République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Problèmes pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Meriem **K**addouri [1]

Sous la direction de

Mlle. H. Abbas

Soutenu le 22 Mai 2017 devant le jury composé de

Dr. G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mlle. H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Dr. A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. email : Kadouri.m91@hotmail.com

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

A mon père, le chemin à suivre dans cette vie que j'espère mon Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

A ma mère pour son soutien

A mes soeurs

A mon frére Mohamed, son épouse et leur petite fille .

En leur témoignant mon amour et ma profonde admiration

Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.

Remerciements

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier le puissant Dieu pour son aide et sa bénédiction qui nous a donné la santé et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nos plus vifs remerciements vont aussi à notre encadreur : Mlle Abbas Hafida, pour ses précieux conseils, son aide et son encouragement.

Je remercie également Dr.G.Djellouli de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également Dr.A.Azzouz et O.Bennihi membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

Nous adressons également un grand merci à tous les enseignants de département de Mathématiques ainsi que l'administration en général.

Table des matières

Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.
La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigne la n^{me} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques. Une liste de mathématiciens qui ont fournit des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du $20^{ème}$ siècle, inclut :
P.S.Laplace (1812),J.B.J.Fourier (1822), N.H.Abel $(1823-1826)$, J.Liouville $(1832-1873)$, B.Riemann (1847), H.Holomgren $(1865-1867)$, A.K.Grunwald (1867_1872), A.V.Letnikov (1868_1872), H.Laurent (1884), P.A.Nekrassov (1888), A.Krug (1890), J.Hadamard (1892), O.Heaviside $(1892-1912)$,S.Pincherle (1902), G.H.Hardy et J.E.Littlewood $(1917-1928)$, H.Weyl (1917), P.L'evy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis $(1924-1936)$, A.Zygmund $(1935-1945)$, E.R.Amour $(1938-1996)$, A.Erdélyi $(1939-1965)$, H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949).

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre de ce mémoire est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : Espaces ds fonctions (intégrables, continues, absolument continues avec au sens poids) et quelques théorèmes fondamenteaux (principe de contraction de Banach,quelques théorèmes de point fixe)et des résultats importants .

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude du problème de Cauchy de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) = & y_0, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée.

Le troisième chapitre, est destiné aux fonctions dites fonctions spéciales et on introduira les deux plus importantes approches de dérivation fractionnaire, celle de Riemann-Liouville et celle de Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces deux approches.

Le dernier chapitre de notre mémoire est divisé en deux parties :

Dans le première partie on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème fractionnaire de type Cauchy avec poids suivant :

$$\begin{cases} D^{\alpha}u(x) & = f(x, u(x)) \\ \lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = u_0, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée et D^{α} est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt$$

Γ étant la fonction gamma.

L'existence et l'unicité d'une solution continue est établie par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi, les résultats de cette section peuvent être trouvés dans [11] .

La seconde partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude du problème de Cauchy de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \ \ pour \ \ tous \ \ t \in J = [0, T], \ \ 0 < \alpha < 1 \\ y(0) \qquad = y_0, \ \ y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où f est une fonction donnée et ${}^cD^\alpha$ est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$$ {}^cD^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt$$

.

Chapitre 1

Outils d'analyse fonctionnelle

1.1 Notations et définitions

Dans cette sections, nous présentons les notations et définitions et quelques proprietés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.

Soit $\mathbf{J} = [0, T], T > 0$. Notons $\mathbf{C}(\mathbf{J}, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de $\mathbf{J}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|y\|_\infty = sup\ \{|y(t)| \quad /t \in \mathbf{J}\}$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$

Définition 1.1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach, et $A : E \to F$ une application linéaire. On dit que A est* ***bornée*** *si elle envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F.*

Définition 1.1.2. *Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle* ***opérateur borné*** *toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.1.3. *Un espace métrique (X, d) est précompact ssi, pour tout $\varepsilon > 0, X$ admet une recouvrement fini par des boules de rayon ε.*

Définition 1.1.4. *Dans un espace métrique complet (X, d) une partie A est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte.*

Définition 1.1.5. *Soit E, F, deux espaces de Banach et $A : E \to F$ une fonction*
- *A est dit compact si l'image $f(E)$ est relativemant compact dans F,*
- *A est dit completement continu s'il est continu et l'image de tout borné de E est relativement compact dans F.*

1.2 Espaces fonctionnels

Dans cette partie on rappelle les notions et les résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans notre étude.

1.2.1 Espace des fonctions intégrables

Définition 1.2.1. *Une tribu sur $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^n$ contenant $(\emptyset, \mathbb{R})$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^n$,les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables. On dit que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Définition 1.2.2. ***Mesure***
Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^n$. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
2. *Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :*

$$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{1}^{\infty} \mu(B_i)$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition 1.2.3. *Une fonction $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2.4. *Soit $\Omega = (a, b)$ tq $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles f sur Ω telles que f est mesurable et*
$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leq +\infty,$$
2. *Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω.*

Exemple : $(L_p(a,b), \|.\|_{L_p(a,b)}$ est un espace de Banach.
En particulier, si $p = 2$ alors :
$$\|f\|_2 = \left\{ \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\},$$
et $(L^2(a,b), \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Thèoréme 1.2.1. *Soit $\Omega = (a,b)$ un intervalle fini ou non de $\mathbb{R}$*

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$
2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \quad sur \quad \Omega \right\}.$$

1.2.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2.5. *Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est intégrable (pour la mesure μ) si elle est mesurable et si*
$$\int_\Omega |f(x)| d\mu(x) < \infty.$$
On va aussi écrire $\int_\Omega f d\mu$ ou $\int f$ pour $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$.

Définition 1.2.6. *[1]*
Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n \in \mathbb{N}$.
On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n soit continues sur Ω, muni de la norme :
$$\|f\|_{C^n} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_C = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in \Omega} |f^{(k)}(x)|, \; n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Exemple : Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. On note $C(\overline{D})$ l'espace des fonctions continues $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ telles que :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in D} |f(u)| < \infty.$$

Alors $C(\overline{D})$ muni de la norme $\|.\|_{L^\infty}$ est un espace de Banach.

Définition 1.2.7. *[1]*
Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini.
On désigne par $AC([a, b])$ l'espace des fonctions qui sont primitives de fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC([a, b]) = \left\{ f/\exists\varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\},$$

et $AC([a, b])$ sera l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$.

1.2.3 Espace des fonctions continues avec poids $C_\gamma([a, b])$

Définition 1.2.8. *[1]*
Soient $\Omega = [a, b]$ un intervalle fini et $\gamma \in \mathbb{C}$.
On désigne par $C_\gamma([a, b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a, b]$ telles que la fonction $(x - a)^\gamma f(x) \in C([a, b])$ c'est à dire :

$$C_\gamma([a, b]) = \{f \ : \ ]a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, (. - a)^\gamma f(.) \in C([a, b])\}, \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(x - a)^\gamma f(x)\|_C = \max_{x\in\Omega} |(x - a)^\gamma f(x)|. \tag{1.2}$$

Définition 1.2.9. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $C^n_\gamma[a, b]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues différentiables à l'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ et ont la dérivée $f^{(n)}(x)$ d'ordre n, telle que $f^{(n)}(x) \in C_\gamma[a, b]$:*

$$C^n_\gamma[a, b] = \left\{ f : \|f\|_{C^n_\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma} \right\}, \ C^0_\gamma[a, b] = C_\gamma[a, b].$$

Le lemme suivant nous donne une caractérisation de l'espace $C_\gamma^n[a,b]$

Lemme 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ telle que $n = \{0, 1, 2, ...\}$ et $\gamma \in \mathbb{C}(0 \leq \Re(\gamma) < 1)$. Alors $C_\gamma^n[a,b]$ est l'espace des fonctions f s'écrivant sous la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k.$$

Ou $\varphi(t) \in C_\gamma[a,b]$ et $C_k (k = 0, 1, ..., n-1)$ sont des constantes arbitraires tel que :

$$\varphi(t) = f^n(t), \; C_k = \frac{f^k(a)}{k}, \; (k = 0, 1, ..., n-1).$$

En particulier, si $\gamma = 0$ alors $C^n[a,b]$ est l'espace des fonctions f qui peut etre écrit sous la forme précédente ou $\varphi(t) \in C[a,b]$.

1.2.4 Espaces des fonctions absolument continues avec poids$AC_{\delta,\mu}^n$

Définition 1.2.10. *Pour $n \in \mathbb{N}$ on note par $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions à valeurs complexes $f(x)$ ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ continues sur $[a,b]$ telles que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$, c'est-à-dire*

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad (D^{n-1}f)(x) \in AC[a,b] \quad (D = \frac{d}{dx}) \right\}.$$

En particulier on a $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Définition 1.2.11. *L'espace noté $AC_{\delta,\mu}^n[a,b]$ $(n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R})$ défini par*

$$AC_{\delta,\mu}^n[a,b] = \left\{ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b], \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx} \right\},$$

est appelé espace des fonctions absoluments continues avec poids.
En particulier, quand $\mu = 0$, l'espace $AC_\delta^n[a,b] = AC_{\delta,0}^n[a,b]$ et on a

$$AC_\delta^n[a,b] = \left\{ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\}.$$

Quand $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC_\delta^1[a,b]$ coïncide avec $AC[a,b]$.

