République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

# L'inverse de Drazin des opérateurs linéaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

## Master Académique


Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géometrie et applications

par

**Slimani Houria**[1]

Sous la direction de

**Mr B. Saadli**


Soutenue le 22 Mai 2017 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **Dr G.Djellouli** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| **Mr B. Saadli** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Rapporteur |
| **Mlle H. Abbas** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| **Dr O. Benihi** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |


1. e-mail : slmhouri@outlook.fr

# *Dédicaces*

***J**e rends grâce a notre dieu le tout misècorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :*

***M**es parents, les êtres les plus chers a mon cœur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.*

***M**es très chères frères, ma trés chère sœur et toute ma famille.*

***M**es amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.*

***T**ous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.*

***J**e désire aussi remercier Mme **Nadjet Bouziane**, prof au lycée de Mathématique Kouba alger, son soutien et ses conseils m'ont beaucoup aidés dans le coté linguistique .*

***T**ous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.*

# *Remerciements*

***L**ouanges A Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail, Prière et Salut soient sur notre Cher Maître Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons .*

***J**e tiens à remercier M.A **B. Saadli** pour la bienveillance avec laquelle il a encadré ce mémoire. Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail. Je tiens à lui exprimer ma gratitude.*

***J**e tiens à remercier également le docteur **G. Djellouli** qui m'a fait l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.*

***J**e remercie Mlle **H. Abbas**, Dr **O.Benihi** d'avoir accepté d'examiner mon travail et d'être membres du jury.*

***J**e désire aussi remercier tous les professeurs de Math à l'université Dr Tahar Moulay - Saïda pour son aide durant toutes ces années.*

***Q**ue soient ,enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail.*

# Table des matières

# Introduction

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation de type $Ax = y$, où $A$ est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice ou un opérateur linéaire, comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires .

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps a un inverse, si elle est carrée de déterminant non nul, on peut généralisé la notion d'inversibilité même pour les matrices non inversible par plusieur méthodes ; permis ces méthodes il y a le pseudo-inverse de ***Moore-Penrose*** et l'inverse de ***Drazin***, Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière.

Cette généralisation de l'inverse est introduite depuit 1903 par ***Erik Ivar Fredholm*** qui a donnée le concept de pseudo-inverse pour un opérateur intégral , puis en 1920 ***Eliakim Hastings Moore*** décrit pour une matrice à coefficients réels ou complexes (pas nécessairement carrée), ou pour une application linéaire entre espaces euclidiens ou hermitiens, il existe un unique pseudo-inverse de ***Moore-Penrose*** satisfaisant certaines conditions supplémentaires, et redécouvert indépendamment par ***Roger Penrose*** en 1955.

Et en 1958 ***Drazin*** à son tour a donné une autre extension à la notion d'inverse généralisé nommé par son nom "inverse de ***Drazin*** " ceci a fait l'objet de plusieurs articles publiés récemment par ***J.J.Koliha***, ***Enrico Boasso*** et ***V.Rakocevic***.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres :

**Dans le premier chapitre** on aborde des notions de base nécessaires pour notre sujet. On donne quelques rappels de les opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert, ainsi on a prouvé des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des projections orthogonales, puis une méthode pour extraire une projection orthogonale a partie d'une projection de même image, ce concept prendra également une part importante de l'intérêt du troisième chapitre pour définir l'inverse de ***Drazin***.

**Le deuxième chapitre** est consacrè à l'étude des propriétés de l'inverse de ***Drazin***.

Dans la première section on donne quelques conséquences de la décomposition d'une matrice, dans la deuxième section on va étudier les $\{i, j, \ldots, k\}$- inverses généralisées des matrices, et aussi les types les plus célèbres de l'inverse généralisée et les relations entre ces types.

Précisément les types suivants de pseudo-inverse comme :

- L'inverse de ***Moore-Penrose*** $(A^\dagger)$ dans le cas des matrices carées. Ce type d'inverse vérifie les quatre équations de ***Penrose*** $AA^\dagger = A \quad (1), A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger \quad (2),$ $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger \quad (3), (A^\dagger A)^* = A^\dagger A \quad (4).$
- L'inverse du ***Groupe*** $(A^\sharp)$ ou $\{1,2,5\}$- inverse( où $AA^\sharp = A^\sharp A \quad (5)$) il existe seulement pour les matrices d'indice $k = 1$ ou $k = 0$.

Et dans la troisième section on étudie l'inverse de ***Drazin*** ou $\{1^k, 2, 5\}$- inverse (où $A^k A^D A = A^k \quad (1^k)$ tel que $k = \ indA$) d'une matrice carrée et rectangulaires, l'indice d'une matrice qui est une source essentielle de cette inverse et l'étude des méthode pour le calcul de l'inverse de ***Drazin***.

**Le dernièr chapitre** représente l'objectif générale des notions de l'inverse de ***Drazin*** des opérateurs linéaire dans l'espace de Hilbert. La première section on donne un rappel sur la théorie spectrale des opérateurs linéaires .La deuxième section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaires où on a commencé par la définition de ***Tseng***. La troisième section on présente une étude sur les résultats concernant les propriétés fondamentaux de l'inverse de ***Drazin*** pour les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. On obtient également une caractérisation utile et une formule explicite pour l'inverse de ***Drazin*** de $(T + B)$ et $(TB)$ si $T$ et $B$ sont des Opérateurs bornés. Et pour la dernière section, On introduit la notion de l'inverse de ***Drazin*** dans la classe des opérateurs fermés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et on étudie certaines propriétés de base de $T^D$.

# Chapitre 1

# Notion de projections

## 1.1 Espace de Hilbert

### 1.1.1 Notions de base

**Définition 1.1.1.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Un produit scalaire est une application $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ vérifiant :*

***(i)*** *$\forall y \in \mathcal{H} : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire (en $x$),*

***(ii)*** *$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,*

***(iii)*** *$\langle x, x \rangle \geq 0$ et si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$.*

*Par conséquent $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire (en $y$) si $\mathcal{H}$ un espace vectoriel complexe. On pose*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

*Il est facile de montré que $\|.\|$ est une norme (appelé la norme associée au produit scalaire).*

**Exemple 1.1.1.** *Soit $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un borélien, muni de la mesure de Lebesgue ou la mesure discrète. Si $f, g \in L^2(\Omega)$ alors $f\overline{g} \in L^1(\Omega)$ et*

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f\overline{g}$$

*est bien défini, et $\|f\| = \sqrt{\int |f|^2} = \|f\|_2$.*

**Proposition 1.1.1.** *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors pour tous $x, y \in \mathcal{H}$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Preuve.** Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2Re\langle x, y \rangle t + \|y\|^2.$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être $\leq 0$ :

$$0 \geq (2Re\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2,$$

d'ou

$$\|x\|\|y\| \geq |Re\langle x, y\rangle|.$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ de module 1 tel que $\langle x, y\rangle = \alpha|\langle x, y\rangle|$, d'où $\overline{\alpha}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$

$$et \ \|x\|\|y\| = \|x\|\|\alpha y\| \geq Re\langle x, \alpha y\rangle = Re(\overline{\alpha}\langle x, y\rangle) = Re|\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

■

**Définition 1.1.2.** *On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel $\mathcal{H}$ (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée.*

*Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, on notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.*

**Exemple 1.1.2.** *L'espace $L_2(\Omega, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}d\mu(s).$$

*L'espace $l_2$ est un cas particulier, obtenu lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ est muni de la mesure de comptage (définie par $\mu(\{n\}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).*

**Théorème 1.1.1.** *(**Théorème des projections**) Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathbf{C}$ une partie convexe fermée non vide de $\mathcal{H}$ ; pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un et un seul point $y_0$ de $\mathbf{C}$ en lequel la fonction $y \to \|y - x\|$ atteint son minimum sur $\mathbf{C}$. On a de plus*

$$\forall y \in \mathbf{C}, Re\langle x - y_0, y - y_0\rangle \leq 0.$$

**Preuve.** En translatant le convexe $\mathbf{C}$, on peut se ramener au cas où $x = 0_H$. Notons alors

$$d = \inf\{d(y, 0_H) : y \in \mathbf{C}\} = \inf\{\|y\| : y \in \mathbf{C}\}$$

La distance de $0_H$ à $\mathbf{C}$. Si $y$ et $z$ sont deux points de $\mathbf{C}$, on a $(y + z)/2 \in \mathbf{C}$ puisque $\mathbf{C}$ est convexe, donc $\|(y + z)/2\| \geq d$ ; de plus la relation du parallélogramme

$$\|(y + z)/2\|^2 + \|(y - z)/2\|^2 = (\|y\|^2 + \|z\|^2)/2$$

implique pour tous $y, z \in \mathbf{C}$

$(*)$ $$0 \leq \|(y - z)/2\|^2 \leq (\|y\|^2 + \|z\|^2)/2 - d^2.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$\mathbf{C}_n = \{y \in \mathbf{C} : \|y\|^2 \leq d^2 + 1/n\}.$$

L'ensemble $\mathbf{C}_n$ est une partie fermée non vide de $\mathcal{H}$ ; d'après la relation $(*)$, on a : $\|(y - z)/2\|^2 \leq 1/n$ pour tous $y, z \in \mathbf{C}_n$. Le diamètre de $\mathbf{C}_n$ est donc inférieur ou égal á $2/\sqrt{n}$, et il tend donc vers 0. Comme l'espace $\mathcal{H}$ est complet, l'intersection des fermés emboîtés $\mathbf{C}_n$ qui est égale à $\{y \in \mathbf{C} : \|y\| = d\}$, contient un et un seul point, qui est le point $y_0$ cherché.

Compte tenu de notre translation simplificatrice, la relation á démonter ensuite devient $Re(\langle -y_0, y - y_0\rangle) \leq 0$ pour tout $y \in \mathbf{C}$ ; pour $t \in [0,1]$, on a $y_0 + t(y - y_0) \in \mathbf{C}$, donc $\|y_0 + t(y - y_0)\| \geq \|y_0\|$, ce qui donne en développant le carré de la norme

$$2tRe(\langle y_0, y - y_0\rangle) + t^2\|y - y_0\|^2 \geq 0$$

Pour $0 \leq t \leq 1$ ; pour finir on divise par $t \geq 0$ que l'on fait ensuite tendre vers 0, et on obtient $Re(\langle y_0, y - y_0\rangle) \geq 0$.

Un cas particulier important est celui où $\mathbf{C}$ est un sous-espace vectoriel fermé $F$ de $\mathcal{H}$. Dans ce cas on a $\langle x - y_0, z\rangle = 0$ pour tout vecteur $z \in F$, c.à.d que $(x - y_0) \perp F$.
Dans le cas de la projection sur un sous-espace vectoriel fermé $F$, la projection $y_0$ de $x$ sur $F$ est entièrement caractérisée par les deux conditions suivantes :

- le vecteur $y_0$ appartient à $F$ ;
- le vecteur $x - y_0$ est orthogonal à $F$.

En effet, si ces conditions sont vérifiées et si $y$ est un élément quelconque de $F$, on aura
$(*) \qquad \|x - y\|^2 = \|(x - y_0) + (y_0 - y)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2$
parce que $y_0 - y \in F$ est orthogonal à $x - y_0$. Cette relation montre que :

$$\|x - y\|^2 \geq \|x - y_0\|^2 \textit{ pour tout } y \in F,$$

c.à.d $y_0$ est bien le point de $F$ le plus proche du point $x$.

On notera $P_F(x) = y_0$ la projection orthogonale de $x$ sur $F$. La caractérisation ci-dessus montre que $\mu P_F(x) + \mu' P_F(x')$ est la projecion de $\mu x + \mu' x'$, autrement dit l'application $P_F$ est une application linéaire. L'égalité(*) ci-dessus donne aussi $\|x - y\| \geq \|P_F(x) - y\|$ pour tout $y \in F$, donc $\|x\| \geq \|P_F(x)\|$ en prenant $y = 0$ ; on a donc $\|P_F\| \leq 1$.

Si $F$ est un sous-espace vectoriel fermé d'un espace hilbertien $\mathcal{H}$, on appelle *projecteur orthogonal* sur $F$ l'opérateur borné $P_F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui associe à tout vecteur $x \in H$ sa projection sur $F$. ■

## 1.2 Opérateurs linéaires

### 1.2.1 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

**Définition 1.2.1.** *Une application $T$ définie d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$ est dit "Opérateur linéaire" si $T$ satisfait les deux propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in \mathcal{H}_1, T(x + y) = T(x) + T(y)$. *(Additivité)*
2. $\forall x \in \mathcal{H}_1, \forall \alpha \in \mathcal{H}_2, T(\alpha x) = \alpha T(x)$. *(Homogénité)*

*L'opérateur identité $I$ est défini par $Ix = x$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.*
*L'opérateur nul $0$ est défini par $0x = 0$, pout tout $x \in \mathcal{H}$.*
*Le noyau de $T$ notée $N(T)$ et image de $T$, notée $R(T)$ sont définis par :*
*Soit $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2, \{y \in \mathcal{H}_2; \exists\, x \in \mathcal{H}_1 : y = Tx\}$.*
$N(T) = \{x \in \mathcal{H}_1, Tx = 0\}$ *et* $R(T) = \{Tx, x \in \mathcal{H}_1\}$.

**Exemple 1.2.1.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*
*L'application $T_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ définie pour $x \in \mathcal{H}$ par*

$$T_\lambda(x) = \lambda x$$

*est un opérateur linéaire. En effet, pour $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, On a*

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha x_1 + x_2) &= \lambda(\alpha x_1 + x_2) \\ &= \alpha\lambda x_1 + \lambda x_2 \\ &= \alpha T_\lambda(x_1) + T_\lambda(x_2) \end{aligned}$$

*Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport $\lambda$ de l'espace linéaire $\mathcal{H}$.*
*Si $\mathcal{H}$ est un espace linéaire tel que $\dim(\mathcal{H}) = 1$, alors tout opérateur linéaire de $\mathcal{H}$ est une dilatation.*

**Définition 1.2.2.** *L'opérateur linéaire $T$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dit borné s'il existe un nombre positif $c$ tel que :*

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \qquad pour\, tout\, x \in \mathcal{H}.$$

**Exemple 1.2.2.** $\mathcal{H} = L^2(]0,1]), T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$f \mapsto Tf(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

*$T$ est borné ?*

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2\, dx \\ &= \int_0^1 \left| \int_0^x (x-t)f(t)dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left( \int_0^x |x-t|^2 dt \int_0^x |f(t)|^2 dt \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{x^3}{3} \int_0^x |f(t)|^2 dt \right] dx = \frac{1}{3}\|f\|^2. \end{aligned}$$

*D'ou* $\|Tf\|^2 \leq \frac{1}{3}\|f\|^2, \forall f \in L^2([0,1])$

$\Rightarrow \|Tf\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|f\|$

*donc $T$ est borné.*

**Définition 1.2.3.** *On dénote par $\mathcal{B}(\mathcal{H})$* ***l'espace des Opérateurs linéaires bornés*** *et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$* ***l'espace des opérateurs linéaires*** *définis sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

**Définition 1.2.4.** *On définit la norme de l'opérateur linéaire borné $T$ par*

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|; \forall\ x \in \mathcal{H}\}.$$

**Théorème 1.2.1.** *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. La norme de $T$ est donnée par :*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|;\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

**Preuve.** On démontre les inégalités dans le deux sens.
1) Posons $a = \sup\{\|Tx\|, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}$, si l'opérateur $T$ est borné, alors :
$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| = \|T\|$ pour $\|x\| = 1$
donc $a \leq \|T\|$ d'aprés la définition de $\|T\|$.
2) Pour tout vecteur $x \in \mathcal{H}$ on a :

$$\|Tx\| = \left\|T(\|x\|\frac{x}{\|x\|})\right\| \|x\| \quad \leq a\|x\|$$

d'où

$$\|T\| \leq a = \sup\{\|Tx\|,\ x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}.$$

En combinant les deux inégalités dans 1) et 2) on obtient l'egalité désirée. ∎

**Théorème 1.2.2.** *Pour tout opérateur linéaire sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T$ est borné .*
2. *$T$ est continu sur l'espace $\mathcal{H}$.*
3. *$T$ est continu en un point $x_0$ ($x_0$ est un vecteur) de l'espace $\mathcal{H}$.*

**Théorème 1.2.3.** *(Représentation de Riesz) Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et $f$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$.*
*Il existe un vecteur $a \in \mathcal{H}$ et un seul, tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{H}, f(x) = \langle a, x\rangle.$$

### 1.2.2 Adjoint d'un opérateur

**Théorème 1.2.4.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que :*
*Pour tous $x,\ y \in \mathcal{H}$, on ait*

$$< Tx, y >=< x, T^*y > .$$

*De plus $T^*$ vérifie $\|T^*\| = \|T\|$.*
*L'opérateur $T^*$ est appelé l'opérateur adjoint de $T$.*

**Preuve.** Soit $y$ donné dans $\mathcal{H}$, l'application :

$$x \to < Tx, y >$$

est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, d'après le théorème de représentation de Riesz , il suit qu'il existe un unique $z \in \mathcal{H}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on ait :
$< Tx, y >=< x, z >$.
On note $z = T^*y$ , $T^*$ est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu'application de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ car pour $y$ donné, on définit $z$, l'image de $y$ par $T^*$, de façon unique.

