



N° Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année univ. : 2016/2017



Les courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace Euclidien et le groupe Heisenberg

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Keltouma Tires¹

Sous la direction de

Dr. F. Hathout

Soutenue le 23 Mai 2017 devant le jury composé de

Dr. A.Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. F.Hathout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Dr. M.H.Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
Mlle. H.Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. email : k.tires92@hotmail.com

Remerciements

*Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, monsieur
Dr. HATHOUT Fouzi, pour sa patience, ses remarques
et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance durant la réalisation
de ce travail.*

Je remercie également les membres du jury :

- Dr. AZZOUZ Abdelhalim : président.*
- Dr. DIDA Hamou Mohammed : examinateur.*
- Melle. ABBAS Hafida : examinatrice.*

d'avoir accepté de lire et d'évaluer ce travail.

*Un grand merci adressé au personnel et aux enseignants
du département de mathématique.*

*Comme je remercie ceux qui m'aident de proche ou de loin
à concrétiser ce travail*

dédicace

Rien n'est plus dur pour tout étudiant que de se trouver là où je suis.

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents qui m'ont donnée la possibilité de poursuivre mes études, pour leurs guides affectueux, pour l'espoir qu'ils me donnent, pour les conseils dans la vie et leurs soutiens durant mes années d'études avec patience, courage et j'espère que je puisse leurs rende le maximum de bonheur qu'ils m'ont offert et que dieu les bénisse.

À mes sœurs.

À mes frères.

À mes cousins et cousines.

À tous mes amis ainsi qu'à tous mes camarades .

À tous mes chers professeurs durant toutes mes années d'études .

Enfin, à tous ceux qui me sont chères, qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect et ma gratitude.

À tous ceux qui m'aiment.

À tous ceux que j'aime.

Je dédie ce mémoire.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires	6
1.1 Plan et L'espace Euclidien	6
1.2 Calcul différentiel	10
2 Courbes paramétrées dans le plan et l'espace	14
2.1 Courbes paramétrées	14
2.2 Courbes paramétrées dans le plan	17
2.2.1 Courbure	17
2.3 Courbes paramétrées dans l'espace	21
2.3.1 Courbure et torsion	21
2.3.2 Courbes helices dans \mathbb{E}^3	23
3 Structure Riemannienne du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}_3	26
3.1 Espace d'Heisenberg \mathbb{H}_3	26
3.2 Métrique de \mathbb{H}_3	26
3.3 Connexion	28
3.4 Tenseur de courbure	29
4 Harmonicité et la biharmonicité	31
4.1 Applications harmoniques et biharmoniques	31
4.1.1 Cas des courbes	32
4.2 Courbes harmoniques et biharmoniques dans L'espace Euclidien	33
4.3 Courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{H}_3	34
4.3.1 Courbes harmoniques dans \mathbb{H}_3	34

4.3.2	Courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3	35
4.4	Formules explicites des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3	41
	Conclusion	46
	Perspectives	47

0.1 Introduction

En Mathématiques, une fonction harmonique est une fonction deux fois continûment dérivable qui satisfait l'équation de d'Euler-Lagrange. Un problème classique concernant les fonctions harmoniques est le problème de Dirichlet : étant donné une fonction continue définie sur la frontière d'un ouvert, peut-on la prolonger par une fonction qui soit harmonique en tout point de l'ouvert ?

Une application $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ de classe \mathcal{C}^∞ est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie $E(\phi)$ définie par

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 dv_g, \quad (1)$$

c'est à dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à Eq. 1

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = 0, \quad (2)$$

où $\tau(\phi)$ est appelé le champ de tension de ϕ .

Localement le champ de tension est donné par

$$\tau(\phi) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \phi^\alpha \partial \phi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} N_{\alpha\beta}^\gamma \circ \phi - \frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k} M_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \phi = 0, \quad (3)$$

qui est un système d'équation semi-linéaires, elliptiques.

L'étude des applications harmoniques a débuté vers les années 1964 par les chercheurs J. Eells, J. H. Sampson, L. Lemaire et A. Lichnerowicz.

Les même auteurs ont suggérés une généralisation de la notion d'harmonicité à la biharmonicité. Plus précisément, une application $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ de classe \mathcal{C}^∞ est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie $E_2(\phi)$ définie par

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 dv_g, \quad (4)$$

c'est dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à Eq. (4)

$$\tau_2(\phi) = -\Delta \tau_1(\phi) + trace R^{\bar{M}}(d\phi, \tau_1(\phi)) d\phi = 0, \quad (5)$$

où

$$\Delta\tau_1 = -\text{trace}(\nabla^\phi)^2\tau_1(\phi).$$

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. L'équation (5) montre que les applications biharmoniques sont solutions d'un système elliptique non linéaire d'ordre quatre.

D'autre part, Werner Karl Heisenberg (né le 5 décembre 1901 à Wurtzbourg, Empire allemand, mort le 1er février 1976 à Munich, Allemagne) est un physicien allemand qui est l'un des fondateurs de la mécanique quantique. Il est lauréat du prix Nobel de physique de 1932 « pour la création de la mécanique quantique, dont l'application a mené, entre autres, à la découverte des variétés allotropiques de l'hydrogène ». Un de ces travaux est l'ensemble qui porte son nom "le groupe d'Heisenberg" défini par

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(3, \mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

et qui est un groupe de Lie de dimension impaire et noté par \mathbb{H}_3 (ici il est donné en dimension trois)

Notre objectif dans ce travail est d'étudier les propriétés géométriques d'harmonicité et biharmonicité des applications dans un cas particulier " les courbes " dans des espaces particuliers notamment l'espace Euclidien \mathbb{E}^3 et le groupe Heisenberg \mathbb{H}_3 .

D'autre part, il existe plusieurs résultats de classification sur les courbes biharmoniques dans les variétés riemanniennes. Les courbes biharmoniques du groupe Heisenberg sont étudiées dans [1] par Caddeo et al. Ils ont montré que les courbes biharmoniques dans le groupe Heisenberg sont des hélices (c'est-à-dire voir Le Corollaire (4.13)), Les auteurs ont étudié les courbes biharmoniques horizontales non géodésiques dans le groupe Heisenberg dimensionnel.

Notre mémoire se compose de ce qui suit :

Le premier chapitre : On le commence par une section de préliminaires consacrée aux définitions et quelques propriétés du plan et de l'espace Euclidien. En suite, on le termine par une section sur quelques rappels et compléments sur le calcul différentiel.

Au deuxième chapitre : On présente quelques notions générales où on définit quelques outils fondamentaux des courbes paramétrées dans le plan et l'espace Euclidien, ces outils seront utiles pour la suite de ce travail.

Dans le troixème chapitre : Nous allons étudier plus en détails l'espace Heisenberg muni d'une structure riemannienne (i.e. nous permet de trouver les formules générales de connexion associée à la métrique riemannienne et le tenseur de courbure du groupe Heisenberg).

Finalement, le quatrième chapitre, nous introduisons la notion d'applications harmoniques et biharmoniques qui sont le but de ce travail, dont on cite quelques propriétés et étudie l'harmonicité et la biharmonicité de quelque applications entre les variétés riemanniennes compacts. Ces résultats nous ont permis de construire et d'étudier en particulier le cas des courbes harmoniques et biharmoniques dans les espaces \mathbb{H}_3 et \mathbb{E}^3 . On caractérise les courbes biharmoniques non géodisiques dans \mathbb{H}_3 . En suite, on démontre que les courbes biharmoniques sont des courbes hilices dans \mathbb{H}_3 . Enfin, on déduit les formules explicites des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3 .

Notation. On travail dans la classe \mathcal{C}^∞ , c'est-à-dire les variétés, les métriques, les connexions, les cartes seront supposées être lisses.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Plan et L'espace Euclidien

Le plan, l'espace et plus généralement l'espace $E = \mathbb{R}^n$ de dimension n est muni d'un produit scalaire, d'une norme et d'une distance Euclidienne. Si $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \text{ et}$$
$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Proposition 1.1 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

$$\langle X, Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|,$$

de plus, on a l'égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Corollaire 1.2 (*Inégalité triangulaire*)

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|;$$
$$\text{dist}(X, Y) \leq \text{dist}(X, Z) + \text{dist}(Z, Y).$$

On dispose également de la notion d'orientation définie dans \mathbb{R}^n . Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n , alors tout vecteur X de \mathbb{R}^n s'écrit comme un vecteur colonne (ou ligne suivant les conventions) de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) , c'est-à-dire $X = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$.

Si $B = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base de \mathbb{R}^n , alors le déterminant $\det(e'_1, \dots, e'_n)$ est un réel non nul.

Définition 1.3 On dit que $B = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base directe (resp. indirecte) si $\det(e'_1, \dots, e'_n) > 0$ (resp. $\det(e'_1, \dots, e'_n) < 0$).