1.3 Théorèmes fondamentaux

On considère E et F des espaces de Banach muni des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ respectivement, $C(E,F)$ l'espace des fonctions continues de E dans F muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F.$$

Définition 1.3.1. *[7] Soit M un sous ensemble de $C(E,F)$*

1. *On dit que M est équicontinue en $f \in M$ $\forall u,v \in E$si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :*

$$\|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon$$

et ceci pour tout $f \in M$ et pour tout $v \in E$ vérifiant :

$$\|u - v\|_E < \eta.$$

2. *On dit que M est équicontinue sur E, si M est équicontinue en tout $u \in E$.*

Cas particulier

Dans le cas où $E = [a,b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, une partie M de $C(E,F)$ et dite équicontinue si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall f \in M, \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Définition 1.3.2. *Soit M un sous ensemble de $C(E,F)$.*
On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\|f\|_\infty \leq C \quad \forall f \in M.$$

1.3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Ce théorème consiste à prouver l'existence et l'unicité d'un point fixe pour un certain opérateur. On s'intéresse au théorème du point fixe de Banach qui assure l'existence et l'unicité. Le théorème de Schauder n'assure que l'existence seulement. On présente différents théorèmes d'existence et d'unicité basés sur les théorèmes classiques qui affirment l'existence et l'unicité des points fixes de certains opérateurs. On utilisera des définitions et des notions connues de l'analyse fonctionnelle.

Définition 1.3.3. *Soit $A : E \longrightarrow E$. On dit que $x \in E$ un point fixe de A si :*

$$A(x) = x.$$

Exemple : Considérer l'espace métrique usuel $(\mathbb{R}, d)$, on définit

$$f(x) = \frac{x}{a} + b \quad pour \quad tout \quad x \in \mathbb{R}.$$

Puisque, f est une contraction sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$ et la solution de l'equation $(x - f(x) = 0)$ est $x = \frac{ab}{a-1}$.

Thèoréme 1.3.1. *Soit $A : E \longrightarrow E$, s'il existe $0 < k < 1$ tel que :*

$$\forall x, y \in E : \|A(x) - A(y)\|_E \leq k\|x - y\|_E.$$

On dit que A est un opérateur contractant .
Alors l'opérateur A admet un point fixe unique $x \in E$. De plus, si $x_0 \in E$ et $x_n = Ax_{n-1}$, alors :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Preuve . Soit k est une contraction constante de A ,(nous construirons explicitement un ordre convergant au point fixe). Soit x_0 un élement fixé de E. On définit $\{x_n\}$ dans E définie par :

$$x_n = Ax_{n-1} \quad \forall n \geq 1.$$

Puisque A est un opérateur contractant, on obtient

$$\|x_n - x_{n+1}\| = \|Ax_{n-1} - Ax_n\| \leq k\|x_{n-1} - x_n\| \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi,

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\| \quad \forall n \geq 1$$

Par conséquent,pour tout $m > n$ on a :

$$\|x_n - x_m\| \leq (k^n + k^{n+1} + ... + k^{m-1})\|x_0 - x_1\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_0 - x_1\|.$$

On déduit que $\{x_n\}$ est une suite de cauchy dans E.
Soit $x_n \longrightarrow x,\ x \in E$,on utilise la continuité de A, on a

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_{n-1} = Ax.$$

Pour montrer l'unicité un point fixe dans E, soit x, y deux points fixes de A. Alors

$$\|x - y\| = \|A(x) - A(y)\| \leq k|x - y|.$$

Par conséqeant $k < 1$ on a donc $x = y$. ■

Thèoréme 1.3.2. *(Théorème du point fixe de Picard)*
Si E est un espace de Banach et f est contractante, alors f admet un unique point fixe.

Preuve . : L'unicité est claire : si P_1 et P_2 sont deux points fixes de f alors,
$\|P_1 - P_2\| = \|f(P_1) - f(P_2)\| \leq c\|P_1 - P_2\|$, ce qui n'est possible que si $\|P_1 - P_2\| = 0$.
Pour l'existence, on construit une suite récurrente en espérant que sa limite soit un point fixe : soient $y_0 \in E$ quelconque et $y_{n+1} = f(y_n)$. Par une récurrence immédiate
$\|y_{n+1} - y_n\| \leq c^n\|y_1 - y_0\|$ donc pour $n \geq m$:
$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - y_{n-1}\| + ... + \|y_{m+1} - y_m\| \leq (c^m + .. + c^{n-1})\|y_1 - y_0\| \leq \frac{c^m}{1-c}\|y_1 - y_0\|$.
Soit $\epsilon > 0$: pour m et n plus grand qu'un certain N, le membre de droite est plus petit que ϵ, donc (y_n) est une suite de cauchy, donc elle converge vers une limite l car E est un espace de Banach.
$y_n \to l$ donc, comme $\|f(y_n) - f(l)\| \leq \|y_n - l\|$, $f(y_n) \to f(l)$ i.e $y_{n+1} \to f(l)$. Mais $y_{n+1} \to l$, donc : $f(l) = l$. ■

Thèoréme 1.3.3. *(Banach)[1]*
Soit (E, d) un espace métrique complet, soit $0 \leq w < 1$, et soit $A : E \longrightarrow E$ une application telle que pour tous $x, y \in E$, la relation suivante soit satisfaite :

$$d(A(x), A(y)) \leq wd(x, y), \quad (0 \leq w < 1). \tag{1.3}$$

Alors l'opérateur A admet un point fixe unique $x^* \in E$.
Autrement dit, si $A^k (k \in \mathbb{N})$ est une suite d'opérateurs définie comme suit

$$A^1 = A \ \ et \ \ A^k = AA^{k-1} \ \ (k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}). \tag{1.4}$$

Alors pour tout $x_0 \in E$; la suite $\left\{A^k x_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe x^*.

Preuve .

1. Montrons d'abord l'existence
   Soit $x_0 \in E$ on définit par récurence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = A(x_n)$ et montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans X afin d'obtenir que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in X$.
   Puisque F est continue on a

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = A\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right), \tag{1.5}$$

c-à-d $x = A(x)$. Soient maintenant $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$, alors (par principe télescopique)

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q) \tag{1.6}$$

et comme

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(A(x_{p-1}), A(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \leq k^2 d(x_{p-2}, x_{p-1}) \leq ... \leq k^p d(x_0, x_1), \tag{1.7}$$

d'où

$$d(x_p, x_q) \leq (k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) d(x_0, x_1) \tag{1.8}$$

$$\leq k^p d(x_0, x_1) \sum_{p=0}^{p=+\infty} k^p = \frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1). \tag{1.9}$$

Si $d(x_0, x_1) = 0$, alors $x_0 = x_1 = A(x_0)$ et donc x_0 est un point fixe. Sinon (c-à-d) $d(x_0, x_1) > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ un entier convenablement choisi tel que $\forall p \geq n_0$ on a $\frac{k^p}{1-k} d(x_0, x_1) \leq \varepsilon$. Ceci montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans X.

2. Unicité :
   Soient x_1, x_2 deux points fixes de A ; alors $A(x_1) = x_1$ et $A(x_2) = x_2$ et donc $d(A(x_1), A(x_2)) \leq kd$, d'où $d(x_1, x_2) \leq kd(x_1, x_2)$ et comme $0 \leq k < 1$, alors $d(x_1, x_2) = 0$, et donc $x_1 = x_2$.

■

Thèoréme 1.3.4. *(Schaefer)[2, 10]*
Soient X un espace de Banach et $A : X \longrightarrow X$ un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble

$$\varepsilon = \{u \in X : \lambda Au = u, pour \quad un \quad certain \quad \lambda \in [0, 1]\},$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Thèoréme 1.3.5. *(Schauder) [6]*
Soit $(E; d)$ un espace metrique complet, soit X une partie convexe et fermée de E, et soit $A : X \longrightarrow X$ une application tel que l'ensemble $\{Ax : x \in X\}$ est relativement compact dans E. Alors A possède au moins un point fixe.

Thèoréme 1.3.6. *(Ascoli-Arzelà)[10]*
Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compact dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leq K \quad pour \quad tout \quad x \in J \quad et \quad tout \quad f \in A.$$

2. *L'ensemble A est équicontinu. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \quad pour \quad tous \quad t_1, t_2 \in J \quad et \quad tout \quad f \in A.$$

3. *Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.*

Chapitre 2

Problème de Cauchy associé à l'équation différentille ordinaire

Nous allons aborder un point important : l'existence et l'unicité des solutions. Pour cela, nous nous placons dans la cadre suivant : U désigne un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$,$f : U \to \mathbb{R}^m$ est une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), (t, y) \in U, t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^m. \tag{2.1}$$

2.1 Quelques définitions et premiéres propriétés

Définition 2.1.1. *Une solution de* (2.1) *sur intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *telle que*

1. $\forall t \in I, (t, y(t)) \in U$,
2. $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.

Ici y *ne dépend que d'une seule variable* t*, on parle d'équation différentielle ordinaire.*

Lemme 2.1.1. *(Gronwall-inéquation différentielle)*
Supposons qu'une fonction f *soit de classe* $C^1(I, \mathbb{R})$*, où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *vérifiant*

$$f'(t) \leq a(t)f(t) + b(t),$$

où a *et* b *sont des fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f(t_0) = f_0$ *pour un* $t_0 \in I$*. Alors on a l'inégalité*

$$f(t) \leq f(t_0)exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\sigma)d\sigma\right).$$

Preuve . Soit $f \in C^1(I, \mathbb{R}$ et $f(t_0) = f_0$ telle que $f'(t) \leq a(t)f(t) + b(t)$ alors

$$f'(t) - a(t)f(t) \leq b(t). \tag{2.2}$$

On multiple (2.2) par $\exp(-\int_{t_0}^t a(s)ds)$, on obtient

$$f'(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) - a(t)f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \leq b(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right). \tag{2.3}$$

D'autre part on a

$$f'(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) - a(t)f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) = \frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right). \tag{2.4}$$

On remplace (2.4)dans (2.3), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)\right)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right) \leq b(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

alors

$$\int_{t_0}^t d\left(f(\sigma)\right)\exp\left(-\int_{t_0}^\sigma a(s)ds\right)d\sigma \leq \int_{t_0}^t b(\sigma)\exp\left(-\int_{t_0}^\sigma a(s)ds\right)d\sigma.$$

Aprés les simplifications on obtient :

$$f(t) \leq f(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)\int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{t_0}^\sigma a(s)ds\right)b(\sigma)d\sigma.$$

Alors on a :

$$f(t) \leq f(t_0)exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t exp\left(\int_{t_0}^t a(\sigma)d\sigma\right),$$

d'ou le résultat .