Montrons que $T^*$ est linéaire : soit $y,\ y' \in \mathcal{H}$, pour $x \in \mathcal{H}$ quelconque,

$$\begin{array}{rrcl} & < Tx, y + y' > &=& < Tx, y > + < Tx, y' >, \\ et & < Tx, y + y' > &=& < x, T^*(y + y') >, \\ & < Tx, y > &=& < x, T^*y >, \\ & < Tx, y' > &=& < x, T^*y' > . \end{array}$$

D'où, pour tout $x \in \mathcal{H}$

$$< x, T^*(y + y') >=< x, T^*y > + < x, T^*y' >$$

ce qui équivaux à $T^*(y + y') = T^*y + T^*y'$. On peut faire de même pour montre que $T^*(\lambda y) = \lambda T^*y$.

Montrons maintenant que $T^*$ est borné et de même norme que $T$. On a :

$$\|T^*x\|^2 =< T^*x, T^*x >=< TT^*x, x >\leq \|T\|\|T^*\|\|x\|$$

d'où

$$\|T^*x\| \leq \|T\|\|x\|$$

il suit que $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$.
On procède de la même façon pour l'autre inégalité :

$$\|Tx\|^2 =< Tx, Tx >=< x, T^*Tx >\leq \|T^*\|\|T\|\|x\|$$

d'où

$$\|Tx\| \leq \|T^*\|\|x\|$$

et donc $\|T\| \leq \|T^*\|$.
Alors $\|T^*\| = \|T\|$. ∎

**Exemple 1.2.3.** *Soit $T$ l'opérateur linéaire définie sur $L_2(\mathbb{R})$ tel que :*

$$\begin{array}{rrcl} T: & L_2(\mathbb{R}) & \to & L_2(\mathbb{R}) \\ & x & \mapsto & Tx(t) = x(t+h) \qquad\qquad h \in \mathbb{R}. \end{array}$$

*alors*

$$\begin{aligned} < Tx, y > &= \int_{-\infty}^{+\infty} Tx(t)y(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+h)y(t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau - h)\ d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t-h)\ dt \\ &= < x, T^*y > \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrcl} donc \;\; T^*: & L_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & L_2(\mathbb{R}) \\ & y & \mapsto & T^*y(t) = y(t-h). \end{array}$$

**Proposition 1.2.1.** *Soit $T$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. On a les propriétés suivantes :*

$$\begin{array}{ll} i)\; N(T) = \left(R(T)^*\right)^{\perp}, & ii)\; N(T^*) = \left(R(T)\right)^{\perp}, \\ iii)\; \overline{R(T)} = \left(N(T^*)\right)^{\perp}, & iv)\; \overline{R(T^*)} = \left(N(T)\right)^{\perp}. \end{array}$$

**Preuve.**
Le fait que $(T^*)^* = T$ assure que $i) \Leftrightarrow ii)$ et $iii) \Leftrightarrow iv)$, donc en montrant $(i)$ et $(iii)$ seulement.

$i)$ Soit $x \in N(T)$ et $z \in R(T^*)$. Fixons $y \in \mathcal{H}$ tel que $z = T^*y$. Puisque $Tx = 0$, on a : $< x, z >=< x, T^*y >=< Tx, y >= 0$.
Donc $x \perp z,\ \forall z \in (R(T)^*)$ c.à.d $x \in (R(T)^*)^{\perp}$ *et* $N(T) \subset (R(T)^*)^{\perp}$.

Soit maintenant $x \in (R(T)^*)^{\perp}$, alors $x \perp (R(T)^*)$ et $\forall y \in \mathcal{H}$ on a :
$< Tx, y >=< x, T^*y >= 0$ c.à.d $Tx \perp \mathcal{H}$ d'où $Tx = 0$ et $x \in N(T)$ donc $(R(T)^*)^{\perp} \subset N(T)$.

$iii)$ En prenant l'orthogonal de l'égalité $ii)$, on obtient

$$(N(T)^*)^{\perp} = \left((R(T))^{\perp}\right)^{\perp}.$$

Or dans un espace de Hilbert, tout sous-espace vectoriel $F$ vérifie $(F^{\perp})^{\perp} = \overline{F}$ , d'où le résultat

$(N(T)^*)^{\perp} = \overline{R(T)}$. ■

### 1.2.3 Opérateurs fermés

**Définition 1.2.5.** *Soient $X, Y$ deux espace vectoriels normés, $T$ un opérateur linéaire de $\mathcal{D}(T) \subset X$ dans $Y (T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y) T$ est fermé ssi :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n \in \mathcal{D}(T) \\ x_n \rightarrow x_0 \\ Tx_n \rightarrow y_0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathcal{D}(T) \\ et \\ Tx_0 = y_0 \end{array} \right.$$

**Remarque 1.2.1.** *$T$ est fermé si et seulement si $G(T)$ est fermé*
*( t.q $G(T) = \{(x, y)/x \in X, y \in Y$ et $y = Tx\}$).*

**Théorème 1.2.5.** *Si $\mathcal{D}(T) = X$ et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ (t.q $X$ et $Y$ deux e-v-n). Alors $T$ est fermé.*

**Preuve.** Soit $x_n \in \mathcal{D}(T) = \lambda$ t.q $x_{n \in +\infty} \rightarrow x_0$ alors $x_0 \in X = \mathcal{D}(T)$
et $\lim_{n\rightarrow+\infty} Tx_n = T \lim_{n\rightarrow+\infty} x_n = Tx_0$ et $\lim_{n\rightarrow+\infty} Tx_n = y_0$,
d'ou $Tx_0 = y_0$ (Unicité de la limite). ■

**Théorème 1.2.6.** *Soit $T$ un opérateur fermé et $T^{-1}$ existe alors $T^{-1}$ est fermé.*

**Preuve.** $T$ est fermé alors $G(T) = \{(x, Tx), x \in \mathcal{D}(T)\}$ est fermé.
$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y)/y \in R(T)\}$ est fermé aussi car

$$B : X \times Y \to Y \times X$$

$$(x, y) \to (y, x)$$

donc $B(G(T^{-1})) = G(T^{-1}) = B(x, Tx) = (Tx, x) = (y, T^{-1}y)$
$B$ est un homéomorphisme donc $G(T^{-1})$ est fermé comme image d'un fermé $G(T)$ par un homéomorphisme donc $T^{-1}$ est fermé. ∎

**Conséquence** : Si $T \in \mathcal{L}(X, Y), \mathcal{D}(T) = X, T^{-1}$ existe alors $T^{-1}$ est fermé.

## 1.3 Opérateurs Projections Orthogonales

Les opérateurs projection dans les espaces de Hilbert et de Banach sont largement utilisés dans différents domaines des mathématiques comme l'analyse fonctionnelle et numérique, théorie de l'optimisation et de contrôle optimal, la programmation non linéaire et stochastique et la théorie des jeux. On utilise l'opérateur de projection dans le chapitre 3 pour définir l'inverse généralisé et l'inverse de ***Drazin***.

**Opérateur de projection**

Une projection sur un sous-espace quelconque $F$ de $\mathcal{H}$ est un opérateur linéaire borné $P$ de $\mathcal{H}$ dans $F$ tel que $P^2 = P$.

Soient $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ et $G$ un supplémentaire de $F$ dans $\mathcal{H}$.
N'importe quel vecteur x de $\mathcal{H}$ peut s'écrire d'une façon unique comme somme d'un vecteur de $F$ et d'un vecteur de $G$ $\mathrm{x} = \mathrm{x}' + \mathrm{x}''$, $(\mathrm{x}', \mathrm{x}'') \in F \times G$.
La projection sur $F$ parallèlement à $G$ est alors l'application $P$ qui associe à tout x de $\mathcal{H}$ le vecteur x′ de $F$ tel que $R(P) = F$ et $N(P) = G$.

La projection sur $G$ parallèlement à $F$ est l'application $Q = Id_{\mathcal{H}} - P$, appelé aussi projecteur associé à $P$.
L'image de $Q$ n'est autre que le noyau de $P$, l'image de $P$ est le noyau de $Q$.

Dans ce qui suit, nous supposerons que $\mathcal{H}$ est décomposé en la somme directe :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n.$$

**Propriété 1.3.1.** *La famille $(P_i)$ des projections associées à la décomposition précédente vérifie les assertions suivantes :*
1) $\sum_{i=1}^{n} P_i = Id_{\mathcal{H}}$;
2) $P_i^2 = P_i$ pour tout $i$;
3) $P_i \circ P_j = 0$ pour tout $(i, j)$ tel que $i \neq j$.

**Définition 1.3.1.** *Une projection orthogonale sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une application linéaire $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui satisfait :*

- $P^2 = P$ ;
- $< P\mathrm{x}, \mathrm{y} >=< \mathrm{x}, P\mathrm{y} >$ *pour tout* $x, y \in \mathcal{H}$ *(c.à.d* $P = P^*$*).*

*Une projection orthogonale est nécessairement bornée.*

**Exemple 1.3.1.** *L'espace* $L^2(\mathbb{R})$ *est la somme directe orthogonale de l'espace* $\mathcal{M}$ *des fonctions paires et* $\mathcal{N}$ *l'espace des fonctions impaires. Les projections orthogonales* $P$ *et* $Q$ *de* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$*, respectivement, sont donnés par :*

$$Pf(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x}) + f(-\mathrm{x})}{2} \ ; \qquad Qf(\mathrm{x}) = \frac{f(\mathrm{x}) - f(-\mathrm{x})}{2}$$

*On note que* $I - P = Q$.

**Définition 1.3.2.** *Soit* $G$ *un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert* $\mathcal{H}$ *et soit*

$$\mathcal{H} = G \overset{\perp}{\oplus} F$$

*Alors tout vecteur* $h \in \mathcal{H}$ *est représentable uniquement sous la forme*

$$h = g + f$$

*où* $g \in G$ *et* $f \in F$ *et* $< g, f >= 0$*. Le vecteur* $g$ *est appelé la projection orthogonale de* $h$ *sur* $G$*. L'opérateur qui à tout* $h \in \mathcal{H}$ *associe* $g \in G$ *est appelé l'opérateur de projection orthogonale sur* $G$*. Il est noté par* $P_G$ *ou parfois par* $P$ *:*

$$g = Ph = P_G h.$$

*L'opérateur de projection orthogonale est évidemment linéaire, il est borné et sa norme égale à un. En effet, d'après l'équation*

$$\|h\|^2 = \|g\|^2 + \|f\|^2$$

*on a*

$$\|g\| \leq \|h\| \tag{1.1}$$

*et alors*

$$\|P\| \leq 1$$

*Mais si* $h \in G$*, alors* $g = h$*, donc il y a une égalité dans (1.1).*
*Par conséquent* $\|P\| = 1$.

**Théorème 1.3.1.** *Si* $P$ *est un opérateur définie sur* $\mathcal{H}$ *tel que, pour* $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ *arbitraire*

$$1) < P^2 h_1, h_2 >=< Ph_1, h_2 >$$

$$2) < Ph_1, h_2 >=< h_1, Ph_2 >$$

*alors il existe un sous-espace fermé* $G \subset \mathcal{H}$ *tel que* $P$ *est l'opérateur projection orthogonale sur* $G$.

**Preuve.** L'opérateur $P$ est borné.

$$\|Ph\|^2 =< Ph, Ph >=< P^2h, h >=< Ph, h >$$

et

$$\|Ph\|^2 \leq \|Ph\|\|h\|$$

alors que

$$\|Ph\| \leq \|h\|$$

Donc, l'opérateur $P$ est borné et $\|P\| \leq 1$. Notons $G$ l'ensemble des vecteurs $g \in \mathcal{H}$ tels que :

$$Pg = g.$$

Clairement, $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$. On devera prouver que $G$ est fermé dans $\mathcal{H}$. Soit $g_n \in G$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ et $g_n \to g$ dans $\mathcal{H}$. Alors

$$g_n = Pg_n$$

et

$$Pg - g_n = Pg - Pg_n = P(g - g_n).$$

Puisque $\|Pg-g_n\| \leq \|g-g_n\|$, on en deduit que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = Pg = g$ donc, $g \in G$, ce qui implique que $G$ est fermé. Vérifions que $P = P_G$, où $P_G$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $G$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, le vecteur $Ph$ appartient à $G$ puisque $P(Ph) = Ph$, le sous-espace $G$ contient aussi $P_Gh$.
Par conséquent, il est suffisant de prouver que

$$< Ph - P_Gh, g' >= 0, \ \forall g' \in \ G$$

ou alors

$$< Ph, g' >=< P_Gh, g' >, \ \forall g' \in \ G$$

En utilisant les propriétés 1) et 2) on a :

$$< Ph, g' >=< h, Pg' >=< h, g' >$$

$$< P_Gh, g' >=< h, P_Gg' >=< h, g' >$$

En particulier, $(I - P)$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{H} \ominus G$ où $I$ est l'identité de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. ∎

### 1.3.1 Opérations concernant les projections orthogonales

Dans cette section on doit prouver des propositions concernant la multiplication, l'addition et la soustraction des opérateurs de projections orthogonales.

**Théorème 1.3.2.** *Soient $G_1$ et $G_2$ deux sous-espaces fermés de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le produit de deux opérateurs de projections orthogonales $P_{G_1}$ et $P_{G_2}$ est aussi un opérateur projection orthogonale si et seulement si $P_{G_1}$ et $P_{G_2}$ commutent, c.à.d, si*

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$$

*dans ce cas*

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_G$$

*où*

$$G = G_1 \cap G_2$$

**Preuve.** Si $P_{G_1}P_{G_2}$ est une projection orthogonale, Alors

$$P_{G_1}P_{G_2} = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P_{G_2}^*P_{G_1}^* = P_{G_2}P_{G_1}.$$

Inversement, fixons $h \in \mathcal{H}$ arbitrairement et soit

$$g = P_{G_1}P_{G_2}h = P_{G_2}P_{G_1}h$$

par la première représentation $g \in G_1$ et par la deuxième, $g \in G_2$, donc $g \in G_1 \cap G_2$.
Si $h \in G_1 \cap G_2$, alors $P_{G_1}P_{G_2}h = h$. Notons

$$P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1} = P$$

alors

$$\begin{aligned} P^2 &= (P_{G_1}P_{G_2})^2 \\ &= P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} \\ &= P_{G_1}P_{G_2} \\ &= P \end{aligned}$$

et pour tout $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} < Ph_1, h_2 > &= < P_{G_1}P_{G_2}h_1, h_2 > \\ &= < P_{G_2}h_1, P_{G_1}h_2 > \\ &= < h_1, P_{G_2}P_{G_1}h_2 > \\ &= < h_1, P_{G_1}P_{G_2}h_2 > . \\ &= < h_1, Ph_2 > \end{aligned}$$

Ces équations montrent que l'opérateur $P = P_{G_1}P_{G_2}$ satisfait les conditions du théorème 1.3.1, donc, il est un opérateur projection orthogonale sur $G = G_1 \cap G_2$. ■

**Corollaire 1.3.1.** *Deux sous-espaces fermés $G_1$ et $G_2$ de $\mathcal{H}$ sont orthogonaux si et seulement si*

$$P_{G_1}P_{G_2} = 0$$

**Théorème 1.3.3.** *La somme finie d'opérateurs de projections orthogonales*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + ... + P_{G_n} = Q \quad (n < \infty)$$

*est un opérateur projection orthogonale si et seulement si*

$$P_{G_i} P_{G_k} = 0 \quad (i \neq k)$$

*c.à.d, si et seulement si les espaces* $G_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$ *sont deux à deux orthogonaux dans ce cas*

$$Q = P_G$$

*où*

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$$

**Preuve.** Si les espaces $G_j$ sont deux à deux orthogonaux, alors $Q^2 = Q$, et, donc, la suffisance de la condition est évidente. Il reste seulement de prouver la nécessité de la condition. Soit $Q$ est un opérateur projection orthogonale, alors

$$\|f\|^2 \geq < Qf, f >= \sum_{j=1}^{n} < P_{G_j} f, f > \geq < P_{G_i} f, f > + < P_{G_k} f, f > .$$

Pour tout paire d'indices distingués $i$ et $k$. D'après cette relation il suit que

$$\|P_{G_i} f\|^2 + \|P_{G_k} f\|^2 \leq \|f\|^2$$

Utilisons cette inégalité avec

$$f = P_{G_k} h$$

alors

$$\|P_{G_i} P_{G_k} h\|^2 + \|P_{G_k} h\|^2 \leq \|P_{G_k} h\|^2$$

et

$$\|P_{G_i} P_{G_k} h\|^2 = 0$$

Pour $h \in \mathcal{H}$. Donc,

$$P_{G_i} P_{G_k} = 0$$

Alors les espaces $G_i$ et $G_k$ sont deux à deux orthogonaux. ∎

**Théorème 1.3.4.** *La différence de deux opérateurs projections orthogonales,*

$$P_{G_1} - P_{G_2} \tag{1.2}$$

*est un opérateur projection orthogonale si et seulement si* $G_2 \subset G_1$. *Dans ce cas* $P_{G_1} - P_{G_2}$ *est l'opérateur de projection orthogonale sur* $G_1 \ominus G_2$.