Définition 1.4 Une isométrie d'un espace Euclidien est une application qui préserve les distances, i.e. une application $f : E \rightarrow E$ telle que pour tout $X, Y \in E$ on ait

$$\text{dist}(f(X), f(Y)) = \text{dist}(X, Y).$$

Une isométrie linéaire est une isométrie telle que $f(0) = 0$.

Proposition 1.5 Soit $f : E \rightarrow E$ une isométrie. Posons $X_0 = f(0)$ et $f_0(X) = f(X) - X_0$, alors f_0 est une application linéaire et bien sur une isométrie. Ainsi toute isométrie est composée d'une isométrie linéaire et d'une translation. De plus une application linéaire est une isométrie si et seulement si elle préserve la norme ou si et seulement si elle préserve le produit scalaire ou encore si et seulement si elle transforme la base canonique en une base orthonormée.

Exemple 1.6 Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$. La rotation d'angle θ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est une isométrie linéaire directe (son déterminant est égal à $+1$).

Les autres isométries sont des symétries orthogonales par rapport à une droite dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Ce sont des isométries linéaires indirectes (leur déterminant est égal à -1).

Remarque 1.7 Soit A la matrice dans la base canonique d'une application linéaire

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

alors f est une isométrie si et seulement si

$${}^tAA = A{}^tA = Id.$$

On en tire en particulier

$$\det({}^tAA) = (\det A)^2 = 1,$$

donc $\det A = \pm 1$. L'isométrie est directe (resp. indirecte) si $\det A = 1$ (resp. $\det A = -1$).

Définition 1.8 Soit U un vecteur unitaire du plan, on appellera vecteur normal le vecteur unitaire V obtenu par rotation l'angle $\frac{\pi}{2}$; en formule si

$$U = (a, b) = (\cos \theta, \sin \theta),$$

alors

$$V = (-b, a) = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

On remarque que la paire (U, V) dans la définition précédente est telle qu'elle forme une base orthonormée directe.

On définit maintenant le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{R}^3 (appelé parfois produit extérieur)

Définition 1.9 Soient U, V deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , le vecteur $U \wedge V$ est l'unique vecteur de \mathbb{R}^3 tel que, pour tout $W \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\det(U, V, W) = \langle W, U \wedge V \rangle .$$

Théorème 1.10 Le produit vectoriel vérifie les propriétés suivantes :

1. Linéaire en chaque variable et $U \wedge V = -V \wedge U$. En particulier $U \wedge U = 0$.

2. Si U (resp. V) a pour coordonnées u_1, u_2, u_3 (resp. v_1, v_2, v_3) alors

$$U \wedge V = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

3. Le vecteur $U \wedge V$ est orthogonal à U et V .

4. Si U et V sont unitaires et orthogonaux alors $\{U, V, U \wedge V\}$ forme une base orthonormée directe.

5. Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est l'angle entre les deux vecteurs U et V alors

$$\begin{aligned} \|U \wedge V\| &= \det \begin{pmatrix} \|u\|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \|v\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2 = \sin^2 \theta \|u\|^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique.

Lemme 1.11 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorphisme symétrique tel que

$$\langle f(X), Y \rangle = \langle X, f(Y) \rangle.$$

Alors il existe une base orthonormée dans laquelle f est diagonale, c'est-à-dire une base (e_1, \dots, e_n) et des scalaires (a_1, \dots, a_n) tels que $f(e_i) = a_i e_i$.

Si de plus on a, pour $X \neq 0$, l'inégalité $\langle f(X), X \rangle > 0$, alors on aura $a_i > 0$.

Lemme 1.12 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorphisme symétrique. On pose

$$a_1 = \min_{X \neq 0} \frac{\langle f(X), X \rangle}{\|X\|^2} \text{ et } a_2 = \max_{X \neq 0} \frac{\langle f(X), X \rangle}{\|X\|^2}.$$

Alors il existe une base orthonormée e_1, e_2 dans laquelle f est diagonale et telle que $f(e_i) = a_i e_i$.

Si l'on écrit

$$X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2,$$

un vecteur unitaire du plan, on a alors

$$f(X) = a_1 \cos^2 \theta + a_2 \sin^2 \theta.$$

Dans la base (non nécessairement orthogonale) la matrice de l'endomorphisme f du lemme précédant s'écrit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

elle n'est pas en général symétrique mais on peut retrouver les valeurs propres a_1 et a_2 par les formules

$$\begin{cases} a_1 a_2 = \det(f) = ad - bc; \\ a_1 + a_2 = \text{Tr}(f) = a + d. \end{cases}$$

1.2 Calcul différentiel

Cette section est consacré au rappels sur le calcul différentiel. On notera par \mathcal{C}^k la classe des fonctions qui sont k fois continûment dérivables.

Proposition 1.13 *Soient f et g deux fonctions dérivables. On à*

1. $(f + g)' = f' + g'$ et $(fg)' = fg' + f'g$.
2. $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$.
3. Soit f une bijection et g sa bijection réciproque. La fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$ et

$$g'(y_0) = f'(x_0)^{-1}.$$

Les mêmes règles de calculs s'appliquent aux dérivées successives; par exemple

$$(f \circ g)''(x) = g''(x)f'(g(x)) + g'(x)^2 f''(g(x)).$$

Lorsque la fonction est suffisamment dérivable on dispose de la formule de Taylor qu'écrit sous la forme

$$f(t + h) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}h + \frac{f''(t)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n + o(h^n).$$

Les fonctions "idéales" sont les fonctions analytiques, i.e. les fonctions qui coïncident avec leur développement ou série de Taylor, i.e. qui vérifient (pour h dans un intervalle] $-r$; r [convenable) :

$$f(t + h) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}h + \frac{f''(t)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{n!}h^n.$$

La dérivation d'une fonction vectorielle est simple à définir, on pose, si $M(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, alors par définition $M'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$.

La règle de Leibnit pour la dérivée d'un produit se propage à toute fonction bilinéaire.

On a par exemple

$$\begin{aligned}\langle M(t), K(t) \rangle' &= \langle M'(t), K(t) \rangle + \langle M(t), K'(t) \rangle \text{ et} \\ (M(t) \wedge K(t))' &= M'(t) \wedge K(t) + M(t) \wedge K'(t).\end{aligned}$$

Ceci est particulièrement utile dans les deux cas suivants :

1. Si $M(t)$ est un vecteur unitaire (pour tout t) alors $M'(t)$ est orthogonal à $M(t)$; en effet

$$\langle M(t), M(t) \rangle = 1,$$

implique

$$\langle M(t), M'(t) \rangle = 0.$$

2. Si $M(t)$ est orthogonal à $N(t)$ (pour tout t) alors

$$\langle M(t), N'(t) \rangle = -\langle M'(t), N(t) \rangle,$$

en effet

$$\langle M(t), N(t) \rangle = 0,$$

implique

$$\langle M'(t), N(t) \rangle + \langle M(t), N'(t) \rangle = 0.$$

Une surface dans \mathbb{R}^3 peut être définie par une équation $f(x; y; z) = 0$ ou par des paramétrisations

$$(u; v) \mapsto (x(u; v), y(u; v), z(u; v))$$

dans les deux cas on aura besoin du calcul différentiel en plusieurs variables.

Définition 1.14 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, on dit que f est différentiable au point x_0 s'il existe une

application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(\|h\|),$$

où $o(\|h\|)$ désigne un vecteur de \mathbb{R}^m de norme $o(\|h\|)$.

On note $Df(x_0)$ l'application linéaire ainsi définie et on appelle la différentielle de f en x_0 ; lorsque f est différentiable, on a donc

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0).h + o(\|h\|).$$

Si l'on écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$ et introduit les dérivées partielles

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h},$$

l'application linéaire $Df(x_0)$ a pour matrice dans la base canonique la matrice de coefficients $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. On définit les dérivées d'ordre supérieur et on a les résultats suivants.

Théorème 1.15 (Schwarz) *Supposons la fonction f deux fois continûment dérivable alors*

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_i}(x_0).$$

Théorème 1.16 (Dérivation composée) *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ deux applications différentiables alors $g \circ f$ est différentiable et :*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)).Df(x_0).$$

Théorème 1.17 (Formule de Taylor) *Soit f une fonction deux fois continûment différentiable, notons $D^2 f(x)$ la forme bilinéaire définie par la matrice de coefficients $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, on a alors*

$$f(x + h) = f(x) + \frac{1}{1!} Df(x)(h) + \frac{1}{2!} D^2 f(x)(h, h) + o(\|h\|^2).$$

Définition 1.18 (Vecteur gradient) *Le gradient de f en (x_0, y_0) , noté $\nabla f(x_0, y_0)$ ou encore $\text{grad } f(x_0, y_0)$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0) .*

Définition 1.19 (Point critique) *Un point critique d'une fonction de plusieurs variables à valeurs numériques i.e.*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

est un point d'annulation de son gradient, c'est-à-dire un point a tel que

$$\text{grad } f = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(a) = 0.$$

Les valeurs qui ne sont pas critiques sont appelées valeurs régulières.

