E}[K(h_K^{-1} d(x, X_1))]} \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(x, X_i))\varphi(Y_i).$$

Par conséquent, le théorème 1 est l'effet des résultats suivants

Lemme 1.1.1

Sous hypothèses (H1), (H2), (H6), nous avons

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) - 1 \mid = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

Preuve Soit $X_1, ..., X_{N\epsilon(S_{\mathcal{F}})}$ et pour tous $x \in S_{\mathcal{F}}$, un ensemble

$$K(x) = \arg \min_{K\in\{1,2,.....,N\epsilon(S_{\mathcal{F}}\}} d(x, x_k),$$

on considère là de composition suivante

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) - \mathbb{E}(\hat{f}(x)) \mid \leq \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) - \hat{f}(x_{K(x)}) \mid}_{t_1} + \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x_{K(x)}) - \mathbb{E}(\hat{f}(x_{K(x)})) \mid}_{t_2}$$
$$+ \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \mathbb{E}(\hat{f}(x_{K(x)})) - \mathbb{E}(\hat{f}(x)) \mid}_{t_3}.$$

Laisser-nous étudiez t1. En utilisant 2.1 et la limite de K, on peut écrire

$$\begin{aligned} t1 &\leq \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]} K_i(x) - \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_{k(x)})]} K_i(x_{k(x)}) \right| \\ &\leq \frac{C}{\phi(h_K)} \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mid K_i(x) - K_i(x_{k(x)}) \mid \mathbb{1}_{B(x,h_K),\cup B(x_{K(x)},h_K)}(X_i). \end{aligned}$$

Considérons d'abord le cas K(1)=0, parceque K est Lipschitz sûr [0, 1] dans ce cas, il vient

$$t_1 \leq \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \frac{C}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \qquad avec \qquad Z_i = \tfrac{\epsilon}{h_K\phi(h_K)} \mathbb{1}_{B(x,h_K)\cup B(x_{K(x)},h_K)}(X_i),$$

uniformément sur x,

$$Z_1 = o\left(\tfrac{\epsilon}{h_K\phi(h_K)}\right), \mathbb{E}(Z_1) = o\left(\tfrac{\epsilon}{h_K}\right) \text{ et } var(Z_1) = o\left(\tfrac{\epsilon^2}{h_K^2\phi(h_K)}\right),$$

une inégalité standard pour les sommes de variables aléatoires bornées (voir, Ferraty et vieu, (2006)) permet d'obtenir

$$t_1 = o\left(\frac{\epsilon}{h_K}\right) + o\left(\frac{\epsilon}{h_K}\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Et il suffit de combiner (H5a) et (H5b) pour obtenir

$$t_1 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Maintenant, soit $K(1) > C > 0$: dans cette situation, K est Lipschitz sûr [0, 1]. On doit décomposer t_1 en trois termes comme suit

$$t_1 \leq C \sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} (F_1 + F_2 + F_3).$$

Avec

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{1}{n\phi(h_K)} \sum_{i=1}^{n} \mid K_i(x) - K_i(x_{K(x)}) \mid \mathbb{1}_{B(x,h_K)\cap B(x_{K(x)},h_K)}(X_i) \\
F_2 &= \frac{1}{n\phi(h_K)} \sum_{i=1}^{n} K_i(x) \mathbb{1}_{B(x,h_K)\cap \overline{B(x_{K(x)},h_K)}}(X_i) \\
F_3 &= \frac{1}{n\phi(h_K)} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_{K(x)}) \mathbb{1}_{\overline{B(x,h_K)}\cap B(x_{K(x)},h_K)}(X_i)
\end{aligned}$$

On peut suivre les mêmes étapes (c'est-à-dire cas K(1)=0) pour étudier F_1 et on obtient le même résultat.

$$F_1 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

suivant les mêmes idées pour étudier F_2 on peut écrire

$$F_2 \leq \tfrac{C}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i \qquad \text{avec} \qquad W_i = \tfrac{1}{\phi(h_K)} \mathbb{1}_{B(x,h_K)\cap \overline{B(x_{K(x)},h_K)}}(X_i).$$

Et en utilisant l' hypothèse (H5a) et la même inégalité pour des sommes de variables aléatoires bornées, ona

$$F_2 = o\left(\frac{\epsilon}{\phi(h_K)}\right) + o\left(\sqrt{\frac{\epsilon \log n}{n\phi(h_K)^2}}\right), \qquad p.c$$

de même, on peut déclarer la convergence pour F_3 : Pour terminer l'étude de F_1, il suffit de mettre ensemble résultats intermédiaires et à utiliser l'hypothèse (H5b) pour

$$F_1\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

– Or, concerne F_2, nous avons, pour tout $\eta > 0$

$$\mathrm{P}\left(t_2 > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{P}\left(\max_{K\in\{1,....,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mid \hat{f}(x_{K(x)}) - \mathbb{E}(\hat{f}(x_{K(x)})) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right)\\
&\leq N\varepsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{K\in\{1,....,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \hat{f}(x_K) - \mathbb{E}(\hat{f}(x_K)) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right).
\end{aligned}$$

Soit

$$\Delta_{K_i} = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_K)]}(K_i(x_k) - \mathbb{E}[K_i(x_k]).$$

Nous montrons, sous l'hypothèse (H1) et (H4), que $\forall K = 1, ..., N\epsilon(S_{\mathcal{F}})$, $\forall i = 1, ...n$

$$\Delta_{K_i} = o(\phi(h_K)^{-1})$$

et aussi

$$var(\Delta_{K_i}) = o(\phi(h_K)^{-1}).$$

Ainsi, on peut appliquer l'égalité de Bernstein en (voir, Ferraty et vieux, 2006) qui donne directement

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mid \hat{f}(x_K) - \mathbb{E}[\hat{f}(x_K)] \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) &= \mathrm{P}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\Delta_{K_i}\right| > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right)\\
&\leq 2\exp(-Cn^2\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)).
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le $\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon) = \log N\epsilon(S_{\mathcal{F}})$ et en choisissant une telle $C\eta^2 = \beta_1$, nous avons

$$N\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{K\in\{1,\ldots\ldots,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \hat{f}(x_K) - \mathbb{E}[\hat{f}(x_K)] \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) \leq C^{'}N\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta}.$$

Car $\sum_{n=1}^{\infty} N\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta} < \infty$, nous obtenons

$$t_2 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

– Pour t_3, il est clair que $t_3 \leq \mathbb{E}(\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) - \hat{f}(x_{K(x)}) \mid)$ et en suivant une preuve similaire à celle utilisée pour étudier

$$t_3 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right).$$

1.3.0.1 Corollaire

Sous hypothèses (H1), (H4) et (H6), nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\inf_{x\in S_{\mathcal{F}}} \hat{f}(x) < \frac{1}{2}\right) < \infty.$$

Preuve il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \inf_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) \mid \quad &\leq \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \exists x \in S_{\mathcal{F}} \qquad telque \\ 1 - \hat{f}(x) \quad &\geq \quad \frac{1}{2} \Rightarrow \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid 1 - \hat{f}(x) \mid \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On déduit de lemme 1.1.1 que

$$\mathrm{P}\left(\inf_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) \mid \leq \frac{1}{2}\right) \leq \mathrm{P}\left(\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid 1 - \hat{f}(x) \mid \geq \frac{1}{2}\right)$$

conséquence

$$\mathrm{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \inf_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}(x) \mid \leq \frac{1}{2}\right) < \infty.$$

Lemme 1.1.2

Sous hypothèses (H1), (H2), et (H4), (H6), nous avons

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \mathbb{E}\widehat{g}_\varphi(x) - m_\varphi(x) \mid = o(h_K^b).$$

Preuve ona

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{g_\varphi}(x)] - m_\varphi(x) \mid &= \left| \frac{1}{n\mathbb{E}[K_i(x)]} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n K_i(x)\varphi(Y_i)\right] - m_\varphi(x) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\mathbb{E}[K_i(x)]} \mathbb{E}\left[K_1(x)\varphi(Y_1)\right] - m_\varphi(x) \right| \\
&\leq \frac{1}{n\mathbb{E}[K_i(x)]} \left[\mathbb{E}[K_1(x) \mid m_\varphi(X_1) - m_\varphi(x) \mid]\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\forall x \in S_{\mathcal{F}}, \qquad \mid \mathbb{E}(\widehat{g_\varphi}(x)) - m_\varphi(x) \mid \leq \tfrac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}[\mathbb{E}K_1(x) \mid m_\varphi(X_1) - m_\varphi(x) \mid].$$

Ainsi, avec les hypothèses (H1), (H2), nous avons

$$\begin{aligned}
\forall x \in S_{\mathcal{F}}, \qquad \mid \mathbb{E}(\widehat{g_\varphi}(x)) - m_\varphi(x) \mid &\leq C\tfrac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}[\mathbb{E}K_1(x)\mathbb{1}_{B(x,h_K)}(X_1)d^b(X_1,x)] \\
&\leq Ch_K^b,
\end{aligned}$$

cette dernière inégalité donne la preuve, puisque C ne dépend pas de x.