∎

Lemme 2.1.2. *(Gronwall-inéquation integrale)*
Supposons qu'une fonction f soit continue de $I = [0, T]$ sur $\mathbb{R}^+$, ou $T \in \mathbb{R}$ (attention on ne s'intéresse qu'aux fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifie

$$f(t) \leq b(t) + \int_0^t a(s)x(s)ds,$$

pour tout $t \in I$, où a est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^+$ et b une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ alors on a l'inégalité

$$f(t) \leq b(t) + \int_0^t exp\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right)b(s)a(s)ds,$$

pour tout $t \in [0, T]$.

2.2 Equation différentielle ordinaire du premier ordre

2.2.1 Introduction et terminologie

Problème de Cauchy

Augustin-Louis Cauchy, au 19^{eme} siecle, souaite ne pas séparer la recherche des solutions générales d'une équation différentielle de la recherche des solutions particulières. Dans ce cadre, il pose un problème de systéme différentiel, connu sous le nom de problème de Cauchy.

Définition 2.2.1. *On appelle problème de Cauchy un systéme différentiel le problème consistant à étudier les solutions du systéme :*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} . \tag{2.5}$$

Où $y(t)$ est l'inconnue à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (la solution recherchée), t est la variable représentant le temps (par exemple), les données sont l'instant initial t_0, la condition initiale u_0, et la fonction f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ définie par $(t, y) \to f(t, y)$.

Définition 2.2.2. *On dira que la fonction $y \to \mathbb{R}^m$ est une solution de (2.5) si $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^m)$, $y(t_0) = y_0$ et $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$.*

Exemple 2.2.1. *Soit le système défini par :*

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 3 \end{cases} . \tag{2.6}$$

Ici $t_0 = 0, y_0 = 3, f(t, y) = 2y$. On sait résoudre ce système explicitement et la solution unique est $y(t) = 3exp(2t)$.

solution maximales

Définition 2.2.3. *Soient* $y : I \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ *des solutions de* (2.5). *On dit que* $\tilde{y}$ *est un prolongement de* y *si* $I \subset \tilde{I}$ *et* $\tilde{y} \setminus I = y$.

Définition 2.2.4. *On dit qu'une solution* $y : I \to \mathbb{R}^m$ *est maximale si* y *n'admet pas de prolongement* $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^m$ *, avec* $I \subsetneq \tilde{I}$.

De ces définitions découle directement le résultat suivant :

Thèoréme 2.2.1. *Toute solution* y *se prolonge en une solution maximale* $\tilde{y}$ *(pas nécessairement unique).*

Solution globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U' = J \times U'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 2.2.5. *Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle* J *tout entier .*

Remarque 2.2.1. *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 2.2.2. *Soit* $y' = y^2$ *sur* $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. *Cherchons les solutions de cette équation.*
-Nous avons la solution globale $y(t) = 0$.
- Si y *ne s'annule pas, s'écrit* $\frac{y'}{y^2} = 1$, *d'où par intégration*

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$

Cette formule donne deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ *et* $]-C, +\infty[$, *ces solutions sont maximales, mais pas globales.*
En fait $y(t) = 0$ *est la seule solution globale.*

Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'a l'ordre k.
$f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^K, toute solution de (1) , $y' = f(t, y)$ est de classe C^{k+1}.

2.2.2 Equation intégrale et l'application de la théorie des points fixes

La preuve repose sur la transformation de l'équation différentielle et l'application de la théorie des points fixes. En intégrant les deux cotés, toute fonction satisfaisant l'équation différentielle doit également satisfaire l'équation intégrale.

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Une simple preuve de l'éxistence de la solution est obtenue par approximations successives. Dans ce contexte, la méthode est connue sous le nom d'itération de Picard.
On pose :$\varphi_0(t) = y_0$ et

$$\varphi_{k+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))ds.$$

On peut alors montrer, en utilisant le théorème du point fixe de Banach, que la suite de (itération de Picard) φ_k, Une application du lemme de Gronwall à $|\varphi(t) - \Psi(t)|$, ou φ et Ψ sont deux solutions, montrer que $\varphi(t) = \Psi(t)$ prouvant ainsi l'unicité globale (l'unicité locale est une conséquence de l'unicité du point fixe de Banach).

Preuve .
On pose : $C_{a,b} = \overline{I_a(t_0)} \times \overline{B_b(y_0)}$.
Avec : $\overline{I_a(t_0)} = [t_0 - a, t_0 + a]$, $\overline{B_b(y_0)} = [t_0 - b, t_0 + b]$.
C'est le cylindre compact où f est defini. Posons

$$M = Sup_{[C_{a,b}]} \|f\|.$$

Soit L la constante de Lipchitz de f par rapport à la seconde variable.
Nous allons appliquer théorème de point fixe de Banach en utilisant la métrique sur $C(I_a(t_0), B_b(y_0))$ induite par la norme uniforme

$$\|\varphi\|_\infty = sup_{t \in I_a} |\varphi(t)|.$$

Nous définissons un opérateur entre deux espaces fonctionnels de fonctions continues, l'opérateur de Picard, comme suit :

$$\Gamma : C(I_a(t_0), B_b(y_0)) \to C(I_a(t_0), B_b(y_0)),$$

definit par :

$$\Gamma\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Nous lui imposons qu'il est bien défini, en d'autres termes, que son image doit $\hat{e}$tre une fontion prenant des valeurs sur $B_b(y_0)$, ou de maniére équivalente, que la norme de $\Gamma\varphi(t) - y_0$
est inferieur à b, qui peut $\hat{e}$tre redressé

$$\|\varphi_1\|_\infty \leq b.$$

$\|\Gamma\varphi(t) - y_0\| = \| \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s,\varphi(s))\|ds \leq M|t-t_0| \leq Ma \leq b.$
La derniére étape est l'imposition, donc nous imposons l'exigence $a < \frac{b}{M}$.
Imposons maintenant à l'opérateur de Picard d'$\hat{e}$tre une contraction sous certaines hypothèses sur a (que plus tard nous pourrons omettre).
Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in C(I_a(t_0), B_b(y_0))$, On applique le théorème de point fixe de Banach :

$$\|\Gamma\varphi_1 - \Gamma\varphi_2\|_\infty \leq q\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Pour $q < 1$. Soit t tel que

$$\|\Gamma\varphi_1 - \Gamma\varphi_2\|_\infty = \|(\Gamma\varphi_1 - \Gamma\varphi_2)(t)\|.$$

Puis en utilisant la définition de Γ

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma\varphi_1 - \Gamma\varphi_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s)))ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t \|(f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\| \, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \\
&\leq La\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une contraction si $a < \frac{1}{L}$.
Nous avons établi que l'opérateur de Picard est une contraction sur les espaces de Banach avec la métrique induite par la norme uniforme. Ceci nous permet d'appliquer le théorème de point fixe de Banach pour conclure que l'opérateur admet un point fixe unique. En particulier , il existe une fonction unique $\varphi \in C(I_a(t_0), B_b(y_0))$,
tel que $\Gamma\varphi = \varphi$ cette fonction est la solution unique du probleme de valeur initiale, valable sur l'intervalle I_a ou a satisfait la condition

$$a < min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

■

Exemple 2.2.3. *On cherche une fonction inconnue $y(t)$ vérifiant l'equation intégrale suivante :*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a.y(s)ds.$$

Dans la suite on va travailler dans un cadre plus pratique (mais la méthode est la même que dans le cas abstrait).

$$y(t) = \frac{1}{3} + \int_{1}^{t} 2y(s)ds.$$

Approximation successives : $y_0(t) = \frac{1}{3}, y_1(t) = \frac{1}{3}(1 + 2(t-1)), y_2(t) = \frac{1}{3}(1 + 2(t-1) + \frac{2^2(t-1)^2}{2}), y_3(t) = \frac{1}{3}\left(1 + 2(t-1) + \frac{2^2(t-1)^2}{2} + \frac{2^3(t-1)^3}{3!}\right)$ ....

Ou bien, on définit l'opérateur de Picard :$\Gamma : C_0[-2,4] \to C_0[-2,4]$ *tel que*

$$\Gamma(y)(t) = \frac{1}{3} + \int_{1}^{t} 2y(s)ds.$$

Notre problème devient sous cet angle en problème de point fixe de Γ (un point fixe pour Γ est une fonction continue).

On remarque que pour tout $t \in [-2,4]$,

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| = \frac{2^n|t-1|^n}{n!} \leq \frac{6^n}{n!} \leq \frac{6^{12}6^{n-12}}{12!13.14...n} \leq \frac{6^{12}6^{n-12}}{12!12.12...12} = \frac{6^{12}6^{n-12}}{12!2^{n-12}6^{n-12}}$$

Ceci montre que la suite $y_n(t)$ forme une suite de cauchy pour la norme sup de $C_0[-2,4]$ et donc converge uniformément vers une fonction limite $y(t)$.

