



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année: 2016/2017



Les courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace de Minkowski et le groupe d'Heisenberg Lorentzien

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse, géométrie et Applications

par

Moumene Abd el kader¹

Sous la direction de

Dr F. Hathout

Soutenu le 23 Mai 2017 devant le jury composé de

Mlle. H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. F. Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Dr. H.M. Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
Mr. B. Saadli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : fosilkadi@outlook.fr

Remerciements

Remerciements et louanges à **Allah**, le Miséricordieux, pour m'avoir donné la force de contribuer ce travail.

Prière et Salut soient sur Notre Cher Maître et Prophète **Mohamed** et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Mon grand respect et ma honnête considération s'adressent à mon encadreur **Dr F. HATHOUT** pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant et pour m'avoir guidée et encouragée, ses qualités humaines et scientifiques se sont avérées essentielles pour l'accomplissement de ce travail.

Je voudrais aussi témoigner ma reconnaissance aux le président de jury **Mlle. H.Abbas** et les membres du jury **Dr.H.M. Dida** et **Mr.B Saadli** d'avoir accepté de juger ce mémoire.

Enfin, je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Généralités	6
1.1	Espace Euclidien de dimension 3	6
1.2	Courbes paramétrées	7
2	Espace de Minkowski de dimension 3	9
2.1	Espace \mathbb{E}_1^3	9
2.1.1	Sous-espace vectoriel dans l'espace de Minkowski	10
2.1.2	Vecteur temps	12
2.1.3	Produit vectoriel Lorentzien	15
2.2	Courbes causals	16
2.3	Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3	17
2.3.1	Courbure	18
2.3.2	Torsion	18
2.3.3	Formules du repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3	19
2.4	Courbes Hélices dans \mathbb{E}_1^3	21
3	Groupe d'Heizenberg Loreintzien de dimension 3	23
3.1	Structure algebrique du groupe d'Heisenberg de dimension 3	23
3.1.1	Loi du sous ensemble \mathbb{H}^3	24
3.2	Structures Loreintzienne de \mathbb{H}_1^3	25
3.2.1	Métrique Lorentzienne invariante à gauche dans \mathbb{H}_1^3	25
3.2.2	Base des champs de vecteurs invariants à gauche	26
3.2.3	Connexion de Levi-Civita	28

3.2.4	Tenseur de courbure	29
4	Harmonicité et biharmonicité entre les variétés	31
4.1	Applications harmoniques et biharmoniques entre variétés pseudo Riemanniennes	31
4.2	Courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{E}_1^3	32
4.3	Courbes harmoniques et biharmoniques dans le groupe d'Heisenberg Lorentzien \mathbb{H}_1^3	34
4.3.1	Courbes harmoniques dans \mathbb{H}_1^3	34
4.3.2	Courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3	34
4.4	Courbes hélices biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3	39
4.5	Formes explicites des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3	43
5	Conclusion	50
6	Prespective	51

Introduction

En 1964, EELLS ET SAMPSON ont introduit la notion d'applications biharmoniques comme une généralisation naturelle des applications harmoniques bien connues. Alors une application d'une variété pseudo-Riemannienne compact (M, g) à une autre variété pseudo-Riemannienne (N, h) est harmonique si cette application est un point critique de l'énergie fonctionnelle

$$E_1(\psi) = \frac{1}{2} \int_M \|d\psi\|^2 v_g,$$

tel que $\psi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ est une application de classe \mathcal{C}^∞ .

Les applications biharmoniques sont les points critiques de la fonction bienergie

$$E_2(\psi) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\tau(\psi)|^2 v_g.$$

Les application harmoniques se caractérisent par la disparition du champ de tension i.e.

$$\tau(\psi) = \text{trace} \nabla d\psi = 0,$$

où ∇ est une connexion induite par la connexion Levi-Civita.

La première formule de variation pour la dérivée de la foction bi-energie montre que l'équation d'Euler-Lagrange pour la bi-energie est

$$\tau_2(\psi) = -J(\tau_1(\psi)) = -\Delta \tau_1(\psi) + \text{trace} R^N(d\psi, \tau_1(\psi)) d\psi.$$

Où

$$\Delta \tau_1 = -\text{trace}(\nabla^\psi)^2 \tau_1(\psi)$$

est le Laplacien brut sur les sections de $\psi^{-1}(TN)$ et

$$R^N = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

est l'opérateur de courbure sur N .

D'après l'expression du champ bi-tension (τ_2), il est clair qu'une application harmonique est automatiquement une application biharmonique. Les applications biharmoniques non harmo-

niques sont appelées applications biharmoniques appropriées.(pour détail voir [4])

D'autre part, un espace de Minkowski, du nom de son inventeur HERMANN MINKOWSKI (né à Alexotas en Russie (aujourd'hui en Lituanie) le 22 juin 1864 et mort à Göttingen le 12 janvier 1909, est un mathématicien et un physicien théoricien allemand), est un espace affine mathématique à quatre dimension modélisant l'espace-temps de la relativité restreinte. Les propriétés physiques présentés dans cette théorie correspondent à des propriétés géométriques de cet espace (ici on travaille dans l'espace de Minkowski de dimension 3).(voir [2], [5])

Dans un contexte différent, WERNER KARL HEISENBERG (né le 5 décembre 1901 à Wurtzbourg, Empire allemand, mort le 1er février 1976 à Munich, Allemagne) est un physicien allemand qui est l'un des fondateurs de la mécanique quantique. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1932 « pour la création de la mécanique quantique, dont l'application a mené, entre autres, à la découverte des variétés allotropiques de l'hydrogène». Un de ces travaux est l'ensemble qui porte son nom "le groupe d'Heisenberg [3]" défini par

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(3, \mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et qui est un groupe de lie de dimension impaire et noté par \mathbb{H}_3 (ici il est donné en dimension trois).

Les premiers et les plus simples exemples des applications harmoniques et biharmoniques peuvent être trouvés sont les courbes différentiables dans une variété pseudo-Riemannienne, puisque les géodésiques sont biharmoniques. Alors les courbes biharmoniques non géodésiques sont les plus intéressantes dans ce travail. les deux chercheurs CHEN et ISHIKAWA ont classés toutes les courbes biharmoniques appropriées dans l'espace de Minkowski. Les courbes biharmoniques du groupe Heisenberg sont étudiées par CADDEO et AL, ils ont montré que les courbes biharmoniques dans le groupe Heisenberg sont des hélices, c'est-à-dire des courbes avec une courbure et une torsion constantes. Autres chercheurs ont obtenu des résultats pour le groupe Heisenberg avec métrique Lorentzienne invariante gauche et ont étudié les courbes biharmoniques dans le groupe Heisenberg Lorentzien (voir [6]). FETCU a étudié les courbes biharmoniques dans le groupe d'Heisenberg généralisé et il a obtenu deux familles de courbes biharmoniques appropriées.

Notre mémoire se compose de ce qui suit :

Le premier chapitre : On le commence par une section de préliminaires consacrée aux définitions de l'espace Euclidien. Et on le termine par un petit rappel sur les courbes paramétrés.

Au deuxième chapitre : On définit ce qu'on appelle un espace de Minkowski où on donne sa structure vectoriel et quelques propositions et propriétés sur un sous espace vectoriel, un vecteur temps et produit vectoriel dans ce espace, puis on définit les courbes causale et on parle sur le repère de Serret-Frenet et les courbes hélices dans l'espace de Minkowski, ces définition et propriétés seront utiles pour la suite de ce travail.

Dans le troisième chapitre : Nous allons interpréter le groupe d'Heisenberg de dimension 3 muni d'une structure Lorentzienne (i.e. nous permet de trouver les formules générales de connexion associée à la métrique Lorentzienne invariante à gauche et le tenseur de courbure du groupe d'Heisenberg Lorentzien).

Finalement, le quatrième chapitre, nous introduisons la notion d'applications harmoniques et biharmoniques qui sont le but de ce travail, dont on cite quelques propriétés et étudie l'harmonicité et la biharmonicité de quelque applications entre les variétés pseudo-Riemanniennes compacts. Ces résultats nous ont permis de construire et d'étudier en particulier le cas des courbes harmoniques et biharmoniques dans les variétés $(\mathbb{H}_1^3, g_{\mathbb{H}_1^3})$ et (\mathbb{E}_1^3, g_1) . On caractérise les courbes biharmoniques non géodisiques dans \mathbb{H}_1^3 . En suite, on démontre que les courbes hélices sont des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3 . Enfin, on déduit les formules explicites des courbes biharmoniques de type temps ou de type espace dans \mathbb{H}_1^3 .

Notation | *On travail dans la classe \mathcal{C}^∞ , c'est-à-dire les variétés, les métriques, les connexions, les cartes seront supposées être lisses.*

Chapitre 1

Généralités

1.1 Espace Euclidien de dimension 3

Définition 1.1 Généralement on appelle un espace Euclidien \mathbb{E}^3 tout espace vectoriel de dimension fini muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive. On la note $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle_{eu}$ et on l'appelle produit scalaire.

Exemple 1.2 Les espaces suivants sont ceux dans lesquels on travaille la plupart du temps.

- 1) \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire usuel .
- 2) $\mathbb{R}_n[x]$ muni d'un des produits scalaires usuels.
- 3) Des espace de fonction comme $\mathcal{C}([0, 1])$ munis de produits scalaires définis avec une intégrale.

Définition 1.3 L'espace Euclidien de dimension 3 est l'espace \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire

$$\langle u, u \rangle_{eu} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \text{ où } u = (u_1, u_2, u_3)$$

Tout vecteur tangent peut être vu comme un élément v de l'espace vectoriel sous-jacent sur lequel on peut évaluer.

Définition 1.4 Soit v un vecteur de \mathbb{E}^3 , on définit la norme euclidienne par

$$\|v\|_{eu} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{eu}}$$

Définition 1.5 La longueur d'une courbe c de classe \mathcal{C}^1 par morceaux $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est égal à l'intégrale

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_{eu} dt$$

On peut calculer la longueur de toute courbe absolument continue (on dit aussi rectifiable) pour laquelle la dérivée est presque partout définie et telle que l'intégrale si-dessus soit finie.

1.2 Courbes paramétrées

Définition 1.6 On appelle une courbe paramétrée de classe \mathcal{C}^k de \mathbb{E}^3 , toute application de classe \mathcal{C}^k

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3,$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} .

L'ensemble $C = \{\gamma(t), t \in I\}$ est appelé le support géométrique de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$. On dit que C est une courbe géométrique et que γ est une paramétrisation de C .

Remarque 1.7 Une courbe paramétrée comporte plus d'informations que la courbe géométrique : quand t parcourt l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt C . Autrement dit, la courbe paramétrée donne non seulement le support géométrique mais aussi une façon de le parcourir.