Définition 1.20 (Point de contact d'ordre p) *Soit a un point d'un ensemble A de \mathbb{R}^n et p est un entier naturel.*

f et g sont deux fonctions réelles définies et continues sur A . On dit que f et g ont un contact d'ordre p au point a si :

- 1) $f(a) = g(a)$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{\|x - a\|^p} = 0$.

La deuxième relation s'écrit aussi :

$$f(x) - g(x) = \|x - a\|^p \varepsilon(x - a),$$

où $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$.

Chapitre 2

Courbes paramétrées dans le plan et l'espace

2.1 Courbes paramétrées

On peut définir de deux manières une courbe dans le plan : en la paramétrant

$$\begin{aligned}\gamma & : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))\end{aligned}$$

ou par une équation $f(x; y) = 0$.

Dans le premier cas le vecteur tangent

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)),$$

définit une droite et même une droite orientée si et seulement si

$$\gamma'(t) \neq (0, 0);$$

dans le deuxième cas la droite tangente en $P = (x_0, y_0)$ est définie par l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

La droite tangente (non orientée) est bien défini si et seulement si les deux dérivées partielles sont non nulles, et on a la définition suivante :

Définition 2.1 *Un point singulier d'une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un point où*

$$\gamma'(t_0) = 0$$

un point singulier d'une courbe $f(x; y) = 0$ est un point où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Par un changement de paramétrisation, si $\gamma(t)$ définit une courbe paramétrée

$$[a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

soit

$$\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$ alors

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(\varphi(u)),$$

définit une nouvelle courbe paramétrée; c'est en fait la même courbe parcourue a une vitesse différente. Pour les dérivées on a par exemple

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}'(u) &= \varphi'(u)\gamma'(\varphi(u)) \text{ et} \\ \bar{\gamma}''(u) &= \varphi''(u)\gamma'(\varphi(u)) + \varphi'(u)^2\gamma''(\varphi(u)).\end{aligned}$$

Il existe une meilleur paramétrisation; c'est la paramétrisation par la longueur.

Définition 2.2 *Pour mesurer la longueur d'une courbe paramétrée il est naturel de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n parties $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ et d'introduire la longueur de la ligne polygonale*

$$L(a_0, \dots, a_n) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|.$$

On appellera pas de la subdivision la quantité $\delta = \max_i(a_{i+1} - a_i)$.

On dit que la courbe $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est rectifiable si la limite suivante, que l'on appellera longueur de la courbe, existe

$$L := \lim_{\delta \rightarrow 0} L(a_0, \dots, a_n) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|.$$

Théorème 2.3 Soit $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe \mathcal{C}^1 (ou même de classe \mathcal{C}^1 par morceaux), alors la courbe est rectifiable et sa longueur est égale à :

$$L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)} dt.$$

Définition 2.4 Une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est régulière en t_0 si γ est dérivable en t_0 et $\gamma'(t_0) \neq 0$. Plus généralement, une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k -régulière en t_0 si γ est k fois dérivable en t_0 et les vecteurs $\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0)$ sont linéairement indépendants.

Remarque 2.5 Une courbe ne peut être k -régulière que si $k \leq n$. On utilise seulement les notions de régulière et bi-régulière.

Soit une courbe paramétrée $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 et régulière, de longueur l , on peut la reparamétriser par sa longueur. L'application

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du,$$

définit une bijection croissante $[a, b] \rightarrow [0, l]$ dont la dérivée $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ est strictement positive (c'est ici que l'hypothèse régulière est utilisée).

On peut donc inverser cette fonction et obtenir une fonction dérivable $t = g(s)$ telle que $g'(s) = 1/s'(t)$. Si on pose $\bar{\gamma} = \gamma \circ g : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ alors

$$\bar{\gamma}'(s) = g'(s) \gamma'(g(s)) = \frac{\gamma'(t)}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Ainsi $\bar{\gamma}'(s)$ est unitaire, ce qu'on peut interpréter en disant que la courbe est parcourue avec une vitesse constante égale à 1.

Définition 2.6 On dit que $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est paramétrisée par sa longueur si $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Dans ce cas la longueur d'arc paramétrisé par $[0, s]$ est égale à s .

2.2 Courbes paramétrées dans le plan

2.2.1 Courbure

On commence par étudier le cas d'une courbe paramétrée par sa longueur $s \mapsto \gamma'(s)$.

Dans ce cas $T(s) = \gamma'(s)$ est un vecteur unitaire ; on définit $N(s)$ comme le vecteur normal obtenu par rotation d'angle $\pi/2$ à partir de $T(s)$. En formule, si $T(s) = (a, b)$, on pose $N(s) = (-b, a)$.

Comme $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$ on constate que $2 \langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ et donc que $T'(s)$ est proportionnel à $N(s)$, ce qui justifie la définition suivante.

Définition 2.7 La courbure $\kappa(s)$ d'une courbe paramétrée par sa longueur est définie par l'équation

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

Si $\gamma(t)$ définit une courbe paramétrée régulière, sa courbure est naturellement définie comme la courbure de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$$

et $\gamma'(t) = \gamma_1'(s(t))$ on pose

$$\kappa(t) = \kappa_1(s(t)).$$

Remarque 2.8 La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit deux fois dérivable, en suite que la courbe soit régulière au point où l'on veut définir la courbure (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire).

Remarquons que si l'on écrit $N' = aT + bN$, on en tire $b = \langle N, N' \rangle = 0$ et $a = \langle T', N \rangle = -\langle N', T \rangle = -\kappa$ d'où

$$T' = \kappa N \text{ et } N' = -\kappa T.$$

On les formules suivantes pour une paramétrisation quelconque

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t));$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|};$$

$$\kappa(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3};$$

$$\kappa(t) = \frac{\gamma'_1 \gamma''_2 - \gamma''_1 \gamma'_2}{(\gamma'^2_1 + \gamma'^2_2)^{3/2}}.$$

Proposition 2.9 Soit C_1 et C_2 deux courbes paramétrées ayant même fonction courbure $\kappa(s)$. Alors, il existe une isométrie (directe) σ telle que $\sigma(C_1) = C_2$.

Preuve. On commence par exprimer les dérivées successives dans la base T, N ; on obtient

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= T, \\ \gamma''(s) &= \kappa N, \\ \gamma^{(3)} &= -\kappa^2 T + \kappa' N, \\ \gamma^{(4)} &= 3\kappa\kappa' T + (\kappa^3 + \kappa'') N, \text{ etc}\end{aligned}$$

On montre alors aisément par récurrence que $\gamma^{(n)}(t)$ s'exprime dans la base T, N avec des coordonnées fonctions (polynomiales) en les dérivées successives de $\kappa(s)$. On en tire des formules de type :

$$\gamma^{(n)}(0) = f_n(\kappa^0(0), \dots, \kappa^{n-2}(0)) T(0) + g_n(\kappa^0(0), \dots, \kappa^{n-2}(0)) N(0).$$

Si $\gamma(t)$ est analytique, elle est égale (sur un intervalle convenable) à sa série de Taylor

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}.$$

La courbure est également analytique $\kappa(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$. Ainsi $\gamma(t)$ est entièrement déterminée par sa courbure (ou encore par ses dérivées successives $\kappa^{(n)}(0)$), sa valeur initiale $\gamma(0)$ et $T(0)$.

Si l'on ne suppose plus $\gamma(s)$ analytique, on peut procéder ainsi. On considère deux courbes $\bar{\gamma}(s), \tilde{\gamma}(s)$ ayant la même fonction courbure $\kappa(s)$.

Après transformation de $\tilde{\gamma}(t)$ par une isométrie directe (translation et rotation) on peut supposer

$\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$ et $T_1(0) = T_2(0)$ (donc $N_1(0) = N_2(0)$). On considère alors la fonction

$$f(s) = \langle T_1(s), T_2(s) \rangle + \langle N_1(s) + N_2(s) \rangle.$$

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle T_1'(s), T_2(s) \rangle + \langle T_1(s), T_2'(s) \rangle + \langle N_1'(s), N_2(s) \rangle + \langle N_1(s), N_2'(s) \rangle \\ &= \langle \kappa N_1(s), T_2(s) \rangle + \langle \kappa T_1(s), N_2(s) \rangle - \langle \kappa N_1(s), T_2(s) \rangle - \langle \kappa T_1(s), N_2(s) \rangle = 0, \end{aligned}$$

et en observant que $f(0) = 2$ on voit que $f(s) = 2$. Cependant, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle T_1(s), T_2(s) \rangle \leq 1$ avec égalité si et seulement si $T_1(s) = T_2(s)$ (et de même pour $\langle N_1(s), N_2(s) \rangle$). On obtient donc $T_1(s) = T_2(s)$, c'est-à-dire $\bar{\gamma}'(s) = \tilde{\gamma}'(s)$ et comme $\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$ on en tire l'énoncé voulu.

