République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supèrieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Etude de quelques inclusions différentielles d'ordre fractionnaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Rabegh **y**amina [1]

Sous la direction de

Dr F.Z. Mostefai.

1. e-mail : rabeghamina@gmail.com

Soutenu le 23 Mai 2017 devant le jury composé de

Mr. S. O uakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme. F.Z. Mostefai	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr. S. A abbes	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme. N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

Remerciements

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser ce travail.

Je remercie d'abord très chaleureusemen mon encadreur F.Z. MOSTEFAI. pour son aide et ses conseils, en saluant en lui son savoir faire, sa compétence et ces connaissances dont il nous a fait en profiter.

Je remercie Monsieur S. OUKKAS, enseignant au département de mathématiques de l'université de Saïda de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Mr. S. ABBAS, et Mme. N.BEKKOUCHE, enseignants à l'université de Saïda d'avoir acceptés de faire partie de ce jury.

Finalement, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à ma familles qui nous ont toujours soutenues et à tout ce qui participe de réaliser ce mémoire. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.

Dédicaces

Remerciements et louanges à Dieu Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail.

Prière et Salut soient sur Notre Cher Maître & Prophète " Mohammed " et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont enfantent, m'ont encouragé à suivre mes études. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrifices que ce mémoire a été mené à bout. Enfin, mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

Une dédicace particulière à mon père de mon encadreur, et mon grande père de mon amie M.Zaoui qui nous ont quitté cette année que dieu tout puissant les accueilles dans son vaste paradis .

A Ma famille et mes amies.
Et à tous mes enseignants de mathématiques.
À tous la promotion 2.M. G. D lmd 2016/2017.

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons quelques résultats d'existence des solutions du problème aux limites pour des inclusios différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour les multiapplications contractantes .

Mots-clés : fractionnaires, analyse multivoque, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe, espaces de Banach, existence de solutions.

Abstract

In this paper, we present existence results of solutions for fractional order differential inclusions in the sense of Caputo, for boundary value problems. These results were obtained by using the fixed point theorem of nonlinear alternative of Leray-Schauder type and The fixed point theorem for the multivalued contraction maps given by Covitz and Nadler.

Keywords : Fractional, multivalue, fractional derivative Caputo type, fractional integral, fixed point, Banach spaces, existence of solutions.

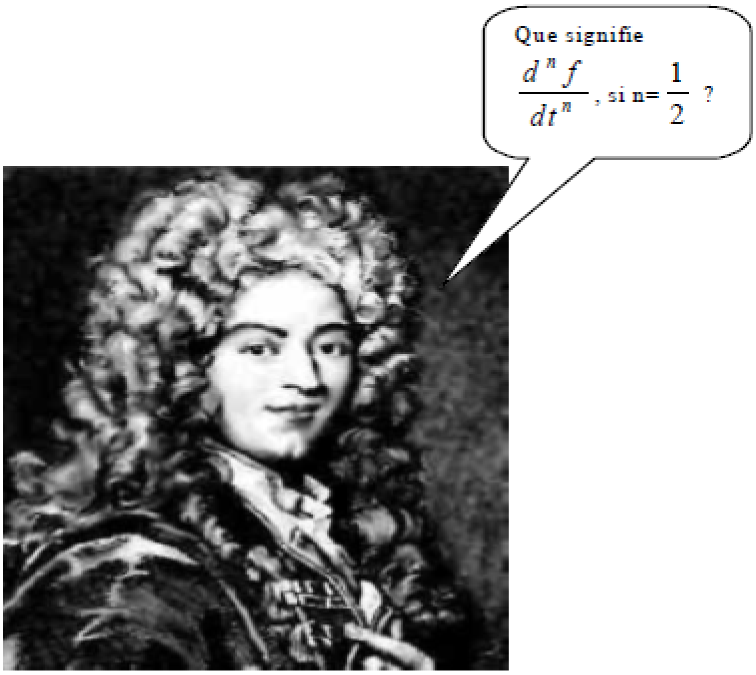
ملخص

في هذه المذكرة ندرس وجود حلول لبعض المسائل الحدية ذات المشتقات الكسرية بمفهوم كابوتو

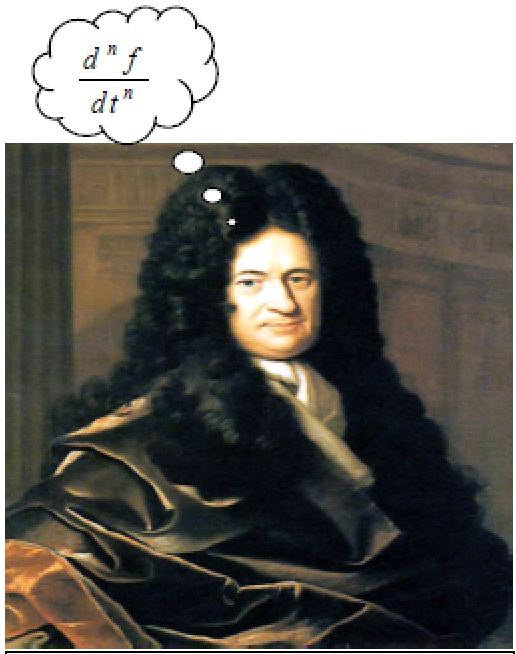
تم الحصول على هذه النتائج بإستخدام كلا من نظرية النقطة الثابتة ليراي شودر ومبدأ اللإنكماش لكوفيدز نادل

الكلمات المفتاحية
الحساب الكسري, مشتقات تفاضلية بمفهوم كابوتو,التكامل الكسري,النقطة الثابتة,فضاء بناخ,وجود الحلول.

Introduction



Guillaume de L'Hospital
1661-02/02/1704



Gottfried Wilhelm von Leibniz
(01/07/ 1646-14 /11/ 1716)

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médicine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Le concept des opérateurs d'ordres fractionnaires a été défini aux 19^e siècle par Riermann- Liouville et Leitinkov. Leur but est de prolonger la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.

Bien que la théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent [5] à la fin du 17^e siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^e dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

Que signifie $\frac{d^n t}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques [3].

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymères. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu récemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaires dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au caclul

fractionnaire jusqu'au milieu du 20^e siècle, inclut :
P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L´evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erd´elyi (1939- 1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949) [9].

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de M. Benchohra et S. Hamani. Notre travail est réparti en quatre chapitres :

Le premier chapitre intitulé $''$ **Préliminaires** $''$, contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude. Il est divisé comme suit :
• Dans la section 1, nous donnons quelques notations et définitions.
• La section 2, sera consacrée aux quelques définitions et outils sur les applications multivoques.
• La section 3, sous le titre calcule fractionnaires, sera consacrée aux définitions et résultas (lemmes) importants concernant la théorie du calcul fractionnaires.
• La section 4, nous donnons quelques Lemmes fondamentaux aux calcul fractionnaires.
•La section 5, sera réservée à un petit rappel sur quelques théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé $''$ **Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où** $0 < \alpha < 1''$, sera consacré à l'étude d'un problème avec l'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad pour \;\; tout \;\; t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1$$

et la condition initiale suivante

$$ay(0) + by(T) = c.$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Dans le troisième intitulé $''$ **Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où** $1 < \alpha < 2''$, on présente quelques résultats d'existences du solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. On considère le problème suivant : :

$${}^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad pour \;\; tout \;\; t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2.$$

$$y(0) = y_0, \;\; y(T) = y_T.$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_T sont des constantes réelles .

Le quatrième chapitre intitulé $''$ **Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où** $2 < \alpha < 3''$, on présente quelques résultats d'existences du solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. On considère le problème suivant :

$${}^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad pour \;\; tout \;\; t \in J = [0, T], 2 < \alpha < 3.$$

$$y(0) = y_0, \;\; y^{'}(0) = y_0^*, \;\; y^{''}(T) = y_T.$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_0^*, y_T sont des constantes réelles .

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives aux analyse multivoque telles que : semi continue supérieurement, Carathéodory, définitions relatives aux calcul fractionnaire telles que : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, lemmes et théorèmes qui seront utilisés à travers les chapitres suivants.

1.1 Notations et définitions

Dans cette section, on donne quelques définitions, théorèmes et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail.

Définition 1.1.1. *On appelle espace de Banach* $(E, \| \,.\, \|_E)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Soit $J = [0, T],\ \ T > 0$. Notons $C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\| y \|_\infty = sup\{| y(t) | : t \in J\}.$$

Définition 1.1.2. *Soient* $\Omega = (a, b)(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ *un intervalle fini ou infinie de* $\mathbb{R}$ *et* $1 \leq p \leq \infty$.

1. *Pour* $1 \leq p < \infty$, *L'espace* $L^P(\Omega)$ *est l'espace des (classes de) fonctions* f *réelles sur* Ω *telles que* f *est mesurable et*

$$\int_a^b \mid f(x) \mid^p dx < +\infty,$$

muni de la norme

$$\parallel f \parallel_p = \left(\int_a^b \mid f(t)^b dt \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

2. *l'espace* $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des (classes de) fonctions mesurables* f *bornées presque partout (p.p) sur* Ω *muni de la norme*

$$\parallel f \parallel_{L^\infty} = \mid f(t) \mid = inf \left\{ k \geq 0, \mid f(t) \mid \leq k \;\; p.p \;\; sur \;\; \Omega \right\}.$$

Définition 1.1.3. [24] *Une fonction* $f : J \to E$ *est dite absolument continue si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition finie* $[a_i, b_i]_{i=1}^p$ *vérifiant*

$$\sum_{i=1}^p (b_i - a_i) < \delta,$$

alors,

$$\sum_{i=1}^p \parallel y(b_i) - y(a_i) \parallel < \varepsilon.$$

$\triangleright$ *On note par* $AC^1(J, E)$ *l'espace des fonctions dérivables* $y : J \to E$ *dont la première dérivée est absolument continue.*

Définition 1.1.4. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, et* $A : E \to F$ *une application linéaire. On dit que* A *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F.