Lemme 1.1.3

Sous hypothèses (H1) et (H6), nous avons

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \widehat{g_\varphi}(x) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

Preuve cette preuve suit les mêmes étapes que la preuve du lemme 1.1.1, pour cela, nous gardons ces notations et nous utilisons la décomposition suivante :

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \widehat{g_\varphi}(x) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x) \mid \leq \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \widehat{g_\varphi}(x) - \widehat{g_\varphi}(x_{K_{(x)}}) \mid}_{g_1} + \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \mid \widehat{g_\varphi}(x_{K_{(x)}}) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x_{K_{(x)}}) \mid}_{g_2}$$

$$+\underbrace{\sup_{x\in S_{\mathbb{F}}} \mid \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x_{K_{(x)}}) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x)\mid}_{g_3}$$

À condition (H1) permets d'écrire directement, pour g_1, g_3

$$\begin{aligned} g_1 &= \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x)]}K_i(x)\varphi(Y_i) - \frac{1}{n\mathbb{E}[K_1(x_K(x))]}K_i(x_{K(x)})\varphi(Y_i)\right| \\ &\leq \sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\frac{1}{n\phi(h_K)}\sum_{i=1}^{n}\mid\varphi(Y_i)\mid\mid K_i(x)-K_i(x_{K(x)})\mid \mathbb{1}_{B(x,h_K)\cup B(x_{K(x)},h_K)}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour t_1, on considère K(1)= 0 (c'est-à-dire Lipschitz sûr [0,1]) et on obtient

$$g_1 \leq \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

avec

$$Z_i = \frac{\epsilon\varphi(Y_i)}{h_K\phi(h_K)}\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\mathbb{1}_{B(x,h_K)\cup B(x_{K(x)},h_K)}.$$

La principale différence avec l'étude de t_1 est l'on utilise ici l'inégalité exponentielle pour les variables non bornées

$$\mathbb{E}\left[\mid \varphi^m(Y)\mid\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mid \varphi(Y)\mid^m /X]\right]$$

$$= \int \delta_m(x)dP_x < C < \infty.$$

Ce qui implique que

$$\mathbb{E}(\mid Z_1 \mid^m) \leq \frac{C\epsilon^m}{h_K^m \phi(h_K)^{m-1}}.$$

donc, en utilisant (corollaire A.8 de Ferraty et Vieu(2006)[3]), avec $a^2 = \frac{\epsilon}{h_K\phi(h_K)}$ on obtient $g_1 = o\left(\sqrt{\epsilon \log n / n h_K \phi(h_K)}\right)$, maintenant l'hypothèse $(H5_b)$ permet d'obtenir

$$g_1 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c \tag{1.3}$$

Si on considère le cas $K(1) > C > 0$, on doit diviser g_1 en trois termes pour t_1 et en utilisant les arguments des équation similaires, on peut ou même taux la convergence presque complète. les étapes similaires permettent d' écrire

$$g_3 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) \tag{1.4}$$

Pour g_2, de même que pour la preuve de lemme 1.1.1, on a, $\forall \eta > 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(g_2 > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) &= \mathrm{P}\left(\max_{K\in\{1,\ldots\ldots,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mid \widehat{g_\varphi}(x_K) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x_K) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) \\ &\leq N\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{K\in\{1,\ldots\ldots,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \widehat{g_\varphi}(x_K) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x_K) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right). \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est basé sur l'inégalité exponentielle. En effet

$$\Gamma_{ki} = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x_k)]}\left[K_i(x_k)\varphi(Y_i) - \mathbb{E}[Y_i(x_k)\varphi(Y_i)]\right].$$

Les mêmes arguments que ceux invoqués pour preuve le lemme (6.3)(a Ferraty et Vieu (2006, p=65)[3]), peuvent être utilisés pour montrer que $\mathbb{E} \mid \Gamma_{ki} \mid^m = o(\phi(h_K)^{-m+1})$ qui donne en appliquant l'inégalité exponentielle , pour tout $\eta > 0$

$$\mathrm{P}\left(\mid \widehat{g_\varphi}(x_K) - \mathbb{E}\widehat{g_\varphi}(x_K) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right) \leq 2N\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{-C\eta^2}.$$

Par conséquent, par un choix approprié $\eta > 0$, nous avons

$$N\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{K\in\{1,\ldots..,N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \widehat{g_{\varphi}}(x_K) - \mathbb{E}\widehat{g_{\varphi}}(x_K) \mid > \eta\sqrt{\frac{\log N\epsilon(S_{\mathcal{F}})}{n\phi(h_K)}} \right) < C' N\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-\beta}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} N\epsilon(S_{\mathcal{F}}) < \infty$, on obtient que

$$g_2 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c \tag{1.5}$$

1.4 Estimation de la fonction de répartition conditionnelle

Dans cette section, nous supposons que la version régulière de la probabilité conditionnelle de Y donner X existe et nous étudions la convergence uniforme presque complète d'un estimateur du noyau de la fonction de répartition conditionnelle, notée f^x : Une de façon simple pour estimer la fonction F^x est de traiter cette fonction comme cas particulier de m_φ avec $\varphi(t) = \mathbf{1}_{[-\infty,y]}(t)$ (pour $y \in \mathbb{R}$). Nous estimons ainsi F^x par

$$\hat{F}^x(y) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)\mathbf{1}_{[Y_i \leq y]}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{F}$$

où

$$W_{ni}(x) = \frac{K(h_k^{-1}d(x, X_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_k^{-1}d(x, X_i))}.$$

L'estimation de la fonction de répartition conditionnelle a été étudiée, dans le cas réel, par plusieurs auteurs (voir Roussas 1969, samanta 1989). Dans le cas fonctionnel Ferraty et al.(2006) établi la convergence de l'estimateur des noyaux a double de la fonction de répartition conditionnelle.

Pour obtenir la cohérence uniforme , nous fixons un sous-ensemble compact $S_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$ et nous considérons les hypothèses ,

(H7) $\forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}}, \forall (x_1, x_2) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathcal{F}}$

$$\mid F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2) \mid \leq C(d(x_1, x_2)^{b_1} + \mid y_1 - y_2 \mid^{b_2}).$$

(H8) ϵ -L'entropie de kolmogorov de $S_{\mathcal{F}}$ satisfait

$$\sum_{i=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2b_2}} \exp\left\{(1-\beta)\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)\right\} < \infty$$

pour certains $\beta > 1$.

Théorème 1.2. *Sous hypothèses (H1), (H4), (H5), (H7) et (H8) nous avons*

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y\in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{F}^x(y) - F^x(y) \mid = o(h_k^b) + o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n\phi(h_k)}}\right), \qquad p.c \tag{1.6}$$

Preuve On considère la décomposition suivante

$$\begin{aligned}\hat{F}^x(y) - F^x(y) = \tfrac{1}{\hat{f}(x)}\Big[(\hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y)) - (\hat{F}(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y))\Big] \\ + \frac{F^x(y)}{\hat{f}(x)}[\mathbb{E}\hat{f}(x) - \hat{f}(x)].\end{aligned} \tag{1.7}$$

Où

$$\hat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n\mathbb{E}[K(h_K^{-1}d(x,X_1))]}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x,X_1))\mathbb{1}_{\{Y_i\le y\}}.$$

Ensuite, on peut déduire le théorème 2 des résultats suivants

Lemme 1.2.1

Sous hypothèses (H4) et (H7), ona

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid F^x(y) - \hat{F}_N^x(y) \mid = o(h_k^{b_1}).$$

Preuve il est clair que l'hypothèse (H4), implique $\forall (x,y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{E}[\hat{F}_n^x(y)] - F^x(y) = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[(K_1(x)\mathbb{1}_{B(x,h_k)}(X_1))(F^{X_1}(y) - F^x(y))]. \tag{1.8}$$

La condition de Lipschitz permet d'écrire

$$\forall (x,y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}, \qquad \mathbb{1}_{B(x,h_k)}(X_1) \mid F^{X_1}(y) - F^x(y) \mid \leq C h_k^{b_1},$$

puis

$$\forall (x,y) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}, \qquad \mid \mathbb{E}[\hat{F}_n^x(y)] - F^x(y) \mid < C h_k^{b_1}.$$

Lemme 1.2.2

Sous les hypothèses (H1), (H4), (H5), et (H7), (H8), nous avons

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

Preuve : Nous gardons notation de lemme (1.1.1) et utilisons la compacité de $S_{\mathbb{R}}$, on peut écrire , pour certains $t_1, t_2, ...t_{Z_n} \in S_{\mathbb{R}}$,

$$S_{\mathbb{R}} \in \bigcup_{j=1}^{Z_n} (t_j - l_n, t_j + l_n),$$

avec $l_n = n^{\frac{-1}{2b_2}}$ et $Z_n \leq n^{\frac{1}{2b_2}}$. Prendre

$$j(y) = \arg \min_{j \in \{1,2,......Z_n\}} \mid y - t_j \mid .$$

Ainsi, nous avons la décomposition suivante

$$\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^x(y)] \mid \leq \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\hat{F}_N^{x_{K(x)}}(y)] \mid}_{A_1}$$

$$+ \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{F}_N^{x_{K(x)}}(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{K(x)}}(y) \mid}_{A_2} + \underbrace{\sup_{x \in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathbb{R}}} \mid \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{K(x)}}(y) - \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y) \mid}_{A_3}.$$

Concernant (A_1) et (A_3), en suivant les mêmes lignes que pour des termes (t_1) et (t_2), il vient

$$A_1 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_\mathcal{F}}(\epsilon)}{n\phi(h_k)}}\right), \qquad p.c \qquad et A_2 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_\mathcal{F}}(\epsilon)}{n\phi(h_k)}}\right), \qquad p.c \tag{1.9}$$

Concernant (A_2) monotonie des fonctions $\mathbb{E}[\hat{F}_N^x(.)]$ et $\hat{F}_N^x(.)$ permet d'écrire, pour tout $j \leq z_n$ et pour tout $x \in S_\mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j - l_n) \leq \sup_{y \in (t_j - l_n, t_j - _n)} \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \leq \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j + l_n),$$

$$\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j - l_n) \leq \sup_{y \in (t_j - l_n, t_j - l_n)} \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(y) \leq \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(t_j + l_n) \tag{1.10}$$

en suit, nous utilisons la condition de Hölder plus ancienne sur F^x et nous montrons que, pour tout $y_1, y_2 \in S_\mathbb{R}$ et pour tout $x \in S_\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \mid \mathbb{E}\hat{F}_N^x(y_1) - \mathbb{E}\hat{F}^x(y_2) \mid &= \left| \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[K_1(x)F^{X_1}(y_1)] - \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(x)]}\mathbb{E}[K_1(x)F^{X_1}(y_2)] \right| \\ &\leq C \mid y_1 - y_2 \mid^{b_2}. \end{aligned}$$

En suit, nous passons par (1.9) et l'inégalité presédent et parce que

$$A_2 \leq A_4 + o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_\mathcal{F}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right)$$

où $A_4 = \max_{K \in \{1,\dots,N\epsilon(S_\mathcal{F})\}} \max_{1 \leq j \leq z_n} \max_{s_j = t_j - i_n, t_j + i_n} \mid \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(s_j) - \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(s_j) \mid$.