**Preuve.** Posons

$$Q = I - (P_{G_1} - P_{G_2})$$

$Q$ est un opérateur projection orthogonale si $P_{G_1} - P_{G_2}$ est une projection orthogonale.

Donc

$$Q = (I - P_{G_1}) + P_{G_2}$$

Il suit du théorème 1.3.2 que

$$(I - P_{G_1})P_{G_2} = 0$$

ou bien

$$P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_2} \tag{1.3}$$

si $g \in G_2$ alors

$$g = P_{G_2}g = P_{G_1}P_{G_2}g = P_{G_1}g$$

Donc $g \in G_1$. Puisque tout élément $g \in G_2$ appartient à $G_1$, on a $G_2 \subset G_1$. La condition (1.3) est nécessaire et suffisante pour que la différence (1.2) est un opérateur projection orthogonale. Il reste seulement de caractériser l'espace $G$ sur lequel l'opérateur (1.2) projecté. L'opérateur $Q$ projette orthogonalement sur

$$[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2$$

Donc, l'opérateur (1.2) projette sur

$$\mathcal{H} \ominus \{[\mathcal{H} \ominus G_1] \oplus G_2\} \tag{1.4}$$

c.à.d, sur le sous-espace des vecteurs orthogonaux à $G_2$ et $\mathcal{H} \ominus G_1$.
Puisque ce sous-espace est forme de tous les vecteurs de $G_1$ lesquels sont orthogonaux à $G_2$, il est le sous-espace

$$G_1 \ominus G_2 \tag{1.5}$$

■

### 1.3.2 Suite Monotone des Opérateurs Projections orthogonales

On prouve que la relation $G_2 \subset G_1$ est équivalente à l'inégalité

$$\|P_{G_2}f\| \leq \|P_{G_1}f\| \tag{1.6}$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$. L'inégalité (1.6) est évidemment équivalente à

$$< P_{G_2}f, f > \leq < P_{G_1}f, f >$$

ou

$$< (P_{G_2} - P_{G_1})f, f > \leq 0$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$. Les deux dernières inégalités sont généralement exprimées par

$$P_{G_2} \leq P_{G_1}$$

Ainsi, nous souhaitons prouver que la relation $G_2 \subset G_1$ est équivalente à la relation $P_{G_2} \leq P_{G_1}$, cela nous autorisera à introduire les suites monotones d'opérateurs projections orthogonale.

Soit $G_2 \subset G_1$. Alors
$$P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$$
Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{H}$,
$$P_{G_2} f = P_{G_2} P_{G_1} f$$
et
$$\|P_{G_2} f\| \leq \|P_{G_1} f\| \tag{1.7}$$
Inversement, supposant (1.7)est vrai pour tout $f \in \mathcal{H}$. Considérons
$$f = (I - P_{G_1})h$$
où $h$ est un élément arbitraire de $\mathcal{H}$. D'après (1.7) et
$$P_{G_1}(I - P_{G_1})h = 0$$
on obtient
$$P_{G_2}(I - P_{G_1})h = 0$$
Puisque cette équation est valable pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a
$$P_{G_2} = P_{G_2} P_{G_1}$$
Alors que $G_2 \subset G_1$.

**Théorème 1.3.5.** *Soient $(G_k), (k = 1, 2, 3, \cdots)$ des sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ Si $(P_{G_k})$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ est une suite infinie d'opérateurs projections orthogonales et si $P_{G_k} \leq P_{G_{k+1}}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$, alors, quand $k \to \infty$, $(P_{G_k})_k$ converges fortement vers $P$ un opérateur de projection orthogonale dans $\mathcal{H}$.*

**Preuve.** Pour $m < n$ la différence $P_{G_n} - P_{G_m}$ est un opérateur projection orthogonale. Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|P_{G_n} f - P_{G_m} f\|^2 &= \|(P_{G_n} - P_{G_m}) f\|^2 \\ &= < (P_{G_n} - P_{G_m}) f, f > \\ &= \|P_{G_n} f\|^2 - \|P_{G_m} f\|^2 \qquad (a1) \end{aligned}$$

Puisque, pour $f$ fixe, $\|P_{G_k} f\|^2$ croitre avec $k$ mais il est borné par $\|f\|^2$, il a une limite finie. Donc, le membre droite de $(a1)$ tend vers à zéro et la suite $(P_{G_n} f)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}$ au sens fort. Puisque $\mathcal{H}$ est complet, il existe une limite forte
$$f^* = \lim_{n \to \infty} P_{G_n} f$$

On définie l'opérateur $P$ par
$$f^* = Pf$$
$f \in \mathcal{H}$. L'opérateur $P$ est évidemment linéaire. D'autre part,

$$< P_{G_k} f, P_{G_k} g >=< P_{G_k} f, g >=< f, P_{G_k} g >$$

un passage à la limite donne

$$< Pf, Pg >=< Pf, g >=< f, Pg >$$

Par conséquent,
$$P = P^* = P^2$$
alors que $P$ est un opérateur projection orthogonale. ■

### 1.3.3 Projection Orthogonale extraite d'une Projection

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection ($P^2 = P$).
Nous cherchons la projection orthogonale $Q$ qui a la même image que $P$, c.à.d
$Q^2 = Q$, $Q^* = Q$, $PQ = Q$ et $QP = P$ Alors :

On prend : $D = PP^* + (I - P^*)(I - P) = I + (P^* - P)(P - P^*) \geq I$ d'où $D$ est inversible.
Ensuite :
$$(I - D)PP^* = (P - P^*)(PP^* - P^*PP^*) = (I - PP^*)PP^*$$
Et
$$PP^*(I - D) = (PP^*P - PP^*)(P - P^*) = (I - PP^*)PP^*$$
Alors :
$$DPP^* = PP^*D = (PP^*)^2$$
Si $Q = PP^*D^{-1}$ alors $Q^2 = PP^*D^{-1}PP^*D^{-1} = (PP^*)^2D^{-2} = PP^*D^{-1} = Q$
et $Q^* = Q$ alors $Q$ est une projection orthogonale.
Finalement

$$PQ = PPP^*D^{-1} = PP^*D^{-1} = Q$$

et

$$\begin{aligned}(QP - P)(P^*Q - P^*) &= QPP^*Q - QPP^* - PP^*Q + PP^* \\ &= QPP^* - QPP^* - PP^* + PP^* \\ &= 0\end{aligned}$$

tel que $QP = P$

Nous devons maintenant calculer $[I - (P - P^*)^2]^{-1}$. Nous allons utiliser une série de ***Neumann***, de sorte que :
$Q = \displaystyle\sum_{k\geq 0}(P - P^*)^{2k}PP^*$, à condition que la série converge.
Mais $(P - P^*)^{2j}PP^* = (I - D)^jPP^* = (I - PP^*)^jPP^*$, donc
$Q = \sum_{k\geq 0}(I - PP^*)^kPP^*$, en fait, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a aussi.

$Q = \sum_{k\geq 0}(I - aPP^*)^k aPP^*$ à condition que la série converge.

Soit $\mathrm{c}(P) = \inf_{u\perp N(P)} \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$ appelée la conorme (appelé aussi le module minimum réduit) de $P$.
il est facile de voire que la conorme d'une projection est toujours $\geq 1$ et que :

$$-\left[a\|P\|^2 - 1\right]^k aPP^* \leq (I - aPP^*)^k aPP^* \leq \left[1 - ac^2(P)\right]^k aPP^*$$

l'estimation la plus forte de la norme de la série est donnée par l'équation $a\|P\|^2 - 1 = 1 - ac^2(P)$ c.à.d. quand $a = \frac{2}{\|P\|^2 + c^2(P)}$. Dans ce cas, et plus généralement si $0 < a < \frac{2}{\|P\|^2}$, la série donc convergent.

**Proposition 1.3.1.** *Soit $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une projection. Soit la suite défini par :*

$$Q_0 = P \ ; \quad Q_{n+1} = (I - aPP^*)Q_n + aPP^* \tag{1.8}$$

*où $a = \frac{2}{\|P\|^2 + \mathrm{c}^2(P)}$.*

*Alors la suite $(Q_n)$ converge uniformément vers $Q$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Plus précisément :*

$$\|Q - Q_n\| \leq \frac{[\|P\|^2 - \mathrm{c}^2(P)]^{n+1}}{[\|P\|^2 + \mathrm{c}^2(P)]^{n+1}} \leq \left(\frac{\|P\|^2 - 1}{\|P\|^2 + 1}\right)^{n+1} \tag{1.9}$$

*En outre $Q = Q^*$, $PQ = Q$ et $QP = P$.*

**Preuve.** Il est facile de montrer que

$$\|(I - aPP^*)^k PR\| \leq \left[\frac{\|P\|^2 - c^2(P)}{\|P\|^2 + c^2(P)}\right]^k \|PR\| \ \text{ pour tout } R \in \ \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Alors, du fait que $Q_n = \sum_{k=0}^{n}(I - aPP^*)^k aPP^*$ et $Q - Q_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(I - aPP^*)^k aPP^*$ nous voyons que $Q = \lim_{n\to\infty} Q_n$ existe et que (1.9) est satisfaite. Un calcul simple montre que $Q^2 = Q$ et puisque $Q_n$ est symétrique alors $Q$ est symétrique, aussi $PQ_n = Q_n$ alors que $PQ = Q$.

Finalement, en prenant les limites dans (1.8), nous voyons que $PP^*Q = PP^*$ et donc que $\|QP - P\|^2 = \|(I - Q)PP^*(I - Q)\| = 0$ alors $QP = P$. ∎

**Remarque 1.3.1.** *En général $Q_n$ n'est pas une projection et si l'on remplace dans (1.8) $P$ par un opérateur borné $T$ avec une image fermée, alors $Q$ est la projection orthogonale sur l'image de $T$.*

# Chapitre 2

# L'inverse de ***Drazin*** d'une matrice

Ce chapiter est consacrè à l'étude des propriétés de l'inverse de ***Drazin*** pour les matrices. On va commencer par la décomposition d'une matrice qui est indisponsable pour étudier l'inverse de ***Moore-Penrose*** et l'inverse de ***Drazin***. Puis les $\{i, j, \ldots, k\}$-inverses avant de donnée des méthodes pour calculer l'inverse de ***Drazin***, et on va faire une comparaison entre l'inverse de ***Drazin*** et l'inverse de ***Moore-penrose*** dans la section 3.

## 2.1 Décompositions d'une matrice

**Réduction d'une matrice à sa forme échelonnée**

Une matrice est dite échelonnée, si le nombre de zéros précédant la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros.

Voici un exemple de matrice échelonnée (les $*$ désignent des coefficients arbitraires, les $\oplus$ des pivots, coefficients non nuls)

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un exemple de matrice échelonnée réduite ou matrice canonique en lignes (les pivots valent 1 et les autres coefficients dans les colonnes des pivots sont nuls)

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Définition 2.1.1.** ***(Réduction d'une matrice à sa forme échelonnée)***

*Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée réduite au moyen d'opérations élémentaires sur les lignes, à savoir :*

- *permuter deux lignes ;*
- *multiplier une ligne par une constante non nulle ;*
- *ajouter à une ligne le multiple d'une autre ligne.*

*La matrice échelonnée réduite ainsi obtenue est unique. Le nombre de lignes possédant un pivot non nul est égal au rang de la matrice initiale.*

**Exemple 2.1.1.** *Soit le système d'équations linéaires :*

$$\begin{cases} x-y+2z=5 \\ 3x+2y+z=10 \\ 2x-3y-2z=-10 \end{cases}$$

*On établit la matrice correspondante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 5 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 2 & -3 & -2 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

*On commence par la colonne* $1$*. Le pivot est le maximum en valeur absolue entre* $1, 3$ *et* $2$*, soit* $3$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 5 \\ (3) & 2 & 1 & \vdots & 10 \\ 2 & -3 & -2 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

*Comme ce pivot n'est pas nul, on divise la ligne où il se trouve (c'est-à-dire la ligne* $2$*) par le pivot :*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 5 \\ (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 2 & -3 & -2 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

*On échange les lignes* $1$ *et* $2$ *:*

$$\begin{pmatrix} (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & 5 \\ 2 & -3 & -2 & \vdots & -10 \end{pmatrix}$$

*On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot. Ligne* $2$*, on a* $A(2,1)=1$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - (1) \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

*Ligne* $3$*, on a* $A(3,1)=2$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & -10 \end{pmatrix} - (2) \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{50}{3} \end{pmatrix}$$

*On remplace les lignes* 2 *et* 3 *ainsi calculées :*

$$\begin{pmatrix} (1) & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \vdots & -\frac{50}{3} \end{pmatrix}$$

*On passe à la colonne* 2*. Le pivot est le maximum en valeur absolue entre* $-\frac{5}{3}$ *et* $-\frac{13}{3}$*, soit* $-\frac{13}{3}$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & \left(-\frac{13}{3}\right) & -\frac{8}{3} & \vdots & -\frac{50}{3} \end{pmatrix}$$

*Comme ce pivot n'est pas nul, on divise la ligne où il se trouve (c'est-à-dire la ligne* 3*) par le pivot :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \\ 0 & (1) & -\frac{8}{13} & \vdots & -\frac{50}{13} \end{pmatrix}$$

*On échange les lignes* 2 *et* 3 *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & -\frac{8}{13} & \vdots & -\frac{50}{13} \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \vdots & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

*On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot. Ligne* 1*, on a* $A(1,2) = \frac{2}{3}$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix} - (1) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \end{pmatrix}$$

*Ligne* 3*, on a* $A(3,2) = -\frac{5}{3}$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} - \left(-\frac{5}{3}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{35}{13} & \frac{105}{13} \end{pmatrix}$$

*On remplace les lignes* 1 *et* 3 *ainsi calculées :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & -\frac{8}{13} & \vdots & -\frac{50}{13} \\ 0 & 0 & \frac{35}{13} & \vdots & \frac{105}{13} \end{pmatrix}$$

*On passe à la colonne* 3*. Le pivot est* $\frac{35}{13}$ *:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & -\frac{8}{13} & \vdots & -\frac{50}{13} \\ 0 & 0 & \left(\frac{35}{13}\right) & \vdots & \frac{105}{13} \end{pmatrix}$$

*Comme ce pivot n'est pas nul, on divise la ligne où il se trouve (c'est-à-dire la ligne* 3*) par le pivot :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \vdots & \frac{10}{3} \\ 0 & (1) & -\frac{8}{13} & \vdots & -\frac{50}{13} \\ 0 & 0 & (1) & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

*Comme ce pivot est déjà ligne 3, on n'a pas besoin d'échanger de lignes. On analyse maintenant les lignes autres que celle du pivot. Ligne* 1*, on a :*
$A(1,3) = -\frac{1}{13}$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{13} & \frac{10}{13} \end{pmatrix} - \left(-\frac{1}{13}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Ligne* 2*, on a* $A(2,3) = \frac{8}{13}$*. On calcule*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{8}{13} & \frac{50}{13} \end{pmatrix} - \left(\frac{8}{13}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*On remplace les lignes* 1 *et* 2 *ainsi calculées :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

*Toutes les colonnes à gauche de la part verticale ont été traitées. Nous sommes en présence d'une matrice échelonnée réduite, avec la matrice identité d'un côté et la valeur des variables de l'autre. La solution du système d'équations est donc :*

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

### 2.1.1 Décomposition de rang maximal

**Théorème 2.1.1.** *Soit une matrice* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *de rang* $r$*, alors il existe deux matrices* $C \in \mathbb{C}^{m\times r}$ *et* $F \in \mathbb{C}^{r\times n}$ *de rang plein :*

$$rang(F) = r, \qquad rang(C) = r,$$

*telles que :*

$$A = CF$$

### Existance

Soit $C = [c_1 : c_2 : \ldots : c_r]$, une matrice formée par $r$ vecteurs linéairement indépendants de $A$. Les $n$ colonnes de $A$ sont donc des combinaisons linéaires uniques des vecteurs $c_1, \ldots c_r$. Chacune de ces combinasons linéaires formant une colonne de $F$.
Peut être précis , si $A = [a_1 : a_2 : \ldots : a_n]$ est une matrice de $(m \times n)$ et $a_{ij}$ comme la $j$-ième colonne, alors

$$a_{ij} = f_{1j}c_1 + f_{2j}c_2 + \ldots + f_{rj}c_r,$$

Où $f_{ij}$ sont les coefficients scalaires de $a_{ij}$ en termes de la base $c_1, c_2, \ldots, c_r$.
Cela implique que $A = CF$ où $f_{ij}$ est le $(i, j)$- ième éléments de $F$.