Définition 1.1.5. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. on appelle opérateur borné toute application linéaire continue de* E *dans* F.

Définition 1.1.6. *Soit M un sous ensemble de $C(E, F)$. On dit que M est uniformément borné, s'il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$\| f \|_\infty \leq C \ \forall f \in M.$$

Définition 1.1.7. *Soient E et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en une ensemble relativement compact dans F. f est dite compacte si $f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Définition 1.1.8. *Soit E un espace de Banach muni de la norme $\| \, . \, \|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.*

Définition 1.1.9. *Soit (M, d) un espace métrique complet $T : M \to M$ une application. On dit que T est Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de M, l'inégalité*

$$d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)).$$

Si $k \leq 1$, l'application T est appelée non expansive.

Si $k < 1$, l'application T est appelée contraction.

Proposition 1.1.1. *Soit $C(J, E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach E et $M \subset C(J, E)$.*

(i) *M est borné i.e : il existe $b \geq 0$ tel que $\| f \|_\infty \leq b \ \forall f \in M$,*

(ii) *M est équicontinu i.e :*

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in J : \mid x_1 - x_2 \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x_1) - f(x_2) \mid < \xi \ \forall f \in M,$$

(iii) *$\forall x \in J, \{f(x) \in E, f \in M\}$ est relativement compact dans E.*

Lemme 1.1.1. *[27] (Lemme de Mazur) Soit (x_n) une suite convergeant faiblement vers x dans E alors il existe une suite (y_n) avec chaque y_n combinaison convexe des $\{x_k, k \geq n\}$ convergeant fortement vers x dans E.*

Théorème 1.1.1. *(d'Ascoli-Arzelà) Soit $A \subset C(J, \mathbb{R}), A$ est relativement compact (i.e : $\overline{A}$ est compact) si et seulement si :*

1. *A est uniformément borné,*
2. *A est équicontinu.*

Théorème 1.1.2. *(Compacité des espace metriques)*
Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) *A est compact,*

ii) *propriété de Bolzano-Weierstrass : toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A,*

iii) *De toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A. On peut extraire une sous suite convergente dans A.*

Remarque 1.1.1. *x un point accumulation de A si tout voisinage v de x dans X contient un point $A \neq x$.*

Définition 1.1.10. *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle la transformée de Laplace de $f(t)$, la fonction :*

$$F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \ \ s \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.11. *La transformée de Laplace inverse unilatérale $f(t)$ d'une fonction $F(s)$ est définie par :*

$$L^{-1}F(s) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Remarque 1.1.2. *Une fonction f, definie sur $[a, b]$, est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma \in S$ telle que :*

1. *f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$,*
2. *f admet en tout point de la subdivision une limite à gauche et une limite à droite finies.*

1.2 Quelques notions d'analyse multivoque

Dans notre étude, certains éléments d'analyse multivoque seront utilisés. Il est donc utile de rappeler quelques définitions et propriétés fondamontales de multifonctions (dit aussi correspondances).

Définition 1.2.1. *Une multifonction (où application multivoque) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \to \mathcal{P}(Y)$* [1]

Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace normé.
▷ On note :
$\mathcal{P}(X) = \{Y \in X : Y \neq \emptyset\}$,
$\mathcal{P}_{cl}(X) = \{Y \in P(X) : Y \quad \text{fermée} \}$,
$\mathcal{P}_{b}(X) = \{Y \in P(X), Y \quad \text{bornée} \}$,
$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \in P(X) : Y \quad \text{compact} \}$,
$\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \in P(X) : Y \quad \text{convexe} \}$,
$\mathcal{P}_{cp,cv}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ compact et convexe}\}$.

Définition 1.2.2. *Le domaine de G est l'ensemble des éléments de X dont l'image par G est un sous-ensemble non vide de y Autrement dit,*

$$dom \;\; G = \{x \in X : G(x) \neq \emptyset\}$$

L'application G est dite stricte si pour tout $x \in X$, l'ensemble $G(x)$ est non vide.

Définition 1.2.3. *Soit $(X, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach et $G : X \to \mathcal{P}(X)$ est une application multivoque (où une multifonction).*
✓ *Une application multivoque $G : X \to \mathcal{P}(Y)$ est dite à valeurs convexes (resp. fermées) si pour tout $x \in X, G(x)$ est convexe (resp.fermé).*

1. ensemble des parties d'un ensemble y noté aussi par 2^y

✓*G est borné si pour tout ensemble borné B dans X l'ensemble $G(B)$ est borné dans X,*

$$\sup_{x\in B}\{sup\{\mid y \mid: y \in G(x)\}\} < \infty.$$

✓*G est dite semi continue supérieurement (s. c. s) au point $x_0 \in X$ si pour tout ouvert W contenant $G(x_0)$ il existe un voisinage ouvert $V(x_0)$ dans X tel que pour tout $x \in V(x_0)$ on a $G(x) \subset W$.*

✓*G est dite complètement continue si $G(B)$ continue et relativement compact pour tout ensemble B borné de X.*

✓*G admet un point fixe s'il existe $x \in X$ tel que $x \in G(x)$.*

✓*G est convexe si son graphe[2] est un sous ensemble convexe de $X \times Y$. Autrement dit, G est convexe si pour tous $h_1, h_2 \in X$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$tG(h_1) + (1-t)G(h_2) \subset G(th_1 + (1-t)h_2).$$

Définition 1.2.4. *On dit qu'une application $G : X \to Y$ est semi-continue inférieurement (s. c. i) en $x_0 \in dom(G)$ si pour tout $y_0 \in G(x_0)$ et pour tout voisinage V de y_0 (dans Y), il existe U de x_0 (dans X) tel que $G(x) \cap V \neq \emptyset$, pour tout $x \in U$.*

Exemple :

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par $G(x) := \{-1, 1\}$ si $x \neq 0$ et $G(0) = [-1, 1]$. Cette multi-fonction est s. c. i en tout $x_0 \neq 0$ car pour tout vosinage V de $y_0 = -1$ (resp. $y_0 = 1$) on a $G(x) \cap V \neq \emptyset$, pour tout x.
D'autre part, on a G est s. c. s en tout point x_0 car pour $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$), un ouvert quelconque V dans $\mathbb{R}$ contenant $\{-1, 1\}$ et $U :=]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est tel

2. On appelle graphe de la multi-fonction F, l'ensemble

$$Graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

F est à graphe fermé si Graph (F) est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

que $x_0 - \varepsilon > 0$ (resp. $x_0 - \varepsilon < 0$).

Alors $G(x) = \{-1, 1\} \subset V$ pour tout $x \in U$. Maintenant, pour $x_0 = 0$ et un ouvert V contenant $[-1, 1]$ alors $G(x) \subset V$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2.5. *Soit $G : J \to \mathcal{P}_{cl}(\mathbb{R}^n)$ une application multivoque à valeurs fermées. On dit que G est mesurable si pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, la fonction*

$$(x, y) \mapsto d(u, G(x, y)) = inf\{\| u - z \| : z \in G(x, y)\}$$

est mesurable sur J, où d est la distance induite par l'espace de Banach.

Définition 1.2.6. *On appelle espace mesurable un triple (Ω, Σ, μ) où Σ est une σ-algèbre sur l'ensemble Ω et μ une mesure.*

Définition 1.2.7. *On dit qu'une multi-application $F \in \mathcal{P}(\Omega)$ est mesurable si l'image réciproque*

$$F^-(\mathcal{O}) = \{w \in \Sigma : F(w) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$$

de tout ouvert $\mathcal{O}$ est dans Σ.

Définition 1.2.8. *Une application multivoque $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est dite de Carathéodory si elle vérifie :*

1. *$t \mapsto F(t, u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}$,*
2. *$u \mapsto F(t, u)$ est semi continue supérieurement presque par tous $t \in J$. De plus, si*
3. *pour tout $q > 0$, il existe une fonction $\varphi_q \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $u \in C(J, \mathbb{R})$ avec $\| u \| \leq q$,*

$$\| F(t, u) \| = \{\| f \|_{L^1} : f \in F(t, u)\} \leq \varphi_q(t) \ \ p.p \ \ t \in J.$$

alors la fonction F est dite L^1-Carathéodory.

Définition 1.2.9. *Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux parties non vides de X. On considère l'application :*

$$H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}^+ \cup +\infty,$$

donnée par :

$$H_d(A,B) = max\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\right\},$$

où $d(A,b) = \inf_{a\in A} d(a,b)$ *et* $d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$.

On convient que $d(x,\emptyset) = \infty$, H_d *est une distance de Pompeiu - Hausdorff induite par la métrique* d *et l'espace* $(P_{cl}(X), H_d)$ *est un espace métrique généralisé.*

Pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R}^n)$, *on définit l'ensemble :*

$$S_{F,y} = \{f \in L^1(J,\mathbb{R}^n) : f(t) \in F(t,y) \ \ p.p \ \ t \in J\}$$

$S_{F,y}$ *est l'ensemble des séléctions de* F. *Si* F *est à valeurs fermées, bornées et convexes et* X *est de dimension fini, alors* $S_{F,y}$ *est non vide.*

Définition 1.2.10. *[15] Un opérateur multivoque* $N : X \to \mathcal{P}_{cl}(X)$ *est dit :*

(a) γ *-Lipschitz s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que :*

$$H_d(N(u),N(v)) \leq \gamma d(u,v), \ \ pour \ \ tout \ \ u,v \in X,$$

(b)contractant s'il est γ *-Lipschitz avec* $\gamma < 1$.

Proposition 1.2.1. *Soient* X *un espace de Banach séparable et*

$$F_1, F_2 : J \to \mathcal{P}_{cp}(X),$$

de multi-fonction mesurables, alors la multi-fonction $t \to F_1(t) \cap F_2(t)$ *est mesurable.*

Lemme 1.2.1. *[15, 18] Soit* $G : J \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(\mathbb{R})$ *une application multivoque complètement continue.* G *est s. c. s si et seulement si le graghe de* G *est fermé, i.e : si un* $x_n \to x_*, y_n \to y_*, y_n \in G(x_n)$ *alors* $y_* \in G(x_*)$.