Exemple 1.8 le support géométrique de la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donné par

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t),$$

γ est une courbe hélice (voir figure 1)

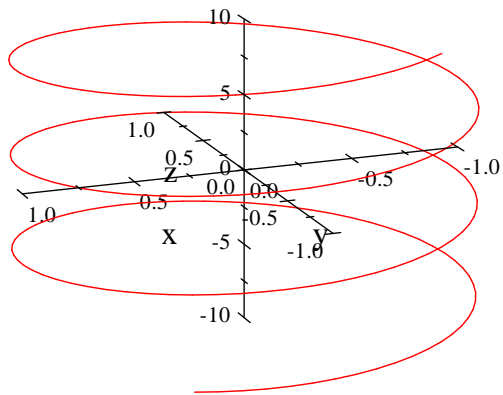


Figure 1. Courbe hélice

Chapitre 2

Espace de Minkowski de dimension 3

La physique classique est également géométrisée depuis ISAAC NEWTON, l'intérêt de cette géométrisation de la relativité restreinte est dans le fait le temps lui-même y est représenté lié à l'espace matériel et les propriétés abstraites de la relativité restreinte y trouvent une représentation proche de la géométrie euclidienne.

Cet espace a été introduit dès 1905 par HENRI POINCARÉ. La primeur de la découverte est un sujet à débats, mais il semble, d'après certains historiens des sciences, que l'interprétation moderne de cet espace comme espace-temps physique, et non par convention calculatoire, est une idée de MINKOWSKI.

H.Poincaré aurait proposé cet espace comme une présentation algébrique et géométrique possible pratique d'un point de vue calculatoire, mais axiomatique, c'est à dire conventionnelle. Seul HERMANN MINKOWSKI aurait vu dès 1907 que l'espace réel classique était un modèle expérimentable et pas seulement conventionnelle. H.POINCARÉ se rapprochera de ce point de vue en 1912. Il exprimera que l'on peut définir un espace-temps à partir du groupe de symétrie des lois de la physique en posant cette fois le principe de la relativité comme une convention.

2.1 Espace \mathbb{E}_1^3

Définition 2.1 *L'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3 est l'espace réel \mathbb{R}^3 muni de la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ définie par*

$$\langle u, v \rangle_1 = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3. \quad \text{tel que } u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

On l'appelle la métrique Lorentzienne de dimension 3 et l'espace est noté par $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$.

Définition 2.2 Un vecteur $u \in \mathbb{E}_1^3$ est dit :

- 1) Vecteur de type espace si $\langle u, u \rangle_1 > 0$,
- 2) Vecteur de type temps si $\langle u, u \rangle_1 < 0$,
- 3) Vecteur de type lumière si $\langle u, u \rangle_1 = 0$ et $u \neq 0$.

Le cône lumière de \mathbb{E}_1^3 est l'ensemble de tous les vecteurs lumières de \mathbb{E}_1^3

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{0, 0, 0\}$$

L'ensemble des vecteurs de type temps est

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

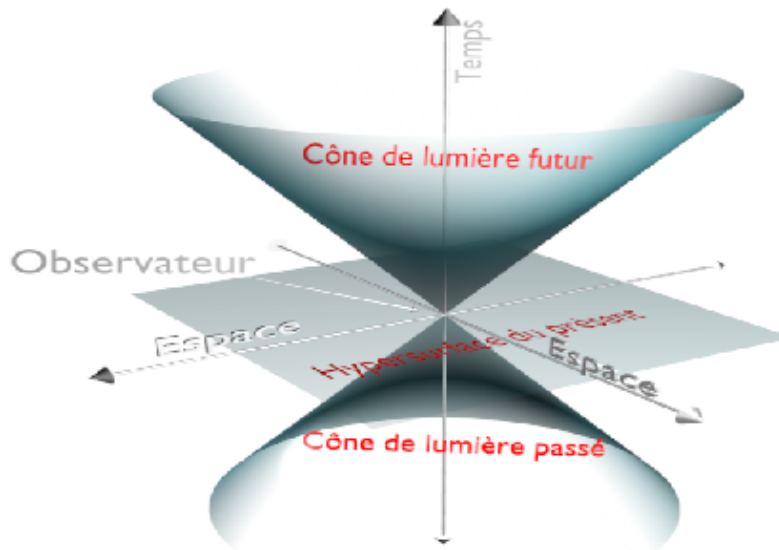


Figure 2. L'espace de Minkowski \mathbb{E}_1^3

2.1.1 Sous-espace vectoriel dans l'espace de Minkowski

Définition 2.3 Soit $U \subset \mathbb{R}^3$ un sous-espace vectoriel, on définit la métrique induite $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ par

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle_1 \quad / \quad u, v \in U$$

On a les trois propriétés suivantes :

- 1) la métrique est définie positive alors U est de type espace.
- 2) la métrique de signature 1, alors U est dit de type temps.
- 3) la métrique est dégénéré alors U est appelé de type lumière.

Le caractère causal d'un vecteur ou d'un sous-espace est la propriété d'être de type espace, type lumière ou type temps.

On a quelques caractérisation et propriétés de causalité d'un sous-espace de \mathbb{E}_1^3 :

Proposition 2.4 (Voir [5]) Soit U un sous-espace vectoriel de \mathbb{E}_1^3 , on a

- 1) $\dim(U^\perp) = 3 - \dim(U)$.
- 2) $(U^\perp)^\perp = U$.
- 3) Si U est non dégénéré alors U^\perp est un sous-espace non dégénéré .
- 4) U est de type temps (resp. type lumière, espace) si seulement si U^\perp est de type espace (resp. type lumière, temps).
- 5) Si v est un vecteur de type temps où espace alors $\mathbb{E}_1^3 = \text{eng}\{v\} \oplus \text{eng}\{v\}^\perp$.

L'existence du vecteur de type temps et de type lumière donne les propriétés suivantes :

Proposition 2.5 (Voir [5]) Soit $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ on a :

- 1) deux vecteurs lumières u et v sont linéairement indépendants si seulement si $\langle u, v \rangle_1 = 0$
- 2) si u et v sont deux vecteurs de type temps alors $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$.
- 3) U est un sous-espace lumière alors $\dim(U \cap U^\perp) = 1$.

Proposition 2.6 (Voir [5]) Soit P un plan de \mathbb{E}_1^3 , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) P est un sous-espace de type temps.
- 2) P contient deux vecteurs de type lumière linéairement indépendants.
- 3) P contient un vecteur de type temps.

Proposition 2.7 (Voir [5]) Soit U un sous-espace vectoriel de \mathbb{E}_1^3 , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) U est un sous-espace lumière.
- 2) U contient un vecteur de type lumière mais pas de type temps.
- 3) $U \cap C = L/\{0\}$ et L est un sous-espace vectoriel de $\dim L = 1$ tel que C est le cône lumière.

Proposition 2.8 Soit P un plan vectoriel de \mathbb{E}_1^3 , on note par \vec{n}_e le vecteur orthogonal par rapport à la métrique Euclidienne. Alors P est un plan de type espace (resp temps, lumière) si et seulement si \vec{n}_e est de type espace (resp temps, lumière).

Preuve. Si on pose

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

donc \vec{n}_e est proportionnelle le vecteur (a, b, c) .

On peut écrire P sous la forme :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - (-cz) = 0\} = \text{eng}\{a, b, -c\}^\perp.$$

donc le caractère causal du vecteur $(a, b, -c)$ est le même que \vec{n}_e et d'après la Proposition 2.6 le plan P et le vecteur \vec{n}_e ont le même type. ■

Définition 2.9 Soit u un vecteur de \mathbb{E}_1^3 , on définit la norme (ou le module) du vecteur u par :

$$\|u\|_1 = \sqrt{|\langle u, u \rangle_1|}$$

Le vecteur u est appelé unitaire si $\|u\|_1 = 1$.

Proposition 2.10 (Voir [5]) Si $P = \text{eng}\{v\}$ un plan de type espace, alors :

$$\|v\|_{eu} \geq \|v\|_1$$

2.1.2 Vecteur temps

Soit u est un vecteur de type temps, le cône de type temps de u est donné par

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle_1 < 0\}$$

cet ensemble est non vide puisque $u \in C(u)$, soit v un autre vecteur de type temps tel que $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$ alors

$$\langle u, v \rangle_1 < 0 \quad \text{où} \quad \langle u, v \rangle_1 > 0.$$

Cela signifie que \mathcal{T} est l'union disjoint

$$\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u).$$

avec

$$C(u) \cap C(-u) = \emptyset$$

Proposition 2.11 (Voir [5]) *On a les propriétés suivantes :*

- 1) *Soient u et v deux vecteurs de type temps, ils sont dans le même cône de type temps si et seulement si $\langle u, v \rangle_1 < 0$.*
- 2) *$u \in C(v)$ si et seulement si $C(u) = C(v)$.*
- 3) *les cônes sont des ensemble convexes de type temps.*

Théorème 2.12 *Soient $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ deux vecteurs de type temps alors $\|\langle u, v \rangle_1\|_1 \geq \|u\|_1 \|v\|_1$ si et seulement si u et v sont proportionnels. Dans le cas où les deux vecteurs se trouvent dans le même cône de type temps, il exist un nombre unique $\varphi \geq 0$ tel que*

$$\langle u, v \rangle_1 = -\|u\|_1 \|v\|_1 \cosh \varphi$$

Le nombre φ est appelé l'angle hyperbolique (ou lorentzienne) entre u et v .

Preuve. *Soient u et v deux vecteurs de type temps linéairement indépendants, et $U = \text{eng}\{u, v\}$ est un plan de type temps, on a l'équation sur λ*

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle_1 = \langle u, v \rangle_1 + 2\lambda \langle u, v \rangle_1 + \lambda^2 \langle v, v \rangle_1 = 0$$

On a deux solution. En particulier, le discriminat de l'équation doit être positive

Soit

$$\langle u, v \rangle_1^2 \geq \langle u, u \rangle_1 \langle v, v \rangle_1$$

Cela montre l'inégalité dans le cas où u et v sont linéairement indépendants, d'autre part s'ils sont proportionnels alors on obtient directement l'égalité.

Dans la deuxième partie du théorème nous écrivons

$$\frac{\langle u, v \rangle_1^2}{(\|u\|_1 \|v\|_1)^2} \geq 1. \tag{2.1}$$

Si u et v sont situés dans le même cône de type temps, donc $\langle u, v \rangle_1 < 0$.