Ainsi, il reste à étudier A_4. En utilisant des arguments similaires à ceux invoqués pour l'étude de A_2 et comme hypothèse (H8), ona $A_4 = o(\sqrt{\psi_{S_\mathcal{F}}(\epsilon)/n\phi(h_K)})$, ce qui implique que

$$\sup_{x \in S_\mathcal{F}} \sup_{y \in S_\mathbb{R}} \mid \hat{F}_N^{x_{k(x)}}(s_j(y)) - \mathbb{E}\hat{F}_N^{x_{k(x)}}(s_j(y)) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_\mathbb{R}}(\epsilon)}{n\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c.$$

1.5 Estimation de la densité conditionnelle

Dans cette section, les résultats similaires seront utilisés pour l'estimateur du noyau de la densitè conditionnelle de Y donner X. Nous supposons que la probabilité conditionnelle de Y donner X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et nous noterons par f^x la densité conditionnelle de Y donner X=x. Nous définissons l'estimateur à noyau $\hat{f}^x$ de f^x comme suit

$$\hat{f}^x(y) = \frac{h_H^{-1}\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x,X_i))H(h_H^{-1}(y-Y_i))}{\sum_{i=1}^{n} K((h_K^{-1}d(x,X_i))}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{F} \tag{1.11}$$

où H est un noyau h_H est une suite de réels positifs. Estimation était déjà introduite dans le cas particulier où X est la variable aléatoire par Rosenblatt(1969) et par Youdjé(1996) parmi d'autres auteurs.
Afin d'établir la convergence uniforme et presque complète de cet estimateur, nous considérons les hypohèses suivantes :

(H9) $\forall (y_1, y_2) \in S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}}, \forall (x_1, x_2) \in S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{F}}$,

$$\mid f^{x_1}(y_1) - f^{x_2}(y_2) \mid \leq (d^{b_1}(x_1, x_2) + \mid y_1 - y_2 \mid^{b_2}).$$

(H10) Pour certains $\gamma \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} n^{\gamma} h_H = \infty$ et pour n suffisamment grand

$$\frac{(\log n)^2}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)} < \psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right) < \frac{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}{\log n}.$$

(H11) L'entropie de Kolomogrov de$S_{\mathcal{F}}$ satisfait

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{3\gamma+1/2} \exp\left\{(1-\beta)\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{logn}{n}\right)\right\} < \infty$$

pour certains $\beta > 1$.

(H12) H est une fonction continue Lipschitzienne bornée, telle que $\int \mid t \mid^{b_2} H(t)dt$ et $H^2(t)dt < \infty$.

Théorème 1.3. *Sous hypothèse (H1), (H4), (H5a), (H7), (H9), (H10), (H11), nous avons*

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y \in S_{\mathcal{F}}} \mid \hat{f}^x(y) - f^x(y) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right).$$

Preuve la preuve est basé sur la décomposition suivante :

$$\hat{f}^x(y) - f^x(y) = \frac{1}{\hat{f}^x(y)}[(\hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y)) - (f^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y))] + \frac{f^x(y)}{\hat{f}(x)}[\mathbb{E}\hat{f}(x) - \hat{f}(x)] \tag{1.12}$$

où

$$\hat{f}_N^x(y) = \frac{1}{nh_K \mathbb{E}[K(h_K^{-1}d(x,X_i))]} \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1}d(x,X_i))H(h_H^{-1}(y-y_i)).$$

Le théorème 1.3 peut être déduit des résultats suivants,

Lemme 1.3.1

Sous hypothèses (H4), (H7) et (H9), nous avons

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}} \sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid f^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}).$$

Preuve ona

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\hat{f}_N^x(y) - f^x(y) &= \frac{1}{nh_H \mathbb{E}K_1(x)} \left(\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} K_i(x)H_i(y) \right] - f^x(y) \right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}K_1(x)} \mathbb{E}\left(K_1(x) \left[h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y) \right] \right).
\end{aligned}$$

En outre, par changement de variable

$$h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) = \frac{1}{h_H} \int_{\mathbb{R}} H\left(\frac{y-z}{h_H}\right) f^{X_1}(z)dz = \int_{\mathbb{R}} H(t) f^{X_1}(y - h_H t)dt,$$

nous arrivons

$$\mid h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y) \mid \leq \int_{\mathbb{R}} H(t) \mid f^{X_1}(y - h_H t) - f^x(y) \mid dt.$$

Enfin, l'utilisation d' hypothèse (H9) implique que

$$\mid h_H^{-1}\mathbb{E}(H_1(y)/X_1) - f^x(y) \mid \leq C \int_{\mathbb{R}} H(t)(h_K^{b_1} + \mid t \mid^{b_2} h_H^{b_2})dt.$$

Cette inégalité est uniforme sur (x, y) dans $S_{\mathcal{F}} \times S_{\mathbb{R}}$.

Lemme 1.3.2

Sous les hypothéses du théorème 1.3, nous avons

$$\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{f}_n^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}\left(\frac{\log n}{n}\right)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right), \qquad p.c$$

Preuve la compacité de $S_{\mathbb{R}}$ parmi d'écrire cela

$$S_{\mathbb{R}} \subset \bigcup_{j=1}^{Z_n}(t_j - l_n, t_j + l_n).$$

Avec $l_n = n^{-(3/2)\gamma-1/2}$ et $Z_n \leq Cn^{(3/2)\gamma+1/2}$. Nous avons la décomposition suivante :

$$\mid \hat{f}_N^x(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^x(y) \mid \leq \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{f}_N^x(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) \mid}_{T}$$

$$+ \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \mid}_{T_1} + \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \mid}_{T_2}$$

$$\underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) \mid}_{T_3} + \underbrace{\sup_{x\in S_{\mathcal{F}}}\sup_{y\in S_{\mathbb{R}}} \mid \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x}(y) \mid}_{T_4}.$$

De même que l'étude du terme g_1 et en remplaçant (H5b) par (H10), il vient

$$T = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right), \qquad et \qquad T_4 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right), p.c \tag{1.13}$$

En ce qui concerne le terme T_1, ont utilisant l'état de Lipschitz sur le noyau H, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mid \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) \mid &\leq C\frac{1}{n_{h_H}\phi(h_K)}\sum_{i=1}^{n} K_i(x_{k(x)}) \mid H_i(y) - H_i(t_j(y)) \mid \\
&\leq \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i,
\end{aligned}$$

où $Z_i = l_n K_i(x_{k(x)})/h_H^2\phi(h_K)$. Encore une fois, une norme exponentielle en matière d'égalité pour les variables bornées nous permet d'écrire

$$\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(y) - \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j(y)) = o\left(\frac{l_n}{h_H^2}\right) + o\left(\frac{l_n}{h_H^2}\sqrt{\frac{\log n}{n\phi(h_K)}}\right).$$

Maintenant, le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\gamma}h_H = \infty$ *et* $l_n = n^{(-3/2)\gamma-1/2}$ implique que

$$T_1 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right) \qquad et \qquad T_3 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}}\right), p.c. \tag{1.14}$$

En utilisant les arguments de lemme 1.4.1, nous pouvons montre à tout $\eta > 0$

$$\mathrm{P}\left(T_2 > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \mathrm{P}\left(\max_{j\in\{1,2,\ldots.Z_n\}}\max_{K\in\{1,2,\ldots..N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mid \hat{f}_N^{x_K}(t_j) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_K}(t_j) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}}\right) \\ &\leq Z_nN\epsilon(S_{\mathcal{F}})\max_{j\in\{1,2,\ldots.Z_n\}}\max_{K\in\{1,2,\ldots..N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \hat{f}_N^{x_K}(t_j) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_K}(t_j) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}}\right). \end{aligned}$$

Soit

$$\Delta_i = \frac{1}{h_H\phi(h_K)}[K_i(x_k)H_i(t_j) - \mathbb{E}(K_i(x_k)H_i(t_j))].$$