On donne maintenant une autre interprétation de la courbure : c'est la variation de l'angle défini par la tangente. Le vecteur tangent unitaire peut être décrit par un angle, $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$; on a alors

$$T'(s) = \theta'(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = -\theta'(s) N(s),$$

d'où la formule

$$\kappa(s) = \theta'(s).$$

■

Théorème 2.10 Soit $g(s)$ une fonction continue, il existe une courbe (unique à isométrie près) telle que $\kappa(s) = g(s)$.

Preuve. L'unicité est déjà prouvée plus haut. Pour démontrer l'existence, il suffit de construire une primitive $\theta(s) = \int g(s) ds$ puis d'extraire une nouvelle primitive

$$\gamma(s) = \int (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) ds.$$

Exemple 2.11 Soit $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$, le cercle de rayon R paramétré

par t . La longueur s'écrit

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\gamma'(u)\| du \\ &= \int_0^t \sqrt{R^2 \sin^2 u + R^2 \cos^2 u} du \\ &= Rt, \end{aligned}$$

soit encore $t = s/R$. En suite

$$\gamma'(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

donc

$$T = (-\sin t, \cos t) \text{ et } N = (-\cos t, -\sin t),$$

d'où

$$\kappa = 1/R.$$

La courbure est constante et égale à l'inverse du rayon.

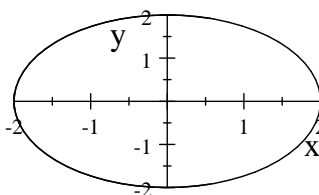


Figure 1. la courbe γ avec $R=2$

■

Définition 2.12 Parmi les cercles passant par un point $\gamma(t)$ d'une courbe paramétrée, on appelle cercle osculateur un cercle ayant un point de contact d'ordre deux.

On peut démontrer que ce cercle a pour centre un point situé sur la droite orthogonale à la tangente en $\gamma(t)$ et que son rayon est donné par l'inverse de la valeur absolue de la courbure.

2.3 Courbes paramétrées dans l'espace

2.3.1 Courbure et torsion

On supposera ici les courbes paramétrées bi-régulières, i.e. γ' et γ'' linéairement indépendants en tout point. Comme pour les courbes planes, si la courbe est paramétrée par sa longueur, le vecteur tangent unitaire est

$$T(s) = \gamma'(s);$$

Définition 2.13 *Le vecteur normal unitaire (appelé aussi vecteur normal principal) et la courbure sont définis par*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \text{ et } \kappa(s) = \|T'(s)\|.$$

Remarque 2.14 *On a donc, comme pour les courbes planes*

$$T'(s) = \kappa(s)N(s),$$

mais ici par définition, la courbure est positive et le vecteur unitaire normal est orienté dans la même direction que T' . En effet, étant donné un vecteur unitaire dans l'espace et une droite orthogonale à ce vecteur, il n'y a aucun moyen de choisir raisonnablement entre les deux vecteurs unitaires de cette droite.

Définition 2.15 *On définit ensuite le vecteur unitaire $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ qui complète la paire de vecteur en une base orthonormée directe $\{T, N, B\}$ appelé trièdre de Frenet.*

On considère $B'(s)$, c'est un vecteur orthogonal à $B(s)$ mais aussi à $T(s)$ car

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s),$$

donc $B'(s)$ est colinéaire avec $N(s)$ et on peut définir un scalaire appelé la torsion par l'équation

$$B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

Si $\gamma(t)$ définit une courbe paramétrée birégulière, sa courbure et sa torsion sont définies comme la courbure et la torsion de la courbe reparamétrée par sa longueur, c'est-à-dire que si $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$ et $\bar{\gamma}(s(t)) = \gamma(t)$ on pose $\kappa(t) = \kappa_1(s(t))$ et $\tau(t) = \tau_1(s(t))$.

Certain auteurs définissent la torsion par

$$B'(s) = \tau(s) N(s).$$

Remarque 2.16 *La définition suppose deux choses : premièrement que la courbe soit trois fois dérivable, en suite que la courbe soit bi-régulière au point où l'on veut définir la torsion (en un point non régulier, on ne peut pas définir le vecteur tangent unitaire en un point non bi-régulier, on ne peut pas définir le vecteur normal unitaire car $T'(s) = 0$). On observera aussi que la condition de bi-régularité impose que la courbure ne s'annule pas.*

On calcule maintenant les coordonnées de N' dans la base $\{T, N, B\}$. On écrive pour cela

$$N' = aT + bN + cB.$$

On obtient

$$\begin{cases} a = \langle T, N' \rangle = -\langle T', N \rangle = -\kappa; \\ b = \langle N, N' \rangle = 0; \\ c = \langle B, N' \rangle = -\langle B', N \rangle = \tau, \end{cases}$$

d'où

$$N'(s) = -\kappa T(s) + \tau(s) B(s).$$

Théorème 2.17 *Soient $g(s)$ et $h(s)$ deux fonctions différentiables avec $g(s) > 0$, il existe une courbe paramétrée (unique à isométrie près) telles que la courbure et la torsion vérifient*

$$\kappa(s) = g(s) \text{ et } \tau(s) = h(s).$$

Preuve. L'unicité provient d'un calcul similaire à celui effectué dans le plan. Soit $\bar{\gamma}(s)$, $\tilde{\gamma}(s)$ ayant même courbure et torsion ; après avoir appliqué une isométrie de l'espace, nous pouvons supposer que $\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $T_1(0) = T_2(0)$ et $N_1(0) = N_2(0)$; on a alors $B_1(0) = B_2(0)$.

On considère la fonction

$$f(s) = \langle T_1(s), T_2(s) \rangle + \langle N_1(s), N_2(s) \rangle + \langle B_1(s), B_2(s) \rangle.$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
f'(s) &= \langle T_1'(s), T_2(s) \rangle + \langle N_1'(s), N_2(s) \rangle \\
&\quad + \langle B_1'(s), B_2(s) \rangle + \langle T_1(s), T_2'(s) \rangle \\
&\quad + \langle N_1(s), N_2'(s) \rangle + \langle B_1(s), B_2'(s) \rangle \\
&= \langle \kappa N_1(s), T_2(s) \rangle + \langle (-\kappa T_1(s) + \tau B_1(s)), N_2(s) \rangle \\
&\quad - \langle \tau B_1(s), B_2(s) \rangle + \langle \kappa T_1(s), N_2(s) \rangle \\
&\quad + \langle N_1, (-\kappa T_2(s) + \tau B_2(s)) \rangle \\
&\quad - \langle \tau B_1(s), N_2(s) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $f(s) = f(0) = 3$, mais $\langle T_1, T_2 \rangle \leq 1$ avec égalité si et seulement si $T_1 = T_2$ d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz ; on conclut donc que $\bar{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}'(t)$ et comme $\bar{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(0)$ que $\bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$. ■

L'existence est plus délicate. On peut la démontrer (comme dans le plan) dans le cas analytique en observant que $\gamma^{(n)}(0)$ peut se calculer en terme de $T(0), N(0), B(0)$ et des dérivées successives de κ et τ en 0. Dans le cas général, on peut la démontrer en invoquant un théorème garantissant l'existence de solution d'un système d'équations différentielles.

Le système à résoudre est de dimension 9 et peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Courbes helices dans \mathbb{E}^3

Définition 2.18 *L'espace des courbes où leurs vecteur tangent fait un angle fixe avec un vecteur parallel le long de la courbe est appelé l'espace des courbes helices.*

Définition 2.19 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire T (i.e $\|T\| = 1$), alors γ est une courbe helice si pour tous vecteur X*

parallel le long de la courbe γ (i.e $\nabla_t X = 0$) on a

$$\langle T, X \rangle = c \text{ (constante non nulle).}$$

Théorème 2.20 (Lancret) Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire T (i.e $\|T\| = 1$), alors γ est une courbe hélice si et seulement si

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \text{ (constante non nulle).}$$

Preuve. Voir [4]. ■

Exemple 2.21 Soit la courbe donnée par $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, avec $a, b > 0$, qu'il est appelée hélice. On trouve

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + a^2 \cos^2 u + b^2} du = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

On suppose que $a^2 + b^2 = 1$ on peut se ramener à $s = t$. Alors

$$T(s) = \gamma'(s) = (-a \sin s, a \cos s, b),$$

$$T'(s) = (-a \cos s, -a \sin s, 0) = -a(\cos s, \sin s, 0),$$

et donc $\kappa(s) = a$ et $N(s) = (-\cos s, -\sin s, 0)$.

On en tire

$$B(s) = T(s) \wedge N(s) = (b \sin s, -b \cos s, 0) = -bN(s).$$

La courbure est constante ($\kappa(s) = a$) ainsi que la torsion ($\tau(s) = b$) donc

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{a} \text{ constante non nulle.}$$

Si l'on ne suppose plus $a^2 + b^2 = 1$ on obtient en général :

$$\kappa(s) = a/\sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tau(s) = b/\sqrt{a^2 + b^2}.$$

On donne maintenant des formules pour calculer la courbure et la torsion dans le cas d'une paramétrisation quelconque (mais toujours bi-régulière).