Eq 2.1 implique

$$-\frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} \geq 1$$

alors il exist un unique nombre $\varphi \in [0, \infty)$ tel que pour la fonction cosinus hyperbolique $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, on a

$$\cosh \varphi = -\frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1}$$

■

Après la définition de l'angle entre deux vecteurs qui sont dans le même cône de type temps, on cherche comment définir l'angle entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ qui sont linéairement indépendants mais ne sont pas de type lumière.

L'angle est défini en fonction du plan P déterminé par u et v . La métrique induite sur P peut être Riemannienne, Lorentzienne ou dégénérée.

- 1) Si le plan est Euclidien, la définition de l'angle entre deux vecteurs de type espace est usuelle dans l'espace Euclidien.
- 2) Si le plan est Lorentzien, alors il est isométrique au plan Lorentz-Minkowski \mathbb{E}_1^2 et l'isométrie ne changera pas la définition de l'angle.

Définition 2.13 *Considérons u et v comme des vecteurs unitaires. L'ensemble U_1^2 des vecteurs unitaires de \mathbb{E}_1^2 a quatre composantes à savoir :*

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\} ; & \mathbb{H}_-^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\}, \\ \mathbb{S}_+^{1+} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\} ; & \mathbb{S}_-^{1-} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}. \end{aligned}$$

Remarque 2.14 *On rappelle que si on change (x, y) par (y, x) , le plan \mathbb{E}_1^2 va changer par \mathbb{R}^2 muni de la métrique*

$$\langle y, x \rangle = -(dy)^2 + (dx)^2$$

Un vecteur de type espace (resp. type temps) dans \mathbb{E}_1^2 se convertit à un vecteur de type temps (resp. type espace) dans l'espace métrique.

Définition 2.15 *Soient $u, v \in \mathbb{E}_1^2$ deux vecteurs de type espace non nuls tel que $u/|u|$ et $v/|v|$ se trouvent dans le même composant de U_1^2 , et l'angle $\widehat{(u, v)} = \varphi$. Alors il exist un unique nombre*

$\varphi \in [0, \infty)$ tel que

$$\cosh \varphi = \frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} \quad (2.2)$$

2.1.3 Produit vectoriel Lorentzien

Définition 2.16 Soient $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ le produit vectoriel lorentzien de u et v est l'unique vecteur désigné par $u \wedge_1 v$ qui satisfait

$$\langle u \wedge_1 v, w \rangle_1 = \det(u, v, w) \quad (2.3)$$

Où $\det(u, v, w)$ est le facteur déterminant de la matrice obtenue par les coordonnées des vecteurs u, v, w par rapport à la base usuelle B_u .

La bilinéarité de la métrique assure l'existence et l'unicité du vecteur $u \wedge_1 v$.

D'après Eq. 2.3, l'expression des coordonnées de $u \wedge_1 v$ par rapport à B_u est

$$u \wedge_1 v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

On dit que $u \wedge_1 v$ est le produit vectoriel Euclidien, alors est le reflet de $u \wedge v$ par rapport au plan de l'équation $z = 0$.

Si u et v sont deux vecteurs non dégénérés alors $B = \{u, v, u \wedge_1 v\}$ est une base de \mathbb{E}_1^3 . Mais contrairement à l'espace Euclidien, le caractère causal de u et v détermine si la base est orienté positivement où non. Si u et v sont de type espace, alors $u \wedge_1 v$ est de type temps.

Définition 2.17 Soit u un vecteur de \mathbb{E}_1^3 tel que :

1) L'espace de De Sitter (ou la sphère lorentzienne de rayon \mathbf{r} et de centre o) est défini par

$$\mathbb{S}_{\mathbf{r}}^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \mid \langle u, u \rangle_1 = \mathbf{r}^2\}.$$

2) L'espace anti de De Sitter (ou la sphère hyperbolique de rayon \mathbf{r} et de centre o) est défini par

$$\mathbb{H}_{\mathbf{r}}^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \mid \langle u, u \rangle_1 = -\mathbf{r}^2\}.$$

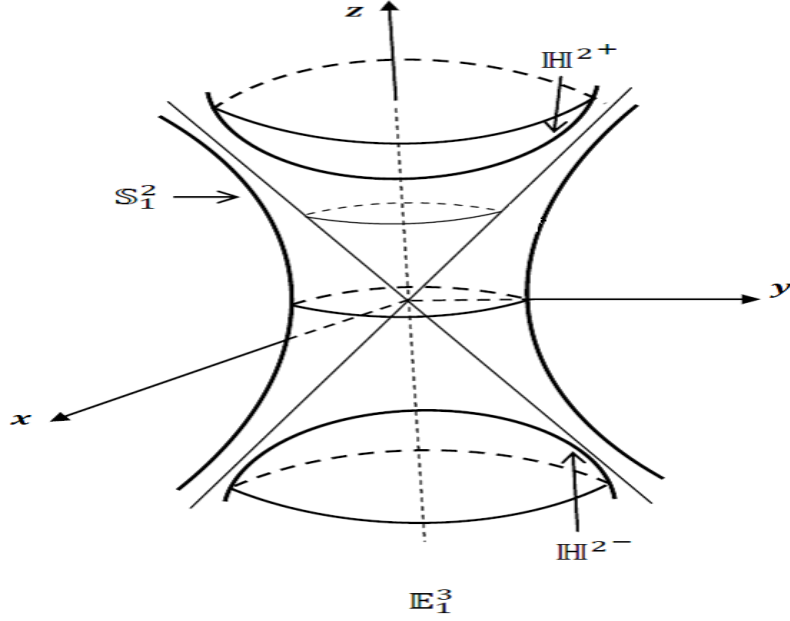


Figure 3. L'espace de De Sitter et anti de De Sitter

2.2 Courbes causals

Soient \mathbb{E}_1^3 l'espace de Minkowski de dimension 3, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, une courbe paramétrée alors on a :

Définition 2.18 Une courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ est dite temporelle ou de type temps (resp espace, lumière ou causal) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps (resp espace, lumière ou causal) i.e.

γ est de type espace où spatiale si $\langle \gamma', \gamma' \rangle_1 > 0$.

γ est de type temps où temporelle si $\langle \gamma', \gamma' \rangle_1 < 0$.

γ est de type lumière où isotrope si $\langle \gamma', \gamma' \rangle_1 = 0$.

Exemple 2.19 i) L'hyperbole $x_2^2 = x_3^2 + 1$, $x_1 = 0$, paramétrée par

$$\gamma(t) = (0, \cosh t, \sinh t),$$

d'où

$$\gamma'(t) = (0, \sinh t, \cosh t),$$

ce qui implique que

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_1 = 1,$$

alors γ est de type espace.

ii) L'hyperbole $x_2^2 = x_3^2 - 1$, $x_1 = 0$, paramétrée par

$$\gamma(t) = (0, \sinh t, \cosh t)$$

alors

$$\gamma'(t) = (0, \cosh t, \sinh t)$$

ce qui donne

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_1 = -1,$$

donc la courbe γ est de type temps.

iii) La droite $\gamma(t) = (t, 0, t)$ est isotrope (type lumière), cette droite se situe entièrement sur le cône lumière.

Remarque 2.20 Si γ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc alors

$$\langle T, T \rangle_1 = \varepsilon = \pm 1.$$

(γ ne peut pas être lumière $\langle T, T \rangle_1 \neq 0$).

2.3 Repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (i.e. courbe unitaire de type espace ou temps). On pose

$$\langle T, T \rangle_1 = \langle \gamma', \gamma' \rangle_1 = \varepsilon_1, \text{ telle que } \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \text{ est de type espace} \\ -1 & \text{si } \gamma \text{ est de type temps} \end{cases}$$

en dérivant $\langle T, T \rangle_1 = \varepsilon_1$, on obtiens

$$\langle T', T \rangle_1 = 0$$

le vecteur $T'(s)$ est donc orthogonal à $T(s)$, alors $T'(s)$ est colinéaire avec le vecteur unitaire normal $N(s)$ tel que

$$N = \frac{T'}{\|T'\|_1}, \text{ et } \langle N, N \rangle_1 = \varepsilon_2 = \pm 1,$$

alors

$$T' = \varepsilon_2 \langle T', N \rangle_1 N$$

il existe une fonction bienne définie $k(s)$, tel que

$$T'(s) = \varepsilon_2 k(s) N(s) \tag{2.4}$$

Le vecteur unitaire binormal est défini par

$$B(s) = T(s) \wedge_1 N(s),$$

et

$$\langle B, B \rangle_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Où \wedge_1 est le produit vectoriel Loreintzien dans \mathbb{E}_1^3 .

Le triple $(T(s), N(s), B(s))$ est un repère orthonormé direct (d'origine $\gamma(s)$) appelé le repère de Serret-Frenet de la courbe γ au point $\gamma(s)$ dans \mathbb{E}_1^3 .

2.3.1 Courbure

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc, donc la norme du vecteur T reste constamment égale à 1. Ce qui pourrait éventuellement changer c'est sa direction, ce qui va en fait mesurer l'écart entre la courbe et le fait qu'elle soit un morceau de droite. on a

Définition 2.21 *On appelle la fonction $\kappa(s)$ la courbure de la courbe γ au point $\gamma(s)$ tel que :*

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|_1$$

2.3.2 Torsion

On dérive le vecteur binormal $B(s) = T(s) \wedge_1 N(s)$ on obtient

$$B'(s) = T'(s) \wedge_1 N(s) + T(s) \wedge_1 N'(s) = T(s) \wedge_1 N'(s), \quad (2.5)$$

on écrit B' dans la base $\{T, N, B\}$

$$B' = \varepsilon_1 \langle B', T \rangle_1 T + \varepsilon_2 \langle B', N \rangle_1 N + \varepsilon_3 \langle B', B \rangle_1 B,$$

d'après Eq.2.5, B' est orthogonal aux T et B , donc il est colinéaire à $N(s)$. Donc

$$\langle B', T \rangle_1 = 0 \text{ et } \langle B', B \rangle_1 = 0,$$

alors, il exist une fonction $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tel que

$$B'(s) = -\tau(s)\varepsilon_2 N(s) \quad (2.6)$$

où $\tau(s)$ est appelée la torsion de la courbe γ au point $\gamma(s)$.

2.3.3 Formules du repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3

Le repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3 est donné dans la proposition suivante :

Proposition 2.22 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur et $\{T, N, B\}$ le repère mobile de Serret-Frenet le long de la courbe γ dans \mathbb{E}_1^3 , tel que, $T = \gamma'$ est le vecteur tangent unitaire de γ , N est le vecteur normal principal suivant la direction de T' et B est le vecteur binormal tel que $B = T \wedge_1 N$ (B est orthogonal aux T et N).*

Alors les les formules du repère de Serret-Frenet sont

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\varepsilon_2 & 0 \\ -\kappa\varepsilon_1 & 0 & \tau\varepsilon_3 \\ 0 & -\tau\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Avec,

$$\langle T, T \rangle_1 = \varepsilon_1, \langle N, N \rangle_1 = \varepsilon_2 \text{ et } \langle B, B \rangle_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Où $\kappa = \|T'\|_1$ et $\tau = \varepsilon_3 \langle N', B \rangle_1$, sont respectivement la courbure et la torsion de γ .