On a la chance de connaitre une expression explicite de $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2(t-1)}.$$

Vérifions que $y(t)$ est bien une solution de notre équation intégrale.

Approximations successives :(avec $t_0 = 0$)

$$y_0(t) = y_0$$

$$y_1(t) = y_0 + \int_0^t ay_0 ds = y_0 + ay_0 t$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_0^t a(y_0 + ay_0 s)ds = y_0\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}\right)$$

$$y_n(t) = x_0\left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2} + ... + \frac{a^nt^n}{n!}\right).$$

Converge quand $n \to +\infty$ vers $y_0 exp(at)$.

2.2.3 Equation et inéquation intégrales, Lemme de Gronwall

Problème1

Cherchons les solutions continue de l'equation intégrale $y(t) = \int_0^t y(s)ds$.
On voit que $y \equiv 0$ est bien une solution. Mais y a-t-il d'autres solutions On a en effet un résultat d'unicité plus fort :

Lemme 2.2.1. *Soit $L \geq 0$. Si $y \in C([0,T])$ est une solution de l'inéquation intégrale :*

$$0 \leq y(t) \leq L \int_0^t y(s)ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \tag{2.7}$$

Alors : $y(t) \equiv 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T$.

Preuve .
Soit $M = Sup_{[0,T]} y = Max_{[0,T]} u$. Par continuité, on a $M < +\infty$. Alors
$y(t) \leq M \rightarrow y(s) \leq M$ D'aprés (1) on'a :
$y(t) \leq LMt \rightarrow y(s) \leq LMs$ D'aprés (1) on'a :
$y(t) \leq M\frac{L^2t^2}{2}$....., $y(t) \leq M\frac{L^nt^n}{n!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$
Vrai $\forall n$ d'où $y(t) \equiv 0$. ■

Problème 2

Cherchons les solutions continues de l'équation intégrale $y(t) = y_0 + L\int_0^t y(s)ds$.
On voit que $y(t) = y_0e^{Lt}$ est bien une solution. Mais y a-t-il d'autres solutions.

Lemme 2.2.2. *Soit $y_0 > 0$. Si $y \in C([0,T])$ est une solution de l'inéquation intégrale*

$$0 \leq y(t) \leq y_0 + L \int_0^t y(s)ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors $y(t) \leq y_0e^{Lt}, \quad \forall 0 \leq t \leq T$.

Preuve . Posons $y(t) = y_0e^{Lt}u(t)$.
Nous allons montrer que $u(t) \leq 1$. Notons que $u(0) \leq 1$.
Soit $M > 1$ et supposons par absurde que l'ensemble $I_M = \{0 < t \leq T : u(t) \geq M\}$ soit non vide.
Posons t^* sa borne inférieure. par continuité (car $u(0) \leq 1$) $u(t^*) = M$. On a

$$y_0e^{Lt^*}u(t^*) = y(t^*) \leq y_0 + L\int_0^{t^*} y(s)ds = y_0 + \int_0^{t^*} Ly_0e^{Ls}u(s)ds \leq y_0 + y_0Me^{Lt^*} - y_0M.$$

D'ou $0 \leq y_0(1-M)$. Donc $M \leq 1$, contraire à l'hypothèse. L'ensemble I_M est donc vide et $u(t) \leq 1, \quad \forall 0 \leq t \leq T$. ∎

Problème de Cauchy : équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Problème de point fixe de Picard :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Proposition 2.2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(t_0; y_0) \in \Omega$. Soit*

$$\begin{cases} y : I \to \mathbb{R}^n \ \textit{continue avec} \\ (t, y(t)) \in \Omega, \forall t \in I \end{cases}.$$

Alors : $y(t)$ est solution de Cauchy (et donc C^1) si et seulement si elle est solution de (Picard).

Preuve .

1. Cauchy$\Rightarrow$ Picard
   Si $y(t)$ est une solution C^1 au problème de Cauchy, alors
   $$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{dy}{ds}(s) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$
2. Picard $\Rightarrow$ Cauchy
   Puisque $I \ni s \mapsto y(s)$ et $(s, y) \in \Omega \to f(s, y)$ sont continues, la composée $t \to f(t, y(t))$ est continue. Par le théorème fondamental d'intégration, $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} v(s, y(s))ds = f(t, y(t))$ existe et continue. Comme $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$, la fonction $y(t)$ est bien C^1 et elle est solution du problème de Cauchy.

∎

2.2.4 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème de point fixe de Picard. En effet, nous verrons qu'une facon de démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec E un ensemble de fonctions et φ une application bien choisie.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On introduit le problème de Cauchy suivant :

Etant donnée $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y), (t, y) \in U$ telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Définition 2.2.6. *Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour problème de Cauchy si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de cauchy $y(t_0) = y_0$ avec : $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.*

Définition 2.2.7. *f est localement Lipschitzienne par rapport à la variable y sur U si $\forall (r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage V de (r_0, y_0) dans U et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in V$, on ait $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.*

Thèoréme 2.2.2. *(cauchy-Lipchitz)(Existence et unicité locale)*
Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement Lipchitzienne par rapport à y sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.
De plus, si on pose $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que itérée $\Phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte.

Preuve . : On commence par construire un cylindre de sécurité pour problème de Cauchy.
Soit V un voisinage de (t_0, y_0) sur lequel f est k-Lipschitzienne par rapport à y,
et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que f est bornée sur C_0.
Soit $M = Sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y(t))\|$. On pose $T = min(T_0, \frac{r_0}{M})$.
On va montrer que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour problème de Cauchy.
Soit $y : I \subset [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ avec $y(t_0) = y_0$ et $y' = f(t, y)$ $\forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + T[$ `tel que` $y(\tau)$ `n'appartient pas` $B_f(y_0, r_0)$. De plus, supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + T[: y(t)$ `n'appartient pas` $B_f(y_0, r_0)\}$ soit non vide. On pose $\tau = inf J$.

Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$, et de plus $d(y_0, y(\tau)) = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C_0$, $\forall t \in [t_0, \tau]$ et $y' = f(t, y)$ on a, par le théorème des Accroisement finis,

$$r_0 = \|y_0 - y(\tau)\| = \|y(t_0) - y(\tau)\| \leq |t_0 - \tau| sup_{t \in [t_0, \tau]} |y'(t)| < MT \leq r_0.$$

Donc par passage à la limite ($B_f(y_0, r_0)$ étant fermé) on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$. De même on montre que $y(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $y(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in I$. Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $Sup_C |f| = M$ et f est k-lipschitzienne par rapport à y sur C.
On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], B(y_0, r_0))$ muni de la distance $d = \|.\|_\infty$.
$\forall y \in F$ on associe $\Phi(y)$ définie par :

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du.$$

On montre d'abord l'équivalence suivante :y est solution de l'équation différentielle si et seulement si y est un point fixe de Φ :
($\Leftarrow$) Supposons y est un point fixe de Φ .
Alors $\forall y \in F$ on a $\Phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du$.
Or f est continue sur U. De plus, y est dérivable sur $[T_0 - t, T_0 + t]$ et sa dérivée égale $f(t, y(t))$, i.e. $y'(t) = f(t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(u, y(u)) du = y_0$. Donc f est solution du problème de Cauchy.

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que y est solution de l'équation différentielle. On a alors $y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$.
On peut intégrer y' par rapport à u car $y'(u) = f(u, y(u))$ et $u \to f(u, y(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce meme segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} y'(u) du = \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

Donc, on a bien $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du = \Phi(y)(t)$ et donc y est point fixe Φ.
On veut appliquer le théoréme du point fixe à Φ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que Φ est une application de F dans F. Pour cela on montre que

$\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Soit $y \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(y)(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u))\| du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq M.T \leq r_0. \end{aligned}$$

Donc : $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ d'ou $\Phi(y) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par Φ^p.

2. On montre maintenant que Φ^p est contractante. Soient $y, z \in F$. On note $y_p = \Phi^p(y)$ et $z_p = \Phi^p(z), \forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z).$$

Initialisation : C'est évident dans le cas $p = 0$.

Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait alors

$$\begin{aligned} \|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t) &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k\|y_p(u) - z_p(u)\| du \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{|u - t_0|^p}{p!} d(y, z) du \right| \\ &\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \left| \int_{t_0}^{t} |u - t_0|^p du \right| \\ &= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z) \left[\frac{|u - t_0|^{p+1}}{p + 1} \right]_{u=t_0}^{u=t} = k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p + 1)!} d(y, z). \end{aligned}$$

Ce qui achéve la récurrence.

Comme $|t - t_0| \leq T$, on a $d(y_p, z_p(t)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$, donc Φ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$ Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ (car $lim_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$). Donc, pour $q \geq p$, Φ^q est contractante.

3. On déduit du théorème du point fixe que Φ^q admet un unique point fixe y. De plus $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$ donc $\Phi(y)$ est un point fixe de Φ^q, et par unicité du point fixe de Φ^q on a $\Phi(y) = y$.

Comme les points fixes de Φ sont des points fixes de Φ^q on en déduit que y est l'unique point fixe de Φ. Finalement, y est l'unique solution de problème.

■

2.2.5 Existence globale

On peut parfois montrer que toutes les solutions maximales sont globales. C'est le cas o*ù* la fonction f est définie sur X tout entier et si elle est globalement Lipchitzienne alors il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition, ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz.