1.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section, on introduit des notations, définitions et des lemmes concernant le calcul fractionnaire.

1.3.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette subsection on présente quelques fonctions spéciales comme la fonction Gamma et Bêta, qui seront utilisées dans les autres chapitres, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma est donnée par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

(cette intégrale est convergente pour tout$x > 0$).

Proposition 1.3.1. *Pour tout $x > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

$$\Gamma(0_+) = +\infty,$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n},$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

Cas particuliers :

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dx = 1.$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base de calcule fractionnaires : La fonction Bêta, cette fonction joue un role important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gama.

Définition 1.3.2. *La fontion Bêta (qui est un type d'intégrale, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :*

$$\forall x, y > 0 \ \ \mathcal{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante : $\forall x, y > 0$ *on a :*

$$\mathcal{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x).\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.3.2 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a, b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a, b]. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}h(t) = \int_a^t h(s)ds$$

$$I^{(2)}h(t) = \int_a^t ds \int_a^s h(u)du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}h(t) = \int_a^t (t-s)h(s)ds,$$

Plus généralement le n^{ime} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)}h(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} h(t_n)dt_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{(n-1)}h(s)ds \qquad (1.1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}, a, x \in \mathbb{R}, x > a$. Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.3.3. *si $h \in C[a,b]$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+, x > a, \alpha, a, x \in \mathbb{R}$. l'intégrale :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{(\alpha-1)} h(s) ds$$

telle que $a \in]-\infty, +\infty[$ est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α,

où Γ est la fonction Gamma.

Lorsque $a = 0$ nous écrivons $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$, où $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$, et $\varphi_\alpha \to \delta$, quand $\alpha \to 0$ et l'intégrale

$$I_{b^-}^{(\alpha)} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{(\alpha-1)} h(s) ds$$

telle que $b \in]-\infty, +\infty[$ est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

G.F.B. Riemann (1826-1866)

J. Liouville (1809-1882)

Théorème 1.3.1. *Pour $h \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} [I_{a^+}^{(\beta)} h(x)] = I_a^{(\alpha+\beta)} h(x) \ \text{pour} \ \alpha > 0, \beta > 0$$

Preuve :

La preuve découle directement de la définition

$$I_{a^+}^{(\alpha)}[I_{a^+}^{(\beta)}h(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{dt}{(s-t)^{\alpha-1}}\int_a^x \frac{h(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du.$$

Or $h \in C[a,b]$, d'après le théorème de Fubini on et par le changement $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$I_{a^+}^{(\alpha)}[I_{a^+}^{(\beta)}h(x)] = \frac{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{h(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du = I_a^{(\alpha+\beta)}h(x)$$

Où $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ désigne la fonction Bêta. $\square$

Propriétés :

- $I_a^0 h(t) = h(t)$,
- l'opérateur intégral I_a^0 est linéaire.

Exemple :

Soit $h(t) = (t-a)^m$ où $m > -1$

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^m ds.
\end{aligned}$$

A l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ on obtient,

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha h(t) &= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (1-x)^{\alpha-1}x^m ds \\
&= \frac{(t-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{B}(\alpha, m+1) \\
&= \frac{(t-a)^{m+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+m+1)},
\end{aligned}$$

d'où

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(t-a)^{m+\alpha}.$$

1.3.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.4. *Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α notée ${}^{RL}D_a^\alpha f$ est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha} f(t)). \end{aligned}$$

avec $n > \alpha$ un entier naturel.

Notation : On note l'opérateur $D^n, n \in \mathbb{N}$ différentiation de l'opérateur d'ordre entier i. e :

$$D^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

Remarque 1.3.1. *dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouvilleest est non-commutative i.e :*

$${}^{RL}D^m D^\alpha f(t) = {}^{RL} D^{\alpha+m} f(t) \neq {}^{RL} D^\alpha D^m f(t).$$

Théorème 1.3.2. *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre α existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ${}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe et on a :*

$${}^{RL}D_a^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda {}^{RL}D_a^\alpha f + \mu {}^{RL}D_a^\alpha g.$$

Preuve :
Soit $f, g \in L^1[a,b], \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha f(t) &= D_a^n I^{n-\alpha} f(t) \\ {}^{RL}D_a^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) &= D_a^n I^{n-\alpha} [\lambda f(t) + g(t)] \\ &= \lambda D_a^n I^{n-\alpha} [(f+g)(t) \end{aligned}$$

Comme la dérivée n-ième et l'intégrale sont linéaires alors,

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda f(t)+g(t)) &= \lambda D_a^n I^{n-\alpha} f(t) + D_a^n I^{n-\alpha} g(t) \\
&= \lambda {}^{RL}D_a^{\alpha} f(t) +^{RL} D_a^{\alpha} g(t).
\end{aligned}$$

Théorème 1.3.3. *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de fonction puissance est :*

$$ {}^{RL}D^{\alpha}t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, \qquad n-1<\alpha<n, \qquad p>-1, p\in\mathbb{R}$$

Preuve :

$$ {}^{RL}D^{\alpha}t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-x)^{n-\alpha-1} x^p dx.$$

En faisant le changement de variable $x=\lambda t$, on aura :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}t^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t(1-\lambda))^{n-\alpha-1} (\lambda t)^p t d\lambda. \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha+p} \int_0^t (1-\lambda)^{n-\alpha-1} \lambda^p d\lambda. \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\mathcal{B}(n-\alpha,p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} t^{p-\alpha}. \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+1)} t^{p-\alpha}. \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}. \qquad \square
\end{aligned}$$

1.3.4 La dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisé, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.3.5. *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b]$ La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par*

$$^cD^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = I^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t). \tag{1.2}$$

Lemme 1.3.1. *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f(t)$ telle que $^cD^\alpha f(t)$ existe alors, on a les propriétés suivantes pour l'operateur de Caputo*

$$\lim_{\alpha \to n} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$$

$$\lim_{\alpha \to n-1} {}^cD^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$$

Propriétés :

Linéarité :

Lemme 1.3.2. *Soit $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telles que $^cD^\alpha f(t)$ et $^cD^\alpha g(t)$ existent. Comme la dérivation fractinnelle de Caputo est un opérateur lineaire alors :*

$$^cD^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^cD^\alpha f(t) + {}^cD^\alpha g(t).$$

Preuve :

On a :

$$^cD^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$$

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n [\lambda f(t) + g(t)] \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n [(f+g)(t)] \end{aligned}$$

La dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda {}^cD^\alpha f(t) + {}^cD^\alpha g(t). \end{aligned}$$

Non-commutativité :

Lemme 1.3.3. *On suppose que $n-1<\alpha<n, m, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ existe, alors :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}D^{m}f(t) = {}^{c}D^{\alpha+m}f(t) \neq D^{m}\ {}^{c}D^{\alpha}f(t). \tag{1.3}$$

Corollaire 1.1. *Supposons que $n-1<\alpha<n, \beta=\alpha-(n-1), (0<\beta<1)$, $n \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ existe, alors :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{c}D^{\beta}D^{n-1}f(t).$$

Preuve :
On remplace β par α et $n-1$ par m dans (1.3), alors :

$$ {}^{c}D^{\beta}D^{n-1}f(t) = {}^{c}D^{\beta+n-1}f(t) = {}^{c}D^{\alpha-(n-1)+n-1}f(t) = {}^{c}D^{\alpha}f(t).$$

Règle de Leibniz :

Corollaire 1.2. *Soit $t>0, \alpha \in \mathbb{R}, n-1<\alpha<n \in \mathbb{N}$. Si $f(x), g(x)$ et tous ses dérivées sont continues sur $[0,t]$ alors :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}\left({}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\right)g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}\left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right).$$

Preuve :
On applique consécutivement la relation

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}f^{(k)}(0).$$

et la Règle de Leibniz pour Riemann-Liouville

$$ {}^{RL}D^{\alpha}\left(f(t)g(t)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}\left({}^{RL}D^{\alpha-k}f(t)\right)g^{(k)}(t).$$

Ainsi, la règle de Leibniz pour la dérivée de Caputo est obtenue

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}\left(f(t)g(t)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \left({}^{RL}D^{\alpha-k} f(t)\right) g^{(k)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \left((f(t)g(t))^{(k)}(0)\right). \end{aligned}$$

Exemple :
soit $a = 0, \alpha = \frac{1}{2}, n = 1, f(t) = t$. On applique la formulle (1.2) alors on trouve

$${}^{c}D^{\frac{1}{2}} t = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau$$

On utilise les propriétés de la fonction Gamma et on pose $u = (t-\tau)^{\frac{1}{2}}$ donc la résultat finale de la dérivées fractionnaires au sens de Caputo de la fonction $f(t) = t$ donnée par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\frac{1}{2}} t &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d(t-\tau) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{1}{u} du^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{u} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{t} - 0) \\ Alors & \\ {}^{c}D^{\frac{1}{2}} t &= \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

1.4 Lemmes fondamentaux

Dans cette section, on va présenter quelques lemmes fondamentales concernant calcul fractionnaire.