Les liens entre les vecteurs T, N et B sont

$$T \wedge_1 N = \varepsilon_1 \varepsilon_2 B, \quad N \wedge_1 B = -\varepsilon_1 T, \quad B \wedge_1 T = -\varepsilon_2 N,$$

où \wedge_1 est le produit vectoriel Lorentzien dans \mathbb{E}_1^3 .

Preuve. Les composantes T' et B' sont calculés dans Eq. 2.4 et Eq. 2.6, alors il nous reste à calculer que la deuxième composante N' . On a

$$\langle N, N \rangle_1 = \varepsilon_2,$$

en dérivant

$$\langle N', N \rangle_1 = 0,$$

alors N' est orthogonal à N . On écrit N' suivant la base orthonormée $\{T, N, B\}$

$$\begin{aligned} N'(s) &= \varepsilon_1 \langle N', T \rangle_1 T + \varepsilon_2 \langle N', N \rangle_1 N + \varepsilon_3 \langle N', B \rangle_1 B \\ &= -\varepsilon_2 \kappa T + \varepsilon_3 \tau B \end{aligned}$$

D'où la preuve de la proposition. ■

Remarque 2.23 Si γ est une courbe de type espace avec un vecteurs normal de type espace ou temps, alors les formules de Serret-Frenet dans \mathbb{E}_1^3 sont

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\varepsilon \tau \\ 0 & -\varepsilon \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

avec

$$\langle T, T \rangle_1 = 1, \quad \langle N, N \rangle_1 = \varepsilon \quad \text{et} \quad \langle B, B \rangle_1 = -\varepsilon = \pm 1.$$

Si γ est une courbe de type temps avec un vecteur normal de type espace ou temps, alors les

formules de Serret-Frenet sont

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \varepsilon\tau \\ 0 & -\varepsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

avec

$$\langle T, T \rangle_1 = -1 \quad \text{et} \quad \langle N, N \rangle_1 = \langle B, B \rangle_1 = \varepsilon = \pm 1.$$

2.4 Courbes Hélices dans \mathbb{E}_1^3

Définition 2.24 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc, la courbe γ est dite une courbe hélice, si pour tous champ vecteurs non nul X parrallel le long de la courbe (i.e. $\nabla_{\gamma'} X = 0$) dans \mathbb{E}_1^3 , la fonction $\langle T(s), X \rangle_1$ est constante.

Théorème 2.25 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc, γ est une courbe hélice si et seulement si le quotient entre la torsion et la courbure soit constant i.e.

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \text{ constante non nulle.}$$

Preuve. Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et X le champs de vecteur parrallel le long de la courbe γ , supposons que γ est une courbe hélice alors, d'après la définition (2.24) on a

$$\langle T(s), X \rangle_1 = c,$$

en dérivant

$$\left\langle \frac{dT(s)}{ds}, X \right\rangle_1 + \left\langle T(s), \frac{dX}{ds} \right\rangle_1 = 0,$$

comme X est parrallel le long de la courbe, on aura

$$\left\langle T(s), \frac{dX}{ds} \right\rangle_1 = 0,$$

alors, on a

$$\left\langle \frac{dT(s)}{ds}, X \right\rangle_1 = 0,$$

ce qui équivalent à dire

$$\kappa\varepsilon_2 \langle N, X \rangle_1 = 0 \iff \langle N, X \rangle_1 = 0$$

en dérivant

$$\langle N', X \rangle_1 = \langle -\kappa\varepsilon_1 T + \tau\varepsilon_3 B, X \rangle_1 = 0$$

alors

$$-\kappa\varepsilon_1 \langle T, X \rangle_1 + \tau\varepsilon_3 \langle B, X \rangle_1 = 0$$

ce qui équivalent à

$$\frac{\tau}{\kappa} = \varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\langle T, X \rangle_1}{\langle B, X \rangle_1} = c,$$

telle que c est une contante non nulle. (pour plus de détails voir [1]) ■

Chapitre 3

Groupe d'Heisenberg Loreintzien de dimension 3

Dans ce chapitre, on va étudier quelques propriétés géométriques du groupe d'Heisenberg de dimension 3 muni de la métrique Lorentzienne invariante à gauche $g_{\mathbb{H}^3}$.

3.1 Structure algebrique du groupe d'Heisenberg de dimension 3

soit le sous ensemble noté par \mathbb{H}^3 de l'ensemble $GL(3, \mathbb{R})$, défini par

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

on voit que \mathbb{H}^3 est engendré par X, Y, Z telsque

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.1 Loi du sous ensemble \mathbb{H}^3

Proposition 3.1 Soit $A, B \in \mathfrak{h}$, alors

$$\exp(A) \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right)$$

Preuve. Cette relation est issue de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff.

Précisément, pour tout M et N

$$\exp(M) \exp(N) = \exp(P(M, N)),$$

telque

$$P(M, N) = M + N + \frac{1}{2}[M, N] + \frac{1}{12}[[M, N], N] - \frac{1}{12}[[M, N]M] + \dots$$

Dans le sous ensemble \mathbb{H}^3 , cette série s'arrête après le premier terme du crochet i.e.

$$P(M, N) = M + N + \frac{1}{2}[M, N].$$

■

On identifie $h \in \mathbb{H}^3$ par le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, telque $h = \exp(xX + yY + zZ)$. Alors la loi du groupe par ces coordonnées devient

$$(x, y, z)(x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right)$$

en effet,

$$\begin{aligned} \exp(h) \exp(h') &= h + h' + \frac{1}{2}[h, h'] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x' & z' \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x' & z \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x' & z' \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

alors

$$\exp(h) \exp(h') = \begin{pmatrix} 0 & x + x' & z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \\ 0 & 0 & y + y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où la définition suivante :

Définition 3.2 *Le groupe d'Heisenberg dans \mathbb{R}^3 est analytiquement un groupe de $GL(3, \mathbb{R})$ (groupe de Lie plus généralement) de dimension 3.*

$$\mathbb{H}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

C'est un groupe nilpotent d'ordre 2 muni de la loi intérieure

$$(x, y, z) (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \right)$$

et d'élément neutre $I_{\mathbb{R}^3}$. \mathbb{H}^3 est isomorphe à \mathbb{R}^3 .

3.2 Structures Lorentzienne de \mathbb{H}_1^3

3.2.1 Métrique Lorentzienne invariante à gauche dans \mathbb{H}_1^3

On définit la métrique $g_{\mathbb{H}^3}$ explicitement dans les coordonnées exponentielles $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec la matrice

$$g_{\mathbb{H}^3}(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4}x_2^2 & \frac{1}{4}x_1x_2 & \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{4}x_1x_2 & 1 - x_1^2 & -\frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note

$$g_{\mathbb{H}^3}(x) = C^t I_{\mathbb{H}_1^3} C,$$

tel que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 & \frac{1}{2}x_1 & 1 \end{pmatrix}$$

C est la matrice qui définit la translation à gauche, avec

$$I_{\mathbb{H}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors le groupe d'Heisenberg Lorentzien de dimension 3 peut être muni par la métrique Lorentzienne notée $g_{\mathbb{H}_1^3}$ qu'il deviendra \mathbb{H}_1^3 tel que

$$g_{\mathbb{H}_1^3} = (dx)^2 + (dy)^2 - \frac{1}{4}(dz + 2ydx - 2xdy)^2.$$

Dans la suite le groupe d'Heisenberg Lorentzien sera noté par $(\mathbb{H}_1^3, g_{\mathbb{H}_1^3})$. Lorsqu'on calcule avec la métrique Lorentzienne $g_{\mathbb{H}_1^3}$, on utilise parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_1^3}$ pour noter le produit scalaire des vecteurs, c'est à dire pour $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i X_i$ et $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i X_i$ dans $T\mathbb{H}_1^3$

$$\langle a, b \rangle_{\mathbb{H}_1^3} = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

et la norme d'un vecteur \vec{a} est donnée par

$$\|\vec{a}\|_{\mathbb{H}_1^3} = \sqrt{|\langle a, a \rangle_{\mathbb{H}_1^3}|}$$

Remarque 3.3 *La métrique $g_{\mathbb{H}_1^3}$ est invariante par rapport à la translation à gauche.*

3.2.2 Base des champs de vecteurs invariants à gauche

On définit une base orthonormale dans l'espace tangent de \mathbb{H}_1^3 avec

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad e_3 = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.1)$$

de dual

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy \quad \text{et} \quad \theta^3 = \frac{1}{2} dz + ydx - xdy. \quad (3.2)$$

Lemme 3.4 *Les crochets de Lie des vecteurs de la base sont*

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_1, e_3] = 0$$

Preuve. On montre juste le premier crochet,

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial z} \right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + 2x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - 2y \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{\partial}{\partial z} - 4xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial z} - 2 \frac{\partial}{\partial z} + 4xy \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= 4 \frac{\partial}{\partial z} \\
&= 2e_3
\end{aligned}$$

On utilise la même méthode pour caculer les autres crochets. ■

Maintenant on va définir le produit vectoriel du groupe d'Heisenberg Lorentzien \mathbb{H}_1^3

Définition 3.5 *Le produit vectoriel $\wedge_{\mathbb{H}_1^3}$ dans \mathbb{H}_1^3 est défini par*

$$X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y = -(a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3,$$

telque $\{e_1, e_2, e_3\}$ base orthonormal de \mathbb{H}_1^3 donnée dans Eq. (3.1) et $X = (a_1, a_2, a_3), Y = (b_1, b_2, b_3) \in T\mathbb{H}_1^3$.

Théorème 3.6 ([6]) *Le produit vectoriel dans \mathbb{H}_1^3 est caractérisé par*

i) *Le produit vectoriel est bilinéaire et anti-symétrique ($X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y = -Y \wedge_{\mathbb{H}_1^3} X$).*

ii) *$X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y$ est perpendiculaire à X et Y .*

iii) $e_1 \wedge_{\mathbb{H}_1^3} e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge_{\mathbb{H}_1^3} e_3 = -e_1, \quad e_1 \wedge_{\mathbb{H}_1^3} e_3 = e_2.$

iv) $(X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Z = g_{\mathbb{H}_1^3}(X, Z)Y - g_{\mathbb{H}_1^3}(Y, Z)X.$

v) *On définit le produit mixte par*

$$(X, Y, Z) = g_{\mathbb{H}_1^3}(X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y, Z),$$

alors on a

$$(X, Y, Z) = -\det(X, Y, Z),$$

et

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y).$$

vi) $(X \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Z + (Y \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Z) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} X + (Z \wedge_{\mathbb{H}_1^3} X) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} Y = 0$ pour tout $X, Y, Z \in T\mathbb{H}_1^3$.