Soit $\bar{\gamma}(s)$ la reparamétrisation par sa longueur de la courbe $\gamma(t)$, i.e. $\gamma(t) = \bar{\gamma}(s(t))$, alors on a :

$$\gamma'(t) = s'(t) \bar{\gamma}'(s(t)) = s'(t) T_1(s(t));$$

$$\gamma''(t) = s''(t) T_1(s(t)) + s'^2(t) \kappa(s(t)) N_1(s(t));$$

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) = & (s'''(t) - s'^3(t) \kappa(s(t))) T_1(s(t)) + (s''(t) s'(t) + \kappa(s(t))) \\ & + (s'^2(t) \kappa'(s(t))) N_1(s(t)) + s'^3(t) \kappa \tau(s(t)) B_1(s(t)). \end{aligned}$$

On en tire donc

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = s'^3(t) \kappa(s(t)) T_1 \wedge N_1 = s'^3(t) \kappa(t) B_1.$$

En suite $\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = s'^6 \kappa(s(t))^2 \tau(s(t))$ d'où les formules :

$$\kappa = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}; \quad (2.1)$$

$$\tau = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}. \quad (2.2)$$

Et les formules du repère de Serret-Frenet dans \mathbb{E}^3 , sont données par

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Chapitre 3

Structure Riemannienne du groupe d'Heisenberg \mathbb{H}_3

Le contenu de ce chapitre est plus détaillé dans [2].

3.1 Espace d'Heisenberg \mathbb{H}_3

Le groupe de Heisenberg \mathbb{H}_3 de \mathbb{R} est sous-groupe du groupe linéaire $GL(3, \mathbb{R})$

$$\mathbb{H}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

\mathbb{H}_3 peut être vu comme l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 doté de la multiplication définie par

$$(x, y, z)(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x).$$

3.2 Métrique de \mathbb{H}_3

On définit la métrique riemannienne g de \mathbb{H}_3 par

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy)^2. \quad (3.1)$$

matriciellement, elle est donnée par

$$g : \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}y^2 & -\frac{1}{4}xy & -\frac{1}{2}y \\ -\frac{1}{4}xy & 1 + \frac{1}{4}x^2 & \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix};$$

quelle est induite de

$$g = C^T I C;$$

où

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x & 1 \end{pmatrix};$$

est la matrice définissant la translation et

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quand on calcule avec la métrique riemannienne g , on emploie parfois $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors

$$g(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Le produit intérieur des vecteurs $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i X_i$ et $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i X_i$ dans $T\mathbb{H}_3$ est

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

La norme d'un vecteur a est donnée par

$$\|\vec{a}\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La métrique g est invariante par rapport aux translations à gauche correspondant la multiplication.

3.3 Connexion

On détermine la connexion de Levi-Civita ∇ associée à la métrique g par rapport à la base orthonormée invariante à gauche

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.2)$$

de dual

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy.$$

i.e.

$$\theta^i(e_j) = \delta^{ij}; i, j = \overline{1,3}$$

Proposition 3.1 *Le crochet de Lie des vecteurs $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ est*

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_3, e_1] = [e_3, e_2] = 0.$$

Preuve. Pour les vecteurs e_1 et e_2 , d'après Eq.3.2, on a

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1 e_2 - e_2 e_1 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} = e_3; \end{aligned}$$

la preuve est la même pour les autres vecteurs. ■

On obtient

Proposition 3.2 *La connexion de Levi-Civita ∇ associée à la métrique g est donnée par*

$$\begin{cases} \nabla_{e_1} e_1 = 0, & \nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1} e_3 = -\frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_2} e_2 = 0, & \nabla_{e_2} e_3 = \frac{1}{2}e_1, \\ \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3} e_3 = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Preuve. On utilisons la formule de Kosul suivante

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle \},$$

pour la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$ la formule de Kosul se réduit à

$$\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle = -\frac{1}{2} \{ \langle e_k, [e_j, e_i] \rangle + \langle e_i, [e_j, e_k] \rangle + \langle e_j, [e_i, e_k] \rangle \}; \quad i, j, k = \overline{1,3}.$$

On fait le calcul seulement pour $\nabla_{e_1} e_2$.

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_3, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_2, e_3] \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3] \rangle \} = 0, \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_2, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_2, e_2] \rangle + \langle e_2, [e_1, e_2] \rangle \} = 0, \\ \langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= -\frac{1}{2} \{ \langle e_3, [e_2, e_1] \rangle + \langle e_1, [e_2, e_3] \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3] \rangle \} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3.$$

■

3.4 Tenseur de courbure

Définition 3.3 *Le tenseur de courbure de Riemann sur une variété riemannienne (M, g) est défini par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

où X, Y et Z sont trois champs de vecteurs de M . Tandis que le champ de tenseur de Riemann-Christoffel et

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Où X, Y, Z, W sont des champs de vecteurs lisses sur (M, g) .

On note par

$$R_{ijk} = R(e_i, e_j)e_k, \quad R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l); \quad i, j, k, l = \overline{1,3},$$

le tenseur de courbure de Riemann sur (\mathbb{H}_3, g) par à port à la base $(e_i)_{i=\overline{1,3}}$.

Proposition 3.4 *Le tenseur de courbure de Riemann sur (\mathbb{H}_3, g) est donné par les formules*

suivantes

$$\begin{cases} R_{121} = -\frac{3}{4}e_2, & R_{131} = \frac{1}{2}e_3, \\ R_{122} = \frac{3}{4}e_1, & R_{232} = \frac{1}{4}e_3, \\ R_{133} = -\frac{1}{4}e_1, & R_{233} = -\frac{1}{4}e_2, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R_{ijkl} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{si } (ijkl) = (1212) \text{ ou } (2121), \\ \frac{3}{4} & \text{si } (ijkl) = (1221) \text{ ou } (2112), \\ \frac{1}{4} & \text{si } (ijkl) = (1313), (3131), (2323) \text{ ou } (3232), \\ -\frac{1}{4} & \text{si } (ijkl) = (1331), (3113), (2332) \text{ ou } (3223), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Les cas qui n'aparèssent pas du tenseurs R sont nuls.

Preuve. Pour calculer le tenseur de courbure de Riemann sur (\mathbb{H}_3, g) on utilise les formules suivantes

$$\begin{cases} R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, \\ R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} R_{ijk} = R(e_i, e_j) e_k = \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e_k - \nabla_{[e_i, e_j]} e_k, \\ R_{ijkl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(R(e_i, e_j) e_k, e_l) = \langle R(e_i, e_j) e_k, e_l \rangle. \end{cases} \quad ; i, j, k, l = \overline{1,3}$$

On fait le calcul pour (e_1, e_2, e_1) , on a

$$\begin{aligned} R_{121} &= \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1 - \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1 - \nabla_{[e_1, e_2]} e_1 \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{e_1} e_3 - \nabla_{e_3} e_1 \\ &= -\frac{3}{4} e_2. \\ R_{1212} &= \langle R(e_1, e_2) e_1, e_2 \rangle = \left\langle \frac{3}{4} e_2, e_2 \right\rangle \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Harmonicité et la biharmonicité

Dans ce chapitre, on donne d'abord quelques rappels pour les applications harmoniques et biharmoniques sur les variétés riemanniennes et on définit les courbes harmoniques et biharmoniques dans des espaces particuliers notamment l'espace Euclidien \mathbb{E}^3 et Heisenberg \mathbb{H}_3 . On commence par caractériser les courbes biharmoniques non géodisiques dans \mathbb{H}_3 . En suite, on démontre que les courbes biharmoniques sont des courbes hilices dans \mathbb{H}_3 . Enfin, on déduit les formules explicites des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3 (Voir [1] et [5]).

4.1 Applications harmoniques et biharmoniques

Définition 4.1 (Harmonicité) *Soit ϕ une application d'une variété riemannienne compacte (M, g) à un autre variété riemannienne (\bar{M}, \bar{g}) . On définit la fonction energie par*

$$E_1(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|d\phi\|^2 v_g.$$

Le point critique de la fonction energie est appelé une application harmonique. D'après la première formule de la variation, il s'ensuit que ϕ est harmonique si et seulement si son premier champ de torsion

$$\tau_1(\phi) = \text{trace} \nabla d\phi;$$

s'anull.