Thèoréme 2.2.3. *On suppose* $f \in \mathcal{C}(I \times X, X)$ *et globalement Lipchitzienne par rapport à* u. *Alors, quel que soit* $(t_0, u_0) \in I \times X$, *il existe (un unique)* $u \in \mathcal{C}(I, X)$ *solution de problème de Cauchy.*

Preuve . Reprendre la démonstration du théorème précedent, en utilisant la constante de Lipschitz globale de f, quels que soient a, b tels que $t_0 \in [a, b] \subset I$, on construit une suite de solutions approchées (u^n) qui est de cauchy dans $\mathcal{C}([a, b], X)$. ■

Chapitre 3

Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation fractionnaire. on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann- Liouville. Nous définissons certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction d'Erreur. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul diférentiel d'ordre fractionnaire. De telles fonctions sont dites Fonctions spéciales.
On introduit la notion de dérivation fractionnaire. On s'intéresse aux deux méthodes de dérivation les plus utilisées : la méthode de Riemann-Liouville et la méthode de Caputo .

3.1 Fonctions Mathématiques Utiles

Dans cette section nous présentons certaines théories qui concernent des fonctions spéciales qui sont utilisées dans les chapitres, nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et la fonction Bêta. Ces fonctions jouent un rôle important dans la théorie de différentiation d'ordre arbitraire et dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

3.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est défnie par une intégrale impropre.

Définition 3.1.1. *[5]*
La fonction Gamma est défnie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad Re(x) > 0. \tag{3.1}$$

En utilisant les relations de récursion que nous pouvons obtenir des formules

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad Re(x) > 0, \tag{3.2}$$

en particulier

$$\Gamma(x) = (x-1)!, \quad \forall x \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(x+1) = x!, \quad \forall x \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

Cas particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

Exemple 3.1.1. *Pour $x = \frac{1}{2}$ on a par définition :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

On définit la fonction Gamma incomplète par :

$$\Gamma^*(\alpha, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) t^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \alpha > 0.$$

3.1.2 Fonction Bêta

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale impropre.

Définition 3.1.2. *[5]*
La fonction Bêta est définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0. \tag{3.5}$$

Le changement de variable

$$u = 1 - t$$

permet de montrer que la fonction Béta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$B(x, y) = \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1} dt$$

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta.$$

Proposition 3.1.1. *[5]*

La fonction Bêta est reliée aux fonction Gamma par la relation suivante :

$\forall x, y > 0,$ *on a :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3.6}$$

Preuve .

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\
&= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \right) dt_1.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$t'_2 = t_1 + t_2.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{y-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t_1} (t'_2 - t_1)^{y-1} t_1^{x-1} dt_1.
\end{aligned}$$

Si on pose $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$, on arrive à :

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left(\int_0^1 (t'_1 t'_2)^{x-1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{y-1} t'_2 dt'_1 \right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left((t'_2)^{x+y-1} B(x,y) \right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{x+y-1} dt'_2 B(x,y) \\
&= \Gamma(x+y) B(x,y).
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. ■

3.1.3 Fonction Erreur

La fonction Erreur est définie par l'intégrale suivante :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \ x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

La fonction Erreur Complémentaire notée Erfc est définie par :

$$Erfc(x) = 1 - Erf(x). \tag{3.8}$$

Comme conséquences on a :

$$Erf(0) = 0,$$

et

$$Erf(\infty) = 1.$$

3.2 Formule de Dirichlet

Soient $h(x;y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet.

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x,y) dx.$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.
Par exemple, si on prend

$$h(x,y) = g(x) f(y),$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha,\beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy \tag{3.9}$$

où B est la fonction bêta.

3.3 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

3.3.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a;b]$

Définition 3.3.1. *Soit $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive de f est donnée par :*

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Proposition 3.3.1. *Soit $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre n de f est donnée par :*

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt.$$

Preuve . En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} I_a^2 &= \int_a^x \left(I_a^1 f(s) \right) ds \\ &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt \right) ds \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Dirichlet (3.9) on a :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left(\int_t^x f(t)dt \right) ds \\ &= \int_a^x f(t) \left(\int_t^x ds \right) dt \end{aligned}$$

alors

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt.$$

De même on a

$$\begin{aligned} I_a^3 f(x) &= \int_a^x \left(I_a^2 f(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_a^4 f(x) &= \int_a^x \left(I_a^3 f(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3} \int_a^x (x-t)_3 f(t)dt. \end{aligned}$$

Par récurence, on a :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt$$

qui est la formule recherchée. ∎

On adopte alors, la définition suivante :

3.3.2 L'integrale de Riemann-Liouville

Définition 3.3.2. *Soient α un réel positif et $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt. \tag{3.10}$$

Proposition 3.3.2. *Pour toute fonction continue f, on a :*

1.

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x), \quad \alpha \ , \beta > 0, \tag{3.11}$$

2.

$$\frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f(x)\right) = I_a^{\alpha-1} f(x), \quad \alpha > 1. \tag{3.12}$$

Preuve . On montre la première égalité.

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left(I_a^\beta f(s)\right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt\right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} ds \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

D'aprés la formule de Dirichlet (3.9), on a :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left(I_a^\beta f(x)\right) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\ &= I_a^{(\alpha+\beta)} f(x). \end{aligned}$$

D'où la première égalité.

On montre maintenant la deuxième égalité.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right) \end{aligned}$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \longrightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue, et on a Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(I_a^\alpha f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}\left((x-t)^{\alpha-1}f(t)\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)dt \\
&= I_a^{\alpha-1}f(x)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

3.3.3 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 3.3.1. *Considérons la fonction*

$$f(x) = x^\beta.$$

En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^\beta dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}x^{\alpha-1}(xu)^\beta x du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\beta}\int_0^1 u^\beta(1-u)^{\alpha-1}du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

d'où :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}.$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$.

En effet, pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}. \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $\beta = 0; 1; 2$ on a :

$$\begin{aligned} I^{\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\ I^{\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\ I^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}. \end{aligned}$$

De ce qui précède,on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α d'une constante k est donnée par :

$$I^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Exemple 3.3.2. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$, alors :*

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{3.13}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \quad (0 \leq y \leq 1)$$

alors (3.13) devient

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1} \left[x+(x-a)y-x\right]^\beta (x-a)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-a)(1-y)\right]^{\alpha-1} (x-a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (3.5)puis de la relation (3.6)on arrive à :

$$\begin{aligned} \left(I_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha,\beta+1) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha,\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma 1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\left(I_a^\alpha (t-a)^\beta\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{3.14}$$

3.4 Dérivées de l'intégrale fractionnaire et l'integrale fractionnaire de dérivées

Thèoréme 3.4.1. *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue sur $J = [0; b)$. Si Df est continue alors pour tout $x > 0$ on a :*

$$D\left[I^\alpha f(x)\right] = I^\alpha \left[Df(x)\right] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}. \tag{3.15}$$

Preuve . Par définition on a

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$t = x - s^\lambda$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

et

$$dt = -\lambda s^{\lambda-1} ds$$

alors on obtient

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x^\alpha}^0 (s^\lambda)^{\alpha-1} f(x-s^\lambda)(-\lambda x^{\lambda-1}) ds$$

ce qui se simplifie à

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x^\alpha} f(x-s^\lambda) ds.$$

En utilisant la règle d'intégration de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^{b(t)} f(t,x)dx\right] = f(t,b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,x)dx.$$

On a alors

$$D\left[I^\alpha f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(0)\alpha x^{\alpha-1} + \int_0^{x^\alpha} \frac{d}{dx}(x-s^\lambda)ds\right].$$

Maintenant, si on inverse le changement de variable, (i.e)

$$t = x - s^\lambda$$

donc

$$ds = -\frac{1}{\lambda}s^{1-\lambda}dt$$

on obtient

$$D\left(I^\alpha f(x)\right) = \frac{f(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_x^0 \frac{d}{dx}f(t)\left(-\frac{1}{\lambda}s^{1-\lambda}\right)dt.$$

En conclusion, depuis $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et $s = (x-t)^{\frac{1}{\lambda}}$ l'équation précédente simplifie à

$$D\left[I^\alpha f(x)\right] = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\frac{d}{dx}f(t)dt$$

ce qui implique que

$$D\left(I^\alpha f(x)\right) = I^\alpha\left(Df(x)\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}.$$

■

3.5 Dérivation fractionnaire

3.5.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Définition 3.5.1. *Soit $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^n(I^{(n-\alpha)}f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f(t)dt \end{aligned}$$

Si on suppose que :

$$\beta = n - \alpha, \quad \textit{avec} \quad 0 < \beta < 1,$$

On a alors :

$$D^{\alpha} f(x) = D^{n}\left(I^{\beta} f(x)\right).$$

Thèoréme 3.5.1. *[1, 7]*
Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,$D_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$$D_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\left(D_a^{\alpha} f\right)(x) + \mu\left(D_a^{\alpha} g\right)(x).$$

Proprietés 3.5.1. *[1, 7]*
Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha \leq n$, $m-1 \leq \beta \leq m$.

1. *Pour $f \in L^1([a,b])$, l'égalité :*

$$D_a^{\alpha}(I_a^{\alpha} f(t)) = f(t)$$

   est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

2. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1([a,b])$, la relation :*

$$D_a^{\beta}\left(D_a^{\alpha} f\right)(x) = (I^{\alpha-\beta} f)(x)$$

   est vrai presque partout sur $[a,b]$.

3. *Si $\beta \geq \alpha > 0$ et la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors on a :*

$$D_a^{\beta}(I^{\alpha} f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x)$$

   .