3.2.3 Connexion de Levi-Civita

Proposition 3.7 *La connexion de Levi-civita ∇ associée à la métrique $g_{\mathbb{H}_1^3}$ est définie par*

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} e_1 = 0, & \nabla_{e_1} e_2 = e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = -e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = -e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_3 = e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 = -e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = e_1, & \nabla_{e_3} e_3 = 0, \end{cases}$$

telque $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base orthonormal de l'espace tangent de \mathbb{H}_1^3 définie dans Eq (3.1)

Preuve. On a la formule de Kosul

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle_{\mathbb{H}_1^3} = & \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + Y \langle Z, X \rangle_{\mathbb{H}_1^3} - Z \langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \\ & - \langle Z, [Y, X] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} - \langle X, [Y, Z] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} - \langle Y, [X, Z] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \} \end{aligned}$$

Pour la base $(e_i)_{i=1..3}$, cette formule se réduit à

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle_{\mathbb{H}_1^3} = -\frac{1}{2} \{ \langle e_k, [e_j, e_i] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_i, [e_j, e_k] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_j, [e_i, e_k] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \}; i, j, k = \overline{1,3}$$

On calcule pour $\nabla_{e_1} e_2$:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle_{\mathbb{H}_1^3} &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_1, [e_2, e_1] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_1, [e_2, e_1] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_2, [e_1, e_1] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \} = 0 \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle_{\mathbb{H}_1^3} &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_2, e_1] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_1, [e_2, e_2] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_2, [e_1, e_2] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \} = 0 \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{H}_1^3} &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_3, [e_2, e_1] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_1, [e_2, e_3] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} + \langle e_2, [e_1, e_3] \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \} = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\nabla_{e_1} e_2 = e_3.$$

le calcul des autre connexion se fera de la même manière. ■

3.2.4 Tenseur de courbure

Définition 3.8 On note par R , le tenseur de courbure de ∇ défini par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

où X, Y et Z sont trois champs de vecteurs d'une variété pseudo Riemannienne (M, g) .

Ainsi que le champs du tenseur de Riemann-Christoffel est défini par

$$R(X, Y, Z, W) = g_{\mathbb{H}_1^3}(R(X, Y)Z, W)$$

où $X, Y, Z, W \in TM$.

Notation 3.9 On note par

$$R_{ijk} = R(e_i, e_j)e_k, \quad R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l); i, j, k, l = \overline{1, 3}.$$

le tenseur de courbure par rapport à la base $(e_i)_{i=\overline{1, 3}}$.

Proposition 3.10 Les composantes non nulles du tenseur de courbure sont

$$\begin{cases} R_{121} = 3e_2, & R_{122} = -3e_1, & R_{131} = -e_3, \\ R_{133} = -e_1, & R_{232} = e_3, & R_{233} = e_2. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$R_{ijkl} = \begin{cases} -3 & \text{si } (ijkl) = (1221) \text{ où } (2112) \\ -1 & \text{si } (ijkl) = (1313), (3131), (1331) \text{ où } (3113) \\ 1 & \text{si } (ijkl) = (2332), (3223), (2323) \text{ où } (3232) \\ 3 & \text{si } (ijkl) = (1212) \text{ où } (2121) \end{cases} \quad (3.4)$$

Preuve. On calcule le tenseur de courbure de Riemann par les formules suivantes

$$\begin{cases} R_{ijk} = R(e_i, e_j)e_k = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k \\ R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g_{\mathbb{H}_1^3}(R(e_i, e_j)e_k, e_l) = \langle R(e_i, e_j), e_l \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \end{cases} \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}$$

Pour $(i, j, k) = (2, 3, 2)$ on trouve

$$\begin{aligned}R_{232} &= R(e_2, e_3)e_2 \\&= \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{[e_2, e_3]}e_3 \\&= -\nabla_{e_2}e_1 \\&= e_3.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}R_{2323} &= \langle R(e_2, e_3)e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \\&= \langle e_3, e_3 \rangle_{\mathbb{H}_1^3} \\&= 1.\end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Harmonicité et biharmonicité entre les variétés

4.1 Applications harmoniques et biharmoniques entre variétés pseudo Riemanniennes

Définition 4.1 Une application ψ d'une variété pseudo Riemannienne compact (M, g) dans une autre variété Riemannienne (N, h) est dite harmonique si cette application soit un point critique de la fonction energie.

$$E_1(\psi) = \frac{1}{2} \int_M \|d\psi\|^2 v_g$$

D'après la première formule de la variation, il s'ensuit que ψ est harmonique si et seulement si son premier champ de tension

$$\tau(\psi) = \text{trace} \nabla d\psi,$$

s'anull, telque $\nabla d\psi$ est la deuxième forme fondamentale de ψ définie par

$$\nabla d\psi(x, y) = \nabla_X^\psi d\psi(Y) - d\psi(\nabla_X^M Y),$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$ et ∇^ψ représente la connexion sur $\psi^{-1}(TN)$.

Définition 4.2 La fonction bi-energie est définit par

$$E_2(\psi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\psi)|^2 v_g,$$

telque v_g est l'élément de volume.

On dit que ψ une application biharmonique si ψ soit un point critique de la fonction bi-energie.

On a

$$\frac{d}{dt} E_2(\psi_t) |_{t=0} = \int_M \langle \tau_2(\psi), w \rangle_1 v_g.$$

w est le champ de vecteur variationnel associé à la variation $\{\psi_t\}$ de ψ .

Alors

$$\begin{aligned} \tau_2(\psi) &= -J(\tau_1(\psi)) \\ &= -\Delta\tau_1(\psi) + \text{trace } R^N(d\psi, \tau_1(\psi)) d\psi. \end{aligned}$$

τ_2 est le champs bitension de ψ et J est l'opérateur de Jacobi.

Δ est Laplacien défini par

$$\Delta\tau_1 = -\text{trace}(\nabla^\psi)^2 \tau_1(\psi).$$

Donc la condition de la biharmonicité est

$$\tau_2(\psi) = 0.$$

4.2 Courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{E}_1^3

Comme les courbes sont un cas partuclier des applications, lorsque l'application ψ est une courbe dans la variété M i.e.

$$\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

On a

Définition 4.3 La courbe $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ est harmonique si et seulement si

$$\tau_1(\dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}^2 \dot{\gamma} = 0 \tag{4.1}$$

elle est dite biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}^3 \dot{\gamma} - R(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0 \tag{4.2}$$

Proposition 4.4 Soit : $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. γ est une courbe harmonique où biharmonique si et seulement si γ est une géodésique.

Preuve. L'espace de Minkowski est l'espace \mathbb{R}^3 muni de la métrique Loreintzienne définie par

$$g_1(.,.) = \langle ., . \rangle_1 = dx^2 + dy^2 - dz^2$$

Les symboles de Cristoffel associés à la métrique g_1 sont nuls (i.e $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$), qui donne que le tenseur de Riemann est nul (i.e $R \equiv 0$), alors la variété (\mathbb{R}^3, g_1) est plate.

Maintenant soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors d'après Eq. (4.1), γ est une courbe harmonique si et seulement si

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}^2 \dot{\gamma} = 0 \tag{4.3}$$

les seules solutions de l'équation sont les courbes qui vérifient

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Par définition, les courbes biharmoniques dans (\mathbb{R}^3, g_1) vérifient

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}^3 \dot{\gamma} - R(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

or

$$R(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \text{ car } (\mathbb{R}^3, g_1) \text{ est plate i.e. } R \equiv 0$$

alors

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^3 \dot{\gamma} = 0 \text{ qui donne } \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Ainsi que les géodésiques sont les seules courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{E}_1^3 . ■

4.3 Courbes harmoniques et biharmoniques dans le groupe d'Heisenberg Lorentzien \mathbb{H}_1^3

4.3.1 Courbes harmoniques dans \mathbb{H}_1^3

Proposition 4.5 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. γ est une courbe harmonique si et seulement si γ est une géodésique.*

Preuve. Le groupe d'Heisenberg de dimension 3 muni de la métrique Lorentzienne définie par

$$g_{\mathbb{H}_1^3} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}_1^3} = dx^2 + dy^2 - \frac{1}{4}(dz + 2ydx - 2xdy)^2.$$

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors d'après Eq. (4.1), γ est une courbe harmonique si et seulement si

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}^2 \dot{\gamma} = 0$$

les seules solutions de l'équation sont les courbes qui vérifient

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Alors les courbes harmoniques dans \mathbb{H}_1^3 sont les géodésiques. ■

Remarque 4.6 *Dans \mathbb{H}_1^3 , les géodésiques sont les seules courbes harmoniques.*

4.3.2 Courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc (i.e. courbe unitaire de type espace où temps). On suppose par la suite que γ n'est pas harmonique et non géodésique.