### Non-Unicité

Si $A = C_1F_1$ est la factorisation ou la décomposition de rang maximal prenant $C_2 = C_1R$ et $F_2 = R^{-1}F_1$ donne un autre factorisation de rang pour toute matrice inversible $R$ de dimentions compatibles.
Inversement, si $A = F_1G_1 = F_2G_2$ sont deux factorisation de rang de $A$, alors il existe une matrice inversible $R$ tel que $F_1 = F_2R$ et $G_1 = R^{-1}G_2$.

### Factorisation de rang à partir d'une forme échelonnée

En pratique, Nous pouvons constriure une factorisation de rang précifique comme suit :
Nous pouvons calculer $B$, la forme d'échelonnée de ligne reduite de $A$. Alors $C$ est obtenu par retirant la forme $A$ de toutes les colonnes non pivotantes, et $F$ par éliminant toutes les lignes zéro de $B$

**Exemple 2.1.2.** *Considérer la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

*$B$ est réduite de la forme échlonné . Alors $C$ est obtenu par enlever le troisième colonne, et $F$ en se débarrassant de la dernière ligne de zéro, donc*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*C'est simple de vérifier que*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = CF.$$

### 2.1.2 Décomposition de Jordan

La réduction de ***Jordan*** est la traduction matricielle de la réduction des endomorphismes introduite par ***Jordan***. Cette réduction est tellement employée, en particulier en analyse pour la résolution d'équations différentielles ou pour déterminer le terme général de certaines suites récurrentes, qu'on la nomme parfois « Jordanisation des endomorphismes ».

**Définition 2.1.2.** *On appelle bloc de* ***Jordan*** *une matrice carrée de taille $k$ (à coefficients dans le corps $K$) de la forme :*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

*Cette matrice est nilpotente si et seulement si $\lambda$ est nul.*

*Une matrice diagonale par blocs du type $J_\lambda$ est appelé matrice de* ***Jordan*** *de la forme :*

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & & \\ & J_{k_2}(2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

*où les scalaires $\lambda_i$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme considéré.*

**Remarque 2.1.1.**

•***1)*** *Pour tout blocs de* ***Jordan*** *$J_k(\lambda)$ associe à des vecteurs propres linéairement indépendant $u_1, u_2, \cdots, u_k$ alors :*

$f(u_1) = \lambda u_1, f(u_2) = u_1 + \lambda u_2, \cdots, f(u_k) = u_{k-1} + \lambda u_k$

*tel que $u_1$ est un vecteur propre et $u_2, u_3, \cdots, u_k$ des vecteurs principaux de $f$.*

**Exemple 2.1.3.** *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un isomorphie interne representant par une matrice tel que :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

*alors on recherche la formule de* ***Jordan*** *de $A$.*

*On a $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$*

*on a deux valeurs propres $\lambda_1 = 2 \quad (k_1 = 2)$ et $\lambda_2 = 1 \quad (k_2 = 1)$ .*

***Les vecteurs propres*** *:*

*1)Pour* $\lambda = 2 \Rightarrow (A - 2I_3)x = 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$V_2 = \{x(1, -2, 4)/x \in \mathbb{R}\}$ *alors* $u_1 = (1, -2, 4)$ .

*2) Pour* $\lambda = 1 \Rightarrow (A - I_3)x = 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$V_1 = \{x(1, 1, 1)/x \in \mathbb{R}\}$ *alors* $u_2 = (1, 1, 1)$ .
$f$ *n'est pas diagonalisable.*

*Ainsi, on a deux blocs de* ***Jordan*** *parce que :*
*on a deux vecteurs propres linéairements indépendants la premier de taille* 2 *et la deuxieme de taille* 1 *.*
*Donc on cherché le vecteur principale* $u_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$.
*Pour* $\lambda = 1$ *on a* $f(u_3) = u_2 + \lambda u_3$ *alors :*
$Au_3 = u_2 + u_3 \Rightarrow (A - I_3)u_3 = u_2.$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 1, \\ -\beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha - 5\beta + 3\gamma = 1. \end{cases}$$

*Par conséquence,* $u_3 = (\alpha, 1 + \alpha, 2 + \alpha)$ *pour* $(\alpha = 0)$ *donc* $u_3 = (0, 1, 2)$

*La matrice* $f$ *dans* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *et on écrit :*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$J_2 = 2 \quad (\ \textit{taille}\ 1),\ J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\ \textit{taille}\ 2).$

*La matrice de passage est* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### 2.1.3 Décomposition $QR$

En algèbre linéaire, la décomposition $QR$ (appelée aussi, décomposition QU) d'une matrice A est une décomposition de la forme

$$A = QR$$

où $Q$ est une matrice orthogonale ($QQ^* = I$), et $R$ une matrice triangulaire supérieure.
Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition :

- la méthode de ***Householder*** où $Q$ est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires ,
- la méthode de ***Givens*** où $Q$ est obtenue par produits successifs de matrices de rotation plane ,
- la méthode de ***Schmidt***.

Chacune d'entre elles a ses avantages et ses inconvénients. (La décomposition $QR$ n'étant pas unique, les différentes méthodes produiront des résultats différents).

- **Méthode de *Householder***

  Soit $x$ un vecteur colonne arbitraire de dimension $m$ et de longueur $|\alpha|$ (Pour des raisons de stabilité du calcul, $\alpha$ doit être du signe du premier élément de $x$ et la longueur étant la somme de tout les éléments de $x$). Toutefois, plusieurs versions semblent exister à propose de $\alpha$, ici, vous est présenté la version de l'article anglais. D'autres utilisent la norme $\| \|^2$ plutôt que la longueur.

  Soit $e_1$ le vecteur $(1, 0, ..., 0)^*$, et $\| \|$ la norme euclidienne, définissons

$$u = x - \alpha e_1$$

$$v = \frac{u}{\|u\|}$$

$$Q = I - 2vv^*$$

  $Q$ est la matrice de ***Householder*** ou matrice orthogonale élémentaire et $Qx = (\alpha, 0, \ldots, 0)^*$. Nous pouvons utiliser ces propriétés pour transformer une matrice $A$ de dimension $m*n$ en une matrice triangulaire supérieure. Tout d'abord, on multiplie $A$ par la matrice de ***Householder*** $Q_1$ en ayant pris le soin de choisir pour $x$ la première colonne de $A$.

  Le résultat est une matrice $QA$ avec des zéros dans la première colonne excepté du premier élément qui vaudra $\alpha$.

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \star & \ldots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  Ceci doit être réitéré pour $A'$ qui va être multiplié par $Q^2$($Q^2$ est plus petite que $Q^1$). Si toutefois, vous souhaitiez utiliser $Q^1 A$ plutôt que $A$, vous deviez remplir la matrice de ***Householder*** avec des 1 dans le coin supérieur gauche :

$$Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{pmatrix}$$

  Après $t$ itérations, $t = \min(m - 1, n)$,
  $R = Q_t \cdots Q_2 Q_1 A$ est une matrice triangulaire supérieure. Si $Q = Q_1^* Q_2^* \cdots Q_t^*$ alors $A = QR$ est la décomposition $QR$ de $A$. De plus, par construction les matrices $Q_k$ sont non seulement orthogonales mais aussi symétriques, donc $Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_t$.

**Exemple 2.1.4.** *Calculons la décomposition $QR$ de*
$A = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}$ *On choisit donc le vecteur* $\alpha_1 = (12, 6, -4)^*$. *On a donc* $\|\alpha_1\| = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-4)^2} = 14$. *Ce qui nous conduit à écrire* $\|\alpha_1\| e_1 = (14, 0, 0)^*$.
*Le calcul nous amène à* $u = 2(-1, 3, -2)^*$ *et* $v = \frac{1}{14}^{\frac{1}{2}}(-1, 3, -2)^*$. *La première matrice de **Householder** vaut*

$$\begin{aligned} Q_1 &= I - \frac{2}{14} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= I - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Observons que*

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -49 & -14 \\ 0 & 168 & -77 \end{pmatrix}$$

*Nous avons maintenant sous la diagonale uniquement des zéros dans la* $1^{re}$ *colonne. Pour réitérer le processus, on prend la sous matrice principale*

$$A' = M_{11} = \begin{pmatrix} -49 & -14 \\ 168 & -77 \end{pmatrix}$$

*Par la même méthode, on obtient*
$\alpha_2 = -\sqrt{49^2 + 168^2} = -175,\ u_2 = (126, 168)^*, v_2 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^*, Q_2' = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & \frac{-24}{25} \\ \frac{-24}{25} & \frac{-7}{25} \end{pmatrix}$.
*La* $2^{eme}$ *matrice de **Householder** est donc*

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{25} & \frac{-24}{25} \\ 0 & \frac{-24}{25} & \frac{-7}{25} \end{pmatrix}.$$

*Finalement, on obtient*

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & \frac{69}{175} & \frac{-58}{175} \\ \frac{3}{7} & \frac{-158}{175} & \frac{6}{175} \\ \frac{-2}{7} & \frac{-6}{35} & \frac{-33}{35} \end{pmatrix}$$

$$R = Q_1 Q_2 A = Q^* A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & -175 & 70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

*La matrice $Q$ est orthogonale et $R$ est triangulaire supérieure, par conséquent, on obtient la décomposition $A = QR$.*

### 2.1.4 Décomposition en valeurs singulières d'une matrice

La décomposition en valeurs singulières (Singular value décomposition en anglais, souvent abrégée **SVD**) est devenue depuis quelques des années un outil fondamental pour étudier un nombre croissant de problèmes linéaires. La décomposition a été découvert il y a plus de cent ans par ***Beltrami***, mais n'est devenu un outil numérique que depuis la fin des années 1960, quand ***G.Golub*** a montré comment on pouvait la calculer de façon stable et (raisonnablement) efficace.

Cette décomposition est une sorte de diagonalisation qui donne une carte d'identité complète de l'opérateur. Nous verrons en particulier qu'elle donne une solution simple (en théorie) du problème de moindres carrés.

Nous énonçons le théorème principal dans le cas des matrices réelles.

**Théorème 2.1.2.** *Soit $M$ une matrice $m \times n$ dont les coefficient appartiennent au corps $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors il existe une factorisation de la forme :*

$$M = U\Sigma V^*$$

*avec $U$ une matrice unitaire $m\times m$ sur $\mathbb{K}$, $\Sigma$ une matrice $m\times n$ dont les coefficients diagonaux sont des réels positifs ou nuls et tous les autres sont nuls, et $V^*$ est la matrice adjointe à $V$, matrice unitaire $n \times n$ sur $\mathbb{K}$.*
*On appelle cette factorisation la décomposition en valeurs singulières de $M$.*

- *La matrice $V$ contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés de $\mathbb{K}^n$, dits «d'entrée» ou «d'analyse»*
- *La matrice $U$ contient un ensemble de vecteurs de base orthonormés de $\mathbb{K}^m$, dit «de sortie»*
- *La matrice $\Sigma$ contient dans ses coefficients diagonaux les valeurs singulières de la matrice $M$.*

*Une convention courante est de ranger les valeurs $\Sigma_{i,i}$ par ordre décroissant. Alors, la matrice $\Sigma$ est déterminée de façon unique par $M$ (mais $U$ et $V$ ne le sont pas).*

**Existence**

Une valeur propre $\lambda$ d'une matrice est caractérisée par la relation $Mu = \lambda u$. Quand $M$ est hermitienne, une autre caractérisation différente est envisageable. Soit $M$ une matrice $n \times n$ symétrique réelle. On pose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^*Mx$. Cette fonction est continue et atteint son maximum en un certain vecteur $u$ quand elle est restreinte à la boule unité fermée $\{\|x\| \leq 1\}$. D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange, $u$ vérifie :

$$\nabla f = \nabla x^*Mx = \lambda.\nabla x^*x.$$

On montre facilement que la relation ci-dessus donne $Mu = \lambda u$. Ainsi, $\lambda$ est la plus grande valeur propre de $M$. Les mêmes opérations sur le complément orthogonal de $u$ donne la seconde plus grande valeur, et ainsi de suite. Le cas d'une matrice complexe hermitienne est similaire, avec $f(x) = x^*Mx$, fonction de $2n$ variables à valeurs réelles.

Les valeurs singulières sont similaires, en tant qu'elles peuvent être décrites de façon algébrique ou à partir de principes variationnels. En revanche, au contraire du cas des valeurs propres, l'herméticité et la symétrie de $M$ ne sont plus nécessaires.

### Valeurs singulières et vecteurs singuliers

La décomposition en valeurs singulière (SVD) a été prouvé en 1873-1874 par **E.Beltarmi** et **C.Jordan**, en 1889 **J.J.Sylvester** a prouvé cette décomposition pour les matrices carrées réelles, et en 1915 la SVD a été prouvé pour les matrices complexes carées par **Autonne**, ainsi que **Eckart** et **Young** ont la prouvée pour les matrices rectangulaire, en parallèle les valeurs singulière des operateurs integrales ont étudié par **Schmidt** et **Weyl**.[4]

L'idée de la décomposition en valeurs singulière (SVD) est similaire a la décomposition en valeurs propres (diagonalisation) mais fonctionne pour n'importe qu'elle matrice de taille $m \times n$ ; on factorise une matrice $A$ en produit de trois matrices ($A = U\Sigma V^*$).

**Définition 2.1.3.** *Une SVD ("singular value décomposition" en anglais) est factorisation $A = U\Sigma V^*$ où :*
- $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ *est une matrice unitaire.*
- $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *est une matrice unitaire.*
- $\Sigma \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *est une matrice diagonale et les éléments $(\delta_1, \delta_2, ......\delta_p)$ sont les éléments du diagonale telle que : $\delta_1 \geq \delta_2 \geq ......... \geq \delta_p \geq 0$ et $p = min(m, n)$.*

**Théorème 2.1.3.** *les valeurs singulières d'une matrice $A$ sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de $AA^*$ et $A^*A$.*

**Preuve :**

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*(U\Sigma V^*) = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^*$$

La matrice $A^*A$ est semblable a $\Sigma^*\Sigma$, ce qui implique qu'elles ont les même valeurs propres, les valeurs propres de $\Sigma^*\Sigma$ sont $\delta_1^2, \delta_2^2, ..........\delta_p^2$.

**Théorème 2.1.4.** *Les colonnes de $U$ sont les vecteurs propres orthogonaux de la matrice $AA^*$ et les colonnes de $V$ sont les vecteurs propres orthogonaux de le matrice $A^*A$ à unité près.*

**Preuve.** Les matrices $AA^*$ et $A^*A$ sont hermitiennes c.à.d qu'elles sont auto-adjointes où aquales a leurs adjointes. Les matrices hermitiennes sont diagonalisables, leurs valeurs propres sont réelles positives et leurs vecteurs propres forment un ensemble orthogonal. ■

**Théorème 2.1.5.** *Toute matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ possède une unique factorisation SVD.*
*Les valeurs singulieres $\delta_i$ sont déterminés de façon unique.*
*Si $A$ est carrée $(m = n)$ et les valeurs d'entré et de sortie $u_i$ et $v_j$ sont déterminer de façon unique.*

**Exemple 2.1.5.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*$A \in \mathbb{C}^{3\times 2}$ et $rang(A) = 2$, on cherchera donc deux valeurs singulières.*

• ***calcul de les valeurs singulières de A :*** *On a :* $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*donc*

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

*les valeurs propres sont* $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9 \Rightarrow \delta_1 = 3, \delta_2 = 2$

• ***calcul de U et V :****les vecteurs propres de* $AA^*$ *sont*

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*les vecteurs propres de* $A^*A$ *sont*

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*on choisit des* $\mu_i$ *de façon à avoir des signes positifs dans* $U$, $\mu_1 = 1$ *et* $\mu_2 = 1$ *on a alors :*

$A\mu_1' y_1 = \delta_1 x_1$ *donc* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu_1' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mu_1' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *d'où* $\mu_1' = 1$

*de même façon :* $A\mu_2' y_2 = \delta_2 x_2$ *on trouve* $\mu_2' = -1$

$\Rightarrow A = U\Sigma V^* \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

## 2.2 Les {i,j,...,k}-Inverses généralisées

Dans cette section on va étudier l'inverse de ***Moore-Penrose*** des matrices et leur propriété (car est un inverse généralisé le plus célèbre). Puis les $\{i, j, \ldots, k\}$ inverse et on etudier des méthodes pour calculer l'inverse de ***Drazin*** d'une matrice $A$ .puis que on va faire une comparaison entre l'inverse de ***Drazin*** et l'inverse de ***Moore-penrose*** dans la section 3.

### 2.2.1 L'inverse de *Moore-Penrose*

L'inverse de ***Moore-Penrose*** est une généralisation de la notation du l'inverse qui contient l'inverse de matrice non carrée ou une matrice de déterminant nul. Ces matrice ne sont pas inversibles au sens classique.

Cette méthode a fourmi la première fois par Aickm Moore en 1920 et Roger Penrose en 1955.