Lemme 1.4.1. *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$^cD^\alpha h(t) = 0$$

admet les solutions

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1};$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Preuve :

Supposons que

$$^cD^\alpha h(t) = 0,$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n h(t) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{n-\alpha}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\Big(\frac{d}{ds}\Big)^n h(s)ds = 0$$

puisque $\dfrac{1}{n-\alpha} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\Big(\frac{d}{ds}\Big)^n h(s)ds = 0$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(s) = 0$$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité

$$L\Big(t^{n-\alpha-1} * h^{(n)}(t)\Big)(p) = L(0)(p) = 0$$

posant $H(p) = L(h)(p)$ on obtient

$$\frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{n-\alpha}}\left(p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{k-1}(0)\right) = 0$$

alors

$$p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{k-1}(0) = 0$$

donc

$$H(p) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{k-1}(0)$$

appliqunat maintenant la transformée inverse de Laplace :

$$L^{-1}(H(p))(t) = L^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{k-1}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=1}^{n} h^{k-1}(0) L^{-1}(p^{-k})(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h^{k-1}(0).\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \dfrac{h_i(0)}{i!}$ on a

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.$$

Supposons maintenant que

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha h(t) &= {}^cD^\alpha \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \; {}^cD^\alpha t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$${}^cD^\alpha h(t) = 0 \qquad \square$$

Lemme 1.4.2. *Soit* $\alpha > 0$*, alors*

$$I^\alpha \, {}^cD^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n = [a] + 1.$

Preuve :

On a par la définition de la dérivée fractionaire de Caputo

$${}^cD^\alpha h(t) = I^{n-\alpha} h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégral fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} I^\alpha \, {}^cD^\alpha h(t) &= I^\alpha I^{n-\alpha} h^{(n)}(t) \\ &= I^n \, {}^{RL}D^n h(t) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{n \to 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n} h(t) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \Big(\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n-j} h(t)\Big)(0) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h(t)^{n-j}(0) \end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha\, c}D^{\alpha}h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)t^k}{k!} \\ &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k^{'}t^k}{k!} \\ &= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!} \end{aligned} \qquad \square$$

1.5 Quelques théorèmes du point fixe

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de des théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.5.1. *(Théorème du point fixe de Banach) Soient X un espace de Banach, et $A : X \to X$ un opérateur contractant. Alors A admet un point fixe unique. i.e : $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.*

Théorème 1.5.2. *(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder [19]) Soient X un espace de Banach et $C \subset X$ un sous-ensemble convexe non vide de X. On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$ et $N : \overline{U} \to C$ une multi-fonctions semi-continu supèrieur et compact, alors on a l'alternative suivant :*

1. *N a un point fixe sur $\overline{U}$, ou bien*
2. *il existe $\lambda \in]0, 1[$ et $u \in \partial U$ tel que : $u \in \lambda N(u)$.*

Théorème 1.5.3. *(Covitz-Nadler [27])Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $N : X \to \mathcal{P}_{cl}(X)$ est une contraction alors N admet un point fixe (ie : $Fix\ N \neq \emptyset$).*

Théorème 1.5.4. *(Bohnenblust-Karlin [27]) Soient X un espace de Banach et $K \in P_{cl,cv}(X)$ et supposons que l'opérateur $G : K \to \mathcal{P}_{cl,cv}(K)$ est s. c. s et l'ensemble $G(K)$ est relativement compact dans X. Alors G admet un point fixe dans K.*

Conclusion

Ce chapitre rassemble les éléments mathématiques de base utilisés dans la suite de cette recherche. Les éléments concernant l'analyse multivoque, calcul fractionnaire de définir la notion du problème aux limites d'inclutions différentielles d'ordre fractionnaire décrite au chapitre suivant.

Chapitre 2

Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où $0 < \alpha < 1$.

Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de solution d'un problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire.
Soit

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y(t)), \quad \textit{pour tout } t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{2.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

On commence par donner la définition d'une solution au problème $(2.1) - (2.2)$.

Définition 2.0.1. *Une fonction $y \in AC(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème* $(2.1) - (2.2)$ *s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$, pour tout $t \in J$, telle que*

$$^cD^\alpha y(t) = v(t), \ \ pour \ \ tout \ \ t \in J, 0 < \alpha < 1,$$

et la fonction y satisfait la condition (2.2).

2.1 Le cas convexe :

Pour l'existence de la solution du problème (2.1)−(2.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1. *Soient $0 < \alpha < 1$ et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c \right] \tag{2.3}$$

si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T], \tag{2.4}$$

$$ay(0) + by(T) = c \tag{2.5}$$

Preuve :

Supposons d'abord que y est solution de (2.3), c'est à dire :

$$y(t) = I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b} \left[bI^\alpha h(T) - c \right]$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha y(t) &= \ ^cD^\alpha \left(I^\alpha h(t) - \underbrace{\frac{1}{a+b} \left[bI^\alpha h(T) - c \right]}_{K} \right) \\ &= \ ^cD^\alpha I^\alpha h(t) - \ ^cD^\alpha (K) \\ &= \ ^cD^\alpha I^\alpha h(t) \end{aligned}$$

et d'après les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

Ce qui montre (2.4) ie :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c] \\ y(T) = I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c] \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= a\left[I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]\right] + b\left[I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]\right] \\ &= \frac{ac}{a+b} - \frac{ab}{a+b}[I^\alpha h(T)] + \frac{ab}{a+b}[I^\alpha h(T)] + \frac{bc}{a+b} \\ &= \frac{ac}{a+b} + \frac{bc}{a+b} \\ &= c. \end{aligned}$$

Ce qui montre (2.5) ie :

$$y(0) + by(T) = c$$

Inversement supposons que y est solution de problème :

$$\begin{cases} ^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0,T] \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.4.2 on a :

$$I^\alpha D^\alpha y(t) = y(t) + c_0$$

donc

$$y(t) = I^{\alpha}h(t) - c_0.$$

De plus on a :

$$\begin{cases} y(0) = & I^{\alpha}h(0) - c_0 \\ y(T) = & I^{\alpha}h(T) - c_0. \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^{\alpha}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} (2.5) \quad \Leftrightarrow \quad & a(-c_0) + \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c_0\right] = c \\ \Leftrightarrow \quad & c_0 = -\frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$y(t) = I^{\alpha}h(t) + \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right]. \quad \square$$

On va donner un premier résultat concernant l'existence de la solution du problème $(2.1) - (2.2)$, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray Schauder.

Théorème 2.1.1. *[17] Supposons que :*
$(H1) F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque Carathéodory.*
$(H2)$ *Il existe une fonction* $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$, *et* $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *continue et non décroissante, telles que,*

$$\| F(t,u) \|_{\mathcal{P}} \leq p(t)\psi(| u |), \ \ pour \ \ t \in J \ \ et \ \ chaque \ \ u \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe* $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, *avec* $I^{\alpha}l < \infty$ *telle que*

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t) \mid u - \overline{u} \mid \ \ pour \ \ tout \ \ u, \overline{u} \in \mathbb{R},$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t), \ \ pour \ \ tout \ \ t \in J.$$

$(H4)$ *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que,*

$$\frac{M}{\psi(M) \parallel I^{\alpha}p \parallel_{\infty} + \frac{|b|\psi(M)(I^{\alpha}p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}} > 1. \tag{2.6}$$

Alors, le problème $(2.1)-(2.2)$ *admet au moins une solution dans* J.

Preuve :
On va transformer le problème $(2.1)-(2.2)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur :

$$N(y) = \Big\{ h \in C(J,\mathbb{R}) : \quad h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds$$
$$-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - c\right], v \in S_{F,y}\Big\}.$$

Il Cleare, d'après le Lemme 2.1.1, les points fixes de N sont solutions de problème $(2.1)-(2.2)$.

On va utiliser l'alternative non linéaire de Leray Schauder pour montrer que N admet au moins un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.
Etape 1 : $N(y)$ est convexe pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$.
On effet si $h_1, h_2 \in N(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$, on a :

$$h_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds - c\right], i = 1,2$$

Soit $\lambda \in]0,1[$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}(\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &- \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)ds - c\right],\end{aligned}$$

comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est convexe), on a

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in N(y).$$

Etape 2 :$N(y)$ transforme les bornées en des bornées dans $C(J,\mathbb{R})$:
Soit $B_r = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \| y \| \leq r\}$ un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$ où r un réel positive.
Soit $y \in B_r$ alors pour tout $h \in N(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - c\right], t \in J.$$

Par (H2), on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\mid h(t) \mid \; &\leq \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\
&\quad + \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\
&\leq \; \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid)ds \\
&\quad + \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid)ds + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\
&\leq \; \psi(r)I^\alpha(p)(t) + \frac{\mid b \mid \psi(r)I^\alpha(p)(T)}{\mid a+b \mid} + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\| h \|_\infty \leq \psi(r) \| I^\alpha(p) \|_\infty + \frac{\mid b \mid \psi(r)I^\alpha(p)(T)}{\mid a+b \mid} + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} = K.$$

On en conclute que $\forall h \in N(\mathbb{B}_r)$, il existe K telle que

$$\| h \|_\infty \leq K,$$

ce que montre que $N(y)$ est bornée.
Etape 3 : N est équicontinu

Considérons B_r une partie bornée de $C(J,\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, y \in B_r$ et $h \in N(y)$, alors

$$\begin{aligned}
\mid h(t_2) - h(t_1) \mid &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] v(s) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s) ds \mid \\
&\leq \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}] ds \\
&\quad + \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] \\
&\quad + \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{\parallel p \parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzelà -Ascoli, nous peut conclure que
$N : C(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ est complètement continue.

Etape 4 :N a un graphe fermée.

Soit $y_n \to y_*, h_n \in N(y_n)$ et $h_n \to h_*$. Il suffit de montrer que $h_* \in N(y_*)$. on a
$h_n \in N(y_n)$ ie : il existe $v_n \in S_{F,y_n}$ telle que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} v_n(s) ds \\
&- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - c \right].
\end{aligned}$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_*(s)ds \\ &- \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_*(s)ds - c\right]. \end{aligned}$$

Etant donné que, $F(t,.)$ est semi-continue supèrieure, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, nous avons

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0,1), \ \ pour \ \ chaque \ \ t \in J.$$

Etant donné que $F(.,.)$ est à valeurs compactes, alors il existe une sous suite $v_{n_m}(.)$ telle que

$$v_{n_m}(.) \to v_*(.) \ \ si \ \ m \to \infty,$$

et

$$v_*(t) \in F(t, y_*(t)) \ \ pour\ chaque \ \ t \in J.$$

Pour tout $w \in F(t, y_*(t))$, nous avons

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq \mid v_{n_m}(t) - w \mid + \mid w - v_*(t) \mid .$$

Alors,

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq d(v_{n_m}(t), F(t, y_*(t)).$$

Par une relation semblable, obtenue par l'échange des rôles de v_{n_m} et v_*, il suit que

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq H_d(F(t, y_n(t)), F(t, y_*(t))) \leq l(t) \parallel y_n - y_* \parallel_\infty .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mid h_n(t) - h_*(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&+ \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{\mid b \mid}{\mid a+b \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty .
\end{aligned}$$

Par concéquent :

$$\begin{aligned}
\parallel h_{n_m} - h_* \parallel_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{\mid b \mid}{\mid a+b \mid \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \to 0 \ \ si \ \ m \to \infty.
\end{aligned}$$

Donc $h_* \in N(y_*)$. Ce qui montre que $N : C(J, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ a un graphe fermé.