Et ont appliqué l'inégalité exponentielle de Bernstein (voir Ferraty et vieu, (2006)[3]). Pour cela, nous avons calculé l'asymptotique comportement de $\mid \Delta_i \mid$ et $\mathbb{E}(\Delta_i^2)$. Tout d'abord, il résulte du fait que les noyaux K et H ne sont liés que $\mathbb{E} \mid \Delta_i \mid \leq C(h_H\phi(h_K))^{-1}$. Deuxièmes, l'utilisation des mêmes arguments de lemme (3.1) nous permet d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_H}\mathbb{E}[H_1^2(y)/X_1] = f^{x_1}\int_{\mathbb{R}} H^2(t)dt,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E} \mid \Delta_i \mid^2 \leq \frac{C}{h_H\phi(h_K)}.$$

Ce qui implique que, ainsi, nous sommes maintenant en mesure d'appliquer l'exponentielle de Berstein et nous obtenons

$$\forall j \leq Z_n, \qquad \mathrm{P}\left(\mid \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}}\right) \leq \exp(-C\eta^2\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)).$$

Par conséquent, puisque $Z_n = o(l_n^{-1}) = o(n^{(3/2)\eta+1/2})$, en choisissant $C\eta^2 = \beta$ on a

$$Z_n N\epsilon(S_{\mathcal{F}}) \max_{j\in\{1,2,\ldots Z_n\}} \max_{k\in\{1,2,\ldots.N\epsilon(S_{\mathcal{F}})\}} \mathrm{P}\left(\mid \hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j) - \mathbb{E}\hat{f}_N^{x_{k(x)}}(t_j) \mid > \eta\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{nh_H\phi(h_K)}} \right)$$
$$\leq C' Z_n N\epsilon(S_{\mathcal{F}})^{1-C\eta^2}.$$

En utilisant le fait que $\lim_{n\to\infty} n^{\gamma} h_H = \infty$ et l'hypothèse (H7), on obtient

$$T_2 = o\left(\sqrt{\frac{\psi_{S_{\mathcal{F}}}(\epsilon)}{n^{1-\gamma}\phi(h_K)}} \right), \qquad p.c$$

Chapitre 2

Les résultats asymptotique de la fonction de hasard conditionnelle

2.1 Le contexte bibliographique

Si X est une variable aléatoire associée à une durée de vie (c-à-d, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$), le taux de hasard de X (parfois appelé aussi fonction de hasard, taux de défaillance ou taux de survie) est défini au point x comme étant la probabilité instantanée que cette durée de vie se termine à l'instant x. Précisément, on a

$$h(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\mathrm{P}(X \leq x + \Delta_x \backslash X \geq x)}{\Delta_x}, \qquad x > 0. \tag{2.1}$$

Lorsque la variable X possède une densité f par rapport à la mesure de Lesbesgue il est aisé de voir que ce taux de hasard peut être écrit

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \tag{2.2}$$

pour tout x tel que $F(x) < 1$, où F désigne la fonction de répartition de X et S=1-F la fonction de survie de X.

Dans de nombreuses situations pratiques, on peut disposer d'une variable explicative Z et la question devient celle de l'estimation du taux de hazard conditionnel défini pour $x > 0$ par

$$h^{\mathrm{Z}}(x) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\mathrm{P}(X \leq x + \Delta_x \backslash X > x, \mathrm{Z})}{\Delta_x}, \tag{2.3}$$

qui s'écrit lui aussi naturellemet à partir de la densité conditionnelle $f^{\mathrm{Z}}(.)$ et de la fonction de répertition conditionnelle $F^{\mathrm{Z}}(.)$ de X sachant Z, sous la forme

$$h^{\mathrm{Z}}(x) = \frac{f^{\mathrm{Z}}(x)}{S^{\mathrm{Z}}(x)}, \tag{2.4}$$

dés que $\mathrm{Z}(x) < 1$. L'étude des fonction $h \quad et \quad h^{\mathrm{Z}}$ est d'un intérêt évident dans de nombreux domaines scientifiques (biologie, médecine, faibilité,.....), et de nombreux autreurs se sont intéréssés à la construction d'estimateurs non-paramétriques de h. Une des techniques les plus courantes pour construire des estimateurs de h (resp de h^{Z}) est basée sur le résultat 2.3 (resp le résultat 2.5) et consiste à étudier un quotient entre un estimateur de f (resp de f^{Z}) et un estimateur de S (resp de S^{Z}). L'article de Petit et al fait une présentation générale de ce techniques d'estimation. Les méthodes non paramétriques basées sur les idées de noyau de convolution, qui sont connues pour leurs bon comportement dans les problèmes d'estimation de densité (conditionnelle ou non), sont ainsi abondamment utilisées en estimation non-paramétrique de fonction de hasard. Un large éventail de la littérature dans ce domaine est fourni par les revues bibliographiques de Singpurwalla et Wong[24], Hassani et al[17], Izenman[18], Gefeller et Michels [16] et Pascu et Vaduva[21].

2.1.1 Sur la fonction de hasard conditionnel pour variable explicative fonctionnelle

Les progrès des procédés de recueil de données ont pour conséquence immédiate d'offrir la possibilité aux statisticiens de disposer de plus en plus souvent d'observations de variables fonctionnelles. Les ouvrages de Ramsay et Silverman(2005)[23] et Ferraty et vieu(2006)[3] proposent un large éventail de méthodes statistiques, paramétriques ou non paramétrique, récemment développées pour traiter divers problèmes d'estimation dans lesquels interviennent des variables aléatoires fonctionelles (c'est à dire à valeurs dans espace de dimension infinie). Jusqu'à présent de tels développements statistiques pour variables fonctionnelles n'existent pas dans le contexte de l'estimation d'une fonction de hasard, et ce malgré le potentiel évident en matière d'applications.

L'objectif de cette section a étudier un modèle de hasard conditionnel dans lequel la variable explicative Z n'est pas nécessairement réelle ou multidimensionnelle mais seulement supposée être à valeurs dans un espace abstrait $\mathcal{F}$ muni d'une semi-métrique d. Comme dans tout problème d'estimation non-paramétrique, la dimension de l'espace $\mathcal{F}$ joue un rôle important dans les propriétés de concentration de la variable X. Ainsi, lorsque cette dimension n'est pas nécessairement finie. les fonctions de probabilité de petites boules définies par

$$\phi_z(h) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \in \mathrm{B}(z,h)) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \in \{z' \in \mathcal{F}, d(z,z') < h\}),$$

interviennent de manière directe dans le comportement asymptotique de tout estimateurs non-paramétrique fonctionnel (voir Ferraty et vieu (2006)[3])

Dorénavant, z désigne un élément fixé de l'espace fonctionnel $\mathcal{F}$, N_z désigne un voisinage fixé de z et $\mathcal{S}$ est un compact fixé de $\mathbb{R}^+$. Nous serons amenés à faire l'hypothèse ci-dessous concernant la fonction de concentration ϕ_z :

(A1) $\forall h > 0, \phi_z(h) > 0$.

Le modèle non-paramétrique sur la fonction h^{Z} à estimer sera déterminé par des conditions de régularité portant sur la loi conditionnelle de X sachant Z. Ces conditions sont les suivantes :

(A2) $\exists \mathrm{A}_z < \infty, \exists b_1, b_2 > 0 \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{S}^2, \forall (z_1, z_2) \in N_z^2$:

$$\begin{aligned} \mid F^{z_1}(x_1) - F^{z_2}(x_2) \mid &\leq \mathrm{A}_z(d(z_1,z_2)^{b_1} + \mid x_1 - x_2 \mid^{b_2}), \\ \mid f^{z_1}(x_1) - f^{z_2}(x_2) \mid &\leq \mathrm{A}_z(d(z_1,z_2)^{b_1} + \mid x_1 - x_2 \mid^{b_2}); \end{aligned}$$

(A3) $\exists \nu < \infty, \forall (x, z') \in \mathcal{S} \times N_z, f^{z'}(x) \leq \nu$;

(A4) $\exists \beta > 0, \forall (x, z') \in \mathcal{S} \times N_z, F^{z'}(x) \leq 1 - \beta$.

2.2 La construction de l'estimateur pour des données complètes

Soit $(X_i, Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variables aléatoires suivant chacune la même loi qu'un couple (X, Z) où X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et Z à valeurs dans l'espace semi-métrique $(\mathcal{F}, d(.;.))$. Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cas le plus simple pour lequel toutes les variables X_i et Z_i out été observées.

Les recherche récentes en statistique non-paramétrique pour variables fonctionnelles, telles que présentées dans Ferraty et vieu(2006)[3], font apparaître que les techniques basées sur les noyaux de convolution sont facilement transposables au cadre de variables fonctionnelles. Par aileurs ces techniques à noyau possèdent de bonnes propriétés dans les problèmes d'estimation de fonction de hasard pour variables de dimension finie. Pour plus de détails en se servant principalement au livre de Singpurwalla et Wong (1983)[24] qui est un des papiers en la matière et celui de Estéver pour les résultats les plus récents dans ce domaine.

Il est tout naturel d'essayer de construire un estimateur de la fonction h^{Z} en s'inspirant de ces idées. Pour estimer la fonction de répartition conditionnelle de la densité conditionnelle en présence de variable Z fonctionnelle, Ferraty et al (2006), ont proposé les estimateurs à noyau fonctionnels suivants :

$$\hat{F}^z(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i)) H(h_H^{-1}(x - \mathrm{X}_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i))} \tag{2.5}$$

et

$$\hat{f}^z(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i)) H^{'}(h_H^{-1}(x - \mathrm{X}_i))}{h_H \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i))}, \tag{2.6}$$

où K est un noyau, H une fonction de répartition et $h_K = h_{K,n}(resp.h_H = h_{H,n}$ est une suite de nombre réels positifs. Le bon comportement de ces estimateurs, à la fois du point de vue asymptotique et sur le plan appliqué, est mis en évidence dans Ferraty et vieu (2006) .