**Définition 2.2.1.** *[16] Soit $A$ une matrice en $\mathbb{C}^{m\times n}$. On dit que $A$ est un inverse de* ***Moore-Penrose*** *(ou* ***Pseudo-inverse****) si il existe une matrice $X$ en $\mathbb{C}^{n\times m}$ tel que :*

$$\begin{aligned} AXA &= A && (1) \\ XAX &= X && (2) \\ (AX)^* &= AX && (3) \\ (XA)^* &= XA && (4) \end{aligned}$$

*Ces quatre équations est appeleés les équations de* ***Moore-Penrose(MP)***
*où $A^*$ désigne la transposée (cas réel) ou l'adjointe (cas complexe) de $A$. Cet inverse est appelé l'inverse de* ***Moore-Penrose****, et on le note par $A^\dagger$.*

*Si $A$ est inversible, il est claire que $X = A^{-1}$ trivialement vérifie les quatre équations. Puisque l'inverse de* ***Moore-Penrose*** *est unique il suit que l'inverse de* ***Moore-Penrose*** *d'une matrice inversible est le même comme l'inverse ordinaire.*

**Définition 2.2.2.** *Pour toute $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, soit $A\{i, j, ..., k\}$ l'ensemble des matrices $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ qui satisfont les équations $(i), (j), ..., (k)$ parmi les équations $(1) - (4)$.*
*Une matrice $X \in A\{i, j, ..., k\}$ est appelée un $\{i, j, ..., k\}-$inverse de $A$, et est notée par $A^{(i,j,...,k)}$.*

**Théorème 2.2.1.** *(L'unicité)[16] si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ est un pseudo-inverse ($A\{1, 2, 3, 4\}$). Il doit être unique, c'est-à-dire, il peut y avoir seulement une solution simultanée aux quatre équations -**MP**.*

**Preuve.** On suppose que $X$ et $Y \in \mathbb{C}^{m\times n}$ les deux satisfaire les quatre equations-**MP** i.e $A\{1, 2, 3, 4\}$. Alors :

$$\begin{aligned} X &= X(AX)^* = XX^*A^* = X(AX)^*(AY)^* \\ &= XAY = (XA)^*(YA)^*Y = A^*Y^*Y \\ &= (YA)^*Y = Y \end{aligned}$$

■

**Expression de $A^\dagger$**

**Théorème 2.2.2.** *Soit $A = BC$ une décomposition de rang maximal, alors :*

$$A^\dagger = C^*(B^*AC^*)^{-1}B^*.$$

**Preuve.**

1. On doit d'abord montrer que $B^*AC^*$ est régulière. Or :
$$B^*AC^* = B^*BCC^* = (B^*B)(CC^*),$$
où $B^*B$ et $CC^*$ sont des matrices carrées de rang plein donc régulières.
$B^*AC^*$ est donc régulière et a pour inverse :
$$(B^*AC^*)^{-1} = (CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}$$
2. Posons $X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$, il est élémentaire de vérifier que $X$ satisfait aux 4 propriétés. L'unicité de la pseudo-inverse entraîne $X = A^\dagger$.

■

**Quelques propriétés de $A^\dagger$**

1. Si $A$ est régulière, alors $A^\dagger = A^{-1}$.
2. Si $A$ est de rang plein en colonnes :
$$A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*,$$
et on obtient $A^\dagger A = I_n$, mais $AA^\dagger \neq I_m$. Lorsque $A$ est de rang plein en lignes :
$$A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1},$$
et on obtient $AA^\dagger = I_m$ mais $A^\dagger A \neq I_n$.
3. Soit $BC$, une factorisation de rang maximal de $A$, alors :
$$A^\dagger = C^\dagger B^\dagger,$$
ce qui rappelle la relation d'inversion d'un produit de matrices régulières.
Pour obtenir la relation précédent donne :
$$\begin{aligned} F^\dagger &= (F^*F)^{-1}F^*, \\ G^\dagger &= G^*(GG^*)^{-1}, \end{aligned}$$
soit :
$$\begin{aligned} G^\dagger F^\dagger &= G^\dagger(GG^*)^{-1}(F^\dagger F)^{-1}F^*, \\ &= A^\dagger. \end{aligned}$$
Il faut noter qu'en général $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$.

**Exemple 2.2.1.** *Soit $\alpha = x^*y, \alpha \neq 0$, alors $\alpha^\dagger = \alpha^{-1} = \frac{1}{(x^*y)}$, mais :*
$$(x^*)^\dagger = x(x^*x)^{-1},$$
$$Y^\dagger = (y^*y)^{-1}y^*,$$
*soit :*
$$y^\dagger(x^*)^\dagger = \frac{y^*x}{\|x\|_2^2\|y\|_2^2},$$
*qui n'est égal à $\frac{1}{(x^*y)}$ que si $y$ et $x$ sont colinéaires.*

*De plus, si $P$ et $Q$ sont deux matrices unitaires alors :*
$$(PAQ)^\dagger = Q^{-1}A^\dagger P^{-1} = Q^*A^\dagger P^*.$$
*En effet, $BC$ est une décomposition de rang maximal de $A$, alors $\overline{BC}$ où $\overline{B} = PB$ et $\overline{C} = CQ$ est une décomposition de rang maximal de $PAQ$.*
*Donc $(PAQ)^\dagger = \overline{C}^\dagger\overline{B}^\dagger$, avec :*
$$\overline{C}^\dagger = \overline{C}^*(\overline{CC}^*)^{-1} = Q^*C^*(CQQ^*C^*)^{-1} = Q^{-1}C^\dagger,$$
$$\overline{B}^\dagger = (\overline{B}^*\overline{B})^{-1}\overline{B}^* = (B^*P^*PF)^{-1}F^*P^* = F^\dagger P^{-1}.$$

**Remarque 2.2.1.** *Si $P$ et $Q$ sont seulement régulières alors :*

$$(PAQ)^{\dagger} \neq Q^{-1}A^{\dagger}P^{-1}.$$

*car d'après ce qui précède on a seulement :*

$$(PAQ)^{\dagger} = Q^{*}C^{*}(CQQ^{*}C^{*})^{-1}(BP^{*}PF)^{-1}BP^{*}.$$

4. *Soit $A_{m\times n} = BPC$, où rang $(B_{m\times r}) = rang(C_{r\times n}) = r = rang(A)$ et $P(r\times r)$ régulière alors :*

$$A^{\dagger} = C^{\dagger}P^{-1}B^{\dagger}$$

*En effet, $\overline{B}C$ où $\overline{B} = BP$ est une factorisation de rang maximal de $A$ donc :*

$$\begin{aligned} A^{\dagger} &= C^{\dagger}\overline{F}^{\dagger} = C^{\dagger}(\overline{B}^{*}\overline{B})^{-1}\overline{B}^{*} \\ &= C^{\dagger}(P^{*}B^{*}BP)^{-1}P^{*}B^{*} = C^{\dagger}P^{-1}B^{\dagger}. \end{aligned}$$

*Dans le cas particulier où $r = 1$, on peut écrire :*

$$\begin{aligned} A^{\dagger} &= C^{\dagger}B^{\dagger} = C^{*}(CC^{*})^{-1}(B^{*}B)^{-1}B^{*}, \\ &= \frac{C^{*}B^{*}}{(CC^{*})(B^{*}B)} = \frac{C^{*}B^{*}}{CA^{*}B} = \frac{C^{*}B^{*}}{B^{*}AC^{*}}, \end{aligned}$$

*Soit :*

$$A^{\dagger} = \frac{A^{*}}{B^{*}AC^{*}} = \frac{A^{*}}{CA^{*}B}.$$

*On a également les propriétés généralisant celles de l'inversion :*

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A, \qquad (A^{\dagger})^{*} = (A^{*})^{\dagger}.$$

*En effet, on a $A^{\dagger} = C^{\dagger}B^{\dagger}$ et $A^{*} = C^{*}B^{*}$, qui sont deux factorisations de rang maximal et l'application de la formule explicite donne :*

$$\begin{aligned} (A^{\dagger})^{\dagger} &= (B^{\dagger})^{*}[B^{\dagger}(B^{\dagger})^{*}]^{-1}[(C^{\dagger})^{-1}C^{\dagger}]^{-1}(C^{\dagger})^{*}, \\ &= B(B^{*}B)^{-1}[(B^{*}B)^{-1}B^{*}B(B^{*}B)^{-1}]^{-1}[(CC^{*})^{-1}CC^{*}(CC^{*})^{-1}]^{-1}(CC^{*})^{-1}C, \\ &= BC = A \\ (A^{*})^{\dagger} &= B(B^{*}B)^{-1}(CC^{*})^{-1}C = (A^{\dagger})^{*}. \end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2.** *Ce résultat généralise certaines formules que l'on a déjà rencontrées :*
- *Si $A$ est de rang plein en colonnes alors $(A^{*}A)^{\dagger} = (A^{*}A)^{-1}$;*
- *Si $A$ est de rang plein en lignes alors $(AA^{*})^{\dagger} = (AA^{*})^{-1}$;*
- *Si $A$ est inversible alors $A^{\dagger} = A^{-1} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}$,*

### Matrices EP

[17] Les identités $A^{*}A = AA^{*}$ pour les matrices normales et $A^{-1}A = AA^{-1}$ pour les matrices inversibles sont parfois utiles. Cela suggère qu'il pourrait être utile de savoir quand $A^{\dagger}A = AA^{\dagger}$.

**Définition 2.2.3.** *On suppose que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et rang$(A) = r$. Si $A^\dagger A = AA^\dagger$, alors $A$ s'appelle un* ***EP****, ou simplement une matrice* ***EP****.*

Les faits de base sur les matrices **EP** sont énoncés dans le prochain théorème.

**Théorème 2.2.3.** *On suppose que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ensuite, les éléments suivants sont équivalents.*

***(i)*** *$A$ est un* ***EP***

***(ii)*** $R(A) = R(A^*)$

***(iii)*** $\mathbb{C}^n = R(A) \oplus N(A)$

***(iv)*** *Il existe une matrice unitaire $U$ et un matrice inversible $A_1 \in \mathbb{C}^{r\times r}, r =$ rang$(A)$, tel que :*

$$A = U \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*. \qquad (1)$$

**Preuve.** $(i), (ii)$ et $(iii)$ sont clairement équivalents. $(iv)$ implique $(iii)$ est évident. Pour voir cela $(iii)$ implique $(iv)$ soit $\beta$ est une base orthonormée pour $\mathbb{C}^n$ consistant de la première base orthonormée pour $R(A)$ et puis la base orthonormée pour $N(A)$. $U^*$ est alors la transformation de coordonnées à partir de coordonnées standard à $\beta$-coordonnées. ∎

Si $A$ est un **EP** et a la factorisation donnée par (1), alors que $U, U^*$ sont unitaires

$$A^\dagger = U \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^*. \qquad (2)$$

## 2.3 L'inverse de *Drazin*

**Indice d'une matrice :**

Dans ce qui suit , on disignons que $A$ une matrice carée tel que : $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $k$ un entier non négatife.

**Définition 2.3.1.** *On appele indice d'un matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$(on note ind $(A)$) tel que :*
*$\mathbb{C}^n = R(A^k) \oplus N(A^k)$ le plus petit entier positif $k$ tel que :*
*rang$(A^{k+1})=$ rang$(A^k)$,(rang de $A$ c'est le nombre des vecteurs linéaires indépendantes soit les colonnes où lignes).*
*Si $A$ est inversible on a, ind$(A) = 0$*

**Exemple 2.3.1.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

*rang de $A$ est :*

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \to \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \to \alpha = \beta = 0,$$

*les deux vecteurs sont linéairement indépendantes alors :*

*rang de* $(A) = 2$.
*Donc :*
*rang*$(A^2)$ = *rang*$(A) \rightarrow$ *donc ind*$(A) = 1$.

**Définition 2.3.2.** *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ d'indice $k(ind(A) = k)$ on dit que la matrice $A^D$ d'ordre $n$ est l'inverse de **Drazin** de $A$ si les conditions suivantes sont verifiées :*

$$A^k A^D A = A^k. \qquad (1^k)$$

$$A^D A A^D = A^D, \qquad (2)$$

$$A A^D = A^D A, \qquad (5)$$

*Et pour $X = A^D$ alors l'inverse de **Drazin** est un $\{1^k, 2, 5\}$-inverse.*

**Théorème 2.3.1.** *Pour toute matrice carrée $A$, il existe une matrice unique $X$ telle que :*
(1) $A^k = A^{k+1}X$ *pour $k$ un entier positif.*
(2) $X^2 A = X$
(3) $AX = XA$

**Preuve.** Si $A = 0$ est la matrice nulle, alors $A$ et $X = 0$ satisfont (1),(2) et (3).
Supposons $A \neq 0$ est matrice de $n \times n$. Alors il existe scalaires $d_1, ..., d_t$, pas nulles, tel que :

$$\sum_{i=1}^{t} d_i A^i = 0,$$

où $t \leq n^2 + 1$ depuis le $A^i$ peut être considérée comme vecteurs avec les éléments $n^2$, soit $d_k$ le premier coefficient non nul. On peut ecrire
(4) $A^k = A^{k+1}U$ où

$$U = -\frac{1}{d_k}\left(\sum_{i=1+k}^{t} d_i A^{i-k-1}\right)$$

puisque $U$ est un polynôme de $A$, $U$ et $A$ commute. Aussi, la multiplication de deux côtés de (4) par $AU$ donne

$$A^k = A^{k+2}U^2 = A^{k+3}U^3 = .....,$$

Et ainsi
(5) $A^k = A^{k+m}U^m$
Pour tout $m \geq 1$. Soit $X = A^k U^{k+1}$. Ensuite, pour ce choix de $X$,

$$A^{k+1}X = A^{2k+1}U^{k+1} = A^k$$

et

$$X^2 A = A^k U^{k+1} A^k U^{k+1} A = (A^{2k+1}U^{k+1})U^{k+1} = A^k U^{k+1} = X,$$

Par l'utilisation de (5) . Aussi, $X$ et $A$ se déplacer depuis $U$ et $A$ est change.
Ainsi, les conditions $(1), (2)$ et $(3)$ sont valables pour cette $X$.
Pour monter que $X$ est unique, supposons que $Y$ est également un solution de $(1), (2)$ et $(3)$, où $X$ correspond à un exposant $k_1$ et $Y$ correspond à un exposant $k_2$ dans (1).

Soit $\widehat{y} =$ maximale $(k_1, k_2)$. Ensuite, il suit l'utilisation $(1),(2),(3)$ et $(5)$ où :

$$X = X^2A = X^3A^2 = \cdots = X^{\widehat{y}+1}A^{\widehat{y}} = X^{\widehat{y}+1}A^{\widehat{y}+1}Y$$
$$= XAY = \cdots = XA^{\widehat{y}+1}Y^{\widehat{y}+1} = A^{\widehat{y}}Y^{\widehat{y}+1}$$
$$= \cdots = AY^2 = Y^2A = Y$$

Ce qui nous donne l'unicité. ■

Nous allons appeler la matrice unique de $X$ dans le théorème (2.3.1) l'inverse de ***Drazin*** de $A$ et on écrire $X = A^D$, on appele aussi le plus petit entier $k$ l'indice de $A$.

Ce $A^D$ est une inverse généralisée de $A$ est appartiente par notant que (1) est vérifier avec $k = 1$ lorsque $X = A^{-1}$ existe et également (2) et (3). Observez, par ailleurs, que dans générale (1) peut être réécrit comme :

$$(6) \qquad\qquad A^kXA = A^k$$

et (2) devient $XAX = X$, par utilisation de $(C)$, de sorte que la définition des équations dans la théorème (2.3.1) peuvent être considérées comme une alternative à ceux utilisées pour $A^\dagger$ dans laquelle $AXA = A$ est remplacée par $(6),(2)$ rest inchangée, et

$$(1^*)\cdots(AX)^H = AX,$$
$$(2^*)\cdots(XA)^H = XA$$

sont remplacée par la condition de (3) que $A$ et $X$ sont changés.

Comme on le verra à la suite de la preuve du lemme (2.3.1) les factorisations de rang plein de $A$ peuvent être utilisés efficacement dans la construction de $A^D$,

**Proposition 2.3.1.** *Si $A^D$ est l'inverse de **Drazin** de la matrice $A$ on a les égalités suivantes qui sont équivalentes :*

**(a)** $A^kA^DA = A^k$

**(b)** $AA^DA^k = A^k$

**(c)** $A^{k+1}A^D = A^k$

**(d)** $A^DA^{k+1} = A^k$

**Preuve.** $(a) \Rightarrow (b)$

$$A^k = A^kA^DA = A.A.A...AA^DA$$

$$\underbrace{AAA...}_{k-1}A^DA^2 = \underbrace{AAA..}_{k-2}..A^DA^3$$

$$= ... = AAA^DA^{k-1} = AA^DA^k.$$

$(b) \Rightarrow (a)$ Évident.