Etape 5 : Estimation à priori des solutions :
Soit y une solution possible au problème $(2.1) - (2.2)$. Alors il existe $v \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\
&- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right].
\end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse (H2) entraine que, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
\mid y(t) \mid \ \leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\
& + \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\
\leq\ & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds \\
& + \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\
\leq\ & \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds \\
& + \frac{\mid b \mid \psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) ds + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid} \\
\leq\ & \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(t) + \frac{\mid b \mid \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(T)}{\mid a+b \mid} + \frac{\mid c \mid}{\mid a+b \mid}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\parallel y \parallel_\infty}{\psi(\parallel y \parallel_\infty) \parallel I^\alpha p \parallel_\infty + \frac{|b|\psi(\|y\|_\infty)(I^\alpha p)(T)}{|a+b|} + \frac{|c|}{|a+b|}} \leq 1.$$

Ainsi, la condition (2.6) implique qu'il exists une constante $M \neq 0$, telle que $\parallel y \parallel \neq M$. Soit

$$U = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \parallel y \parallel_\infty < M\}.$$

L'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ est semi continue supérieurement complètement continu. Le choix de U, entraine qu'il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N(y)$ avec $\lambda \in]0,1[$,

par consequent, d'après l'alternative non linéaire de Leray Schauder, on déduit que N admet un point fixe dans $\overline{U}$ qui est solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

2.2 Le cas non-convexe :

Nous présentons maintenant un résultat pour le problème (2.1) − (2.2) avec F à valeurs non-convexe. Nos considérations sont basées sur le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour multiapplications contractantes.

Théorème 2.2.1. *[15] Supposons (H3) et l'hypothèse suivante sont vérifiés :*
(H5) $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ a la propriété que $F(.,U) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$,
si

$$\| I^{\alpha} l \|_{\infty} + \frac{| b | (I^{\alpha} l)(T)}{| a+b |} < 1. \tag{2.7}$$

Alors le problème (2.1) − (2.2) *admet au moins une solution sur J.*

Remarque 2.2.1. *Pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$, comme F vérifié (H3) alors l'ensemble des sélections $S_{F,y}$ est non vide et F admet une sélection mesurable (voir[6] théorème III.6)*

Preuve :
Nous montrerons que N satisfait aux hypothèses de théorème 1.5.3. La preuve sera donnée en deux étapes
Etape 1 :$N(y) \in \mathcal{P}_{cl}(C(J,\mathbb{R}))$ pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$.
En effet, soit $(y_n)_{n\geq 0} \in N(y)$ tel que $y_n \to \widetilde{y}$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors $\widetilde{y} \in C(J,\mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,y}$ tel que, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

En utilisant (H3) et le fait que F est à valeurs compactes, on peut passer à une sous-suite si nécessaire pour obtenir que v_n converge faiblement vers v en $L^1_w(J,\mathbb{R})$ (L'espace doté de la toplogie faible). Une application de lemme de Mazur implique que v_n converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,y}$. Alors, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} y_n(t) \to \widetilde{y}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{y} \in N(y)$.

Etape 2 : Il existe $\gamma < 1$ telle que

$$H_d(N(y), N(\overline{y})) \leq \gamma \parallel y - \overline{y} \parallel_\infty \quad pour \;\; chaque \;\; y, \overline{y} \in C(J, \mathbb{R}).$$

Soit $y, \overline{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N(y)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$ tel que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

De (H3) il s'ensuit que

$$H_d(F(t, y(t)), F(t, \overline{y}(t))) \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

Il existe donc $w \in F(t, \overline{y}(t))$ tel que

$$\mid v_1(t) - w \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid, t \in J$$

Considérons l'opérateur $U : J \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$U(t) = \{ w \in \mathbb{R} : \mid v_1(t) - w \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid \}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{y}(t))$ est mesurable (voir Proposition 1.2.1), il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V.

Ainsi, $v_2(t) \in F(t, \overline{y}(t))$, et pour chaque $t \in J$.

$$\mid v_1(t) - v_2(t) \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid,$$

On définit pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds \\ &- \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

Alors pour $t \in J$,

$$\begin{aligned} \mid h_1(t) - h_2(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &+ \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds \\ &+ \frac{\mid b \mid}{\Gamma(\alpha) \mid a+b \mid} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\| h_1 - h_2 \|_\infty \leq \left[\| I^\alpha l \|_\infty + \frac{\mid b \mid (I^\alpha l)(T)}{\mid a+b \mid} \right] \| y - \overline{y} \|_\infty .$$

D'une relation analogue, obtenue en échangeant les rôles de y et $\overline{y}$, il s'ensuit que

$$H_d(N(y), N(\overline{y})) \leq \gamma \| y - \overline{y} \|_\infty \leq \left[\| I^\alpha l \|_\infty + \frac{\mid b \mid (I^\alpha l)(T)}{\mid a+b \mid} \right] \| y - \overline{y} \|_\infty .$$

Donc, par(2.7), N est une contraction et donc, par le théorème 1.5.3 N admet un point fixe y qui est la solution de $(2.1) - (2.2)$. $\square$

Exemple :

Nous appliquons le résultat principal du papier théorème 2.1.1 à la fraction inclusion différentielle,

$$^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad pour \ \ tout \ \ t \in J = [0, T], 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.8}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2.9}$$

et

$$F(t,y) = \{v \in \mathbb{R} : f_1(t,y) \leq v \leq f_2(t,y)\}.$$

Où $f_1, f_2 : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $t \in J, f_1(t,.)$ est semi continue inférieurement(c'est-à-dire que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : f_1(t,y) > \mu\}$ est ouvert pour chaque $\mu \in \mathbb{R}$).
Et supposons que pour tout $t \in J, f_2(t,.)$ est semi-continue supérieurement (c'est-à-dire l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : f_2(t,y) < \mu\}$ est ouvert pour chacun $\mu \in \mathbb{R}$).
Supposons qu'il existe $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ continue et non décroissante telle que

$$Max(\mid f_1(t,y) \mid, \mid f_2(t,y) \mid) \leq p(t)\psi(\mid y \mid), \;\; t \in J; \;\; et \;\; tout \;\; y \in \mathbb{R}.$$

Il est évident que F est compact et convexe, et qu'il est semi continu supérieurement. Comme toutes les conditions du théorème 2.1.1 sont satisfaites, alors le problème $(2.8) - (2.9)$ a au moins une solution y sur J.

Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté quelques résultats d'existence des solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire (cas $0 < \alpha < 1$) au sens de Caputo dans le cas convexe et non-convexe. Cette résultat ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de l'alternative non linéaire de Leray Schauder, Covitz et Nadler pour multiapplications contractantes.

Chapitre 3

Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où $1 < \alpha \leq 2$.

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner un résultat d'existence pour le problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)) \quad pour \;\; tout \;\; t \in J = [0, T], 1 < \alpha \leq 2. \tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0, \;\; y(T) = y_T. \tag{3.2}$$

Où $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_T sont des constantes réelles.

On commence par donner la définition d'une solution au problème $(3.1) - (3.2)$.

Définition 3.0.1. *Une fonction $y \in AC^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème* $(3.1) - (3.2)$ *s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$, pour tout $t \in J$, telle que,*

$$^cD^\alpha y(t) = v(t), \;\; pour \;\; tout \;\; t \in J, 1 < \alpha < 2,$$

et la fonction y satisfait la condition (3.2)

3.1 Le cas convexe :

Pour l'existence de la solution du problème (3.1) − (3.2) , on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1. *Soient* $1 < \alpha \leq 2$ *et* $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Une fonction* y *est solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \quad (3.3)$$

si et seulement si y *est solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \ \ t \in [0,T], \quad (3.4)$$

$$y(0) = y_0, \ \ y(T) = y_T. \quad (3.5)$$

Preuve :
Supposons d'abord que y est solution de (3.3) c'est à dire :

$$y(t) = I^\alpha h(t) + \frac{t}{T} [y_T - y_0 - I^\alpha h(T)] + y_0.$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left(I^\alpha h(t) + \frac{t}{T} \underbrace{[y_T - y_0 - I^\alpha h(T)]}_{K} + y_0 \right) \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) + \frac{K}{T} \ {}^cD^\alpha t + \underbrace{{}^cD^\alpha y_0}_{0} \\ &= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t), \end{aligned}$$

et d'après les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$$^cD^\alpha I^\alpha h(t) = h(t).$$

Ce que montre (3.4) ie :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t).$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = & y_0 \\ y(T) = & y_T. \end{cases}$$

Ce que montre (3.5) .
Inversement supposons que y est solution de problème :

$$\begin{cases} ^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), t \in [0,T] \\ y(0) = y_0, \ \ y(T) = y_T. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.4.2 on a

$$\begin{aligned} I^{\alpha}D^{\alpha}y(t) &= c_0 + c_1 t + y(t) \\ &= I^{\alpha}h(t) \\ y(t) &= I^{\alpha}h(t) - c_0 - c_1 t. \end{aligned}$$

De plus ona :

$$\begin{cases} c_0 = & y_0 \\ c_1 = & \dfrac{-1}{T\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{T}y_0 + \frac{1}{T}y_T, \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^{\alpha}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Alors,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \qquad \square$$

Théorème 3.1.1. *[18] Supposons que :*
$(H1)F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$*est une application multivoque Carathéodory.*
$(H2)$ *Il existe une fonction* $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$, *et* $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *continue et non décroissante, telles que,*

$$\| F(t,u) \|_{\mathcal{P}} \leq p(t)\psi(| u |), \ \ pour \ \ t \in J \ \ et \ \ chaque \ \ u \in \mathbb{R}.$$

$(H3)$ *Il existe* $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, *avec* $I^\alpha l < \infty$ *telle que*

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t) \mid u - \overline{u} \mid \ \ pour \ \ tout \ \ u, \overline{u} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t), \ \ pour \ \ tout \ \ t \in J.$$

(H4)Il existe une constante $M_1 > 0$ *telle que,*

$$\frac{M_1}{\psi(M_1) \parallel I^\alpha p \parallel_\infty + \psi(M_1)(I^\alpha p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid} > 1 \tag{3.6}$$

Alors, le problème $(3.1) - (3.2)$ *admet au moins une solution dans J.*

On va transformer le problème $(3.1) - (3.2)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur :

$$\begin{aligned} N_1(y) &= \Big\{ h \in C(J, \mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\ & - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T, v \in S_{F,y} \Big\}. \end{aligned}$$

Il Claire, d'après le Lemme 3.1.1 , les points fixes de N_1 sont solutions de $(3.1) - (3.2)$.