4. *Si $f \in L^1([a,b])$ et $I^{n-\alpha)} f \in AC^n([a,b])$ avec $n = [\Re(\alpha)+1]$, alors :*

$$[I_a^{\alpha}(D_a^{\alpha} f)](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{j} I_a^{n-\alpha} f\right](x).$$

Exemple 3.5.1. *Soit$0 < n-1 < \alpha < n$. Considérons la fonction monôme*

$$f(x) = x^{\mu}, \quad \mu > 0.$$

La dérivée d'ordre α de f est donnée par :

$$D^{\alpha} f(x) = D^{n}\left[I^{(n-\alpha)} x^{\mu}\right]$$

Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^1[I^{(1-\alpha)}x^\mu] \\ &= D^1[I^\beta x^\mu], \quad \beta = 1-\alpha, \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\mu &= D^1\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)}x^{\beta+\mu}\right] \\ &= (\beta+\mu)\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\beta+\mu)\Gamma(\beta+\mu)}x^{\beta+\mu-1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu)}x^{\beta+\mu-1} \end{aligned}$$

comme $\beta = 1-\alpha$, on obtient alors :

$$D^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}.$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} D^1 x^\mu &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)}x^{\mu-1} \\ &= \mu x^{\mu-1} \\ &= \frac{d}{dx}x^\mu. \end{aligned}$$

On retrouve alors la dériavation classique .
Si $\mu = 0$

$$\begin{aligned} D^\alpha x^0 &= D^\alpha 1 \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Il est alors important de noter que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une constante n'est pas forcément nulle.

Résumons quelques dérives fractionnaires de fonctions élementaires :

$f(x)$	$D^{\frac{1}{2}}f(x) = D^1\left[D^{\frac{-1}{2}}f(x)\right]$	$D^{\frac{1}{2}}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\frac{1}{2}+1)}x^{\mu-\frac{1}{2}}$
x^0	$D^{\frac{1}{2}}x^0 = D^1\left[2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$D^{\frac{1}{2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2}})x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$
x^1	$D^{\frac{1}{2}}x^1 = D^1\left[\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}\right] = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$D^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$
x^2	$D^{\frac{1}{2}}x^2 = D^1\left[\frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}\right] = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$	$D^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$

3.5.2 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les Mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 3.5.2. *Soient $0 < n-1 < \alpha < n$ et f une fonction de classe $C^n([a;b])$. La dérivée de Caputo d'ordre α de la fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}f(x) &= I^{n-\alpha}(D^n f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1}dt. \end{aligned}$$

Exemple 3.5.2. *Considérons la fonction*

$$f(x) = x^{\beta}.$$

Pour $0 < n-1 < \alpha < n$, on a :

$$D^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}(D^n x^{\beta})$$

ou

$$D^n x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}x^{\beta-n})$$

par suite

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}t^{\beta-n}dt$$

on fait le changement de variable :

$$t = yx,$$

qui implique

$$dt = xdy,$$

on obtient, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt &= \int_0^1 (x-xy)^{n-\alpha-1}(yx)^{\beta-n} x dy \\
&= \int_0^1 x^{n-\alpha-1}(1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} x^{\beta-n+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\beta-\alpha}(1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\
&= x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha}$$

et finalement, on obtient :

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.$$

En particulier, pour $\beta = 0$, on a :

$$D^\alpha x^0 = D^\alpha 1 = 0.$$

Contrairement à la dérivation de Riemann-Liouvuille, la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

3.5.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.
On note par ${}_a^R D_x^\alpha$ la dérivée au sens de Riemann-Liouville et par ${}_a^C D_x^\alpha$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Thèoréme 3.5.2. *Soit $n-1<\alpha<n$, $(n\in\mathbb{N}^*)$ Supposons que f est une fonction telle que*

$$ {}_a^C D_x^\alpha = {}_a^R D_x^\alpha - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Sigma(m-\alpha+1}. \tag{3.16}$$

De la relation (3.16), on déduit que si

$$f^{(m)}=0 \quad m=1,2,...,n-1$$

on aura

$$ {}_a^C D_x^\alpha = {}_a^R D_x^\alpha$$

et les deux définitions sont alors équivalentes.

Si $a=0$, la formule (3.12) se réduit à :

$$ {}^C D_x^\alpha = {}^R D_x^\alpha - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(x-a)^{m-\alpha}}{\Sigma(m-\alpha+1)}. \tag{3.17}$$

3.5.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

1. **Linéarité**

   La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t).$$

2. **La règle de Leibniz**

   Pour n entier on a

$$\frac{d^n(fg)}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

   La généralisation de cette formule nous donne

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t) + R_n^\alpha(t).$$

   où $n \geq \alpha+1$ et

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi$$

   avec $\lim_{n\to\infty} R_n^\alpha(t)=0$. Si f et g sont continues dans $[a;t]$ ainsi que toutes leurs dérivées, la formule devient :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t).$$

   D^α est la dérivée fractionnaire au sens de au sens de Riemann-Liouville.

3.6 Lemmes fondamentaux

Lemme 3.6.1. *Soit $\alpha > 0$; alors l'équation différentielle*

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t^{n^2} + ... + c_{n-1}t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$,$i = 0, 1, 2...n-1, n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.6.2. *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n,\ n = [\alpha] + 1$.

Preuve . On a par la définition de la dérivée fractionaire de Caputo

$$^{c}D^{\alpha}h(t) = I^{n-\alpha}h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégrale fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) &= I^{\alpha}I^{n-\alpha}h^{(n)}(t)\\
&= I^{nRL}D^{n}h(t)\\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}\lim_{t\to 0}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n}h(t)\\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} h(t)\right)(0)\\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n}\frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)}h^{(n-j)}(0).
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha c}D^{\alpha}h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{(k)}(0)t^{k}}{k!}\\
&= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c'_k t^{k}}{k!}\\
&= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k t^{k}}{k!}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Etude d'un problème fractionnaire de type de Cauchey avec poids

4.1 Problème fractionnaire de type Cauchy de Riemann-Liouville

4.1.1 Position du problème

On considère le problème fractionnaire de type Cauchy suivant :

$$D^{\alpha}u(x) = f(x, u(x)); \quad 0 < x < T \tag{4.1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha}u(x) = u_0, \tag{4.2}$$

où f est une fonction continue sur $G =]0, T] \times]u_0 - \delta, u_0 \times \delta[$ pour $(\delta > 0)$ et D^{α} est l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]0, 1[$ défini par :

$$D^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^x (x-t)^{-\alpha}u(t)dt. \tag{4.3}$$

On s'interesse ici des solutions continues. Pour cela, et en tenant compte aussi de la condition aux limites (4.2), on va chercher à résoudre le problème dans l'espace

$$X = \left\{ f :]0, T] \longrightarrow \mathbb{R} \quad continue \quad et \lim_{x \to 0^+} x^{1-\alpha}f(x) \quad existe \right\}. \tag{4.4}$$

Il est clair que pour toute fonction $f \in X$, la fonction $(.)^{1-\alpha}f(.)$ est prolongeable par continuité sur $[0, T]$, de plus f est définie sur $]0, T]$, d'où l'espace X est identifié à l'espace $C_{1-\alpha}([0, T])$ défini par l'espace des fonctions continues avec poids et on a donc :

Thèoréme 4.1.1. *L'espace X défini par(4.4), muni de la norme :*

$$\|f\|_X = sup_{x\in[0,T]} \left|x^{1-\alpha} f(x)\right| \tag{4.5}$$

est un espace de Banach.

4.1.2 Réduction du problème à une équation intégrale de Volterra

Le point de départ pour la transformation du problème à une équation intégrale sera la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soient f une fonction continue sur $]a, b]$ et $\alpha \in]0, 1[$. Si*

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha} f(x) = c$$

alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \left(I^{1-\alpha} f\right)(x) = c\Gamma(\alpha).$$

Preuve . Puisque $\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$, on a

$$\forall \varepsilon' > 0; \exists \delta(\varepsilon') \quad tel \quad que \quad pour \quad 0 < t < \delta : \left|t^{1-\alpha} f(t) - c\right| < \varepsilon'. \tag{4.6}$$

D'aprés la relation (3.14) on a

$$\Gamma(\alpha) = \left(I^{1-\alpha}(t)^{\alpha-1}\right)(x). \tag{4.7}$$

En introduisant la définition de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville donné par (3.10) , ainsi que la relation (4.7) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|(I^{1-\alpha} f)(x) - c\Gamma(\alpha)\right| &= \left|(I^{1-\alpha} f)(x) - c(I^{1-\alpha} t^{\alpha-1})(x)\right| \\
&= \left|I^{\alpha-1}(f(x) - c.t^{\alpha-1})(x)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t-s)^{-\alpha}(f(x) - cs^{\alpha-1})ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha} \int_0^x (t-s)^{-\alpha} \left|f(s) - cs^{\alpha-1}\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t-s)^{-\alpha}.s^{\alpha-1} \left|s^{1-\alpha} f(s) - c\right| ds.
\end{aligned}$$

Maintenant si on prend $0 < x < \delta$ alors $0 < t < x < \delta$, et donc d'aprés (4.6) on arrive à

$$\begin{aligned}
\left|(I^{1-\alpha} f(x) - c\Gamma(\alpha)\right| &\leq \frac{\varepsilon'}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (t-s)^{-\alpha}.s^{\alpha-1}.ds \\
&= \epsilon'.\left(I^{1-\alpha} s^{\alpha-1}\right)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi d'aprés (4.7) on trouve

$$\left|\left(I^{1-\alpha}f\right)(x) - c\Gamma(\alpha)\right| < \epsilon'.\Gamma(\alpha). \tag{4.8}$$

Il suffit alors de choisir $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)}$ pour aboutir au résultat désiré . ■

Thèoréme 4.1.2. *Si $u \in C(]0,T[)$, alors u satisfait (4.1)-(4.2) si et seulement si u satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$u(x) = u_0.x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,u(t))dt. \tag{4.9}$$