Plus générale, on peut définir une autre notion que l'harmonicité soit un cas particulier qui est la notion de biharmonicité dans la définition suivante :

Définition 4.2 (Biharmonicité) *Une application ϕ est dite biharmonique si elle est un point critique de la bienergie fonctionnelle*

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|\tau_1(\phi)\|^2 v_g.$$

La première formule de variation de E_2 , donné par G.Y. Jiang :

$$\frac{dE_2(\phi_t)}{dt} \Big|_{t=0} = \int_M \langle \tau_2(\phi), V \rangle v_g.$$

Où $\{\phi_t\}$ est une variation de ϕ , V est le champ vectoriel variationnel le long de ϕ et

$$\begin{aligned} \tau_2(\phi) &= -J(\tau_1(\phi)) \\ &= -\Delta\tau_1(\phi) + \text{trace } R^{\bar{M}}(d\phi, \tau_1(\phi)) d\phi. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ici J désigne l'opérateur de Jacobi et

$$\Delta\tau_1 = -\text{trace}(\nabla^\phi)^2 \tau_1(\phi),$$

où ∇^ϕ représente la connexion dans $\phi^{-1}(T\bar{M})$. D'où la condition de biharmonicité pour ϕ est

$$\tau_2(\phi) = 0. \tag{4.2}$$

4.1.1 Cas des courbes

Comme les courbes sont un cas partuclier des applications, lorsque l'application ϕ est une courbe dans la variété M , on la note par la suite cette courbe par γ

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

On donne les notions d'harmonicité et biharmonicité dans la définition suivante :

Définition 4.3 (Voir [1]) *La courbe γ est harmonique si et seulement si*

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}^2 \dot{\gamma} = 0, \tag{4.3}$$

elle est dite biharmonique si et seulement si

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}}^3 \dot{\gamma} - {}^M R(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0. \quad (4.4)$$

4.2 Courbes harmoniques et biharmoniques dans L'espace Euclidien

L'espace Euclidien est l'espace \mathbb{R}^3 muni de la métrique Euclidienne définie par

$$g_{eu} = \langle, \rangle_{eu} = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Les symboles de Cristoffel associés à la métrique g_{eu} sont nuls (i.e $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$), qui donne que le tenseur de Riemann est nul (i.e $R \equiv 0$), alors la variété (\mathbb{E}^3, g_{eu}) est dite plate.

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors d'après Eq. 4.3, γ est une courbe harmonique si et seulement si

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_T^2 T = 0, \quad (4.5)$$

les seules solutions de l'équation sont les courbes qui vérifient

$$\nabla_T T = 0.$$

Par définition, les courbes biharmoniques dans (\mathbb{E}^3, g_{eu}) vérifient

$$\tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R^{\mathbb{E}^3}(T, \nabla_T T)T = 0,$$

or

$$R^{\mathbb{E}^3}(T, \nabla_T T)T = 0 \text{ car } R^{\mathbb{E}^3} \equiv 0 \text{ i.e. } (\mathbb{E}^3, g_{eu}) \text{ est plat ;}$$

alors

$$\nabla_T^3 T = 0 \text{ qui donne } \nabla_T T = 0,$$

l'harmonicité et biharmonicité des courbes dans (\mathbb{E}^3, g_{eu}) est donné par la proposition suivante

Proposition 4.4 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. γ est une courbe harmonique où biharmonique si et seulement si γ est une géodésique.

Alors les seules courbes harmoniques et biharmoniques sont les géodésiques dans (\mathbb{E}^3, g_{eu}) .

4.3 Courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{H}_3

Soit $(\mathbb{H}_3, g_{\mathbb{H}_3} = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni de la connexion de Levi-Civita ∇ et de tenseur de courbure note par R donnés dans (Chapitre 3).

Dans ce qui suit les courbes dans $(\mathbb{H}_3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont supposées non géodésiques.

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc et soit $\{T, N, B\}$ la base orthonormale tangente dans \mathbb{H}_3 le long de γ et défini comme suivant : Par T on désigne le champ de vecteur unitaire tangent à γ , par N le champ vecteur normal unitaire dans la direction de $\nabla_T T$ de γ , et on choisit B pour que T, N, B soit une base orthonormée orientée positive (i.e. $B = T \wedge N$). Alors on a les équations de Frenet suivantes :

$$\begin{cases} \nabla_T T = & \kappa N \\ \nabla_T N = & -\kappa T & +\tau B \\ \nabla_T B = & & -\tau N \end{cases} \quad (4.6)$$

où $\kappa = \|\nabla_T T\|$ est la courbure géodésique de γ et τ sa torsion géodésique.

Pour étudier les courbes harmoniques et biharmoniques dans \mathbb{H}_3 , on utilise le repère $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ et équations de serret Frenet Eq. 4.6.

4.3.1 Courbes harmoniques dans \mathbb{H}_3

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. D'après Eq. 4.3, γ est une courbe harmonique dans \mathbb{H}_3 si et seulement si

$$\tau_1(\gamma) = \nabla_T^2 T = 0, \quad (4.7)$$

les seules solutions de l'équation sont les courbes qui vérifient

$$\nabla_T T = 0,$$

on a la proposition suivante

Proposition 4.5 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. γ est une courbe harmonique dans \mathbb{H}_3 si et seulement si γ est une géodésique.*

4.3.2 Courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3

Par la suite on suppose que les courbes dans \mathbb{H}_3 sont non géodésiques et non harmoniques. Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. En utilisant les équations (4.4) et l'expression (4.3) du champ tenseur de courbure, on obtient de l'Eq. 4.1 l'équation biharmonique pour γ , on a

$$\begin{aligned}\nabla_T T &= \kappa N; \\ \nabla_T^2 T &= \kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B); \\ \nabla_T^3 T &= -3\kappa'\kappa T + (\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2)N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B,\end{aligned}$$

et on utilisons les formules Eq. 3.5

$$\langle R(T, N)T, T \rangle = 0;$$

$$\begin{aligned}\langle R(T, N)T, N \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k N_l R_{ijkl} \\ &= -\frac{3}{4}((T_1 N_2)^2 + (T_2 N_1)^2 - 2T_1 N_2 T_2 N_1) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} (T_1 N_3)^2 + (T_3 N_1)^2 + (T_2 N_3)^2 \\ + (T_3 N_2)^2 - 2T_1 N_3 T_3 N_1 - 2T_2 N_3 T_3 N_2 \end{array} \right) \\ &= -\frac{3}{4}(T_1 N_2 - T_2 N_1)^2 + \frac{1}{4}(T_1 N_3 - T_3 N_1)^2 + \frac{1}{4}(T_2 N_3 - T_3 N_2)^2 \\ &= -\frac{3}{4}B_3^2 + \frac{1}{4}B_2^2 + \frac{1}{4}B_1^2 \\ &= -B_3^2 + \frac{1}{4}(B_3^2 + B_2^2 + B_1^2) \\ &= \frac{1}{4} - B_3^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle R(T, N)T, B \rangle &= \sum_{i,j,k,l=1}^3 T_i N_j T_k B_l R_{ijkl} \\
&= -\frac{3}{4} (T_1^2 N_2 B_2 - T_2^2 N_1 B_1) + \frac{3}{4} (T_1 N_2 T_2 B_1 + T_2 N_1 T_1 B_2) \\
&\quad + \frac{1}{4} (T_1^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_1 B_1 + T_2^2 N_3 B_3 + T_3^2 N_2 B_2) \\
&\quad - \frac{1}{4} (T_1 N_3 T_3 B_1 + T_3 N_1 T_1 B_3 + T_2 N_3 T_3 B_2 + T_3 N_2 T_2 B_3) \\
&= N_3 B_3,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
N &= N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3, \\
T &= T_1 e_1 + T_2 e_2 + T_3 e_3
\end{aligned}$$

et

$$B = T \wedge N = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3,$$

dans la base orthonormée canoniques (e_1, e_2, e_3)

En fin

$$\begin{aligned}
\tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = \nabla_T^3 T - \kappa R(T, N)T \\
&= (-3\kappa'\kappa)T + \left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 + \frac{\kappa}{4} - \kappa B_3^2 \right) N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau' + \kappa N_3 B_3) B.
\end{aligned}$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 4.6 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe différentiable paramétrée par la longueur d'arc. Alors γ est une courbe biharmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} \kappa = c; \text{ constante non nulle,} \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2, \\ \tau' = N_3 B_3. \end{cases} \quad (4.8)$$

Définition 4.7 *Par analogie avec \mathbb{R}^3 (Théorème de Lancret [4]), on dit qu'une courbe γ dans une variété riemannienne est une courbe hélice si le quotient de la torsion par la courbure est*

constant i.e.

$\frac{\tau}{\kappa}$ est une constante non nulle.

Maintenant, pour toute courbe hélice γ dans \mathbb{H}_3 , le système (4.8) devient d'après la définition (4.7),

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa, \text{ constante non nulle} \\ \tau \text{ constante non nulle} \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2, \\ N_3 B_3 = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

On remarque que, B_3 est également constant.

Ainsi, les courbes hélices biharmoniques satisfont

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \kappa, \text{ constante non nulle} \\ 2. \tau \text{ constante non nulle} \\ 3. B_3 = \text{constant}, \\ 4. \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2, \\ 5. N_3 B_3 = 0. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

L'équation Eq. 4.10 montre que l'étude des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3 se base sur l'étude du comportements des fonctions N_3, B_3 et les constantes κ, τ .