On va utiliser l'alternative non linéaire de Leray Schauder pour montrer que N_1 admet au moins un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : $N_1(y)$ est convexe pour tout $y \in C(J, \mathbb{R})$.

On effet si $h_1, h_2 \in N_1(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds - (\frac{t}{T}-1)y_0 + \frac{t}{T}y_T, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in]0,1[$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &- \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T, \end{aligned}$$

comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est convexe), on a

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in N(y).$$

Etape 2 :$N_1(y)$ transforme les bornées en des bornées dans $C(J,\mathbb{R})$:
Soit $B_r = \{y \in C(J,\mathbb{R}) :\parallel y \parallel \leq r\}$ un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$ où r un réel positive.
Soit $y \in B_r$ alors pour tout $h \in N_1(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

Par (H2), on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} \mid h(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds - \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y \mid) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\ &\leq \psi(r) I^\alpha(p)(t) + \psi(r) I^\alpha(p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid . \end{aligned}$$

Alors,

$$\| h \|_\infty \leq \psi(r) \| I^\alpha(p) \|_\infty + \psi(r) I^\alpha(p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid = K.$$

On en conclute que pour tout $h \in N(B_r)$, il existe K telle que

$$\| y \|_\infty \leq K,$$

ce que montre que $N_1(y)$ est bornée.
Etape 3 : N_1 est équicontinu
Considérons B_r une partie bornée de $C(J, \mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, y \in B_r$ et $h \in N_1(y)$

alors,

$$\begin{aligned}
\mid h(t_2)-h(t_1)\mid &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]v(s)ds\\
&+ \frac{(t_2-t_1)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)ds\mid +(\frac{t_2-t_1}{T})\mid y_0\mid +\frac{(t_2-t_1)}{T}\mid y_T\mid\\
&\leq \frac{\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}]ds\\
&+ \frac{(t_2-t_1)\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&+ (\frac{t_2-t_1}{T})\mid y_0\mid +\frac{(t_2-t_1)}{T}\mid y_T\mid\\
&\leq \frac{\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha+t_1^\alpha-t_2^\alpha]\\
&+ \frac{(t_2-t_1)\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\
&+ (\frac{t_2-t_1}{T})\mid y_0\mid +\frac{(t_2-t_1)}{T}\mid y_T\mid .
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Par conséquente des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzelà -Ascoli, nous peut conclure que $N_1 : C(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ est complètement continue.

Etape 4 :N_1 a un graphe fermée.

Soit $y_n \to y_*, h_n \in N_1(y_n)$ et $h_n \to h_*$. Il suffit de montrer que $h_* \in N_1(y_*)$. on a $h_n \in N_1(y_n)$ ie :il existe $v_n \in S_{F,y_n}$ telle que pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds\\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds-\Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0+\frac{t}{T}y_T
\end{aligned}$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$ tel que, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s)ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T \end{aligned}$$

Etant donné que $F(t,.)$ est semi-continue supèrieurement, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, nous avons

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0,1), \;\; pour \;\; chaque \;\; t \in J.$$

Etant donné que, $F(.,.)$ est à valeurs compactes,alors il existe une sous suite $v_{n_m}(.)$ telle que,

$$v_{n_m}(.) \to v_*(.) \;\; si \;\; m \to \infty,$$

et

$$v_*(t) \in F(t, y_*(t)) \;\; pour \; chaque \;\; t \in J.$$

Pour tout $w \in F(t, y_*(t))$, nous avons

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq \mid v_{n_m}(t) - w \mid + \mid w - v_*(t) \mid .$$

Alors,

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq d(v_{n_m}(t), F(t, y_*(t))).$$

Par une relation semblable, obtenue par l'échange des rôles de v_{n_m} et v_*, il suit que,

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq H_d(F(t, y_n(t))), F(t, y_*(t)) \leq l(t) \parallel y_n - y_* \parallel_\infty .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mid h_n(t) - h_*(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_{n_m}(s) - v_*(s) \mid ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty .
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\parallel h_{n_m} - h_* \parallel_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \to 0 \ \ si \ \ m \to \infty.
\end{aligned}$$

Donc $h_* \in N_1(y_*)$. Ce qui montre que $N_1 : C(J, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J, \mathbb{R}))$ a un graphe fermé.

Etape 5 : Estimation à priori des solutions :

Soit y une solution possible au problème $(3.1) - (3.2)$ telle que $y \in \lambda N_1(y)$ avec $\lambda \in]0, 1[$. Alors il existe $v \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\
&- \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - \lambda\Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{\lambda t}{T} y_T
\end{aligned}$$

Ceci implique d'après (H2) que, pour tout $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mid y(t) \mid \ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\
&+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds- \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y \mid) ds \\
&+ \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds+ \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \ \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds \\
&+ \ \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s) ds+ \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \ \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\parallel y \parallel_\infty))(I^\alpha p)(T)+ \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid .
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\parallel y \parallel_\infty}{\psi(\parallel y \parallel_\infty) \parallel I^\alpha p \parallel_\infty + \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(T)+ \mid y_0 \mid + \mid y_T \mid} < 1.$$

Ainsi, la condition (3.6) implique qu'il existe une constante $M_1 > 0$, telle que $\parallel y \parallel \neq M_1$.
Soit

$$U = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \parallel y \parallel_\infty < M_1\}.$$

L'opérateur $N_1 : \overline{U} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$ est semi continue supérieurement, complètement continu. Le choix de U, entraine qu'il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que,

$$y \in \lambda N_1(y) \ \ avec \ \ \lambda \in]0, 1[.$$

Par consequent, d'après l'alternative non linéaire de Leray Schauder, on déduit que N_1 admet un point fixe dans $\overline{U}$ qui est solution du problème (3.1)−(3.2).

3.2 Le cas non-convexe :

Nous présentons maintenant un résultat pour le problème $(3.1)-(3.2)$ avec F à valeurs non-convexe. Nos considérations sont basées sur le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour multiapplications contractantes.

Théorème 3.2.1. *[18] Supposons (H3) et l'hypothèse suivante sont vérifieés :*
(H5) $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ a la propriété que $F(.,U) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$.
si

$$(I^{\alpha}l)(T) < \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

Alors le problème $(3.1)-(3.2)$ *admet au moins une solution sur J.*

Remarque 3.2.1. *Pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$, comme F vérifié (H3) alors l'ensemble des sélections $S_{F,y}$ est non vide et F admet une sélection mesurable (voir[6] théorème III.6)*

Preuve :
Nous montrerons que N_1 satisfait aux hypothèses de théorème 1.5.3. La preuve sera donnée en deux étapes
Etape 1 :$N(y) \in \mathcal{P}_{cl}(C(J,\mathbb{R}))$ pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$.
En effet, soit $(y_n)_{n\geq 0} \in N_1(y)$ tel que $y_n \to \widetilde{y}$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors $\widetilde{y} \in C(J,\mathbb{R})$ et il existe $v_n \in S_{F,y}$ tel que, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds - \Big(\frac{t}{T}-1\Big)y_0 + \frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

En utilisant (H3) et le fait que F est à valeurs compactes, on peut passer à une sous-suite si nécessaire pour obtenir que (v_n) converge faiblement vers v en $L^1_w(J,\mathbb{R})$ (L'espace doté de la toplogie faible). Une application de lemme de Mazur implique que (v_n) converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,y}$. Alors, pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} y_n(t) \to \widetilde{y}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s) ds - (\frac{t}{T} - 1) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{y} \in N_1(y)$.

Etape 2 : Il existe $\gamma < 1$ telle que

$$H_d(N_1(y), N_1(\overline{y})) \leq \gamma \parallel y - \overline{y} \parallel_\infty \quad pour \;\; chaque \;\; y, \overline{y} \in C(J, \mathbb{R}).$$

Soit $y, \overline{y} \in C(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N_1(y)$, alors, il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$ tel que, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s) ds - (\frac{t}{T} - 1) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

De (H3) il s'en suit que,

$$H_d(F(t, y(t)), F(t, \overline{y}(t))) \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

Il existe donc $w \in F(t, \overline{y}(t))$ tel que

$$\mid v_1(t) - w \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid, t \in J.$$

Considérons l'opérateur $U : J \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} : \mid v_1(t) - w \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid\}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{y}(t))$ est mesurable (voir[6] Proposition *IIII*.4), il existe une fonction $v_2(t)$ qui est sélection mesurable pour V.
Ainsi, $v_2(t) \in F(t, \overline{y}(t))$, et pour chaque $t \in J$.

$$\mid v_1(t) - v_2(t) \mid \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

On définit pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds \\ &- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s) ds - \Big(\frac{t}{T} - 1\Big) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned}$$

Alors, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned} \mid h_1(t) - h_2(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mid v_1(s) - v_2(s) \mid ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) \mid y(s) - \overline{y}(s) \mid ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\| h_1 - h_2 \|_\infty \leq 2(I^\alpha l)(T) \| y - \overline{y} \|_\infty .$$

D'une relation analogue, obtenue en échangeant les rôles de y et $\overline{y}$, Il s'en suit que,

$$H_d(N_1(y), N_1(\overline{y})) \leq 2(I^\alpha l)(T) \| y - \overline{y} \|_\infty .$$

Donc, par (3.7), N_1 est une contraction et donc, par le théorème 1.5.3 N_1 admet un point fixe y qui est solution de $(3.1) - (3.2)$. □

Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté quelques résultats d'existence des solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire (cas $1 < \alpha \leq 2$) au sens de Caputo dans le cas convexe et non-convexe.