Preuve . On a pour $x \in]0,T]$

$$D^\alpha u(x) = f(x,u(x)).$$

En composant par l'opérateur d'intégration d'ordre α dans les deux côtés de l'équation précédente , on obtient :

$$I^\alpha(D^\alpha u) = I^\alpha(f(.,u(.)))(x). \tag{4.10}$$

D'autre part , notons que la propriété (4) de la proposition (3.5.1) devient pour $0 < \alpha < 1$:

$$\left(I_a^\alpha(D_a^\alpha f)\right)(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{x\to a^+}\left(I_a^{1-\alpha}f\right)(x). \tag{4.11}$$

Donc en appliquant (4.11) à u pour $a = 0$ et tenant compte de la proposition (4.1.1) et la condition (4.2) , on obtient

$$I^\alpha\left(D^\alpha u(x)\right) = u(x) - u_0. \tag{4.12}$$

D'autre part, d'apés la définition (3.10), on a :

$$I^\alpha f(x,u(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x f(t,u(t))(x-t)^{\alpha-1}dt. \tag{4.13}$$

Enfin , avec (4.12) et (4.13), l'équation (4.10) devient

$$u(x) = u_0.x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,u(t))dt. \tag{4.14}$$

D'où le résultat. ■

4.1.3 Théorème d'existence et d'unicité

Après avoir transformé le problème (4.1)-(4.2) en équation intégrale de type Volterra (4.9) dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur, qui sera défini par la suite, on va donner des conditions suffisantes sur f qui conduisent à l'existence et l'unicité d'une solution continue du problème,(4.1)-(4.2) par le principe de contraction de Banach.
Plusieurs variantes de ce genre de résultats, dans un cadre plus général et dans des espaces différents (de fonctions absolument continues, de fonctions intégrables, d'espaces avec poids...) peuvent être trouvés dans [1].
On défini l'opérateur A sur X par :

$$(Au)(x) = x^{\alpha-1}u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t,u(t))dt. \tag{4.15}$$

On suppose que les hypothèses suivantes soient satisfaites :

$$\forall y \in]u_0-\delta, u_0+\delta[: f(.,y) \in X \tag{4.16}$$

$$\exists L > 0 : |f(x,y_1) - f(x,y_2) \leq L|y_1-y_2| \ \ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in G \tag{4.17}$$

c'est à dire que f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.
avec

$$L < \frac{\Gamma(2\alpha)}{T^\alpha\Gamma(\alpha)}. \tag{4.18}$$

Commençons d'abord par voir que l'opérateur$A$ envoie X à X.

Proposition 4.1.2. *Sous les hypothèses (4.16)-(4.17), l'opérateur A est une injection continue sur X.*

Preuve . Il est clair que Au est continue sur $]0,T]$.
De plus, on a :
$\left|x^{1-\alpha}(Au)(x) - u_0\right| \leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\alpha)^{\alpha-1}|f(t,u(t))|dt$

$$\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\left[|f(t,u(t)) - f(t,u_0)| + |f(t,u_0)|\right]dt.$$

Vu l'hypothèse (4.17) on a :

$$\begin{aligned}
\left|x^{1-\alpha}(Au)(x)-u_0\right| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,|[L|u(t)-u_0|+|f(t,u_0)||]t \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,[L|u(t)|+L|u_0|+|f(t,u_0)|]\,dt \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}L|u_0|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}dt \\
&+ \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}.t^{\alpha-1}\times\left[L.t^{1-\alpha}|u(t)|+t^{1-\alpha}|f(t,u_0|\right]dt.
\end{aligned}$$

Puisque $u\in X$ et d'après l'hypothèse (4.16), il existe M tel que :

$$\sup_{[0,T]}\left[L.t^{1-\alpha}|u(t)|+t^{1-\alpha}|f(t,u_0|\right]$$

d'où :

$$\left|x^{1-\alpha}(Au)(x)-u_0\right| \leq \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)}L|u_0|+\frac{M.\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.x^{\alpha}. \tag{4.19}$$

En faisant tendre x vers 0 dans l'inégalité (4.19), on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}(Au)(x)=u_0$$

parsuite $Au\in X$. ■

Thèoréme 4.1.3. *Sous les hypothèses (4.16)-(4.17) et (4.18), il existe une unique solution de l'équation intégrale (4.9) dans l'espace X.*

Preuve . En tenant compte de la proposition (4.1.2), il suffit de prouver que A est un opérateur contractant. En effet.
soient $u,v\in X$ on a :

$$\left|x^{1-\alpha}((Au)(x)-(Av)(x))\right| \leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t,u(t))-f(t,v(t))|dt$$

D'après (4.17), on trouve alors

$$\begin{aligned}
\left|x^{1-\alpha}((Au)(x)-(Av)(x))\right| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}|u(t)-v(t)|dt \\
&= \frac{L}{\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}.t^{\alpha-1}.t^{1-\alpha}|u(t)-v(t)|dt \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}x^{1-\alpha}.\sup_{[0,T]}t^{1-\alpha}|u(t)-v(t)|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}t^{\alpha-1}dt.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la norme de X définie par (4.5) et de la définition (3.10) de l'intégrale fractionnaire, on a

$$\left|x^{1-\alpha}((Au)(x)-(Av)(x))\right| \leq \frac{L\|u-v\|_X}{\Gamma(\alpha)}.x^{1-\alpha}.\Gamma(\alpha)I^{\alpha}x^{\alpha-1}. \tag{4.20}$$

Ainsi d'après le résultat (3.14), l'inégalité (4.20) devient

$$\left|x^{1-\alpha}((Au)(x)-(Av)(x))\right| \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}x^{\alpha}\|u-v\|_X.$$

Puisque $x \in]0,T]$, alors

$$\left|X^{1-\alpha}((Au)(x)-(Av)(x))\right| \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}T^{\alpha}\|u-v\|_X.$$

Par suite

$$\|Au-Av\|_X \leq \frac{L\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}T^{\alpha}\|u-v\|_X$$

. Donc d'après l'hypothèse (4.18), l'opérateur A est contractant et le résultat découle alors du théorème (1.3.1). ■

Maintenant, comme conséquence directe des théorèmes (4.1.2) et (4.1.3) on a le résultat suivant :

Thèoréme 4.1.4. *Sous les hypothèses (4.16)-(4.17)et (4.18), il existe une unique solution continue du problème fractionnaire (4.1)(4.2).*

4.2 Problème fractionnaire de type Cauchy de Caputo

Dans cette section, on s'intéresse aux des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo avec conditions initiales suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad pour \quad tout \quad t \in J = [0,T], 0 < \alpha < 1 \tag{4.21}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Des résultats d'existence et d'unicité sont obtenus pour ce problème moyennant le théorème de point fixe de Banach.

4.2.1 Résultats d'existence

Dans cette section, on donne les conditions l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.21)-(4.22) dans l'espace $C_\gamma[0,T]$ définie pour $0<\alpha<1$ et $\gamma \in \mathbb{R}(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ par

$$C_\gamma = \left\{ f(t) : t^\gamma f(t) \in C[0,T], \|f\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma f(t)\|_C \right\} \tag{4.23}$$

$$C_\gamma^\alpha[0,T] = \{ f(t) \in [0,T] :^c D_{0^+}^\alpha f \in C_\gamma[0,T] \} \tag{4.24}$$

Notre approche est basée sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale de Volterra

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds, \ \ 0 \leq t \leq T. \tag{4.25}$$

Lemme 4.2.1. *soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $(0<\alpha<0)$, et soit $f_{1-\alpha}(t) = \left(I_{0^+}^{1-\alpha} f\right)$.Si $f(t) \in C_\gamma[0,T]$ et $f_{1-\alpha}(t) \in C_\gamma^1[0,T]$, alors*

$$(I^\alpha D^\alpha f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, t \in [0,T]. \tag{4.26}$$

Lemme 4.2.2. *Si $\gamma \in \mathbb{R}(0 \leq \gamma < 1)$, alors l'opérateur d'intégration $I_{0^+}^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est borné dans $C_\gamma[0,T]$*

$$\|I^\alpha g\|_{C_\gamma} \leq T^\alpha \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \|g\|_{C_\gamma}. \tag{4.27}$$

Tout d'abord, nous établissons une équivalence entre le problème (4.21)-(4.22) et l'équation intégrale (4.25) dans l'espace $C[0,T]$ des fonctions continues.