Proposition 4.7 *Le tenseur bi-tension associé à la courbe γ est défini par*

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) = & (-3\kappa\kappa'\varepsilon_1\varepsilon_2)T + (\kappa''\varepsilon_2 - \kappa^3\varepsilon_1 - \kappa\tau^2\varepsilon_3 + \kappa\varepsilon_3 + 4\kappa B_3^2)N \\ & + (2\kappa'\tau\varepsilon_2\varepsilon_3 + \kappa\tau'\varepsilon_2\varepsilon_3 - 4\kappa\varepsilon_2\varepsilon_3N_3B_3)B. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le repère de Serret-Frenet (Eq 2.7) on a

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= \kappa \varepsilon_2 N. \\
\nabla_T^2 T &= \nabla_T \nabla_T T = \varepsilon_2 (N \nabla_T \kappa + \kappa \nabla_T N) \\
&= -\kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 T + \varepsilon_2 \kappa' N + \kappa \tau \varepsilon_2 \varepsilon_3 B. \\
\nabla_T^3 T &= \nabla_T (\nabla_T^2 T) \\
&= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 (T \nabla_T \kappa^2 + \kappa^2 \nabla_T T) + \varepsilon_2 (N \nabla_T \kappa' + \kappa' \nabla_T N) + \varepsilon_2 \varepsilon_3 (\tau B \nabla_T \kappa + \kappa B \nabla_T \tau + \kappa \tau \nabla_T B) \\
&= (-3\kappa \kappa' \varepsilon_1 \varepsilon_2) T + (\kappa'' \varepsilon_2 - \kappa^3 \varepsilon_1 - \kappa \tau^2 \varepsilon_3) N + (2\kappa' \tau \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \kappa \tau' \varepsilon_2 \varepsilon_3) B. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

D'autre part, on utilisons les formules Eq. (3.4)

$$\langle R(T, N)T, T \rangle_{\mathbb{H}_1^3} = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle R(T, N)T, N \rangle_{\mathbb{H}_1^3} &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k N_l R_{ijkl} \\
&= -3((T_1 N_2)^2 + (T_2 N_1)^2 - 2T_1 N_2 T_2 N_1) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} (T_1 N_3)^2 + (T_3 N_1)^2 + (T_2 N_3)^2 \\ + (T_3 N_2)^2 - 2T_1 N_3 T_3 N_1 - 2T_2 N_3 T_3 N_2 \end{array} \right) \\
&= -3(T_1 N_2 - T_2 N_1)^2 + (T_1 N_3 - T_3 N_1)^2 + (T_2 N_3 - T_3 N_2)^2 \\
&= -4\varepsilon_2 B_3^2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 (-B_3^2 + B_2^2 + B_1^2) \\
&= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 - 4\varepsilon_2 B_3^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle R(T, N)T, B \rangle_{\mathbb{H}_1^3} &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k B_l R_{ijkl} \\
&= -3(T_1^2 N_2 B_2 - +T_2^2 N_1 B_1) + 3(T_1 N_2 T_2 B_1 + T_2 N_1 T_1 B_2) \\
&\quad + (T_1^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_1 B_1 + T_2^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_2 B_2) \\
&\quad - (T_1 N_3 T_3 B_1 + T_3 N_1 T_1 B_3 + T_2 N_3 T_3 B_2 + T_3 N_2 T_2 B_3) \\
&= 4\varepsilon_3 N_3 B_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(T, \nabla_T T)T &= \kappa \varepsilon_2 R(T, N)T \\
&= \kappa \varepsilon_2 [(-\varepsilon_2 \varepsilon_3 - 4\varepsilon_2 B_3^2)N + (4\varepsilon_3 N_3 B_3)B],
\end{aligned} \tag{4.5}$$

avec

$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3, \quad N = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3 \tag{4.6}$$

et

$$B = T \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3.$$

Alors, d'après Eq (4.4) et Eq (4.5), on a

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= (-3\kappa \kappa' \varepsilon_1 \varepsilon_2)T + (\kappa'' \varepsilon_2 - \kappa^3 \varepsilon_1 - \kappa \tau^2 \varepsilon_3 + \kappa \varepsilon_3 + 4\kappa B_3^2)N \\
&\quad + (2\kappa' \tau \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \kappa \tau' \varepsilon_2 \varepsilon_3 - 4\kappa \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3 B_3)B.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

■

Théorème 4.8 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe non nulle paramétrée par la longueur d'arc, alors γ est une courbe biharmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} \kappa = \text{constante non nulle,} \\ \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \tau^2 = 1 + 4\varepsilon_3 B_3^2, \\ \tau' = 4N_3 B_3. \end{cases}$$

Preuve. l'équation Eq.(4.7) résulte que γ soit biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} -3\kappa \kappa' \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0, \\ \kappa'' \varepsilon_2 - \kappa^3 \varepsilon_1 - \kappa \tau^2 \varepsilon_3 + \kappa \varepsilon_3 + 4\kappa B_3^2 = 0, \\ 2\kappa' \tau \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \kappa \tau' \varepsilon_2 \varepsilon_3 - 4\kappa \varepsilon_2 \varepsilon_3 N_3 B_3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \kappa = \text{constante non nulle,} \\ \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \tau^2 = 1 + 4\varepsilon_3 B_3^2, \\ \tau' = 4N_3 B_3. \end{cases}$$

D'où la preuve du théorème. ■

Corollaire 4.9 *Si κ est une constante non nulle et $\tau = 0$ (i.e. courbe plane) pour toute courbe*

non nulle $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$, alors γ est une courbe biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} \kappa^2 = \varepsilon_1(\varepsilon_3 + 4B_3^2), \\ N_3B_3 = 0. \end{cases}$$

Alors B_3 doit être constante.

Proposition 4.10 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Si κ est constante et $N_3B_3 \neq 0$, alors la courbe γ n'est pas biharmonique.

Preuve. D'après les expressions Eq. (3.1), Eq. (2.7) et Eq. (4.6), on a

$$\nabla_T T = (T_1' - 2T_2T_3)e_1 + (T_2' - 2T_1T_3)e_2 + T_3'e_3 = \kappa\varepsilon_2N, \quad (4.8)$$

ce qui implique

$$T_3' = \kappa\varepsilon_2N_3.$$

Si on pose $T_3(s) = \kappa F(s)$ et $f(s) = F'(s)$, alors on a $f(s) = \varepsilon_2N_3$. Donc on peut écrire

$$T = (\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2} \cosh \beta)e_1 + (\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2} \sinh \beta)e_2 + \kappa F e_3.$$

On calcule $\nabla_T T$ par la formule Eq. (4.8)

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \kappa\varepsilon_2N = \left(\frac{\kappa F f}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \cosh \beta + \sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}(\beta' - \kappa F) \sinh \beta \right) e_1 \\ &+ \left(\frac{\kappa F f}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \sinh \beta + \sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}(\beta' - \kappa F) \cosh \beta \right) e_2 \\ &+ (\kappa f) e_3. \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'après la définition de la courbure géodésique κ et la dernière équation, on a

$$\beta' - \kappa F = \pm \kappa \frac{\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \kappa F^2}}{\varepsilon_1 + \kappa F^2}. \quad (4.10)$$

Si on substitue Eq. (4.10) dans Eq. (4.9), on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 N &= \left(\pm \frac{\sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \kappa F^2}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \sinh \beta + \frac{\kappa F f}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \cosh \beta \right) e_1 \\ &+ \left(\pm \frac{\sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \kappa F^2}}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \cosh \beta + \frac{\kappa F f}{\sqrt{\varepsilon_1 + \kappa F^2}} \sinh \beta \right) e_2 \\ &+ f e_3.\end{aligned}$$

Comme $B = T \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N$, et d'après la définition du produit vectoriel dans \mathbb{H}_1^3 on a

$$B_3 = \pm \varepsilon_2 \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \kappa F^2}. \quad (4.11)$$

D'autre part et d'après les formules de Serret-Frenet, on obtient

$$g_{\mathbb{H}_1^3}(\nabla_T N, e_3) = \kappa \varepsilon_1 T_3 - \tau \varepsilon_3 B_3.$$

Comme $N = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3$ et on a aussi

$$g_{\mathbb{H}_1^3}(\nabla_T N, e_3) = -N'_3 - B_3.$$

Ce qui implique

$$-N'_3 - B_3 = \kappa \varepsilon_1 T_3 - \tau \varepsilon_3 B_3 \quad (4.12)$$

substituons $N_3 = \varepsilon_2 f$, $T_3 = \kappa F$ et Eq. (4.11) dans Eq. (4.12) on obtient

$$\tau = \pm \frac{(f' \kappa \varepsilon_1 \varepsilon_2 F) \varepsilon_3}{\sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 f^2 - \varepsilon_2 \kappa F^2}} + \varepsilon_3 = \pm \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{B'_3}{N_3} + \varepsilon_3. \quad (4.13)$$

Supposons que γ est biharmonique. D'après le théorème (4.7), on a $\tau' = 4N_3 B_3$, ce qui implique

$$N_3 = \frac{\tau'}{4B_3}.$$

Appliquant cette équation dans Eq.(4.13) et on intègre, alors on obtient

$$\begin{aligned}\tau \tau' &= \pm \varepsilon_1 \varepsilon_3 4B'_3 B_3 + \varepsilon_3 \tau' \\ \tau^2 &= \pm \varepsilon_1 \varepsilon_3 4B_3^2 + 2\tau \varepsilon_3 + c,\end{aligned} \quad (4.14)$$

où c est une constante, alors d'après théorème (4.8) on a

$$\begin{aligned} \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \pm \varepsilon_1 \varepsilon_3 4B_3^2 + 2\tau \varepsilon_3 + c - 1 &= 4\varepsilon_3 B_3^2 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_3 B_3^2 &= \kappa^2 \frac{\varepsilon_3}{4} + \tau^2 \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_1}{4}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

En comparant Eq.(4.14) et Eq.(4.15) on a

$$\tau^2(4 \mp \varepsilon_1) - 8\tau \varepsilon_3 = C,$$

où $C = \pm \varepsilon_1 \pm \kappa \varepsilon_3 + 4c$ est une constante, ce qui implique que τ est aussi une constante. Ainsi qu'on a une contradiction avec l'hypothèse ($\tau' \neq 0$).

D'où la preuve de la proposition. ■

On conclue avec ce théorème

Théorème 4.11 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Alors γ est biharmonique si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \text{constante non nulle,} \\ \tau = \text{constante,} \\ N_3 B_3 = 0, \\ \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \tau^2 = 1 + 4\varepsilon_3 B_3. \end{array} \right.$$

4.4 Courbes hélices biharmoniques dans \mathbb{H}_1^3

Une courbe non nulle dans une variété pseudo-Riemannienne est dite courbe hélice si le quotient de la torsion par la courbure est constant. Maintenant on veut déterminer les conditions de la biharmonicité d'une courbe hélice dans le groupe d'Heisenberg de dimension 3.

Pour toute hélice dans \mathbb{H}_1^3 , le resultat du théorème (4.11) se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \text{constante non nulle,} \\ \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \tau^2 = 1 + 4\varepsilon_3 B_3, \\ N_3 B_3 = 0. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Alors, il est claire que B_3 doit être constante.

Proposition 4.12 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc avec $B_3 = 0$, alors les vecteurs T et N ont un caractère causale différent (i.e. $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$) et B est un champs de vecteurs de type temps.