Cette résultat ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de l'alternative non linéaire de Leray Schauder, Covitz et Nadler.

Chapitre 4

Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où $2 < \alpha < 3$.

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner un résultat d'existence pour le problème aux limites pour des inclusions differentielles d'ordre fractionnaire suivant :

$$^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad pour \;\; tout \;\; t \in J = [0, T], 2 < \alpha < 3. \tag{4.1}$$

$$y(0) = y_0, \;\; y^{'}(0) = y_0^*, \;\; y^{''}(T) = y_T. \tag{4.2}$$

Où $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_0^*, y_T sont des constantes réelles.

On commence par donner la définition d'une solution au problème $(4.1) - (4.2)$.

Définition 4.0.1. *Une fonction $y \in AC^2(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème $(4.1) - (4.2)$ s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$, pour tous $t \in J$, telle que,*

$$^cD^\alpha y(t) = v(t), \;\; pour \;\; tous \;\; t \in J, 2 < \alpha < 3,$$

et la fonction y satisfait la condition (4.2).

4.1 Le cas convexe

Pour l'existence de la solution du problème $(4.1)-(4.2)$, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Soientt $2 < \alpha < 3$ et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} h(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2} t^2. \quad (4.3)$$

si et seulement si y est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T]; \quad (4.4)$$

$$y(0) = y_0, \;\; y^{'}(0) = y_0^*, \;\; y^{''}(T) = y_T. \quad (4.5)$$

Preuve :
Supposons d'abord que y est solution de (4.3) c'est à dire :

$$\begin{aligned} y(t) &= I^\alpha h(t) - \frac{t^2}{2} I^{\alpha-2} h(T) + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2} t^2 \\ &= I^\alpha h(t) + y_0 + y_0^* t + t^2 \underbrace{\Big(\frac{y_T}{2} - \frac{1}{2} I^{\alpha-2} h(T) \Big)}_{K}, K = costante. \end{aligned}$$

D'une part on a :

$$^cD^\alpha y(t) = {}^cD^\alpha I^\alpha h(t) + y_0^* \, {}^cD^\alpha t + K {}^cD^\alpha t^2 + \underbrace{{}^cD^\alpha y_0}_{0},$$

et d'après la définition de dérivée fractionnaire du Caputo on a :

$$^cD^\alpha t = 0 \;\; et \;\; {}^cD^\alpha t^2 = 0.$$

Ce qui montre (4.4) ie :

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

D'autre part on a

$$\begin{cases} y^{'}(t) = I^{\alpha-1}h(t) - tI^{\alpha-2}h(T) + y_0^* + ty_T \\ y^{''}(t) = I^{\alpha-2}h(t) - I^{\alpha-2}h(T) + y_T. \end{cases}$$

Alors, $y(0) = y_0,\ \ y^{'}(0) = y_0^*,\ \ y^{''}(T) = y_T.$

Ce qui montre (4.5) ie :

$$y(0) = y_0,\ \ y^{'}(0) = y_0^*,\ \ y^{''}(T) = y_T.$$

Inversement supposons que y est solution de problème :

$$\begin{cases} ^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in [0, T] \\ y(0) = y_0, y^{'}(0) = y_0^*, y^{''}(T) = y_T. \end{cases}$$

D'après le lemme 1.4.2 on a

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha y(t) &= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + y(t) \\ &= I^\alpha h(t) \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 - c_1 t - c_2 t^2. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{cases} y^{'}(t) = & I^{\alpha-1}h(t) - c_1 - 2c_2 t, \\ y^{''}(t) = & I^{\alpha-2}h(t) - 2c_2. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} y(0) = & -c_0 = y_0 \\ y^{'}(0) = & -c_1 = y_0^* \\ y^{''}(T) = & I^{\alpha-2}h(T) - 2c_2 = y_T, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -c_0 = & y_0 \\ -c_1 = & y_0^* \\ -c_2 = & \frac{1}{2}[y_T - I^{\alpha-2}(T)], \end{cases}$$

et on sait que

$$I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Alors,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} h(s) ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2} t^2 \quad \square.$$

Théorème 4.1.1. *[25] Supposons que :*
(H1)$F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est une application multivoque Carathéodory.
(H2) Il existe une fonction $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$, et $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ continue et non décroissante, telles que,

$$\| F(t,u) \|_{\mathcal{P}} \leq p(t)\psi(| u |), \ \ pour \ \ t \in J \ \ et \ \ chaque \ \ u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$, avec $I^\alpha l < \infty$ telle que

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t) \mid u - \overline{u} \mid \ \ pour \ \ tout \ \ u, \overline{u} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t), \ \ pour \ \ tout \ \ t \in J$$

et l'hypothèse suivante se vérifie :
(H4)Il existe une constante $M_2 > 0$ telle que

$$\frac{M_2}{\psi(M_2) \parallel I^\alpha p \parallel_\infty + \frac{T^2 \psi(M_2)(I^{\alpha-2}p)(T)}{2} + \mid y_0 \mid + \mid y_T^* \mid T + \frac{|y_T|}{2} T^2} > 1. \tag{4.6}$$

Alors le problème $(4.1) - (4.2)$ admet au moins une solution dans J.

Preuve :
On va transformer le problème $(4.1)-(4.2)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur :

$$\begin{aligned} N_2(y) &= \Big\{h \in C(J,\mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &\quad -\frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}v(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2, v \in S_{F,y}\Big\} \end{aligned}$$

Il Claire, d'après le Lemme 4.1.1, les points fixe de N_2 sont solutions de problème $(4.1)-(4.2)$.

On va utiliser l'alternative non linéaire de Leray Schauder pour montrer que N_2 admet au moins un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : $N_2(y)$ est convexe pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$.
On effet si $h_1, h_2 \in N_2(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_i(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}v_i(s)ds \\ &+ y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2,\ \ i = 1,2. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in]0,1[$. Alors, pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}1[\lambda v_1(s) + (1-\lambda)v_2(s)]ds \\ &+ y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2, \end{aligned}$$

comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est convexe),on a

$$\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in N_2(y).$$

Etape 2 :$N_2(y)$ transforme les bornées en des bornées dans $C(J,\mathbb{R})$:
Soit $B_r=\{y\in C(J,\mathbb{R}):\parallel y\parallel\leq r\}$ un ensemble borné de $C(J,\mathbb{R})$ où r un réel positive. Soit $y\in B_r$ alors pour tout $h\in N_2(y)$, il existe $v\in S_{F,y}$ telle que :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}v(s)ds+y_0+y_0^*t+\frac{y_T}{2}t^2. \end{aligned}$$

Par (H2), on a pour tout $t\in J$,

$$\begin{aligned} \mid h(t)\mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mid v(s)\mid ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}\mid v(s)\mid ds+\mid y_0\mid+\mid y_0^*\mid+\mid y_T\mid \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\mid y\mid)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}p(s)\psi(\mid y(s)\mid)ds+\mid y_0\mid+\mid y_0^*\mid+\mid y_T\mid \\ &\leq \psi(r)I^{\alpha}(p)(t)+\psi(r)I^{\alpha-2}(p)(T)+\mid y_0\mid+\mid y_0^*\mid+\mid y_T\mid. \end{aligned}$$

Alors,

$$\parallel h\parallel_\infty\leq\psi(r)\parallel I^{\alpha}(p)\parallel_\infty+\psi(r)I^{\alpha-2}(p)(T)+\mid y_0\mid+\mid y_0^*\mid+\mid y_T\mid=K$$

On en conclute que pour tout $h\in N(B_r)$, il existe K telle que

$$\parallel y\parallel_\infty\leq K,$$

ce qui montre que $N_2(y)$ est bornée.
Etape 3 : $N_2(y)$ est équicontinu.
Cosidérons B_r une partie bornée de $C(J,\mathbb{R})$. Soient $t_1,t_2\in J, t_1<t_2$, $y\in B_r$ et $h\in N_2(y)$,

alors,

$$\begin{aligned}
\mid h(t_2)-h(t_1)\mid &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]v(s)ds\\
&+ \frac{(t_2-t_1)^2}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)ds\mid\\
&+ \mid y_0\mid +(t_2-t_1)\mid y^*\mid +(\frac{t_2-t_1}{2})\mid y_T\mid\\
&\leq \frac{\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}]ds\\
&+ \frac{(t_2-t_1)^2\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&+ \mid y_0\mid +(t_2-t_1)\mid y^*\mid +(\frac{t_2-t_1}{2})\mid y_T\mid\\
&\leq \frac{\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha+t_1^\alpha-t_2^\alpha]+\frac{(t_2-t_1)^2\parallel p\parallel_\infty \psi(r)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\
&+ \mid y_0\mid +(t_2-t_1)\mid y^*\mid +(\frac{t_2-t_1}{2})\mid y_T\mid
\end{aligned}$$

Quand $t_1\to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.En conséquence des étapes 1 à 3 avec le théorème d'Arzelà -Ascoli, nous peut conclure que
$N_2 : C(J,\mathbb{R})\to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ est complètement continue.

Etape 4 :N_2 a un graphe fermée.