Lemme 4.2.3. *Soit $0<\alpha<1$ et soit $h:[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \tag{4.28}$$

si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \ \ t \in [0,T] \tag{4.29}$$

$$y(0) = y_0 \tag{4.30}$$

Preuve . Soit y la solution de l'équation intégrale (4.28). On commence par la vérification de la condition initiale, on a d'après (4.28)

$$|y(t) - y_0| = \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds\right|$$

alors

$$\begin{aligned} |y(t) - y_0| &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} t^\alpha. \end{aligned}$$

On prend la limite quand $t \longrightarrow 0$, et on obtient

$$y(0) = y_0.$$

Donc (4.28) vérifie la condition initiale (4.30) . Il reste à montrer qu'elle vérifie l'équation (4.29). On a,

$$\begin{aligned} y(t) - y_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= I^\alpha h(t). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur D^α aux deux membres de l'égalité,
on aura

$$D^\alpha (y(s) - y_0)(t) = h(t),$$

de plus, on a

$$D^\alpha (y(s) - y_0)(t) =^c D^\alpha y(t),$$

par suite

$${}^c D^\alpha y(t) = h(t), \ \ t \in [0, T].$$

Inversement on a

$${}^c D^\alpha y(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} [y(s) - y_0](t).$$

Comme h est continue, il suit que ${}^c D^\alpha y$ est continu, et par suite $I^{1-\alpha}[y(s) - y_0]$ est continu. En appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité précédente, on a

$$I^{\alpha c} D^\alpha y(t) = y(t) - y_0 - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{1-\alpha} \left[y(s) - y(0)\right](t),$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left|I^{1-\alpha}[y(s)-y_0](t)\right| &\leq \frac{\sup_{t\in[0,T]}|y(t)-y_0|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds \\ &= \frac{\|y-y_0\|_\infty}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}t^{1-\alpha},\end{aligned}$$

parsuite

$$\lim_{t\to 0}\left|I^{1-\alpha}[y(s)-y(0)](t)\right| = 0,$$

par conséquent

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y_0.$$

On a $h \in C([0,T],\mathbb{R})$, et par conséquent $I^{\alpha}h$ est continu.
Appliquons I^{α} aux deux membres de (4.29)

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}h(t)$$

D'après le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + I^{\alpha}h(t) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \;\; 0\leq t\leq T.\end{aligned}$$

c'est à dire $y(t) \in C[0,T]$ est la solution de l'équation intégrale (4.28) ∎

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème de Cauchy (4.21)-(4.22) dans l'espace $C_\gamma[0,T]$ sous les hypothèses du lemme (4.2.3) et une condition de Lipschitz. Pour cela on a besoin du résultat auxilliaire suivant :

Lemme 4.2.4. *Soit* $J=[0,T], 0<c<T,\;\; g\in C[0,c]$ *et* $g\in[c,T]$ *alors* $g\in C[0,T]$ *et*

$$\|g\|_{C[0,T]} \leq \sup\left[\|g\|_{C[0,c]}, \|g\|_{C[c,T]}\right]. \tag{4.31}$$

Thèoréme 4.2.1. *Soit* $0<\alpha<1$, *et* $0<\gamma<\alpha$. *Soit* G *un ouvert de* $\mathbb{R}$ *; et soit* $f:[0,T]\times G \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que, pour chaque* $y\in G$, $f[t,y]\in C_\gamma[0,T]$ *et vérifie la condition de lipschitz suivante Il existe une constante* $A>0$ *telle que :*

$$|f(t,y)-f(t,\bar{y})| \leq A|y-\bar{y}|, pour \;\; tout \;\; t\in[0,T] \;\; et \;\; tout \;\; y,\bar{y}\in G$$

Alors il existe une solution unique $y(t)$ *pour le problème de Cauchy (4.21)-(4.22) dans l'espace* $C_\gamma[0,T]$.

Preuve . On commence par montrer l'existence d'une solution unique $y(t) \in C[0, t_1]$. D'après le lemme (4.2.3), il suffit de montrer que l'équation intégrale de Volterra (4.28) possède une solution unique $y(t) \in C[0, t_1]$. On montre le résultat en premier temps sur une partie de l'intervalle $[0, T]$ l'équation intégrale (4.28)a un sens sur chaque intervalle $[0, t_1] \subset [0, T]$. Choisissons t_1 tel que l'inégalité,

$$A\frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{4.32}$$

soit vérifiée, ensuite on montre l'existence d'une solution unique $y(t) \in C[0, t_1]$ pour l'équation intégrale de Volterra (4.28) sur $[0, t_1]$. Pour cela on utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'éspace $C[0, T]$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par

$$d(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]} = \sup_{t\in[0,t_1]} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

On réecrit l'équation intégrale (4.28) sous la forme suivante :

$$y(t) = (Ty)(t).$$

Où

$$(Ty)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds \tag{4.33}$$

Pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. Si $y(t) \in C[0, t_1]$ alors $(Ty)(t) \in C[0, t_1]$,
2. Pour chaque $y_1, y_2 \in C[0, t_1]$

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,t_1]} \le w\|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]} \ \ avec \ \ (0 < w < 1). \tag{4.34}$$

Comme $f[t, y] \in C[0, t_1]$, et tenant compte du lemme(4.2.2), on a

$$\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{f(s, y(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right\|_{C[0,t_1]} \le \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(t, y(t))\|_{C[0,t_1]}$$

alors $(Ty)(t) \in C[0, t_1]$. Montrons maintenant (4.34)
En vertu de (4.25),du lemme(4.2.2), et en utilisant la condition de Lipschitz ,
On obtient

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0,t_1]} &= \left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))(t-s)^{\alpha-1}ds\right\|_{C[0,t_1]} \\
&\le \frac{t_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|f(s, y_1(t) - f(s, y_2(t))\|_{C[0,t_1]} \\
&\le \frac{At_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|_{C[0,t_1]}
\end{aligned}$$

à l'aide du (4.32), on obtient (4.34), avec $w = \frac{At_1^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$; et alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique $y^*(t) \in C[0, t_1]$ de l'équation intégrale (4.25) sur $[0, t_1]$. Par le théorème de Banach, la solution $y^*(t)$ est une limite de la suite convergente $(T^n y_0)(t)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \|T^n y_0^* - y^*\|_{C[0,t_1]} . \tag{4.35}$$

On prend

$$y_0^* = y_0.$$

Tenant compte de l'équation intégrale (4.28) , la suite $(T^n y_0^*)(t)$ est définie par la formule de récurrence

$$(T^n y_0^*)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, (T^{n-1} y_0^*)(s))(t-s)^{\alpha-1} ds, n = 1, 2, ...$$

Si on note, $y_n(t) = (T^n y_0^*)(t)$; alors la relation précédente prend la forme suivante :

$$(y_n)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, (y_{n-1})(s))(t-s)^{\alpha-1} ds, (n \in \mathbb{N}$$

et (4.35) devient

$$\lim_{n\to+\infty} \|y_n - y\| \, C_{[0,t_1]}$$

Ensuite, on considère l'intervalle $[t_1, t_2]$;où $t_2 = t_1 + h_1$ et $h_1 > 0$, avec $t_2 < T$
Réecrivons l'équation intégrale (4.25) sous la forme

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t f(s, y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds + y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} f(s, y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds$$

puisque la fonction $y(s)$ est définie uniquement sur $[0, t_1]$,
nous obtenons

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds,$$

où

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s, y(s))(t-s)^{\alpha-1} ds,$$

Par une technique similaire pour avoir l'existence et l'unicité de la solution sur $[0, t_1]$; on peut déduire qu'il existe une solution unique $y_1^*(t) \in C[t_1, t_2]$ de l'équation intégrale (4.25) sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

On prend l'intervalle suivant $[t_2, t_3]$; où $t_3 = t_2 + h_2$ et $h_2 > 0$, sont tel que $t_3 < T$: En répétant ce processus, on trouve qu'il existe une solution unique $y(t)$ de l'équation (4.23), telles que

$$y(t) = y_k^*(t)$$

et

$$y_k^* \in C[t_{k-1}, t_k], (k = 0, ..., L)$$

où $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_L = T$. Par le lemme (4.2.4) , il suit qu'il existe une solution unique $y(t) \in C[0,T]$ sur l'intervalle $[0,T]$ tout entier. Par conséquent, il existe une solution unique $y(t) = y^*(t) \in C[0,T]$ de l'équation intégrale de Volterra (4.25) et alors du problème de Cauchy (4.21)-(4.22). Pour complèter la démonstration, il reste à montrer que cette solution $y(t) \in C[0,T]$; appartient à l'espace $C_\gamma^\alpha[0,T]$. Par la définition , il faut montrer que ${}^cD^\alpha y(t) \in C_\gamma[0,T]$. D'après ce qui précède $y(t) \in C[0,T]$ est une limite de la suite

$$\lim_{n \to +\infty} \|y_n - y\|_{C[0,t_1]} = 0 \tag{4.36}$$

En utilisant ensuite (4.21) et la condition de Lipschitz, on a

$$\begin{aligned} \|{}^cD^\alpha y_n -{}^c D^\alpha y\|_{C[0,t_1]} &\leq \|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))\|_{C_\gamma[0,T]} \\ &\leq A\|y_n - y\|_{C_\gamma[0,T]} \\ &\leq AT^\gamma \|y_n - y\|_{C[0,T]} \\ &= A\|y_n - y\|_{C[0,T]} \end{aligned}$$

de plus (4.36)permet d'obtenir

$$\lim_{n \to +\infty} \|{}^cD^\alpha y_n -{}^c D^\alpha y\|_{C[0,t_1]}$$

alors ${}^cD^\alpha y(t) \in C_\gamma[0,T]$,et donc, $y \in C_\gamma^\alpha[0,T]$. Ce qui achève la démonstration

■

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions de problème pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo avec conditions locales et intégrales.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[2] A. Granas and J. Dugundji,*Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] A.Ismail,B. Redouane *Equations différentielles ordinaires et applications*, Mémoire de licence, Tlemcen, 2012-2013.

[4] A.Popier, O.Wintenberger *équations différentielles*, école polytechnique, 2006-2007.
McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1995.

[5] Erdelyi A,Magnus W,Oberhettinger F and Tricomi F, Higher *Transcendental Functions*, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[6] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems Spring-Verlag*, New York, 1986.

[7] F.Boyer,P.Fabrie ,*Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models*, Appl.Math.Sci, New York, 2013.

[8] H. Amman ,*Ordinary Differential Equations, An Introduction to nonlinear Analysis, Studies in Mathematics*, 13, Walter de Gryter, 1991.

[9] H.Hadjar *Problème aux limites pour équations différentielles fractionnaires* ,Mémoire de fin d'études, Tlemcen, 2014-2015

[10] J. Hale and S. Verduyn Lunel,*Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences*, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[11] Samko S.G. A.A. Kilbas and Marichev O.I. (1993),*Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach, New York.