Preuve. Supposons que $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et $\gamma'(s) = T(s)$. Si γ est une courbe de type espace, alors on peut écrire

$$T = \cosh \alpha_1 \cosh \beta_1 e_1 + \cosh \alpha_1 \sinh \beta_1 e_2 + \sinh \alpha_1 e_3, \quad (4.17)$$

avec $\alpha_1 = \alpha_1(s)$ et $\beta_1 = \beta_1(s)$. La dérivé covariante du champs de vecteurs tangents uniaire T de γ est

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (\alpha'_1 \sinh \alpha_1 \cosh \beta_1 + \cosh \alpha_1 \sinh \beta_1 (\beta'_1 - 2 \sinh \alpha_1)) e_1 \\ &\quad + (\alpha'_1 \sinh \alpha_1 \sinh \beta_1 + \cosh \alpha_1 \cosh \beta_1 (\beta'_1 - 2 \sinh \alpha_1)) e_2 + (\alpha'_1 \cosh \alpha_1) e_3 \\ &= \kappa \varepsilon_2 N. \end{aligned}$$

D'après la définition du produit vectoriel dans \mathbb{H}_1^3 on a

$$B_3 = T_2 N_1 - T_1 N_2 = \frac{\cosh^2 \alpha_1 (\beta'_1 - 2 \sinh \alpha_1) \varepsilon_2}{\kappa}.$$

Soit $B_3 = 0$ et comme $\cosh \alpha_1 \neq 0$, alors $\beta'_1 - 2 \sinh \alpha_1 = 0$, donc

$$\nabla_T T = \alpha'_1 (\sinh \alpha_1 \cosh \beta_1 e_1 + \sinh \alpha_1 \sinh \beta_1 e_2 + \cosh \alpha_1 e_3), \quad (4.18)$$

Si $\alpha'_1 = 0$ alors $\nabla_T T = 0$ ce qui implique que γ est géodésique.

Alors on suppose que $\alpha'_1 \neq 0$, d'où

$$\kappa^2 \varepsilon_2 = g_1(\nabla_T T, \nabla_T T) = (\alpha'_1)^2 (\sinh^2 \alpha_1 - \cosh^2 \alpha_1) = -(\alpha'_1)^2. \quad (4.19)$$

Si N est de type espace alors $\kappa = 0$, alors $\alpha'_1 = 0$ contradiction.

D'autre part, pour une courbe γ de type temps, on peut écrire T comme

$$T = \sinh \alpha_2 \cosh \beta_2 e_1 + \sinh \alpha_2 \sinh \beta_2 e_2 + \cosh \alpha_2 e_3, \quad (4.20)$$

avec $\alpha_2 = \alpha_2(s), \beta_2 = \beta_2(s)$. et on a

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= (\alpha'_2 \cosh \alpha_2 \cosh \beta_2 + \sinh \alpha_2 \sinh \beta_2 (\beta'_2 - 2 \cosh \alpha_2)) e_1 \\ &\quad + (\alpha'_2 \cosh \alpha_2 \sinh \beta_2 + \sinh \alpha_2 \cosh \beta_2 (\beta'_2 - 2 \cosh \alpha_2)) e_2 + (\alpha'_2 \sinh \alpha_2) e_3 \\ &= \kappa \varepsilon_2 N.\end{aligned}$$

Parsuite on a

$$B_3 = T_1 N_2 - T_2 N_1 = \frac{\sinh^2 \alpha_2 (\beta'_2 - 2 \cosh \alpha_2) \varepsilon_2}{\kappa}.$$

Supposons que $B_3 = 0$. Si $\sinh \alpha_2 = 0$ alors $T = e_3$, (i.e) γ est géodésique. Alors on prend nécessairement

$$\beta'_2 - 2 \cosh \alpha_2 = 0,$$

d'où

$$\nabla_T T = \alpha'_2 (\cosh \alpha_2 \cosh \beta_2 e_1 + \cosh \alpha_2 \sinh \beta_2 + \sinh \alpha_2 e_3). \quad (4.21)$$

Maintenant on pose $\alpha'_2 \neq 0$ (si $\alpha'_2 = 0$ alors γ est géodésique), alors

$$\kappa^2 \varepsilon_2 = g_{\mathbb{H}_1^3}(\nabla_T T, \nabla_T T) = (\alpha'_2)^2 (\cosh^2 \alpha_2 - \sinh^2 \alpha_2) = (\alpha'_2)^2. \quad (4.22)$$

Si N est de type temps alors $\kappa = 0$, contradiction.

Finalement T et N doit avoir un caractère causale différent et B est un vecteur de type temps.

■

Proposition 4.13 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et $B_3 = 0$.*

Alors $\tau^2 = 1$ et γ n'est pas biharmonique.

Preuve. Supposons que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur et $\gamma'(s) = T(s)$.

Si γ est une courbe de type espace et d'après Proposition (4.12) et Eq.(4.19), N doit être de type temps et $\kappa = \pm \alpha'_1 \neq 0$.

Utilisons Eq.(4.17) et Eq.(4.18), la première équation de Frenet et la définition du produit vectoriel dans \mathbb{H}_1^3 on obtient

$$\begin{aligned}N &= \mp (\sinh \alpha_1 \cosh \beta_1 e_1 + \sinh \alpha_1 \sinh \beta_1 e_2 + \cosh \alpha_1 e_3), \\ B &= T \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N = \pm (\sinh \beta_1 e_1 + \cosh \beta_1 e_2).\end{aligned}$$

Et on obtient

$$\nabla_T N = \mp[(\alpha'_1 \cosh \alpha_1 \cosh \beta_1 - \sinh \beta_1)e_1 + (\alpha'_1 \cosh \alpha_1 \sinh \beta_1 - \cosh \beta_1)e_2 + \alpha'_1 \sinh \alpha_1 e_3],$$

Ce qui implique

$$\tau = g_{\mathbb{H}_1^3}(\nabla_T N, B) = -1.$$

D'autre part, si γ est de type temps alors d'après Proposition (4.12) et Eq. (4.22), N est de type espace et on a $\kappa = \pm\alpha'_2 \neq 0$.

Utilisons Eq. (4.21) et la première équation de Frenet on obtient

$$\begin{aligned} N &= \pm(\cosh \alpha_2 \cosh \beta_2 e_1 + \cosh \alpha_2 \sinh \beta_2 e_2 + \sinh \alpha_2 e_3), \\ B &= T \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N = \pm(\sinh \beta_2 e_1 + \cosh \beta_2 e_2). \end{aligned}$$

On calcule simplement

$$\nabla_T N = \pm[(\alpha'_2 \sinh \alpha_2 \cosh \beta_2 + \sinh \beta_2)e_1 + (\alpha'_2 \sinh \alpha_2 \sinh \beta_2 + \cosh \beta_2)e_2 + (\alpha'_2 \cosh \alpha_2)e_3].$$

D'où

$$\tau = g_{\mathbb{H}_1^3}(\nabla_T N, B) = -1.$$

On remplaçons les resultats ($B_3 = 0$ et $\tau^2 = 1$) dans l'équation Eq (4.16) on trouve $\kappa = 0$, d'où γ n'est pas biharmonique. ■

Ainsi qu'on a

Corollaire 4.14 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe hélice biharmonique paramétrée par la longueur d'arc. Alors*

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \text{constante non nulle,} \\ B_3 = \text{constante} \neq 0, \\ \kappa^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \tau^2 = 1 + 4\varepsilon_3 B_3, \\ N_3 = 0. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Lemme 4.15 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Si $N_3 = 0$, alors*

$$T(s) = \cosh \alpha_0 \cosh \beta(s)e_1 + \cosh \alpha_0 \sinh \beta(s)e_2 + \sinh \alpha_0 e_3,$$

si T est de type espace, où bien

$$T(s) = \sinh \varphi_0 \cosh \rho(s)e_1 + \sinh \varphi_0 \sinh \rho(s)e_2 + \cosh \varphi_0 e_3,$$

si T est de type temps, où $\alpha_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit T le champs de vecteurs tangents de $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ tel que

$$T = T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3, \text{ et } g_1(T, T) = \varepsilon_1$$

on a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (T'_1 - 2T_2 T_3)e_1 + (T'_2 - 2T_1 T_3)e_2 + T'_3 e_3 \\ &= \kappa \varepsilon_2 N. \end{aligned}$$

Alors $N_3 = 0$ si et seulement si $T_3 = \text{constante}$ (i.e. α_0 et φ_0 sont des constantes). ■

4.5 Formes explicites des courbes biharmoniques dans

\mathbb{H}_1^3

Théorème 4.16 *Les équations paramétriques de toutes les courbe biharmonique de type espace sont*

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{a} \cosh \alpha_0 \sinh(as + b) + c_1, \\ y(s) = \frac{1}{a} \cosh \alpha_0 \cosh(as + b) + c_2, \\ z(s) = 2(\sinh \alpha_0 - \frac{1}{a}(\cosh \alpha_0)^2)s \\ \quad + \frac{2c_1}{a} \cosh \alpha_0 \cosh(as + b) - \frac{2c_2}{a} \cosh \alpha_0 \sinh(as + b) + c_3, \end{cases} \quad (4.24)$$

telque $a = \sinh \alpha_0 \pm \sqrt{5(\sinh \alpha_0)^2 + 1}$ et $b, c_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 3$).

Preuve. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe de type espace, alors le vecteur tangent de γ est donné par

$$T(s) = \cosh \alpha_0 \cosh \beta(s)e_1 + \cosh \alpha_0 \sinh \beta(s)e_2 + \sinh \alpha_0 e_3$$

d'après le procédés de Gram-Shmidt on a

$$N(s) = \sinh \beta(s)e_1 + \cosh \beta(s)e_2,$$

calculons la dérivé covariante de T on obtient

$$\nabla_T T = \cosh \alpha_0 (\beta' - 2 \sinh \alpha_0) (\sinh \beta e_1 + \cosh \beta e_2) = \kappa \varepsilon_2 N.$$

D'où

$$\kappa = |\cosh \alpha_0 (\beta' - 2 \sinh \alpha_0)|. \quad (4.25)$$

On a aussi

$$B(s) = T(s) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N(s) = \sinh \alpha_0 \sinh \beta(s)e_1 + \sinh \alpha_0 \cosh \beta(s)e_2 + \cosh \alpha_0 e_3. \quad (4.26)$$

De plus

$$\nabla_T N = \cosh \beta (\beta' - 2 \sinh \alpha_0) e_1 + \sinh \beta (\beta' - 2 \sinh \alpha_0) e_2 + \cosh \alpha_0 e_3.$$

D'après la deuxième équation de Serret-Frenet on trouve

$$\tau = \sinh \alpha_0 (\beta' - 2 \sinh \alpha_0) - 1. \quad (4.27)$$

Alors γ est une courbe non géodésique biharmonique de type espace si et seulement si

$$\begin{cases} \beta' = \text{constante} \neq 2 \sinh \alpha_0, \\ -\kappa^2 + \tau^2 = 1 - 4B_3. \end{cases} \quad (4.28)$$

substituons Eq.(4.25), Eq.(4.27) et $B_3 = \cosh \alpha_0$ dans Eq (4.28) on obtient

$$(\beta')^2 - 2\beta'(\sinh \alpha_0) - 4 - 4(\sinh \alpha_0)^2 = 0.$$

Donc la solution de cette équation est donnée par

$$\beta' = \sinh \alpha_0 \pm \sqrt{5(\sinh \alpha_0)^2 + 1} = a.$$

D'où

$$\beta = as + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

Pour trouver le système d'équations différentielles d'une courbe biharmonique de type espace $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, alors, comme $T = \frac{d\gamma}{ds}$, on a le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cosh \alpha_0 \cosh(as + b), \\ \frac{dy}{ds} = \cosh \alpha_0 \sinh(as + b), \\ \frac{dz}{ds} = 2 \sinh \alpha_0 + 2 \cosh \alpha_0 (\sinh(as + b)x(s) - \cosh(as + b)y(s)). \end{cases}$$