L'estimateurs à noyau da la fonction da hasard conditionnelle fonctionnelle h^z peut donc se construire de la manière suivante :

$$\hat{h}^{\mathrm{Z}}(x) = \frac{\hat{f}^{\mathrm{Z}}(x)}{1 - \hat{F}^{\mathrm{Z}}(x)}. \tag{2.7}$$

Les hypothèses dont nous aurons ultérieurement concernant les paramètres de cet estimateurs, c'est à dire concernant $K, H, h_H \quad et \quad h_K$, sont peu restrictives. En effet, d'une part elles ne sont pas propres au problèmes d'estimation de h^{Z}, et d'autre part elles correspondent aux hypothèses faites habituellement dans la cadre de variables non fonctionnelles. Plus précisément, nous introduirons les condition suivantes qui garantissent le bon comportement des estimateurs $\hat{F}^z$ et $\hat{f}^z$(voir Ferraty et vieu (2006)) :

(A5) Le noyau cummulatif H est dérivable et tel que

- i) $\exists A < \infty, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad | H^{'}(x_1) - H^{'}(x_2) | \leq | x_1 - x_2 |$;
- ii)$H^{'}$ est de support compact [-1, 1] et $H^{'}(t) > 0, \forall t \in [-1, 1]$.

(A6) Le noyau fonctionnel K vérifie les conditions

- i) K est à support compact (0, 1) ;
- ii) $\exists A_1, A_2, \forall t \in (0, 1), 0 < A_1 < K(t) < A_2 < \infty$.

(A7) La largeur de fenêtre h_K vérifie les conditions

$$\lim_{n\to\infty} h_K = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n h_H \phi_x(h_K)} = 0.$$

(A8) La largeur de fenêtre h_H vérifie les condition

$$\lim_{n\to\infty} h_H = 0$$

et

$$\exists a > 0, \lim_{n\to\infty} n^a h_H = \infty.$$

Sous ces conditions très générales, nous établirons la convergence de l'estimateur à noyau $\hat{h}^z$ de la fonction de hasard conditionnelle fonctionnelle h^z lorsque les couples de variables $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont indépendants et ces résultats seront généralisés en s'affranchissant de la condition d'indépendance.

On présente dans ce paragraphe notre estimateur dans la présence des donnés incomplètes (censuré).

2.3 Présentation de l'estimateur dans le cas censuré

Dans la pratique, lors d'applications médicales en particulier, on peut trouver en présence de variables censurées. Ce problème est habituellement modélisé en considérant une variable positive C dite de censure, et les variables aléatoires observées ne sont pas les couples (X_i, Z_i) mais seulement les (T_i, Δ_i, Z_i) où $T_i = \min(X_i, C_i)$ et $\Delta_i = \mathbb{1}_{X_i \leq C_i}$. Dans la suite nous utiliserons les notations F_1^Z, f_1^Z pour désigner la fonction de répartition et la densité conditionnelles de C sachant Z, et nous utiliserons la notation $S_1^Z = 1 - F_1^Z$. De tels modèles à censure ont été abondamment étudiés dans la littérature pour des variables aléatoires réelles ou multi-dimensionnelles. et dans des cadres non-paramétriques les techniques à noyau sont particulièrement utilisées (voir Tanner et Wong (1983)[24], Padgett (1988)[25], Lecourte et Ould-Said et Van (1988)[19] Keilegom et Veraverbeke (2001)[27], pour un échantillon nécessairement non-exhaustif de la littérature dans ce domaine).

L'objectif de ce paragraphe est d'adapter ces idées au cadre de variable explicative Z fonctionnelle, et de construire un estimateur de type noyau de la fonction de hasard conditionnelle h^Z adapté aux échantillons censurés. Si l'on introduit les notations $L^Z = 1 - S_1^Z$ et $\varphi^Z = f^Z S_1^Z$, onpeut reformuler l'expression 2.5 comme

$$h^Z(t) = \frac{\varphi^Z(t)}{1 - L^Z(t)}, \qquad \forall t, L^Z(t) < 1. \tag{2.8}$$

On peut alors définir des estimateurs des fonction φ^Z et L^Z en posant

$$\hat{L}^Z(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i)) H(h_H^{-1}(t - T_i))}{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i))} \tag{2.9}$$

et

$$\hat{\varphi}^Z(t) = \hat{F}^z(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i)) \Delta_i H^{'}(h_H^{-1}(t - T_i))}{h_H \sum_{i=1}^{n} K(h_K^{-1} d(z, \mathrm{Z}_i))}. \tag{2.10}$$

Finalement l'estimateur de la fonction de hasard est donné par

$$\tilde{h}^Z(t) = \frac{\hat{\varphi}^Z(t)}{1 - \hat{L}^Z(t)}. \tag{2.11}$$

Outre les hypothèses introduites dans le section (1.2), nous aurons besion de conditions supplémentaires. Ces hypothèses, qui sont identiques à celles que l'on retrouve dans la littérature classique pour variables non-fonctionnelles, sont les suivantes :

(A9) conditionnellement à Z, les variables X et C sont indépendantes ;

(A10) $\exists A_z < \infty, \exists b_1, b_2 > 0, \forall (t_1, t_2) \in \mathcal{S}^2, \forall (z_1, z_2) \in N_z^2$:

$$\begin{array}{rcl} \mid L^{z_1}(t_1) - L^{z_2}(t_2) \mid & \leq & A_z(d(z_1, z_2)^{b_1} + \mid t_1 - t_2 \mid^{b_2}) \\ \mid \varphi^{z_1}(t_1) - \varphi^{z_2}(t_2) \mid & \leq & A_z(d(z_1, z_2)^{b_1} + \mid t_1 - t_2 \mid^{b_2}); \end{array}$$

(A11) $\exists \mu < \infty, \varphi^{z^{'}}(t) < \mu, \forall (t, z^{'}) \in \mathbb{R}_+ \times N_z$,

(A12) $\exists \mu > 0, L^{z^{'}}(t) < 1 - \eta, \forall (t, z^{'}) \in \mathbb{R}_{+} \times N_z$.

Sous ces conditions très générales, nous établirons les vitesses de convergence de l'estimateurs à noyau $\tilde{h}^z$ de la fonction de hasard conditionnelle fonctionnelle h^z lorsque les couples de variables $(X_i, Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont indépendants. Dans le paraghraphe (1.5.2) résultats seront généralisés en s'affranchissant de la condition d'indépendance.

2.4 Résultats asymptotiques

2.4.1 La convergence presque complète

L'objectif de ce paragraphe est d'établir la convergence presque complète de l'estimateurs à noyau $\hat{h}^Z$ de la fonction de hasard conditionnelle fonctionnelle h^Z lorsque l'échantillon observé n'est pas censuré, Les résultats présentés sont accompagnés par la donnée des vitesses de convergence. Comme nous allons le voir, ces résultat seront relativement faciles à obtenir en ce sens qu'ils vont découler quasi-directement de résultats déjà connus en estimation non-paramétrique de densité ou fonction de répartition conditionnelle fonctionnelles. Les preuves seront succintes et renverront abondamment à la littérature existante, mais elle seront présentées de sorte à préparer le terrain pour l'obtention des résultats plus délicats dans le cadre d'échantillons censurés (voir section 4).

2.4.2 Cas d'échantillon i.i.d

Nous commençons par l'étude d'échantillons statistiques vérifiant une hypothèses classique d'indépendance, à savoir,

(A13a) Les couples (X_i, Z_i) sont i.i.d.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses (A1)-(A8) et (A13a) on a*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{h}^z(x) - h^z(x) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \tag{2.12}$$

Preuve La preuve est basée sur la décomposition

$$\hat{h}^z(x) - h^z(x) = \frac{1}{(1 - \hat{F}^z(x))(1 - F^z(x))}.$$

$$\{(\hat{f}^z(x) - f^z(x)) + f^z(x)(\hat{F}^z(x) - F^z(x)) - F^z(x)(\hat{f}^z(x) - f^z(x))\}.$$

Valable pour tout $x \in \mathcal{S}_\mathbb{R}$, ce qui, pour une constante $C < \infty$, amène

$$\sup_{x\in\mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid \hat{h}^z(x) - h^z(x) \mid \leq C \frac{\left\{ \sup_{x\in\mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid \hat{f}^z(x) - f^z(x) \mid + \mid \hat{F}^z(x) - F^z(x) \mid \right\}}{\inf_{x\in\mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid 1 - \hat{F}^z(x) \mid}. \tag{2.13}$$

Ainsi de manière classique (voir par exemple la condition (A6ii) de Ferraty et Vieu (2006)[3]) le résultat annoncé découle directement des propriétés

$$\sup_{x\in\mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid F^z(x) - \hat{F}^z(x) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \tag{2.14}$$

et

$$\sup_{x\in\mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid f^z(x) - \hat{f}^z(x) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \tag{2.15}$$

Les résultats 2.14 et 2.15 sont des résultats connus (voir Ferraty et Vieu (2006)).