Proposition 4.8 *Si $N_3 = B_3 = 0$ alors $T_3 = 1$ d'où γ est une géodésique par conséquent γ n'est pas biharmonique dans \mathbb{H}_3 .*

Proposition 4.9 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe non géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Si κ est constante et $N_3 B_3 \neq 0$, alors elle n'est pas biharmonique.*

Preuve. Du repère de Frenet (4.6) et la proposition (3.2), on a

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (T'_1 + T_2 T_3) e_1 + (T'_2 - T_1 T_3) e_2 + T'_3 e_3 \\ &= \kappa N, \end{aligned}$$

on obtient $T'_3 = \kappa N_3$; Alors, on pose $T_3(s) = \kappa F(s)$ et $N_3(s) = f(s) = F'(s)$.

Puisque γ est paramétré par la longueur d'arc

$$T = \sin \alpha(s) \cos \beta(s) e_1 + \sin \alpha(s) \sin \beta(s) e_2 + \cos \alpha(s) e_3,$$

où $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ sont deux fonctions différentielles.

Par conséquent, on écrit

$$T = \sqrt{1 - \kappa^2 F^2} \cos \beta(s) e_1 + \sqrt{1 - \kappa^2 F^2} \sin \beta(s) e_2 + \kappa F(s) e_3.$$

Ensuite, on utilisons la première équation du repère de Frenet (4.6), qui donne

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \left(\sqrt{1 - \kappa^2 F^2} (\kappa F - \beta') \sin \beta - \frac{\kappa^2 F f}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \cos \beta \right) e_1 \\ &\quad - \left(\sqrt{1 - \kappa^2 F^2} (\kappa F - \beta') \cos \beta - \frac{\kappa^2 F f}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \sin \beta \right) e_2 + \kappa f e_3 \\ &= \kappa N \end{aligned} \tag{4.11}$$

puisque $\kappa = \|\nabla_T T\|$, on a :

$$\kappa F - \beta' = \pm \kappa \frac{\sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}}{1 - \kappa^2 F^2},$$

maintenant on remplace $\kappa F - \beta'$ dans l'expression précédant de $\nabla_T T$, Eq. 4.11, on obtient :

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \sin \beta - \frac{\kappa F f}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \cos \beta \right) e_1 \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \cos \beta - \frac{\kappa F f}{\sqrt{1 - \kappa^2 F^2}} \sin \beta \right) e_2 + f e_3. \end{aligned}$$

Comme $B = T \wedge N$, on a

$$B_3 = T_1 N_2 - N_1 T_2 = \pm \sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}.$$

Donc la deuxième équation de Frenet (4.6) donnée par :

$$\langle \nabla_T N, e_3 \rangle = \langle -\kappa T + \tau B, e_3 \rangle = -\kappa T_3 + \tau B_3. \tag{4.12}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_T N, e_3 \rangle &= \langle \nabla_T (N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3), e_3 \rangle & (4.13) \\
&= \left\langle \begin{aligned} &(N'_1 + \frac{1}{2} (T_2 N_3 + T_3 N_2)) e_1 \\ &+ (N'_2 - \frac{1}{2} (T_1 N_3 + T_3 N_1)) e_2 + (N'_3 + \frac{1}{2} (T_1 N_2 - T_2 N_1)) e_3, e_3 \end{aligned} \right\rangle \\
&= N'_3 + \frac{1}{2} B_3.
\end{aligned}$$

On comparons les équations (4.12) et (4.13), on obtient :

$$N'_3 + \frac{1}{2} B_3 = -\kappa T_3 + \tau B_3. \quad (4.14)$$

Après, on remplace : $N_3 = f$, $B_3 = \pm \sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}$ et $T_3 = \kappa F$ dans l'équation (4.14), on obtient :

$$\tau = \pm \frac{f' + \kappa^2 F}{\sqrt{1 - f^2 - \kappa^2 F^2}} - \frac{1}{2} = \frac{B'_3}{N_3} - \frac{1}{2}. \quad (4.15)$$

Supposons que γ est biharmonique, donc $\tau' = N_3 B_3 \neq 0$ et on peut écrire :

$$N_3 = \frac{\tau'}{B_3}.$$

Remplaçons N_3 dans l'équation (4.15) et par l'intégration, on obtient :

$$\tau^2 = B_3^2 - \tau + c, \quad (4.16)$$

où c est une constante.

D'autre part, à partir de l'équation (4.10)-(4), on a :

$$B_3^2 = \frac{1}{4} - \kappa^2 - \tau^2,$$

l'équation (4.16) devient

$$2\tau^2 + \tau = C.$$

ou C est un constant, et donc τ est aussi un constant. qui est une contradiction avec l'hypothèse de la proposition (i.e. $\tau' \neq 0$). ■

D'après le Théorème (4.6) et Proposition (4.9), on a comme conclusion :

Théorème 4.10 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe non géodésique paramétrée par la longueur d'arc. La courbe γ est biharmonique si et seulement si

$$\begin{cases} \kappa = \text{constant} \neq 0; \\ \tau = \text{constant}; \\ N_3 B_3 = 0; \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Remarque 4.11 toute les courbes biharmoniques sont des courbes hélices dans \mathbb{H}_3 .

Courbes hélices biharmoniques dans \mathbb{H}_3

Maintenant, on veut déterminer toutes les courbes hélices dans \mathbb{H}_3 qui sont des courbes biharmoniques mais non géodésiques. D'après le théorème (4.10), il est clair que l'étude de la biharmonicité dépend du comportement de N_3 et B_3 .

D'une part, il résulte de la proposition (4.9) et l'équation (4.17) que B_3 doit être constant. On montre que pour une courbe satisfaisant l'équation (4.17), la constante B_3 ne peut pas être nulle. Plus précisément, on prouve la proposition suivante :

Proposition 4.12 Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe paramétrée non géodésique par la longueur d'arc. Si $B_3 = 0$, alors $\tau^2 = \frac{1}{4}$ et γ n'est pas biharmonique.

Preuve. Comme γ il est paramétré par longueur d'arc, on peut écrire

$$T = \sin \alpha \cos \beta e_1 + \sin \alpha \sin \beta e_2 + \cos \alpha e_3,$$

où : $\alpha = \alpha(s)$, $\beta = \beta(s)$ en utilisant l'équation (3.3), on a d'abord,

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (\alpha' \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta (\beta' - \cos \alpha)) e_1 \\ &\quad + (\alpha' \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta (\beta' - \cos \alpha)) e_2 - \alpha' \sin \alpha e_3 \\ &= \kappa N. \end{aligned}$$

En suite on calcule $B = T \wedge N$ et on obtient

$$B_3 = \frac{\sin^2 \alpha (\beta' - \cos \alpha)}{\kappa}.$$

Maintenant, on suppose que $B_3 = 0$. On exclu le cas $\sin \alpha = 0$, ce qui implique $T = e_3$, donc γ est une géodésique. On doit donc prendre $\beta' - \cos \alpha = 0$, et donc

$$\nabla_T T = \alpha' (\cos \alpha \cos \beta e_1 + \cos \alpha \sin \beta e_2 - \sin \alpha e_3).$$

On peut supposer que $\alpha' > 0$ (quand $\alpha' = 0$ on a une géodésique). Donc on a :

$$\begin{aligned} N &= \alpha' (\cos \alpha \cos \beta e_1 + \cos \alpha \sin \beta e_2 - \sin \alpha e_3), \\ B &= -\sin \beta e_1 + \cos \beta e_2 \end{aligned}$$

et

$$\nabla_T N = \left(-\alpha' \sin \alpha \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \beta \right) e_1 + \left(-\alpha' \sin \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} \cos \beta \right) e_2 - \alpha' \cos \alpha e_3.$$

Maintenant, on utilise la deuxième équation de Frenet (4.6) pour obtenir

$$\tau = \langle \nabla_T N, B \rangle = -\frac{1}{2}.$$

On remplace la dernière équation dans l'équation Eq. (4.10)-(4), on aura $\kappa = 0$, d'où γ n'est pas biharmonique. ■

On peut donner ce corollaire,

Corollaire 4.13 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe hélice biharmonique non géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Alors*

$$\begin{cases} B_3 = \text{constant} \neq 0; \\ N_3 = 0; \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2. \end{cases} \quad (4.18)$$

4.4 Formules explicites des courbes biharmoniques dans \mathbb{H}_3

Dans cette section, on utilise les résultats précédentes pour trouver les équations paramétriques explicites des courbes biharmoniques non géodésiques dans le groupe de Heisenberg \mathbb{H}_3 .