$(b) \Rightarrow (c)$ (On a $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (d)$)

$$AA^DA^k = A^k = A^k \Rightarrow A^k = A^kA^DA$$
$$= A^k(AA^D) = A^{k+1}A^D.$$

$(C) \Rightarrow (d)$

$$A^k = A^{k+1}A^D = A^kAA^D = A^kA^DA = A^{k-1}AA^DA$$
$$= A^{k-1}A^DA^2 = ... = A^DA^{k+1}.$$

■

**Proposition 2.3.2.** *[2] Pour $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $A^D$ est un inverse de **Drazin**.*

**(a)** $(A^*)^D = (A^D)^*$

**(b)** $(A^t)^D = (A^D)^t$ *si* $t = 1, 2, \ldots$

**(c)** *Si $A$ est indice $k$ , $A^l$ est indice* 1

**(d)** $(A^D)^D = A$ *si et seulement si ind*$(A) = 1$

**(e)** $((A^D)^D)^D = A^D$.

**Théorème 2.3.2.** *[17] Pour $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, AA^DA = A$ si et seulement si ind$(A) \leq 1$.*

**Preuve.** Si ind$(A) = 0$, alors $A^D = A^{-1}$ et $AA^DA = A$. On suppose que ind$(A) \geq 1$. Ensuite, par rapport à $(1), (2)$ nous avons $AA^DA = A$ si et seulement si $0 = N$.
Mais $0 = N$ si et seulement si ind$(A) = 1$. ■

Le cas spécial lorsque ind$(A) \leq 1$ Donne à ce qu'on appelle le ***Groupe*** inverse.
Notez que dans ce cas, $(1^k)$ peut être réécrit comme $AA^DA = A$.

**Définition 2.3.3.** *[17] Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est telle que ind$(A) \leq 1$, alors l'inverse de **Drazin** de $A$ s'appelle l'inverse du **Groupe** de $A$ et noté par $A^\sharp$. Quand il existe, $A^\sharp$ est caractérisé comme la matrice unique satisfaisant les trois équations :*

- $AA^\sharp A = A$ (1)
- $A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp$ (2)
- $AA^\sharp = A^\sharp A$ (5).

**Théorème 2.3.3.** *[17] Si $A, B \in C^{n\times n}$ tels que $AB = BA$, alors :*

***(i)*** $(AB)^D = B^DA^D = A^DB^D$,

***(ii)*** $A^DB = BA^D$ *et* $AB^D = B^DA$.
*On générale,*

***(iii)*** $(AB)^D = A\left[(BA)^2\right]^D B$
*si* $AB \neq BA$.

**Preuve.** Supposons d'abord que $AB = BA$. Alors $A^D$ est un polynôme en $A$ et $B^D$ est un polynôme en $B$. $(i)$ et $(ii)$ maintenant sont facilement prouvés.

Supposons maintenant que $A$ et $B$ ne se déplacent pas nécessairement. pour prouver $(iii)$, soit $Y = A\left[(BA)^2\right]^D B$.

Clairement $YABY = Y$ et $ABY = YAB = A(BA)^D B$. Soit $k = \max\{\, ind(AB),\ ind(BA)\}$. Alors $(AB)^{k+2}Y = (AB)^{k+2}A(BA)^{2^D}B = (AB)^{k+1}ABA(BA)^{2^D}B = (AB)^{k+1}A(BA)^D B$ $= A(BA)^{k+1}(BA)^D B = A(BA)^k B = (AB)^{k+1}$. Par conséquent, $Y = (AB)^D$. ■

**Proposition 2.3.3.** *$A^D$ est un inverse de $A$, $ind(A) = k$ alors*

$$A^k(A^D)^{k+1} = A^D$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} A^k(A^D)^{k+1} &= A^k(A^D)^k A^D = (AA^D)^k A^D \\ &= AA^D A^D \\ &= A^D A A^D = A^D. \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.3.4.** *[17] Pour $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A^D = A^\dagger$ si et seulement si $A$ est un* ***EP*** *matrice.*

**Preuve.** Si $A$ est un **EP**, alors $AA^\dagger = A^\sharp = A^D$. Depuis $A^\dagger$ est toujours un $(1,2)$- inverse pour $A$, Il s'ensuit que $A^\dagger = A^\sharp = A^D$. Inversement, si $A^\dagger = A^D$, alors $AA^\dagger = AA^D = A^D A = A^\dagger A$ pour que $A$ doit être **EP**. ■

**Lemme 2.3.1.** *On a $B, C \in \mathbb{C}^{r\times r}$ pour toute factorisation*

$$A = BC, A^D = B[(CB)^D]^2 C.$$

**Preuve.** On remarque que pour toute matrice carrée $A$ et $k$ entier positif, $m$ et $n$, nous avons $(A^D)^m A^n = (A^D)^{m-n}$ si $m > n$ et $A^{m+n}(A^D)^n = A^m$ si $m \geq k$ et $k$ est l'indice de $A$.

Soit $k$ le plus grand de l'indice de $BC$ et de l'indice de $CB$.
Puis

$$\begin{aligned} A^D &= (BC)^D = (BC)^{k+1}\left[(BC)^D\right]^{k+2} = B(CB)^k C\left[(BC)^D\right]^{k+2} \\ &= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}(CB)^{2k+2}C\left[(BC)^D\right]^{k+2} \\ &= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}C(BC)^{2k+2}\left[(BC)^D\right]^{k+2} \\ &= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}C(BC)^k \\ &= B\left[(CB)^D\right]^{k+2}(CB)^k C \\ &= B\left[(CB)^D\right]^2 C. \end{aligned}$$

■

Supposons maintenant que $A = B_1C_1$ est une factorisation de rang plein où rang$(A) = r_1$. On trouve la matrice $C_1B_1$ de $r_1$ dans $r_1$, alors soit $C_1B_1$ est non singulier, ou $C_1B_1 = 0$, ou le rang $(C_1B_1) = r_2$ où $0 < r_2 < r_1$.

Dans le premier cas, avec $C_1B_1$ inversible, $(C_1B_1)^D = (C_1B_1)^{-1}$ pour que

$$A^D = B_1(C_1B_1)^{-2}C_1,$$

par le lemme (2.3.1), où

$$(C_1B_1)^{-2} = \left[(C_1B_1)^{-1}\right]^2.$$

D'autre part, si $C_1B_1 = 0$ alors $(C_1B_1)^D = 0$ et ainsi $A^D = 0$ par autre utilisant de lemme (2.3.1).

Enfin, si rang $(C_1B_1) = r_2, 0 < r_2 < r_1$ alors pour tout factorisation de rang $C_1B_1 = B_2C_2$, nous avons

$$(C_1B_1)^D = B_2\left[(C_2B_2)^D\right]^2C_2$$

Pour que $A^D$ sur le lemme (2.3.1) devient :

$$A^D = B_1B_1\left[(C_2B_2)^D\right]^3C_2C_1.$$

le même argument s'applique maintenant à $C_2B_2$ c.à.d, soit $C_2B_2$ est non singulière et :

$$\left[(C_2B_2)^D\right]^3 = (C_2B_2)^{-3},$$

où $C_2B_2 = 0$ et ainsi $A^D = 0$, où le rang $(C_1B_1) = r_3$ où $0 < r_3 < r_2$ et $C_2B_2 = B_3C_3$ est une factorisation de rang plein à la quelle à le lemme (2.3.1).
Pour suive dans cette manière avec

$$rang(B_iC_i) \geq rang(C_iB_i) = rang(B_{i+1}C_{i+1}), i = 1, 2, \cdots,$$

alors soit $B_mC_m = 0$ pour un indice $m$, et ainsi de $A^D = 0$, ou
rang$(B_mC_m)$ = rang$(C_mB_m) > 0$ pour un indice $m$, dans ce cas,

$$(B_mC_m)^D = B_m(C_mB_m)^{-2}C_m.$$

Et ainsi

$$A^D = B_1B_2\cdots B_m(C_mB_m)^{-m-1}C_mC_{m-1}\cdots C_1 \tag{7}$$

dans le lemme (2.3.1). On observer, par ailleurs, que $A = B_1C_1$,

$$A_2 = B_1C_1B_1C_1 = B_1B_2C_2C_1\cdots, A^m = B_1B_2\cdots B_mC_mC_{m-1}\cdots C_1$$

et

$$A^{m+1} = B_1B_2\cdots B_m(C_mB_m)C_mC_{m-1}\cdots C_1 \tag{8}$$

nous avons $A^m = A^{m+1} = 0$, où $A^D$ former dans (7), chaque $B_i$ possède un rang plein de colonne et chaque $C_i$ possède un rang plein de ligne,

$$B_{m-1} + \cdots B_1 + A^mC_1 + C_{m-1} + = B_mC_m$$

et

$$B_m + \cdots B_1 + A^{m+1}C_1 + \cdots C_m + = C_m B_m.$$

Par conséquent, dans les deux cas, qui possède $\text{rang}(A^m) = \text{rang}(A^{m+1})$.
En autre, il suit dans les deux cas que (1) est valable pour $k = m$ et ne tient pas pour tout $k < m$.

C.à.d, $K$ dans (1) est la plus petite integer positif tel que $A^k$ et $A^{k+1}$ possède le même rang.

**Exemple 2.3.2.** *Si $A$ est un matrice singulier*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

*On écrit comme la factorisation de rang plein*

$$A = B_1C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*alors*

$$C_1B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

*est un matrice non singulier, alors $A$ possède un indice , et*

$$A^D = B_1(C_1B_1)^{-2}C_1 = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 6 & -26 & 30 \\ 3 & 35 & -33 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour le cas spécial des matrices avec un indice nous avons :
(9) $\quad AA^DA = A, A^DAA^D = A^D, AA^D = A^DA,$
pour que
(10) $\quad (A^D)^D = A$
Par la dualité dans les rôles de $A$ et $A^D$. Inversement, si (10) tient, puis les premières et dernières relations dans (9) sont définies dans les relations (2) et (3) est appliqué à $(A^D)^D$ et $A^D$, et la deuxième relation dans (9) est simplement (2) pour $A^D$ et $A$. par conséquent, (10) détient si et seulement si A possède un indice.

Dans ce cas particulier, l'inverse de ***Drazin*** de $A$ est un inverse du ***groupe*** de $A$ et il en résulte du lemme (2.3.1) que pour toute factorisation de rang plein $A = BC$,
$A^\sharp = B(CB)^{-2}C$

### Une extension aux matrices rectangulaires

L'inverse de ***Drazin*** d'une matrice $A$, tel que est défini dans la théorème (2.3.1), est existe seulement si $A$ est une matrice carré, et la question évidente est de savoir comment cette définition peut être étendue à des matrices rectangulaires.

Une solution approchée de ce problème est d'observer que, si $B$ est une matrice de $m \times n$ avec $m > n$, on dire alors $B$ peut être augmentée par $m - n$ des colonnes nulles pour former une matrice carrée $A$.

Maintenant formant $A^D$, on pourrait alors prendre les colonnes de $A^D$ qui correspondent à l'emplacements des colonnes de $B$ en $A$ comme une définition de "l'inverse de ***Drazin***" de $B$.

Comme on le montre dans l'exemple suivant, cependant, la difficulté de cette approche est qu'il existe des $\begin{pmatrix} m \\ m-n \end{pmatrix}$ comme matrices $A$, obtenues en considérant tous les dispositions possibles des $n$ colonnes de $B$ (prises sans permutations) et les $m - n$ colonnes nulles, et que $A^D$ peut être différent dans chaque cas.

**Exemple 2.3.3.**

*Si* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *et*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

*puis*

$$(A_1)^D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}, (A_2)^D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (A_3)^D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

*sont obtenues en appliquant le lemme (2.3.1) pour les matrices* $A_i = BC_i$ *où*

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*on observe dans ce exemple que les colonnes non nulles de chaque matrice* $(A_i)^D$ *correspondant au produit* $B\left[(C_iB)^D\right]^2$.

*On conséquence, en utilisant les colonnes non nulles de* $(A_i)^D$ *pour définir "l'inverse de* ***Drazin****" de* $B$ *implique que la matrice résultante est une fonction de* $C_i$.

*Que ces matrices sont déterminées de manière unique par un ensemble d'équations définissant et des cas spéciaux d'une classe d'inverse généralisées qui peuvent contruites pour tout matrice* $B$.

L'inverse de ***Drazin*** a une représentation simple en termes de la forme de ***Jordan*** :

**Théorème 2.3.5.** *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ayant la forme de* ***Jordan***

$$A = XJX^{-1} = X \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} X^{-1} \tag{2.1}$$

*où $J_0$ et $J_1$ sont des blocs de $J$, $J_0$ correspond aux valeurs propres nulles de $A$ et $J_1$ correspond aux valeurs propres non nulles de $A$. Alors*

$$A^D = X \begin{bmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \tag{2.2}$$

**Preuve.** Soit $A$ une matrice singulière d'indice $k$ ( c.à.d, le plus grand bloc dans la sous-matrice $J_0$ est $k \times k$ ). Alors la matrice donnée par (2.2) est un $\{1^k, 2, 5\}-$inverse de $A$.

$\square$

**Exemple 2.3.4.** *La matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

*a la forme de* ***Jordan***

$$A = X \begin{bmatrix} J_1(1) & & \\ & J_2(2) & \\ & & J_2(0) \end{bmatrix} X^{-1} = X \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1}$$

*où*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -2 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ -1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2 \\ 2 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 2 & 0 \\ 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 2 & \vdots & -2 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*L'inverse de* ***Drazin*** $A^D$ *est, d'après le théorème 2.3.5,*

$$
\begin{aligned}
A^D &= X \begin{bmatrix} (J_1(1))^{-1} & & \\ & (J_2(2))^{-1} & \\ & & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \\
&= X \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & & \\ & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix} X^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{4} & 4 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

# Chapitre 3

# L'inverse de *Drazin* des opérateurs linéaires

Dans ce chapitre notre objectif est d'étudier l'inverse généralisé de ***Drazin*** des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert. La première section on va etudier des notions de théorie spectrale des opérateurs linéaires. La deuxième section est une brève introduction à l'inversion généralisée des opérateurs linéaires où on a commencé par la définition de ***Tseng*** [21].
La troisième et la quatrième section on va etudier l'inverse de ***Drazin*** des opérateurs linéaires dans le cas bornés et le cas fermés sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ ,et nous étudions certaines propriétés de base de $T^D$ .

## 3.1 Théorie spectrale des opérateurs linéaires

### 3.1.1 Inverse d'un opérateur

**Définition 3.1.1.** *Soit $T$ un opérateur linéaire de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$.*
*L'opérateur $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ est dit opérateur inverse à droite de $T$ si $TS = I_{\mathcal{H}_2}$.*
*L'opérateur $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ est dit opérateur inverse à gauche de $T$ si $ST = I_{\mathcal{H}_1}$.*
*Enfin on dit que $S$ est inverse de $T$ s'il est inverse à droite et à gauche.*
*Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, espace de Hilbert alors $T^{-1}$ est continue (donc $T$ est inversible).*
*On écrit $S = T^{-1}$ et dit l'opérateur inverse de $T$.*

**Exemple 3.1.1.** *Pour les opérateurs de translation $S_d$ et $S_g$ (Shift à droite et Shift à gauche)*
*$S_dS_g(x) = S_d(x_2, x_3, \cdots) = (0, x_2, x_3, \cdots) \neq x$.*
*donc $S_dS_g \neq I$ et $S_d$ n'est pas inverse à gauche de $S_d$*
*malgré $S_dS_g(x) = S_g(0, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, x_3, 0, \cdots) = x$ donc $S_d$ est inverse à droite de $S_g$*

**Théorème 3.1.1.** *Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert est $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $\|A\| \leq 1$, Alors $(I - A)$ est inversible et son inverse est $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.*

**Preuve.** Montrons que la série $S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge (elle définie un opératur).

On a

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}, (\|A\| < 1)$$

.

Rappelons le critère de Weierstrass qui affirme qu'un espace normé est de Banach si et seulement si, toute série absolument convergente est convergente.

D'aprés ce critère, puisque $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est absolument convergente et comme $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est de Banach alors $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente. Ainsi $S$ est bien définie comme opérateur linéaire.

Soit $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} A^k$, on a $(I - A)S_n = I - A^{n+1}$.
$((I - A)(I + A + A^2 + \ldots + A^n) = I - A + A - A^2 + A^2 - \ldots - A^{n+1})$

et $S_n(I - A) = I - A^{n+1}$.

Comme $S_n \to S$ quand $n \to +\infty$ alors

$$(I - A)S = I \quad et \quad S(I - A) = I$$

d'ou $S = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ de plus

$$\|S\| = \|(I - A)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

donc $S$ est borné. ∎

### 3.1.2 Spectre des opérateurs bornés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans lui même, muni de la norme $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{H}}$.
L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach unifère ( possède un élément $e$ tel que $\|e\| = 1$).