2.4.3 Cas d'échantillon dépendant

Dans de nombreux domaines d'application, comme en particulier en économétrie (voir par exemple les problèmes traités par Engle et Russel (1988)[13] ou Nielson et Linton (1995)[20]) ou en sismologie (voir par exemple les données étudiées dans Estévez-Pérez et al (2002)[15]), l'hypoythèse d'indépendance entre les variables observées n'est pas réaliste. Pour pouvoir étendre les résultats obtenus ci-dessus, il est nécessaire d'introduire une structure probabiliste qui permette de contrôler la dépendance entre les variables constituant l'échantillon statistique. Une manière naturel de faire consiste à introduire une condition d'indépendance asymptotique. Nous ferons ici l'hypothèse de mélange

$(A13b)$ La suite $(X_i, Z_i)_{i\in N}$ est α-mélangeate et ses coefficients de mélange $\alpha(n)$ sont tels que $\exists a, c \in \mathbb{R}_+^* : \forall n \in N, \alpha(n) \leq cn^{-a}$. Afin de contrôler les lois jointes, nous aurons aussi besion d' introduire les condition ci-dessous.

$(A13c)$ La densité jointe de (Y_i, Y_j) sachant (Z_i, Z_j) existe et est bornée, et

$$\exists \epsilon_1 \in]0,1], 0 < \sup_{i \neq j} \mathrm{P}((Z_i, Z_j) \in \mathrm{B}(z,h) \times \mathrm{B}(z,h)) = o(\phi_z(h))^{1+\epsilon_1}).$$

L'hypothèse

$(A13d)$ $\exists \epsilon_2 \in]0,1[, a > \frac{1+\epsilon_1}{\epsilon_2 \epsilon_1}$ *et* $h_H \phi_z(h_K) = o(n^{-\epsilon_2})$

permet de maîtriser les liens existant entre les paramètres de lissage h_H, h_K et les coefficients de mélange $\alpha(n)$. Il faut noter que ces hypothèses sont classiques dans les problèmes d'estimation non-paramétrique avec variables dépendantes, fonctionnelles ou non (voir Ferraty et Vieu (2006)) on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses (A1)-(A8) et* $(A13b) - (A13d)$ *on a*

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{h}^z(x) - h^z(x) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \psi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.16)$$

Preuve Les propriétés 2.14 et 2.15 restent vraies sous les hypothèses de la mélange puisque ce sont des cas particuliers (voir Ferraty et Vieu (2006)). Le résultat 2.16 est donc obtenu directement à partir de la décomposition 2.13 et des résultat 2.14 et 2.15.

2.5 Résultats asymptotique de l'estimateur pour des donnés incomplètes

L'objectif maintenant est de reprendre ces propriétés asymptotiques dans le cadre plus général d'un échantillon censuré tel que décrit dans le paragraphe (1.3). Nous allons commençer dans le paragraphe (1.5.1) par traiter cas d'échantillon i.i.d, puis nous étendrons nos résultats à des données issues d'un processus mélangeant. De toute évidence, l'obtention de ces résultats nécessitera des développements techniques plus sophistiqués que ceux présentés dans le cadre non censuré.

2.5.1 Le cas indépendant

Nous commençons par l'étude d'échantillons statistique vérifiant une hypothèse classique d'indépendance, à savoir,

$(A14a)$ Les triplets (X_i, C_i, Z_i) sont i.i.d.

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses (A1)-(A11) et (A14a), on a*

$$\sup_{t\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{h}^z(t) - h^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.17)$$

Preuve Le résultat est basé sur la décomposition ci-dessous, dans laquelle C est une constante réelle strictement positive :

$$\sup_{t\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{h}^z(x) - h^z(x) \mid \leq C\frac{\left\{\sup_{x\in\mathcal{S}\mathbb{R}} \mid \hat{\varphi}^z(x) - \varphi^z(x) \mid + \mid \hat{L}^z(x) - L^z(x) \mid\right\}}{\inf_{t\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid 1 - \hat{L}^z(x) \mid}, \qquad (2.18)$$

qui s'obtient à partir de 2.5 et 2.9 en procédant comme pour établir 2.13. Puisque $\hat{L}^z$ n'est autre que l'estimateur à noyau de la fonction de répartition conditionnelle de T sachant Z, on obtient directement (voir Ferraty et Vieu (2006)) que

$$\sup_{t\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{L}^z(t) - L^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.19)$$

Les propriétés de l'estimateur $\hat{\varphi}^Z$ sont données dans le Lemme (2.3.1) ci-dessous. Finalement, le résultat recherché est obtenu directement à partir de 2.18, 2.19 et 2.20

Lemme 2.3.1

Sous les condition du théorème (3), on a

$$\sup_{x\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}} \mid \hat{\varphi}^z(t) - \varphi^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.20)$$

2.5.2 Le cas dépendant

Ces résultats s'étendent aux cas d'échantillons censurés non nécessairement indépendants en introduisant des conditions similaires à celles présentées dans le paragraphe(1.4.3). Ces conditions sont les suivantes :

(A14b) la suite $(X_i, C_i, Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est α-mélangeante et de coefficients de mélange $\alpha(n)$ tels que $\exists a, c \in \mathbb{R}_+^* : n \in \mathbb{N}\alpha(n) \leq cn^{-a}$;

(A14c) la densité jointe de (Y_i, Y_j) sachant (Z_i, Z_j) existe et est bornée, et

$$\exists \epsilon_1 \in]0,1], 0 < \sup_{i \neq j} \mathrm{P}((Z_i, Z_j) \in \mathrm{B}(z,h) \times \mathrm{B}(z,h)) = o(\phi_z(h))^{1+\epsilon_1}).$$

(A14d) $\exists \epsilon_2 \in]0,1[, a > \frac{1+\epsilon_1}{\epsilon_2 \epsilon_1}$ *et* $h_H \phi_z(h_K) = o(n^{-\epsilon_2})$.

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses (A1)-(A12) et* $(A14b) - (A14d)$ *on a*

$$\sup_{t \in \mathcal{S}_\mathbb{R}} \mid \hat{h}^z(t) - h^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_z(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.21)$$

Preuve Puisque le résultat 2.19 reste valable sous condition d'α-mélange (voir Ferraty et Vieu), le résultat du Théorème (3) s'obtient directement à partir de la décomposition 2.18 et du Lemme (4.1).

Lemme 2.4.1

Sous les conditions du théorème (2.4), on a

$$\sup_{t \in \mathcal{S}\mathbb{R}} \mid \hat{\varphi}^z(t) - \varphi^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) + o\left(\sqrt{\frac{\log n}{n h_H \phi_{(z)}(h_K)}}\right), \qquad p.c. \qquad (2.22)$$

2.6 Preuves des lemmes

Dans ce qui suit C et c désigneront des constantes réelles strictement positives génériques. Par ailleurs, on introduit les notations suivantes :

$$K_i(z) = K(h_K^{-1} d(z, Z_i)), \qquad H_i(z) = H^{'}(h_K^{-1}(t, T_i)),$$

$$\hat{\varphi}_N^z(t) = \frac{1}{n h_H \mathbb{E}[K_1(z)]} \sum_{i=1}^n K_i(z) H_i(t) \Delta_i, \qquad \hat{\varphi}_D(z) = \frac{1}{n \mathbb{E}[K_1(z)]} \sum_{i=1}^n K_i(z),$$

$$V_i = \frac{1}{\mathbb{E}[K_1(z)]} K_i(z), \qquad W_i = \frac{1}{h_H \mathbb{E}[K_1(z)]} K_i(z) H_i(t) \Delta_i,$$

$$s_n^2 = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} cov(V_{i_1}, V_{i_2}), \qquad S_n^2 = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} cov(W_{i_1}, W_{i_2}).$$

Preuve de lemme 2.3.1 En utilisant la décomposition suivant :

$$\hat{\varphi}^z(t) - \varphi^z(t) = \frac{(\hat{\varphi}_N^z(t) - \varphi_N^z(t))\varphi_D(z) - (\hat{\varphi}_D(z) - \varphi_N(z))\varphi_N^z(t)}{\hat{\varphi}_D(z)\varphi_D(z)}, \tag{2.23}$$

et en vertu de la proposition (A6ii) de Ferraty et Vieu (2006), le résultat du Lemme (2.3.1) découlera directement des trois propriétés suivantes :

$$\mid \hat{\varphi_D}(z) - 1 \mid = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right), \qquad p.c. \tag{2.24}$$

$$\sup_{t\in\mathcal{S}} \mid \mathbb{E}\hat{\varphi}_N^z(t) - \varphi^z(t) \mid = o(h_K^{b_1}) + o(h_H^{b_2}) \tag{2.25}$$

et

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_D}\sup_{t\in\mathcal{S}} \mid \hat{\varphi}_N^z(t) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_N^z(t) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right), \qquad p.c. \tag{2.26}$$

– Preuve de 2.24. Il suffit de remarque que l'on peut écrire

$$\hat{\varphi}_D(z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i,$$

avec

$$\mid V_i \mid = o\left(\frac{1}{\phi_z(h)}\right), \tag{2.27}$$

et

$$\mathbb{E}(V_i^2) = o\left(\frac{1}{\phi_z(h)}\right). \tag{2.28}$$

En appliquant une inégalité exponentielle pour variables bornées et en tenant compte des résultats 2.27 et 2.29, on arrive a

$$\mathrm{P}\left[\mid \hat{\varphi}_D(z) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D(z) \mid > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_{(z)}(h_K)}}\right] = o(n^{-C\epsilon^2}).$$

Il suffit maintenant de choisir ϵ suffisament grand pour obtenir le résultat 2.24.