Intégrons le système et on obtient les équations paramétrique données dans Eq. (4.24). ■

Exemple 4.17 La courbe γ paramétrée par

$$\begin{cases} x(s) = 0.31888 \sinh(11.798s), \\ y(s) = 0.31888 \cosh(11.798s), \\ z(s) = 4.8544s \end{cases}$$

telque

$$\begin{aligned} b &= c_1 = c_2 = c_3 = 0, \alpha_0 = 2 \Rightarrow \cosh \alpha_0 = 3.7622, \sinh 1 = 3.6269 \\ \text{et } a &= \sinh \alpha_0 \pm \sqrt{5(\sinh \alpha_0)^2 + 1} = 11.798. \end{aligned}$$

γ est une courbe biharmonique de type espace dans \mathbb{H}_1^3 (voir Fig (4.1))



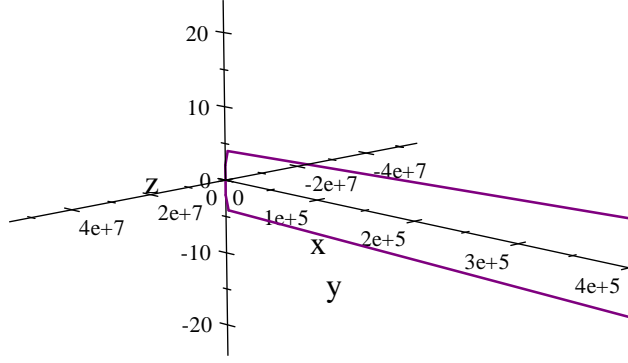


Fig. 4.1. Courbe γ tracée dans \mathbb{R}^3 .

Théorème 4.18 Les équations paramétriques de toutes courbe γ de \mathbb{H}_1^3 non géodésique biharmonique de type temps sont

$$\begin{cases} \tilde{x}(s) = \frac{1}{a} \sinh \varphi_0 \sinh(\tilde{a}s + \tilde{b}) + d_1, \\ \tilde{y}(s) = \frac{1}{a} \sinh \varphi_0 \cosh(\tilde{a}s + \tilde{b}) + d_2, \\ \tilde{z}(s) = 2(\cosh \varphi_0 - \frac{1}{a}(\sinh \varphi_0)^2)s \\ + \frac{2d_1}{a} \sinh \varphi_0 \cosh(\tilde{a}s + \tilde{b}) - \frac{2d_2}{a} \sinh \varphi_0 \sinh(\tilde{a}s + \tilde{b}) + d_3, \end{cases} \quad (4.29)$$

telque $\tilde{a} = \cosh \varphi_0 \pm \sqrt{5(\cosh \varphi_0)^2 - 1}$ et $\tilde{b}, d_i \in \mathbb{R}$, ($1 \leq i \leq 3$) et $\varphi_0 \neq 0$.

Preuve. Le champs de vecteurs tangents d'une courbe non géodésique biharmonique de type temps est donné par

$$T(s) = \sinh \varphi_0 \cosh \rho(s)e_1 + \sinh \varphi_0 \sinh \rho(s)e_2 + \cosh \varphi_0 e_3,$$

d'après le procédés de Gram-Shmidt nous donne

$$N(s) = \sinh \rho(s)e_1 + \cosh \rho(s)e_2.$$

Ce qui implique que N est un champ de vecteurs de type temps. Si on détermine la dérivé covariante de T , il est clair que

$$\nabla_T T = \cosh \varphi_0 (\rho' - 2 \cosh \varphi_0) (\sinh \rho e_1 + \cosh \rho e_2) = \kappa \varepsilon_2 N.$$

et on obtient

$$\kappa = |\sinh \varphi_0 (\rho' - 2 \sinh \varphi_0)|. \quad (4.30)$$

On a aussi

$$B(s) = T(s) \wedge_{\mathbb{H}_1^3} N(s) = \cosh \varphi_0 \cosh \rho(s) e_1 + \cosh \varphi_0 \sinh \rho(s) e_2 + \sinh \varphi_0 e_3. \quad (4.31)$$

De plus

$$\nabla_T N = \cosh \rho (\rho' - 2 \cosh \varphi_0) e_1 + \sinh \rho (\rho' - 2 \cosh \varphi_0) e_2 + \sinh \varphi_0 e_3.$$

Poursuite on a

$$\tau = \cosh \varphi_0 (\rho' - 2 \cosh \varphi_0) + 1. \quad (4.32)$$

Alors γ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} \rho' = \text{constante} \neq 2 \cosh \varphi_0, \\ -\kappa^2 + \tau^2 = 1 + 4B_3^2 \end{cases} \quad (4.33)$$

Utilisons Eq.(4.30) et Eq. (4.32) et $B_3 = \sinh \varphi_0$ dans Eq. (4.33) on obtient

$$(\rho')^2 - 2\rho'(\cosh \varphi_0) + 4 - 4(\cosh \varphi_0)^2 = 0.$$

Ce qui nous donne

$$\rho' = \cosh \varphi_0 \pm \sqrt{5(\cosh \varphi_0)^2 - 1} = \tilde{a}.$$

D'où

$$\rho = \tilde{a}s + \tilde{b}, \quad \tilde{b} \in \mathbb{R}$$

Comme $T = \frac{d\gamma}{ds}$, le système d'équations différentielles de courbe non géodésique biharmonique de type temps $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ est

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{ds} = \sinh \varphi_0 \sinh(\tilde{a}s + \tilde{b}), \\ \frac{d\tilde{y}}{ds} = \sinh \varphi_0 \cosh(\tilde{a}s + \tilde{b}), \\ \frac{d\tilde{z}}{ds} = 2 \cosh \varphi_0 + 2 \sinh \varphi_0 (\sinh(\tilde{a}s + \tilde{b})\tilde{x}(s) - \cosh(\tilde{a}s + \tilde{b})\tilde{y}(s)). \end{cases}$$

Si on intègre ce système on obtient les équations paramétrique donnée dans Eq. 4.29. ■

Exemple 4.19 La courbe γ (de type temps) paramétrée dans \mathbb{H}_1^3 par

$$\gamma(s) = \begin{cases} \tilde{x}(s) = 0.24254 \sinh(4.8454s), \\ \tilde{y}(s) = 0.24254 \cosh(4.8454s), \\ \tilde{z}(s) = 2.5161s, \end{cases}$$

telque

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= d_1 = d_2 = d_3 = 0, \varphi_0 = 1 \Rightarrow \cosh \varphi_0 = 1.5431, \sinh 1 = 1.1752 \\ \text{et } \tilde{a} &= \cosh 1 + \sqrt{5(\cosh 1)^2 - 1} = 4.8454 \end{aligned}$$

γ est une courbe hélice biharmonique de type temps dans \mathbb{H}_1^3 . (Voir Fig (4.2))

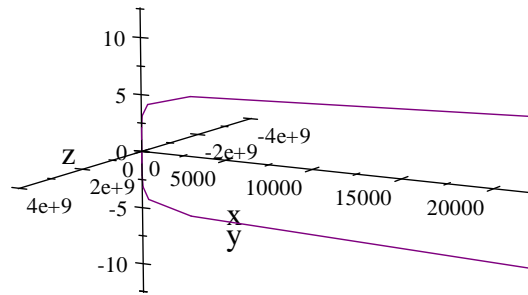


Fig. 4.2. Courbe γ tracée dans \mathbb{R}^3

D'après les Théorèmes (4.16) et (4.18) on a

Corollaire 4.20 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et $N_3 = 0$. Alors on a $\varepsilon_1 = -\varepsilon_3$ et N est un champs de vecteurs de type temps, telque $\varepsilon_1 = g(T, T)$ et $\varepsilon_3 = g(B, B)$.

Corollaire 4.21 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Si γ est une courbe biharmonique alors, N est un vecteur de type temps et T et B sont de caractère causale différent.

Conclusion

Au bout de l'étude des courbes harmoniques et biharmoniques dans les deux variétés différentes \mathbb{E}_1^3 et \mathbb{H}_1^3 , on a conclu que les géodésiques sont les seules courbes harmoniques, que se soit dans l'espace de Minkowski de dimension 3 ou bien dans le groupe d'Heisenberg Lorentzien. Alors notre travail est basé sur l'étude des courbes biharmoniques, tel qu'on a trouvé que les géodésiques sont aussi les courbes biharmoniques dans \mathbb{E}_1^3 puisqu'il est plat, ce qui justifie le choix du groupe d'Heisenberg (dans \mathbb{H}_1^3 le tenseur de courbure de Riemann est non nulle), alors on a prouvé qu'il existait dans \mathbb{H}_1^3 des courbes biharmoniques non géodésiques qui sont les courbes hélices avec quelques conditions claires et précises en détail, ainsi qu'on a donné les formes explicites de ces courbes selon leurs types (espace ou temps).

Prespective

1. Caractériser les courbes harmoniques et biharmoniques dans les variétés pseudo Riemannienne de dimension 3.
2. Étudier les courbes harmoniques et biharmoniques dans des groupe muni d'une structure Lorentzienne comme les groupes de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ et groupe de Lorentz $SO_0(3, 1)$.
3. Généraliser l'étude des courbes harmonique et biharmonique dans les variétés pseudo-Riemannienne de dimension quelconque.

Bibliographie

- [1] A.Amina, Caractérisation de quelques courbes spéciales dans l'espace de Minkowski de dimension 3, Master académique AGA, Univ. Saida (2016).
- [2] T.Barbot, Introduction a la Géométrie Causale de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter
- [3] L.Capogna, D.Danielli, S.D.Pauls, an introduction to the Heisenberg group and the Sub-Riemannian isoperimetric problem, progress in mathematics vol. 259, Birkhäuser (2007).
- [4] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math., V. 86, (1964), p. 109-160.
- [5] R.Lopez, Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv :0810.3351v2 [math.DG] 9 oct 2014.
- [6] S.Yüksel Perktaş, E. Kılıç, on biharmonic curves in 3-dimentional Heisenberg group, Dep. Math. Adıyaman University (2012), p. 58-74.
- [7] <https://fr.wikipedia.org/>