**Définition 3.1.2.** *(**Ensemble résolvant, résolvante**).*
*Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de $A$ si $T - \lambda I$ a un inverse borné (c.à.d. $T - \lambda I$ est une bijection de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$).*
*L'ensemble résolvant de $T$ est noté $\rho(T)$. L'opérateur $(T - \lambda I)^{-1}$ est appelé la résolvante de $T$ en $\lambda$ et noté $R_\lambda(T)$.*

**Définition 3.1.3.** *(**Spectre**).*
*Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on appelle spectre de $T$ et on note $\sigma(T)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$ (L'ensemble résolvant de $T$). Le spectre de $T$ est donc l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ n'est pas inversible dans $\mathcal{H}$. Alors en peut trouver trois types de spectres distincts.*

*1) **Le spectre ponctuel** de $T$, noté $\sigma_p(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de $T$, il est défini comme suit : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \ N(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$, c.à.d. $T - \lambda I$ n'est pas injectif alors $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \ Tx = \lambda x \ \ x \in \mathcal{H}, \ x \neq 0\}$.*

*2) **Le spectre continu** de $T$, noté $\sigma_c(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans $\mathcal{H}$, c.à.d.*

$$N(T - \lambda I) = \{0\}, \quad R(T - \lambda I) \neq \mathcal{H}, \quad \overline{R(T - \lambda I)} = \mathcal{H}.$$

*3) **Le spectre résiduel** de $T$, noté $\sigma_r(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, c.à.d*

$$N(T - \lambda I) = \{0\}, \quad (R(T - \lambda I))^{\perp} \neq \{0\}.$$

***Le spectre** de $T$ est $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$*

**Remarque 3.1.1.** *En dimension finie, on a bien sûr $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, puisque $T - \lambda I$ est inversible si et seulement si $N(T - \lambda I) = \{0\}$.*

**Théorème 3.1.2.** *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Alors :*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} / \|T\| <| \lambda |\} \subset \rho(T)$$

**Preuve.** Soit $\lambda \in \mathbb{C} / \|T\| <| \lambda |$
on a : $T - \lambda I = \lambda(\frac{T}{\lambda} - I)$
puisque $| \lambda |> \|T\|$ donc $\frac{\|T\|}{\lambda} < 1$ implique $(T - \lambda I)$ est inversible d'après théorème précédent, alors $\lambda \in \rho(T)$. ∎

**Corollaire 3.1.1.** *Si $T \in B(H)$, $\sigma(T)$ est un ensemble fermé non vide de $\mathbb{C}$*

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} / \mid \lambda \mid \leq \|T\|\}$$

**Définition 3.1.4.** ***(Rayon spectrale)***
*Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on appelle rayon spectrale de $T$, la quantité*

$$r(T) = \sup\{| \lambda |; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

**Proposition 3.1.1.** *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

*1) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$,*

*2) $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$,*

*3) $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(A^*)$,*

*4) $\lambda \in \sigma_c(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$.*

**Preuve.**
1) pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$$

ce qui montre le premier point.

2) On se souvient que pour $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a

$$\mathcal{H} = N(B) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(B)^*}$$

où $\overset{\perp}{\oplus}$ désigne une somme directe orthogonale, autrement dit $(R(B)^*)^\perp = N(B)$. Dire que $\lambda \in \sigma_r(T)$, implique que $R(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$ , c.à.d

$$N(T^* - \overline{\lambda} I) = (R(T - \lambda I))^\perp \neq \{0\},$$

est donc $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.
3) Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$, c.à.d. $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$. On réutilise la même idée

$$\mathcal{H} = N(T - \lambda I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(T^* - \overline{\lambda} I)},$$

d'où $(R(T^* - \overline{\lambda} I))^\perp \neq \{0\}$, l'image de $\overline{T^* - \lambda} I$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$. Si de plus $T^* - \overline{\lambda} I$ est injectif, cela implique $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$ et sinon on a $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.
4) Soit $\lambda \in \sigma_c(T)$. On utilise les deux propriétés

$$\mathcal{H} = N(T - \lambda I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(T^* - \overline{\lambda} I)},$$

$$\mathcal{H} = N(\overline{T^* - \lambda} I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{R(T - \lambda I)},$$

on a $N(T - \lambda I) = \{0\}$, d'où $R(T^* - \overline{\lambda} I)$ est dense dans $\mathcal{H}$, de plus $R(T - \lambda I)$ est dense dans $\mathcal{H}$, d'où $N(T^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}$. On a donc $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. On peut faire le même raisonnement en sens inverse. ■

## 3.2 Introduction à des inverses généralisés des opérateurs linéaires

Une définition naturelle d'inverses généralisés dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ est la suivante dû a ***Tseng***[21].

**Définition 3.2.1.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors un opérateur $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ est un inverse généralisé de **Tseng** (i.g. en abrégé) de $T$ si*

$$R(T) \subset D(T^g) \tag{3.1}$$

$$R(T^g) \subset D(T) \tag{3.2}$$

$$T^g T\mathrm{x} = P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x} \quad \text{pour tout } \mathrm{x} \in D(T) \tag{3.3}$$

$$TT^g\mathrm{y} = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y} \quad \text{pour tout } \mathrm{y} \in D(T^g) \tag{3.4}$$

Cette définition est symétrique en $T$ et $T^g$, donc $T$ est un i.g de $T^g$.
Un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ peut avoir un i.g unique, ou plusieurs i.g ou il peut n'en avoir aucun. Nous allons montrer dans le théorème 3.2.1 que $T$ a un i.g. si et seulement si son domaine est décomposable par rapport à son noyau,

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} (D(T) \cap N(T)^{\perp}) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

d'après le lemme 3.2.1, cette condition est satisfaite si $N(T)$ est fermé. Donc il est valable pour tous les opérateurs fermés, et en particulier pour les opérateurs bornés. Si $T$ a des i.g's, alors il a un i.g maximum. Pour les opérateurs bornés d'image fermée, l'i.g maximum coïncide avec l'inverse de ***Moore-Penrose***, et sera de même noté par $T^{\dagger}$.

**Lemme 3.2.1.** [2] *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. $L$, $M$ deux sous-espaces de $\mathcal{H}$ tels que $M \subset L$. Alors*

$$L = M \oplus (L \cap M^{\perp})$$

*si seulement si*

$$P_{\overline{M}}\mathrm{x} \in M \text{ pour tout } \mathrm{x} \in L$$

**Lemme 3.2.2.** *Si $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ est un i.g. de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors $D(T)$ est décomposable par rapport à $R(T^g)$.*

**Preuve.** Résulte de Lemme 3.2.1 puisque, pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$

$$P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x} = T^g T\mathrm{x}, \quad \text{d'après (3.3)}$$

■

**Lemme 3.2.3.** *Si $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ est un i.g. de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors $T$ est une application injective de $R(T^g)$ dans $R(T)$.*

**Preuve.** Soit $\mathrm{y} \in R(T)$. Alors

$$\mathrm{y} = P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y} = TT^g\mathrm{y}, \quad \text{d'après (3.4)}$$

ce qui montre que $T(R(T^g)) = R(T)$. Maintenant, nous montrons que $T$ est injectif sur $R(T^g)$. Soit $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in R(T^g)$ tels que

$$T\mathrm{x}_1 = T\mathrm{x}_2$$

Alors

$$\mathrm{x}_1 = P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x}_1 = T^g T\mathrm{x}_1 = T^g T\mathrm{x}_2 = P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_2$$

■

**Lemme 3.2.4.** *Si $T^g \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ est un i.g. de $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, alors :*

$$N(T) = D(T) \cap R(T^g)^{\perp} \tag{3.6}$$

*et*

$$C(T) = R(T^g) \tag{3.7}$$

**Preuve.** Soit $x \in D(T)$. Alors, d'après le Lemme 3.4.1,

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in R(T^g), \quad x_2 \in D(T) \cap R(T^g)^{\perp}, \quad x_1 \perp x_2 \tag{3.8}$$

Maintenant

$$x_1 = P_{\overline{R(T^g)}} x = T^g T(x_1 + x_2) = T^g T x_1$$

donc

$$T^g T x_2 = 0$$

qui, d'après le lemme 3.2.3, on a

$$T x_2 = 0 \tag{3.9}$$

par conséquent,

$$D(T) \cap R(T^g)^{\perp} \subset N(T)$$

Réciproquement, soit $x \in N(T)$ se décomposant comme dans (3.8). Alors

$$\begin{aligned} 0 &= Tx = T(x_1 + x_2) \\ &= Tx_1 \ . \ \text{d'après (3.9)} \end{aligned}$$

et, d'après le Lemme 3.2.3 $x_1 = 0$ et donc

$$N(T) \subset D(T) \cap R(T^g)^{\perp}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} D(T) &= R(T^g) \overset{\perp}{\oplus} (D(T) \cap R(T^g)^{\perp}), \quad \text{d'après le Lemme 3.4.1,} \\ &= R(T^g) \overset{\perp}{\oplus} N(T) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$R(T^g) = D(T) \cap N(T)^{\perp}$$

■

L'existence de l'i.g est justifié dans le théorème suivant dû de Tseng.

**Théorème 3.2.1.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Alors $T$ a un i.g. si et seulement si*

$$D(T) = N(T) \overset{\perp}{\oplus} C(T) \tag{3.5}$$

*dans ce cas, pour tout sous-espace $L \in R(T)^{\perp}$, il y a un i.g $T^g_L$ de $T$, avec*

$$D(T^g_L) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L \tag{3.10}$$

*et*

$$N(T^g_L) = L \tag{3.11}$$

**Preuve.** Si $T$ a un i.g, alors (3.5) résulte des lemmes 3.4.1 et 3.2.4. Réciproquement, supposons que (3.5) est vérifiée. Alors

$$R(T) = T(D(T)) = T(C(T)) = R(T_0) \tag{3.12}$$

où $T_0 = T_{[C(T)]}$ est la restriction de $T$ à $C(T)$. L'inverse $T_0^{-1}$ existe, et satisfait

$$R(T_0^{-1}) = C(T)$$

et, d'après (3.12)

$$D(T_0^{-1}) = R(T)$$

Pour tout sous-espace $L \subset R(T)^{\perp}$, considérons l'extension $T_L^g$ de $T_0^{-1}$ avec domaine

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L$$

et de noyau

$$N(T_L^g) = L$$

De sa définition, il s'ensuit que $T_L^g$ satisfait

$$D(T_L^g) \supset R(T)$$

et

$$R(T_L^g) = R(T_0^{-1}) = C(T) \subset D(T) \tag{3.13}$$

Pour tout $\mathrm{x} \in D(T)$

$$\begin{aligned} T_L^g T\mathrm{x} &= T_L^g T P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}, && \text{d'après (3.5)} \\ &= T_0^{-1} T_0 P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}, && \text{d'après le Lemme 3.2.1} \\ &= P_{\overline{R(T_L^g)}}\mathrm{x}, && \text{d'après (3.13).} \end{aligned}$$

Finalment, tout $\mathrm{y} \in D(T_L^g)$ s'écrit, d'après (3.10), comme

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2, \quad \mathrm{y}_1 \in R(T), \quad \mathrm{y}_2 \in L, \quad \mathrm{y}_1 \perp \mathrm{y}_2$$

et donc

$$\begin{aligned} TT_L^g\mathrm{y} &= TT_L^g\mathrm{y}_1, \quad \text{d'après (3.11)} \\ &= T_0 T_0^{-1}\mathrm{y}_1 \\ &= \mathrm{y}_1 \\ &= P_{\overline{R(T)}}\mathrm{y}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $T_L^g$ est un i.g. de $T$. ∎

**Théorème 3.2.2.** *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ a des i.g.'s est soit $L$ un sous espace de $R(T)^{\perp}$. Alors les conditions*

$$D(T_L^g) = R(T) \overset{\perp}{\oplus} L \tag{3.10}$$

$$N(T_L^g) = L \tag{3.11}$$

*déterminent un unique i.g, qui est donc égale à $T_L^g$ construit dans la preuve du théorème précedent.*

**Preuve.** Soit $T^g$ est un i.g de $T$ vérifiant (3.10) et (3.11), et soit $\mathrm{y} \in D(T^g)$ où $\mathrm{y} = \mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2, \quad \mathrm{y}_1 \in R(T), \quad \mathrm{y}_2 \in L$
Alors

$$\begin{aligned} T^g\mathrm{y} &= T^g\mathrm{y}_1, \qquad \text{d'après (3.11)} \\ &= T^gT\mathrm{x}_1, \qquad \text{pour } \ \mathrm{x}_1 \in D(T) \\ &= P_{\overline{R(T^g)}}\mathrm{x}_1, \qquad \text{d'après (3.3)} \\ &= P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_1, \qquad \text{d'après (3.7)} \end{aligned}$$

Nous affirmons que ceci détermine $T^g$ de façon unique. Car, supposons qu'il y a un $\mathrm{x}_2 \in D(T)$ avec $\mathrm{y}_1 = T\mathrm{x}_2$, alors :

$$T^g\mathrm{y} = P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_2$$

par conséquent

$$\begin{aligned} P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_1 - P_{\overline{C(T)}}\mathrm{x}_2 &= P_{\overline{C(T)}}(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \\ &= 0 \ \text{ puisque } \ (\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2) \ \in N(T) \end{aligned}$$

■

## 3.3 L'inverse de Drazin des opérateurs linéaires bornés

Pour $\lambda \in \rho(T)$ est noté le résolvante $(\lambda I - T)^{-1}$ par $R(\lambda, T)$. Si 0 est un point isolé de $\sigma(T)$, alors le projection spectral de $T$ associé avec $\{0\}$ est défini par (voir [18]) :

$$P_T = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda, T)d\lambda$$

Où $\gamma$ est un petit cercle tournant 0 et séparant 0 de $\sigma(T)\backslash\{0\}$. L'élément $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dont spectre $\sigma(T)$ est consiste de l'ensemble $\{0\}$ est dit quasi-nilpotent ($QN$). Il est clair que $T$ est quasi-nilpotent si et seulement si le rayon spectral $r(T) = 0$.

Pour les opérateurs linéaires bornés et les éléments de Hilbert l'inverse de ***Drazin*** a été introduit et étudié par Ben-Israel [2], Koliha sur [9]et des autres.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s'il existe un opérateur $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a satisfait les trois opérateurs suivants :

$$\begin{cases} TX = XT \\ XTX = X \\ T^{k+1}X = T^k \end{cases}$$

**Définition 3.3.1.** *[3] Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

- *L'ascent de $T$ est plus petit nombre entier positif $m = a(T)$ tel que*

$$N(T^m) = N(T^{m+1}),$$

*si un tel entier n'existe pas, on pose $a(T) = \infty$ ;*

- *La descente de $T$ est le plus petit nombre entier positif $p = d(T)$ tel que*

$$R(T^p) = R(T^{p+1}),$$

*si un tel entier n'existe pas, on pose $d(T) = \infty$.*
*Clairement, $a(T) = 0$ si et seulement si $T$ est injectif et $d(T) = 0$ si et seulement si $T$ est surjectif.*

**Théorème 3.3.1.** *Soient $T, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sont dit inversible au sens de **Drazin**.*
*Si $TB = BT = 0$ alors*

$$(T + B)^D = T^D + B^D.$$

*Si $TB = 0$, alors $T + B$ est un **Drazin** inversible et :*

$$(T + B)^D = (I - BB^D)\left[\sum_{n=0}^{\infty} B^n (T^D)^n\right] T^D + B^D \left[\sum_{n=0}^{\infty} (B^D)^n T^n\right] (I - TT^D).$$

*Ce résultat a été démontré par **Castro-González**, **Dopazo** et **Martínez-Serrano** sur [15].*

**Preuve.** Remarquons que $T, B, T^D, B^D$ commutent et $TB^D = TB(B^D)^2 = 0$ et $T^D B = TB(T^D)^2 = 0$ d'où

$$(T + B)(T^D + B^D)^2 = T(T^D)^2 + B(B^D)^2 = T^D + B^D$$

et

$$(T + B) - (T + B)^2(T^D + B^D) = (T - T^2T^D) + (B - B^2B^D) \in QN(A),$$

ce qui prouve que $(T + B)^D = T^D + B^D$ . ∎

**Théorème 3.3.2.** *Soient $T, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

*On suppose que $T^2 + TB$ et $TB + B^2$ sont des **Drazin** inversible, et que $T^2B + TB^2 = 0$. Alors $T + B$ est **Drazin** inversible avec :*

$(T + B)^D = (T + TB)^D T + B(TB + B^2)^D + BCT.$
*tel que :*

$C = -(TB + B^2)^D (T + B)(T^2 + TB)^D + \left[I - (TB + B^2)(TB + B^2)^D\right]$

$C_k \left[(T^2 + TB)^D\right]^{k+1} + \left[(TB + B^2)^D\right]^{k+1} C_k \left[I - (T^2 + TB)(T^2 + TB)^D\right].$

$C_k = \sum_{r=0}^{k-1} (TB + B^2)^{k-r-1}(T + B)(TB + T^2)^r.$

*et* $\max(\ ind(T^2 + TB),\ ind(B^2 + TB)) \leq k \leq\ ind(T^2 + TB) +\ ind(B^2 + TB).$

***Xiaoji Liu**, **Liang Xu** et **Yaoming Yu** sont donneé la formule explicite de $(T \pm B)^D$ si $TB = B^3T, BT = T^3B$ tel que $T,\ B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.*