– Preuve de 2.25. Pour tout $x \in \mathcal{S}$ on a

$$\mathbb{E}\hat{\varphi}_N^Z(t) = \frac{1}{h_H \mathbb{E}K_1(z)}\mathbb{E}(K_i(z)H_1\Delta_1) \tag{2.29}$$

$$= \frac{1}{h_H \mathbb{E}K_1(z)}\mathbb{E}(K_1(z)\mathbb{E}(H_1(t)\mathbb{1}_{X_1 \le C_1}\backslash Z_1))$$
$$= \frac{1}{h_H \mathbb{E}K_1(z)}\mathbb{E}(K_1(z)\mathbb{E}(H_1(t)S_1^{Z_1}\backslash Z_1)).$$

La dernière égalité découlant de l'indépendance conditionnelle entre C_1 et X_1 introduite dans (A9). Par ailleurs nous avons

$$\mathbb{E}(H_1(t)S_1^z(X_1)\backslash Z_1) = \int H^{'}\left(\frac{t-u}{h_H}\right)S_1^{Z_1}(u)f^{Z_1}(u)du \tag{2.30}$$

$h_H \int H^{'}(v)\varphi^{Z_1}(t - vh_H)dv = h_H(\varphi^z + o(h_H^{b_2} + h_K^{b_1}))$.

La dernière égalité découlant de la propriété de Lipschitz de la fonction φ^z introduite dans (A10) et du fait que $H^{'}$ est une densité de probabilité. Il faut noter, toujours à cause de la condition (A10), que les $o(.)$ intervenant dans le résultat 2.30 sont uniformes pour $t \in \mathcal{S}$. Ainsi, le résultat 2.25 est une conséquence immédiate de **??** et 2.30

– Preuve de 2.26. La compacité de l'ensemble $\mathcal{S}$ permet de la recouvrir par un intervalles disjoints de sorte que

$$\mathcal{S} \subset \bigsqcup_{k=1}^{u_n}[\tau_k - l_n, \tau_k + l_n[,$$

où $\tau_1....., \tau_{u_n}$ sont des points de $\mathcal{S}$ et où l_n et u_n sont choisi tels que

$$\exists C > 0, \exists c > 0, l_n = Cu_n^{-1} = n^{-c}. \tag{2.31}$$

Pour chaque $t \in \mathcal{S}$ on note τ_t l'unique τ_k tel que $t \in [\tau_k - l_n, \tau_k + l_n[$. Finalement, 2.26 découlera directement des résultats suivants :

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_D(z)} \sup_{t\in\mathcal{S}} \mid \hat{\varphi}_D^z(t) - \hat{\varphi}_D^z(\tau_x) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right). \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_D(z)} \sup_{t\in\mathcal{S}} \mid \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(t) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_x) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right), \qquad p.c, \tag{2.33}$$

et

$$\frac{1}{\hat{\varphi}_D(z)} \sup_{t\in\mathcal{S}} \mid \hat{\varphi}_D^z(\tau_x) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_x) \mid = o\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right). \tag{2.34}$$

– Preuve de 2.32. A cause de la condition (A5i), il existe une constante finie C telle que pour tout $t \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ on a

$$\begin{aligned} \mid \hat{\varphi}_D^z(t) - \hat{\varphi}_D^z(\tau_x) \mid &= \frac{1}{nh_H\mathbb{E}K_1(z)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i K_i(z)(H_i(t) - H_i(\tau_t)) \qquad (2.35) \\ &\leq \frac{C}{nh_H\mathbb{E}K_1(z)} \sum_{i=1}^{n} K_i(z) \frac{\mid x - \tau_t \mid}{h_H} \leq C\hat{\varphi}_D(z) l_n h_H^{-2}. \end{aligned}$$

En utilisant 2.31 et en choisissant c assez grand, on obtient directement 2.32.

– Preuve de 2.33. Ce résultat s'obtient directement à partir de 2.24 et 2.35 en utilisant la propisition (A6ii) de Ferraty et Vieu (2006)

– Preuve de 2.34. L'obtention de 2.34 est basée sur l'utilisation d'une inégalité exponentielle. Plus précisément, il suffit de remarquer que l'on peut écrire

$$\hat{\varphi}_D^z(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i,$$

avec

$$\mid W_i \mid = o\left(\frac{1}{h_H\phi_z(h)}\right), \tag{2.36}$$

et

$$\mathbb{E}W_i^2 = \frac{1}{h_H^2(\mathbb{E}K_1(x))^2}\mathbb{E}K_i^2(z)H_i^2(t)\Delta_i^2 \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\frac{1}{h_H^2(\mathbb{E}K_1(z)^2)}\mathbb{E}(K_i^2(z)\mathbb{E}(H_i^2(t)\backslash Z_i))\\
&\leq C\frac{1}{h_H\phi_z(h)^2}\mathbb{E}\left(K_i^2(z)\int\frac{1}{h_H}H^{'}\left(\frac{x-u}{h_H}\right)^2 f^{Z_i}(u)du\right)\\
&= o\left(\frac{1}{h_H\phi_z(h)}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la condition 2.31 on arrive à

$$\mathrm{P}\left[\sup_{x\in\mathcal{S}} \mid \hat{\varphi}_D^z(\tau_t) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_t \mid > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right] \tag{2.38}$$

$$\leq n^{\epsilon}\max_{j=1,\ldots,u_n}\mathrm{P}\left[\mid \hat{\varphi}_D^z(\tau_j) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_j \mid > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right].$$

Par ailleures, en appliquant une inégalité exponontielle pour variables bornées et en tenant compte des résultats 2.36 et 2.37, on arrive à

$$\mathrm{P}\left[\mid \hat{\varphi}_D^z(\tau_j) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_j \mid > \epsilon\sqrt{\frac{\log n}{nh_H\phi_{(z)}(h_K)}}\right] = o(n^{-C\epsilon^2}). \tag{2.39}$$

Il suffit maintanant de choisi ϵ suffisament grand pour obtenir directement le résultat recherché à partir de 2.38 et de 2.39.

- Les résultats 2.32, 2.33 et 2.34 suffisent pour conclure la preuve du résultat 2.26.

Finalement, le lemme (3.1) découle directement des résultats 2.24, 2.25 et 2.26 et de la décomposition 2.23.

Preuve de lemme 2.4.1 La preuve suit le même cheminement que la précédente, mais avec des diffucultés supplémentaires liées à la non indépendance des variables constituant l'échantillon. Comme précédemment, au vu de la décomposition 2.23, il suffira de prouver que les résultats 2.24, 2.25 et 2.26 restent valables.

– Preuve de 2.24. La principale étape de la démonstration consiste à obtenir une évaluation de la somme des convariances s_n^2. Pour $i_1 \neq i_2$, d'aprés la condition $(A14_c)$ on a

$$\mid \mathbb{E}V_{i_1}V_{i_2} \mid \leq \frac{C}{(\mathbb{E}K_1(z))^2}\phi_z(h_K)^{1+\epsilon_1} = o(\phi_z(h_K)^{-1+\epsilon_1}),$$

et, par suite,

$$\mid cov(V_{i_1}V_{i_2}) \mid \leq \frac{C}{(\mathbb{E}K_1(z))^2}\phi_z(h_K)^{1+\epsilon_1} = o(\max\{\phi_z(h_K)^{1+\epsilon_1}, 1\}). \quad (2.40)$$

D'un autre côté, en utilisant une inégalité de covariace pour processus mélangeant, on peut écrire

$$cov(V_{i_1}, V_{i_2}) \leq C\phi_z(h_K)^{-2}\alpha(\mid i_1 - i_2 \mid). \quad (2.41)$$

Finalement, pour toute suite v_n positive on peut ecrire

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} var(V_i) + \sum_{0<|i_1-i_2|\leq v_n} cov(V_{i_1}, V_{i_2}) + \sum_{|i_1-i_2|>v_n} cov(V_{i_1}, V_{i_2}), \quad (2.42)$$

et en utilisant respectivement 2.29, 2.40 et 2.41 pour traiter chacun des trois termes de 2.42 on arrive à

$$s_n^2 = o\left(\frac{n}{\phi_z(h_K)}\right) + o(nv_n \max\{\phi_z(h_K)^{-1+\epsilon_1}, 1\})$$
$$+o\left(\phi_z(h_K)^{-2} \sum_{|i_1-i_2|>v_n} \alpha(\mid i_1 - i_2 \mid)\right).$$

Il suffit maintenant de choisir $v_n = \phi_z(h_K)^{-\epsilon_1}$ pour arriver à

$$s_n^2 = o\left(\frac{n}{\phi_z(h_K)}\right) + o(\phi_z(h_K)^{-2} n(n-v_n)\alpha(v_n)) \tag{2.43}$$

$$o\left(\frac{n}{\phi_z(h_K)}\right) + o(\phi_z(h_K)^{-2} n^2 \phi_z(h_K)^{a\epsilon^1}) = o\left(\frac{n}{\phi_z(h_K)}\right),$$

le dernière égalité découlant directement de la condition $(A14_d)$.

En utilisant les bornes données par 2.27 et 2.29, et en appliquant une inégalité exponentielle pour variables bornées mélangeantes , on arrive à

$$\hat{\varphi}_D(z) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D(z) = o(n^{-1}\sqrt{\log n s_n^2}), \qquad p.c. \tag{2.44}$$

Le résultat 2.24 découle directement de 2.43 et 2.44.

- Preuve de 2.25. Pour traiter ce terme déterministe, les calculs effectués lors de la preuve du lemme (3.1) n'utilisaient pas l'indépendance des variables. Le résultat 2.25 rest donc variable sous condition de mélange.