On prouve d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.14 *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_3$ une courbe non géodésique paramétrée par la longueur d'arc. Si $N_3 = 0$, alors t_3 est constant et,*

$$T(s) = \sin \alpha_0 \cos \beta(s)e_1 + \sin \alpha_0 \sin \beta(s)e_2 + \cos \alpha_0 e_3, \quad (4.19)$$

où $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

Preuve. Si $\gamma' = T = T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3$, et $\|T\| = 1$, de

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= (T'_1 + T_2T_3)e_1 + (T'_2 - T_1T_3)e_2 + T'_3e_3 \\ &= \kappa N, \end{aligned}$$

il s'ensuit que $N_3 = 0$ si et seulement si $T'_3 = 0$, i.e. si et seulement si $T_3 = c$, constant. ■

Pour trouver les courbes intégrales du champ vecteur tangent à γ données par l'équation (4.19) qui sont biharmoniques mais non géodésique, on doit d'abord déterminer la fonction $\beta(s)$, après, une intégration simple on trouve les équations paramétriques recherchées. On donne le théorème suivant :

Théorème 4.15 *Les équations paramétriques de toutes les courbes biharmoniques non géodésiques γ de \mathbb{H}_3 sont*

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{A} \sin \alpha_0 \sin (As + a) + b, \\ y(s) = \frac{1}{A} \sin \alpha_0 \cos (As + a) + c, \\ z(s) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{(\sin \alpha_0)^2}{2A} \right) s - \frac{b}{2A} \sin \alpha_0 \cos (As + a) - \frac{c}{2A} \sin \alpha_0 \sin (As + a) + d, \end{cases} \quad (4.20)$$

où $A = \frac{\cos \alpha_0 \pm \sqrt{5(\cos \alpha_0)^2 - 4}}{2}$, $\alpha_0 \in \left(0, \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} \right] \cup \left[\arccos \left(-\frac{2\sqrt{5}}{2} \right), \pi \right)$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Preuve. On utilise les formules de Frenet (4.6), et on prend en compte le Corollaire (4.13) et le Lemme (4.14).

La dérivée covariante du champ vectoriel T donné par l'équation (4.19) est

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= \sin \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \beta') (\sin \beta e_1 - \cos \beta e_2) \\ &= \kappa N, \end{aligned}$$

où $\kappa = |\sin \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \beta')|$.

On peut toujours supposer que $\sin \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \beta') > 0$. Alors on obtient

$$\kappa = \sin \alpha_0 (\cos \alpha_0 - \beta') \quad (4.21)$$

et

$$N = \sin \beta e_1 - \cos \beta e_2.$$

En suite, on a

$$B = T \wedge N = \cos \beta \cos \alpha_0 e_1 + \sin \beta \cos \alpha_0 e_2 - \sin \alpha_0 e_3 \quad (4.22)$$

et

$$\nabla_T N = \cos \beta \left(\beta' - \frac{1}{2} \cos \alpha_0 \right) e_1 + \sin \beta \left(\beta' - \frac{1}{2} \cos \alpha_0 \right) e_2 - \frac{1}{2} \sin \alpha_0 e_3.$$

Il s'ensuit que la torsion géodésique τ de γ est donné par

$$\tau = \langle \nabla_T N, B \rangle = (\cos \alpha_0) \beta' + \frac{1}{2} - (\cos \alpha_0)^2. \quad (4.23)$$

Si γ est une courbe avec $\gamma' = T$, alors cette courbe est biharmonique non géodésique si et seulement si

$$\begin{cases} \beta' = \text{constant}; \\ \beta' \neq \cos \alpha_0; \\ \kappa^2 + \tau^2 = \frac{1}{4} - B_3^2. \end{cases} \quad (4.24)$$

De les équations (4.21), (4.22), (4.23) et (4.24), on obtient

$$(\beta')^2 - (\cos \alpha_0) \beta' + 1 - (\cos \alpha_0)^2 = 0.$$

De cette dernière équation on aura

$$\beta' = \frac{\cos \alpha_0 \pm \sqrt{5 (\cos \alpha_0)^2 - 4}}{2} = A, \text{ (constante)}$$

Avec la condition pour la réalité des solutions $(\cos \alpha_0)^2 \geq \frac{4}{5}$, et donc

$$\beta(s) = As + a,$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Pour trouver les équations explicites $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, on doit intégrer le système $\frac{d\gamma}{ds} = T$ que dans notre cas est

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = \sin \alpha_0 \cos (As + a), \\ \frac{dy}{ds} = \sin \alpha_0 \sin (As + a), \\ \frac{dz}{ds} = \cos \alpha_0 + \frac{1}{2} \sin \alpha_0 (\sin (As + a) x(s) - \cos (As + a) y(s)). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{A} \sin \alpha_0 \sin (As + a) + b, \\ y(s) = \frac{1}{A} \sin \alpha_0 \cos (As + a) + c, \\ z(s) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{(\sin \alpha_0)^2}{2A} \right) s - \frac{b}{2A} \sin \alpha_0 \cos (As + a) - \frac{c}{2A} \sin \alpha_0 \sin (As + a) + d, \end{cases}$$

■

Exemple 4.16 La courbe γ paramétrée par

$$\begin{cases} x(s) = 0.00457 \sin (As), \\ y(s) = 0.00457 \cos (As), \\ z(s) = 0.999999s, \end{cases} \quad (4.25)$$

avec $\alpha_0 = \frac{\pi}{12}$, $A = \frac{\cos \alpha_0 \pm \sqrt{5(\cos \alpha_0)^2 - 4}}{2} = 0.999968$ et $a = b = c = d = 0$, est biharmonique non géodésique dans \mathbb{H}_3 , voir la figure 2.

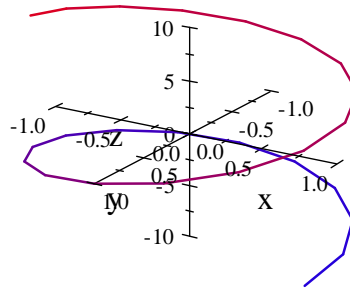


Fig. 2. Courbe biharmonique γ tracée dans \mathbb{R}^3 .

Remarque 4.17 Les courbes biharmoniques données par le Théorème (4.15), Eq. (4.20) peut

être obtenu par intersection de deux surfaces S et S' données par :

$$S(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = \frac{1}{A} \sin \alpha_0 \sin (Au + a) + b, \\ y(u, v) = -\frac{1}{A} \sin \alpha_0 \cos (Au + a) + c, \\ z(u, v) = v. \end{cases} \quad (4.26)$$

et

$$S'(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = \frac{v}{A} \sin \alpha_0 \sin (Au + a) + b, \\ y(u, v) = -\frac{v}{A} \sin \alpha_0 \cos (Au + a) + c, \\ z(u, v) = \left(\cos \alpha_0 + \frac{\sin^2 \alpha_0}{2A} \right) u + \frac{b}{2} y'(u, v) - \frac{c}{2} x'(u, v) + d. \end{cases} \quad (4.27)$$

Avec les mêmes coordonnées de l'exemple (4.16), la figure 3 montre la courbe biharmonique γ comme l'intersection des deux surfaces S et S' dans \mathbb{R}^3 .

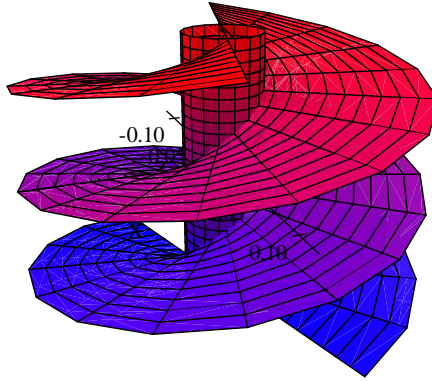


Fig. 3. Surfaces S et S' tracés dans \mathbb{R}^3 .

Conclusion

L'étude des courbes harmoniques et biharmoniques dans l'espace Euclidien ne donne pas des résultats de courbes ou les géodésiques ses résultats result de fait que l'espace Euclidien est plat. Les courbes harmoniques dans \mathbb{H}_3 sont aussi des géodésiques ce qu'ils ne sont pas intéressant dans notre travail. Dans le groupe Heisenberg on prouve qu'il existe des courbes biharmoniques non géodésiques qui sont des courbes hélices avec des conditions et on donne la forme explicite de ces courbes biharmoniques dans le groupe Heisenberg de dimension 3.

Prespectives

1. Etudier les courbes harmoniques et biharmoniques dans d'autre espace de dimension 3.
2. Etudier les courbes harmoniques et biharmoniques dans les espaces $SOL(3)$, $SL(2, \mathbb{R})$ et $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.
3. Généraliser l'étude d'harmonicité et biharmonicité sur les variétés de Cartan-Vranceanu et sur les d'autre variétés de dimension 3.

Bibliographie

- [1] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu, Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 2004, 62, p. 265-278.
- [2] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls et J. T. Tyson, An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem, *Progress in Mathematics V. 259*, (2007).
- [3] E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier Villars, Paris (1946).
- [4] N. Djellali, *Sur les courbes hélices et les courbes slant hélices*, mémoire de master académique AGA, Univ. Saida (2015).
- [5] J. Eells, J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, V. 86, (1964), p. 109-160.
- [6] M. Hindry et N. Kahouadji, *Cours sur les courbes et surfaces* (2010), <https://webusers.imj-prg.fr/~marc.hindry/coursCS3.pdf>.