**Théorème 3.3.3.** *Soient $T, B, Y, Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

***(i)*** *Supposons que $T$ et $B$ sont inversible. Alors, $T + YBZ^*$ est inversible si et seulement si $B^{-1} + Z^*T^{-1}Y$ est inversible. Dans quel cas*

$$(T + YBZ^*)^{-1} = T^{-1}Y(B^{-1} + Z^*T^{-1}Y)^{-1}Z^*T^{-1}.$$

***(ii)*** *Supposons que $T$ et $B$ sont **Drazin** inversible. Soient $C = T + YBZ^*$ et $W = B^D + Z^*T^DY$. Si*

$$R(T^D) \subset R(C^D); \quad N(T^D) \subset N(C^D).$$

$$N(B^D) \subset N(Y); \quad N(W^D) \subset N(B).$$

*Alors*

$$(T + YBZ^*)^D = T^D - T^DY(B^D + Z^*T^DY)^DZ^*T^D.$$

*La question de l'inversibilité de $P - Q$ où $P$ et $Q$ sont des opérateurs idempotents sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, est très intéressante car elle est lié avec la question de savoir quand l'espace $\mathcal{H}$ est la somme directe $\mathcal{H} = R(P) \oplus R(Q)$ des images, et avec l'existence d'un opérateur idempotent $X$ tel que :*
*$PX = X,\ XP = P,\ Q(I - X) = I - X$ et $(I - X)Q = Q$.*

*Ces problèmes ont été étudiés par plusieurs chercheurs, **Grob** et **Trenkler** [13] a considéré le cas des projecteurs matriciels généraux ; **Buckoltz** [5], **Pakocevic** [19], **Vidav** [8], **Wimmer** [7] a discuté de l'inversibilité dans le cadre des espaces de Hilbert. **Koliha**, **Rakocevic** et **Straskraba** [10].*

*Par conséquent, si $P$ et $Q$ sont des idempotents des conditions équivalentes pour l'inversibilité de Drazin de $P + Q, P - Q, PQ$ et $PQ \pm QP$ Sont listés comme suit.*

**Théorème 3.3.4.** *[3] Soient $P$ et $Q$ sont idempotents.*

***(i)*** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
- *$P - Q$ est un **Drazin** inversible,*
- *$P + Q$ est un **Drazin** inversible,*
- *$I - PQ$ est un **Drazin** inversible.*

***(ii)*** *$PQ$ est un **Drazin** inversible si et seulement si $I - P - Q$ est un **Drazin** inversible.*

***(iii)*** *$PQ - QP$ est un **Drazin** inversible,*
- *$PQ + QP$ est un **Drazin** inversible,*
- *$PQ$ et $P - Q$ sont inversible au sens de **Drazin**.*

*Soient $P$ et $Q$ sont idempotents et $P - Q$ est inversible, **Koliha** et **Rakocevic** dans [12] Utiliser d'abord les denotations.*

$P = P(P-Q)^{-1}$ *et* $G = (P-Q)^{-1}P$ *donner la représentation de* $(P-Q)^{-1}$.
*Donner des formules explicites pour* $(P-Q)^D$ *et* $(P+Q)^D$ *On définit* $F = P(P-Q)^D$ *et* $G = (P-Q)^D P$ *et* $K = (P-Q)^D(P-Q)$.
*Les résultats suivants sont montrés par* ***Deng*** *et* ***Wei*** *dans [4] .*

**Théorème 3.3.5.** *Soient* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *sont idempotents, alors :*

***(i)*** $(P+D)^D = (P-Q)^D(P+Q)(P-Q)^D$.

***(ii)*** $(P-Q)^D = (P+Q)^D(P-Q)(P+Q)^D$.

***(iii)*** $(P-Q)^D = (I-PQ)^D(P-PQ) + (P+Q-PQ)^D(PQ-Q)$.

***(iv)*** $(PQ-QP)^D = (PQP)^D(P-Q)^D - (P-Q)^D(PQP)^D$.

***(v)*** $(PQ+QP)^D = (P+Q)^D(P+Q-I)^D$.

***(vi)*** $(I-PQP)^D = I - P + P\left[(P-Q)^D\right]^2$.

***(vii)*** *Si* $PQ$ *est un* ***Dzazin*** *inversible,*

$$\begin{aligned} (PQP)^D &= \left[(I-P-Q)^D\right]^2 P \\ (PQ)^D &= \left[(PQP)^D\right]^2 Q = \left[(I-P-Q)^D\right]^4 Q \end{aligned}$$

*Le résultat suivant assurer l'équivalence entre l'inversibilité de* ***Drazin*** *de* $AB$ *et* $BA$, *il a été montré par* ***Dajic*** *et* ***Koliha*** *,* ***Schmoeger*** *,* ***Deng*** *et* ***Lu Jian Ming****,* ***Du Hong Ke*** *et* ***Wei Xiao Mei*** *[14].*

**Théorème 3.3.6.** *Soient* $T, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *sont inversible au sens de* ***Drazin****.*
$TB$ *est un* ***Drazin*** *inversible si et seulement si* $BT$ *est un* ***Drazin*** *inversible,*
$ind(TB) \leq ind(BT) + 1$ *et* $(TB)^D = T\left[(BT)^D\right]^2 B$.

*Si* $T$ *est idempotent, alors* $T^D = T$.

*Si* $TB = BT$, *alors* $(TB)^D = B^D T^D = T^D B^D, T^D B = BT^D$ *et* $TB^D = B^D T$.

## 3.4 L'inverse de Drazin des opérateurs fermés

[3] Dans cette section, on introduit l'inverse de ***Drazin*** $T^D$ d'un opérateur fermé $T$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ lorsque 0 est un pôle d'ordre fini de la résolvante de $T$. On exprime les conditions nécessaires pour que l'opérateur $T$ admet un inverse de ***Drazin*** et on donne aussi quelques propriétés spectrales de $T^D$.

**Théorème 3.4.1.** *Soit* $T \in C(\mathcal{H})$. *Le point* 0 *est un pôle de* $\rho(T)$ *d'ordre* $m$ *si et seulement si il existe une projection non nulle* $P$ *dans* $\mathcal{H}$ *telle que :*

***(i)*** $R(P) \subset D(T)$;

***(ii)*** $PTx = TPx$ *pour tout* $x \in D(T)$;

***(iii)*** $TP$ *est nilpotent d'ordre* $m$ *;*

***(iv)*** $T + \xi P$ *est inversible pour tout* $\xi \neq 0$.

*L'opérateur* $P$ *satisfaisant* $(i)$ *à* $(iv)$ *est dit une projection spectrale de* $T$ *en* 0.

**Définition 3.4.1.** *Un opérateur $T \in C(T)$ est dit inversible au sens de* ***Drazin*** *ou bien* ***Drazin*** *inversible s'il existe un opérateur $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $R(D) \subset D(T), R(I_x - TD) \subset D(T)$ et*

- $TD = DT$ *;*
- $DTD = D$ *;*
- $T^{m+1}D = T^m$*, pour un certain entier positif $m$.*

*L'opérateur $D$ est appelé l'inverse de* ***Drazin*** *de l'opérateur $T$ et il est noté $T^D$.*

*L'entier $m$ dans la définition précédente est appelé l'indice de* ***Drazin*** *de $T$, $m =$ $ind(T)$.*

*En conséquence, $T^D$ existe si et seulement si $m = a(T) = d(T) < \infty$*

**Proposition 3.4.1.** *Soit $T \in C(\mathcal{H})$* ***Drazin*** *inversible alors*

$$D(T) = R(T^D) \oplus N(TT^D).$$

*On donne maintenant certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que $T \in C(\mathcal{H})$ possède un inverse de* ***Drazin****.*

**Théorème 3.4.2.** *Soit $T \in C(\mathcal{H})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

***(i)*** *$T$ est inversible au sens de* ***Drazin*** *;*

***(ii)*** *$0$ est un pôle d'ordre fini de la résolvante de $T$ ;*

***(iii)*** *$T = T_1 \oplus T_2$, où $T_1$ est un opérateur borné nilpotent et $T_2$ est un opérateur fermé inversible.*
*Ainsi, $T_1^{-2} \in B(\mathcal{H})$, l'opérateur $T^D = 0 \oplus T_2^{-1}$ est un inverse de* ***Drazin*** *de $T$.*

**Lemme 3.4.1.** *Soit $T \in C(\mathcal{H})$ est* ***Drazin*** *inversible avec l'inverse de* ***Drazin*** *$T^D \in B(\mathcal{H})$. Alors,*

***(i)*** *$T^D$ est unique et $R(T^D) \subset D(T)$.*

***(ii)*** *$R(I - TT^D) \subset D(T)$.*

***(iii)*** *$T^DTT^D = T^D$.*

***(iv)*** *$TT^D = T^DT$.*

***(v)*** *$(TT^D)^2 = TT^D$*

***(vi)*** *$P_T = I - TT^D$ est une projection spéctral de $T$ correspondant à $0$.*

***(vii)*** *$\sigma(T(I - TT^D)) = \{0\}$.*

**Preuve.** Les propriétés $(i)$ jusqu'à $(v)$ suivre de lemme (3.4.1) implique $P_T^2 = P_T$, on peut déduire de [1] que 0 n'est pas un point d'accumulation du spectre de $T$ et $P_T$ est une projection spectrale à 0 ∎

**Exemple 3.4.1.** *Soit $L^2([0,1]) = \{f, f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telque $\int_0^1 |f(x)|dx < +\infty\}$ est un espace de Hilbert avec le produit intérieur. L'ensemble $M : [0,1] \to \mathbb{C}$ par*

$$M(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

*et définir l'opérateur maximal de multiplication $T$ par $M$ sur $L^2([0,1])$,c'est,*
*$Tf = Mf$ pour $f \in D(T) = \{f \in L^2([0,1])\}$ Alors $T$ est un opérateur linéaire fermé densément défini sur $L^2([0,1])$. Depuis $|M(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [0,1], R(T) = L^2([0,1])$ et $T$ a un inverse borné $T^{-1} : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ défini par $T^{-1}g = \frac{g}{M}$, pour tout $g \in L^2([0,1])$.*

*Donc, $T$ est un opérateur fermé sur $L^2([0,1])$ avec l'inverse borné $T^{-1}$ qu'est un inverse de **Drazin** de $T$.*

*Les résultats suivantes, facile à vérifier par une manipulation des sommes directes des opérateurs, sont souvent utiles (voir e.g [11]).*

**Théorème 3.4.3.** *[3] Soit $T \in C(\mathcal{H})$ est un **Drazin** inversible. Alors :*

***(i)*** *$P_T$ et $T$ se déplacer sur $D(A)$.*

***(ii)*** *$T + P_T$ est inversible et $T^D = (T + P_T)^{-1}(I - P_T) \in B(\mathcal{H})$.*

***(iii)*** *Si $B \in C(\mathcal{H})$ tel que $R(B) \subset D(T), R(T) \subset D(B)$ et $TB = BT$, alors, $T^D B = BT^D$.*

***(iv)*** *$\forall n \geq 1$, $T^n$ est un **Drazin** inversible et $(T^n)^D = (T^D)^n$.*

***(v)*** *$T^*$ est un **Drazin** inversible et $(T^D)^* = (T^*)^D$.*

***(vi)*** *Si $B \in B(\mathcal{H})$ est nilpotente tel que $R(B) \subset D(T)$ et $TB = BT$, alors $T + B \in C(\mathcal{H})$ est un **Drazin** inversible et*

$$(T + B)^D = (T + B + P_T)^{-1}(I - P_T).$$

***(vii)*** *Si $B \in B(\mathcal{H})$ est un **Drazin** inversible tel que $R(B) \subset D(T), R(T) \subset D(B)$ et $TB = BT = 0$, alors*
*$(T + B)^D = T^D + B^D$.*

***(viii)*** *Il existe $B \in C(\mathcal{H}), D(T) = D(B)$ et $B$ est un **Drazin** inversible avec l'indice $ind(B) \leq 1$, et $C \in B(\mathcal{H})$ nilpotente avec $R(C) \subset D(T)$ tel que $T = B + C$ et $BC = CB = 0$. $B^D = T^D$ et une telle décomposition est unique.*

**Exemple 3.4.2.** *[11] Soit l'opérateur $T_1$ sur $l^1$ l'espace de toutes les suites complexes $(x_k)_k$ tel que $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < +\infty$,*

$$T_1 x = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$$

*Alors $T_1 \in B(l^1)$ est un quasi-nilpotent mais n'est pas nilpotent. Le shift droit $S_d = (0, x_1, x_2, \dots)$ est un opérateur borné injectif sur $l^1$ avec un spectre égale à la boule unité fermée en $\mathbb{C}$. Son inverse $T_2$ est un opérateur linéaire fermé avec le domaine $D(T_2) = \{x \in l^1; x_1 = 0\}$ et $\sigma(T_2) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1\}$.*

*On defini $T = T_1 \oplus T_2$ sur $\mathcal{H} = l^1 \oplus l^1$. Alors, $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq 1\}, 0$ est isolé dans $\sigma(T), T$ est un **Drazin** inversible avec $T^D = 0 \oplus T_2^{-1} = 0 \oplus R$ et $ind(T) = \infty$. $T^D$ n'est pas **Drazin** inversible depuis $\sigma(T^D) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}$ et $0$ est un point d'accumulation de $\sigma(T)$.*

# Conclusion

On peut généralisé la notion d'inversibilité d'une matrice ou d'un opérateur linéaire non inversible par plusieurs méthodes permis ces méthodes on a vu l'inverse de ***Drazin*** et on a le comparé avec l'inverse de ***Moore-Penrose*** pour les matrices avant de voir le cas des opérateurs linéaires et d'étudier leur propriétés.

# Perspectives

Dans ce mémoire le calcul de l'inverse de ***Drazin*** restreint aux opérateurs bornés et les opérateurs fermés densément définit, peut être il y a une extension pour les opérateurs fermables (Opérateurs presque fermable). On peut aussi faire des programmes sous Matlab pour calcul l'inverse de ***Drazin***.

# Bibliographie


[1] A.E.Taylor,D.C.Lay,Introduction to Functional Analysis, 2nd ed., Wiley, New York, 1980.

[2] A.Ben-Israel et T.N.E.Greville, Generalized inverses Theory and Applications, New York,(2003).

[3] Bekkai.Sanaa.Miloud.MESSIRDI, Drazin invertibility of sum and product of closed linear operators, (2012)

[4] C.Deng and Y.Wei,Characterizations and representations of the Drazin inverse involving idempotents, Linear Algebra and its Appl., $431(2009), 1526 - 1538$.

[5] D.Buckholtz,Hilbert-space-et-idempotents, Proc.Amer.Math.Soc.$128(2000), 1415-1418$.

[6] Frédiric-Rotella.Pierre Borne, Théorie et pratique du calcul matriciel.

[7] H.K.Wimmer,Lipschitz-continuity,of-oblique-projections.Proc. Amer.Math.soc.,$128(2000), 873 - 876$.

[8] I.Vidav,On-idempotent,operators,in-Hilbert space.Publ.Inst.Math.(Beograd), $4(18)(1964), 157 - 163$.

[9] J.J.Koliha,A generalized Drazin inverse, Glasgow Math.J.,$38(1996), 367 - 381$.

[10] J.J.Koliha,V.Rakocevic, I.Straskraba,The difference and sum of projectors,Linear Algebra Appl.,$388(2004), 279 - 288$.

[11] J.J.Koliha,T.D.Tran,The Drazin inverse for closed linear operators and the asymptotic convergence of $C_0$-semigroup, J.Operator Theory, $46(2001), 323 - 336$.

[12] J.J.Koliha,V.Rakocevic,On the norm of idempotents in $C^*$-Algebras,Rocky Mountain J.of Math.,$34(2)(2004), 685 - 697$.

[13] J.GroB,G.Trenkler, Nonsingularity of the difference of two oblique projectors,SIAM J.Matrix Anal.Appl., 21(1999), $390-395$.

[14] Lu Jian Ming,Du Hong Ke,Wei Xiao Mei, Drazin Invertibility of Operators $AB$ and $BA$, J.of Math. Research et Exposition, 28(4)(2008), $1017-1020$.

[15] N.Castro González,E.Dopazo,M.F.Martínez-Serrano, On the Drazin inverse of the sum of two operators and its application to operator matrices,J.Math.Anal.Appl.350(2009), $207-215$.

[16] Robert-Piziak.P.L.Odell, Matrix theory from Generalized inverses to Jordan form.

[17] S.L.Campbell et C.D.Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, SIAM (1979).

[18] T.Kato :"Perturbation theory for linear operators" Springer, 2nd Edition 1980.

[19] V.Rakocevic,On the norm of idempotent in Hilbert space, Amer.Math. Monthly,107(2000), $748-750$.

[20] V.Racevic,Y.Wei,The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications $II$, J.Austral.Math.Soc.,70(2001), $189-197$.

[21] Y.Y.Tseng, Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces, Nauk SSSR (1949),$431-434$.