- Preuve de 2.26. En reprenant la démarche et les notations introduites lors de la preuve (3.1), il suffit de vérifier que les résultat 2.32, 2.33 et 2.34 restent vrais.

- Preuve de 2.32 et 2.33. Les calculs effectués de la preuve du lemme (3.1) n'utilisaient pas l'indépendance des variables. Ainsi, le résultat 2.35 reste vrai sous-condition de dépendance. Par conséquent 2.32 et 2.33 sont obtenus directement à partir de 2.24 et 2.35

- Preuve de (1.34). La principale étape de la démonstration consiste à obtenir une évaluation de la somme des convariances S_n^2. En reprenant la même démarche que celle utilisée pour prouver (1.24), pour $i_1 \neq i_2$ on a

$|\ \mathbb{E}W_{i_1}W_{i_2}\ | \leq \frac{C}{h_H^2(\mathbb{E}K_1(z))^2}\phi_z(h_K)^{1+\varepsilon_1} = o(h_H^{-2}\phi_z(h_K)^{-1+\epsilon_1})$

et, par suite,

$$| \, cov(W_{i_1}, W_{i_2}) \, | \leq \frac{C}{h_H^{-2}(\mathbb{E}K_1(z))^2}\phi_z(h_K)^{1+\varepsilon_1} \tag{2.45}$$

$$= o(h_H^{-2}(\max\{\phi_z(h_K)^{-1+\varepsilon_1}, 1\})).$$

D'un autre côté, en utilisant une inégalité de covariance pour processus mélangeant on a

$$cov(W_{i_1}, W_{i_2}) \leq C h_H^{-2}\phi_z(h_K)^{-2}\alpha(| \, i_1 - i_2 \, |). \tag{2.46}$$

Finalement, pour toute suite v_n positive on peut écrire

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} var(W_i) + \sum_{0<|i_1-i_2|\leq v_n} cov(W_{i_1}, W_{i_2}) + \sum_{|i_1-i_2|>v_n} cov(W_{i_1}, W_{i_2}),$$

et en utilisant respectivement 2.29, 2.45 et 2.46 on arrive à

$$s_n^2 = o\left(\frac{n}{h_H\phi_z(h_K)}\right) + o(nv_n h_H^{-2}\max\{\phi_z(h_K)^{-1+\epsilon_1}, 1\})$$

$$+o\left(h_H^{-2}\phi_z(h_K)^{-2}\sum_{|i_1-i_2|>v_n}\alpha(| \, i_1 - i_2 \, |)\right).$$

Il suffit maintenant de choisir $v_n = \phi_z(h_K)^{-\epsilon_1}$ et d'utiliser la condition $(A14_d)$ pour arriver à

$$S_n^2 = o\left(\frac{n}{h_H\phi_z(h_K)}\right). \tag{2.47}$$

En utilisant les bornes données par (1.36) et (1.37), et en appliquant une inégalité exponentielle pour variables bornées mélangeantes, on arrive à

$$\hat{\varphi}_D^z(\tau_j) - \mathbb{E}\hat{\varphi}_D^z(\tau_j) = o(n^{-1}\sqrt{\log n S_n^2}), \qquad p.c. \tag{2.48}$$

Le résultat 2.34 découle directement de 2.38, 2.47 et 2.48.

– Ainsi, il suffi d'utiliser 2.32, 2.33 et 2.34 pour terminer la preuve de 2.26.

Finalement, le lemme (2.4.1) découle directement des résultat 2.24, 2.25 et 2.26 et la décomposotion 2.23.

Conclusion

Le but de mon travail est la présentation d'une étude théorique qui porte sur plusieurs modèles non-paramétrique. Plus précisement ; on est arrivèr à confirmer que l'estimateur de non- paramétrique de la fonction de hazard conditionnelle. Est consistant ces vitesses de convergence sont similaire pour les deux contexte. Le premier est celui des données complètes et le deuxième est pour les données incomplètes. les vitesses de convergence restent similaires dans le cas des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) est le cas du mélange fort (α-mélange).

Bibliographie

[1] Deheuvels, P.,Mason, D.(2004). General asymptotic confidence bands based or kernel type function estimators. *Statistical inference stochastic processer* , **7**, 225-277.

[2] Ferraty, F. Goia, A.,Vieu, P.(2002) *Function nonparamatric model for time series,* A Fractal appraoch for dimension redection test, **11**, 317-344.

[3] Ferraty, F. Laksaci, A., Vieu, P. (2006). Estimating somme characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional model. *statistics inference for stochastics processer*, **9**, 47-76.

[4] Ferraty. F., Vieu, P. *Nonparametric functional data analysis theory and practice.* Spinger Series in statistic. Spinger, New York, 2006.

[5] Kolmogorov, A. N., Tikhomirov, V.M.(1959). ϵ-entopy and ϵ-capacity. *Uspekhi Mat. Nauk* **14** 3-86. *Engl transl. Amer. Math. Soc. Transl. Ser*, **2**, 277-364 (1961)

[6] Kuelbs, J., Li, W. (1993). Metric entropy and the small ball problem for gaussian measures. *J. Funct. Amal.,***116** 133-157.

[7] Madani.F et al (2012). *convergence uniforme et prêsque complète de l'estimateur linéaire local de la densité conditionnelle pour des données fonctionnelles*

[8] Rosenblatt, M.(1969). Conditional probability density and regression estimators. *In multivariate analysis, In*, Ed.P.R. Krishnaiah. Academic press, New York and London.

[9] Rosenbblatt, M.(1956) Remarks on some non-parametric estimates of a density function, *Annals of mathematical statistic,***27**, 832-837.

[10] Roussas, G. G .(1968). On some properties of nonparametric estimates of probability density functions.*Bull-Soc math. Greece (N.S)* **9**, 29-43.

[11] Samanta, M. (1989). Nonparametric estimation of conditional quantiles, *Star, Probab. Lett.,* **7**, 407-412.

[12] Stone, G.J. (1977) : Consistent nonparametric regresssion, *Annal of statistic*, **5** 595-645.

[13] Theodoros, N.,Yannis G.Y. (1997). Rates of convergence of estimate, Kolmogorov entropy and the dimensionality reduction principale in regression. *The Amals of statistics,* **25**, No.6, 2493-2511.

[14] Youndjé, E.,(1996). Proprietés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle. *Rev, Roumaine math. Pures appl,* **41**, 531-566.

[15] R.F. Engle and J.Russel, *Autoregressive conditional duration : A new model irregulary spaced transaction data.* Econometrica **66** (1988), 1127-1162.

[16] G. Estévez, *On convergence rates for quadratic errors in kernel hasard estimation.* Statist .Probab. Lett.**57** (2002), 231-241.

[17] G. Estévez-Pérez, A. Quintela-del-Rio and P. Vieu, *convergence rate for cross-validatory bandwith in kernel hasard estimation from dependent samples. J.* Statist. Plann. Inference **104** (2002), 1-30.

[18] O. Gefeller and P. Michels, *A review on smoothing methods for the estimation of the hazard rate based on kernel functions.* In : Y. Dodge and J.Whittaker (Eds.), *computational statistics, pp.* 459-464. Physica-Verlag,1992.

[19] S.Hassani,P. Sarda et P. Vieu, *Approche non-parametrique en théorie de la fiabilité : revue bibliographique.* Rev.Statist. Appl. **35**(1986), 4, 27-41

[20] A. Izenman, *developments in nonparametric density estimation. J.* Amer. Statist. Assoc **86** (1991), 205-224.

[21] J-P. Lecourte and E. Ould-Said, *Hazard rate estimation for strong mixing and censored processes.* J.Nonparametr.Statist. **5**(1995),83-89.

[22] J.P. Nielson and O. Linton,*Kernel estimation in a nonparametric marker dependent hazard model.* Ann. Statist.**23** (1995), 1735-1748.

[23] M. Pascu and I. Vaduva, *nonparametric estimation of the hazard rate a survey.* Rev Roumaine Math. Pures Appl.**48** (2003), 173-191.

[24] P.N. Patil, M.T.Wells and J.S.Maron, *Some heuristics of kernel based estimators of ratio functions.* J. Nonparametre. Statist. **4**(1994), 203-209.

[25] J. Ramsay and B. Silverman, *Functional Dta Analysis,* 2nd Ed. Springer Series in statistics. Springer, New York, 2005.

[26] N.Singpurwalla and M.Y. Wong, *Estimation of the failure rate - a survey of non-parametric models. part I : Non-Bayesian methods.* Comm. Statist. Theory Methods **12** (1983), 559-588.

[27] W.J.Padgett, *Nonparametric estimation of density and hazard rate functions when samples are censoder.* In P.R. Krishnaiah and C.R. Rao(Eds.), *Handbook of Statistics*, **7**.pp. 313-331. Elsevies Science Publishers, 1988.

[28] M.Tanner and W.H.Wong, *The estimation of the hazard function from randomly censored data by the kernel methods.* Ann .Statist.**11** (1983), 989-993 .

[29] I. Van Keilegom and N. Veraverbeke, *Hazard rate estimation in nonparametric regression with censored data.* Ann.Inst.Statist. Math.**53** (2001), 730-745.

[30] Nadaraya, E. A.(1964) : On estimatings regression,*Theory of prabability and it application* , **9**,141-142.

[31] Watson, G.S. (1964) : Smooth regression analysis, *Sankaya Series, A*, **26**, 359-372.