Soit $y_n\to y_*, h_n\in N_2(y_n)$ et $h_n\to h_*$. Il suffit de montrer que $h_*\in N_2(y_*)$. on a
$h_n\in N_2(y_n)$ i.e : il existe $v_n\in S_{F,y_n}$ telle que pour chaque $t\in J$

$$\begin{aligned}
h_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}v_n(s)ds\\
&- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-3}v_n(s)ds+y_0+y_0^*t+\frac{y_T}{2}t^2.
\end{aligned}$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$ tel que, pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_*(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_*(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3}v_*(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2 \end{aligned}$$

Etant donné que $F(t,.)$ est semi-continue supérieurement, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, nous avons

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B(0,1), \;\; pour \;\; chaque \;\; t \in J.$$

Etant donné que, $F(.,.)$ est à valeurs compactes, alors il existe une sous suite $v_{n_m}(.)$ telle que

$$v_{n_m}(.) \to v_*(.) \;\; si \;\; m \to \infty$$

et

$$v_*(t) \in F(t; y_*(t)) \;\; pour\ chaque \;\; t \in J.$$

Pour tout $w \in F(t, y_*(t))$, nous avons

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq \mid v_{n_m}(t) - w \mid + \mid w - v_*(t) \mid .$$

Alors,

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq d(v_{n_m}(t), F(t, y_*(t)).$$

Par une relation semblable, obtenue par l'échange des rôles de v_{n_m} et v_*, il suit que,

$$\mid v_{n_m}(t) - v_*(t) \mid \leq H_d(F(t, y_n(t)), F(t, y_*(t)) \leq l(t) \parallel y_n - y_* \parallel_\infty .$$

Alors,

$$\begin{aligned}
| h_n(t) - h_*(t) | &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | v_{n_m}(s) - v_*(s) | ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} | v_{n_m}(s) - v_*(s) | ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty .
\end{aligned}$$

Par concéquent :

$$\begin{aligned}
\parallel h_{n_m} - h_* \parallel_\infty &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} l(s) ds \parallel y_{n_m} - y_* \parallel_\infty \to 0 \ \ si \ \ m \to \infty.
\end{aligned}$$

Donc $h_* \in N_2(y_*)$. Ce qui montre que $N_2 : C(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}))$ a un graphe fermé.
Etape 5 : Estimation à priori des solution :
Soit y une solution possible au problème $(4.1) - (4.2)$ telle que $y \in \lambda N_2(y)$ avec $\lambda \in]0,1[$.
Alors, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s) ds \\
&- \frac{\lambda t^2}{2\Gamma(\alpha-2)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v_n(s) ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2} t^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'hypothèse (H2)entraine que, pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
\mid y(t) \mid &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mid v(s) \mid ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} \mid v(s) \mid ds + \mid y_0 \mid + \mid y_0^* \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\mid y \mid) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} p(s)\psi(\mid y(s) \mid) ds + \mid y_0 \mid + \mid y_0^* \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s) ds \\
&+ \frac{\psi(\parallel y \parallel_\infty)}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} p(s) ds + \mid y_0 \mid + \mid y_0^* \mid + \mid y_T \mid \\
&\leq \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^\alpha p)(t) + \psi(\parallel y \parallel_\infty) I^{\alpha-2}(p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_0^* \mid\mid y_T \mid,
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\parallel y \parallel_\infty}{\psi(\parallel y \parallel_\infty)\|I^\alpha p\|_\infty + \psi(\parallel y \parallel_\infty)(I^{\alpha-2}p)(T) + \mid y_0 \mid + \mid y_0^* \mid + \mid y_T \mid} < 1.$$

Ainsi, la condition (4.6) implique qu'il existe une constante $M_2 \neq 0$, telle que $\parallel y \parallel \neq M_2$.
Soit

$$U = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \parallel y \parallel_\infty < M_2\}.$$

L'opérateur $N_2 : \overline{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$ est semi continue supérieurement complètement continu . Le choix de U, entraine qu'il n'existe pas de $y \in \partial U$ tel que $y \in \lambda N_2(y)$ avec $\lambda \in]0, 1[$,
par consequent, d'après l'alternative non linéaire de Leray Schauder, on déduit que N_2 admet un point fixe dans $\overline{U}$ qui est solution du problème $(4.1) - (4.2)$.

4.2 Le cas non-convexe

Nous présentons maintenant un résultat pour le problème $(4.1)-(4.2)$ avec$F$ à valeurs non-convexe. Nos considérations sont basées sur le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour multiapplications contractantesion.

Théorème 4.2.1. *[25] Supposons que*
(H3) Il existe $l \in L^1(J,\mathbb{R})$, avec $I^\alpha l < \infty$ telle que,

$$H_d(F(t,u),F(t,\overline{u})) \leq l(t) \mid u-\overline{u} \mid \ \ pour\ \ tout\ \ u,\overline{u} \in \mathbb{R}$$

et

$$d(0,F(t,0)) \leq l(t),\ \ pour\ \ tout\ \ t \in J$$

(H5) $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ a la propriété que $F(.,U) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$.
si

$$\| I^\alpha l \|_\infty + \frac{\mid b \mid (I^\alpha l)(T)}{\mid a+b \mid} < 1$$

et l'hypothèse suivante se vérifie :
si

$$I^\alpha l(T) + T^2 I^{\alpha-2} l(T) < 1. \tag{4.7}$$

Alors le problème $(4.1)-(4.2)$ a au moins une solution sur J.

Remarque 4.2.1. *Pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$, comme F vérifié (H3) alors l'ensemble des sélections $S_{F,y}$ est non vide et F admet une sélection mesurable (voir[6] théorème III.6)*

Preuve :
Nous montrerons que N_2 satisfait aux hypothèses de théorème 1.5.3. La preuve sera donnée en deux étapes
Etape 1 :$N_2(y) \in \mathcal{P}_{cl}(C(J,\mathbb{R}))$ pour chaque $y \in C(J,\mathbb{R})$.
En effet, soit $(y_n)_{n\geq 0} \in N_2(y)$ tel que $y_n \to \widetilde{y}$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors $\widetilde{y} \in C(J,\mathbb{R})$ et il existe

$v_n \in S_{F,y}$ tel que, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v_n(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2. \end{aligned}$$

En utilisant (H3) et le fait que F est valeurs compactes, on peut passer à une sous-suite si nécessaire pour obtenir que v_n converge faiblement vers v en $L^1_w(J,\mathbb{R})$ (L'espace doté de la toplogie faible). Une application de lemme de Mazur implique que v_n converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,y}$. Alors, pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} y_n(t) \to \widetilde{y}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\widetilde{y} \in N_2(y)$.
Etape 2 : Il existe $\gamma < 1$ telle que,

$$H_d(N_2(y), N_2(\overline{y}) \leq \gamma \parallel y - \overline{y} \parallel_\infty \quad pour\ \ chaque\ \ y, \overline{y} \in C(J,\mathbb{R})$$

Soit $y, \overline{y} \in C(J,\mathbb{R})$ et $h_1 \in N(y)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$ tel que pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v_1(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2. \end{aligned}$$

De (H3) il s'en suit que,

$$H_d(F(t, y(t)), F(t, \overline{y}(t))) \leq l(t) \mid y(t) - \overline{y}(t) \mid .$$

Il existe donc $w \in F(t,\overline{y}(t))$ tel que

$$| v_1(t) - w | \leq l(t) | y(t) - \overline{y}(t) |, t \in J.$$

Considérons l'opérateur $U : J \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R} :| v_1(t) - w | \leq l(t) | y(t) - \overline{y}(t) |\}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = U(t) \cap F(t,\overline{y}(t))$ est mesurable(voir Proposition 1.2.1) , il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V.
Ainsi, $v_2(t) \in F(t,\overline{y}(t))$, et pour chaque $t \in J$.

$$| v_1(t) - v_2(t) | \leq l(t) | y(t) - \overline{y}(t) | .$$

On définit pour chaque $t \in J$,

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s)ds \\ &- \frac{t^2}{2\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} v_2(s)ds + y_0 + y_0^* t + \frac{y_T}{2}t^2. \end{aligned}$$

Alors, pour $t \in J$

$$\begin{aligned} | h_1(t) - h_2(t) | &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | v_1(s) - v_2(s) | ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-2} | v_1(s) - v_2(s) | ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) | y(s) - \overline{y}(s) | ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-3} l(s) | y(s) - \overline{y}(s) | ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\| h_1 - h_2 \|_\infty \leq I^\alpha l(T) + T^2 I^{\alpha-2} l(T) \| y - \overline{y} \| \infty.$$

D'une relation analogue, obtenue en échangeant les rôles de y et $\overline{y}$, Il s'en suit que,

$$H_d(N_2(y), N_2(\overline{y})) \leq (I^\alpha l(T) + T^2 I^{\alpha-2} l(T)) \parallel y - \overline{y} \parallel .$$

Donc, par (4.7), N_2 est une contraction et donc, par le théorème 1.5.3 N_2 admet un point fixe y qui est la solution de $(4.1)-(4.2)$. $\square$

Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté quelques résultats d'existence des solutions du problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire (cas $2 < \alpha < 3$) au sens de Caputo dans le cas convexe et non-convexe.
Cette résultat ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de l'alternative non linéaire de Leray Schauder, Covitz et Nadler.

Conclusion et Perspective

Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaines tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autres sciences qui ont été développé dans la dernière décennie, en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheurs en mathématiques elles même.
Ce mémoire est dévouée à l'existence de solutions pour différents types d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire.

Les résultats obtenus sont basés sur l'argument du point fixe, en particulier on a utiliser le théorème du point fixe de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder [19] et Covitz-Nadler [27].

Nous comptons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autre équation, et developper d'autre méthodes numériques de résolution des incluions dif- férentielles d'ordre fractionnaires, mois coûteuses et plus pricises que celle proposées dans ce mémoire.

Index

Bibliographie

[1] A. ANBER, S. Belarbi and Z. Dahmani,New existence and uniqueness results for fractional differential equations, Vol. 21(3),2013, 33- 41.

[2] A. Benlabbes, M. Benbachir and M. Lakrib,Boundary value problems for nonlinear fractional differential equations ,Ser. Math. Inform. Vol. 30, No 2 (2015), 157- 168.

[3] A. Loverro, Fractional Calculus : History, Definitions and Applications for the Engineer,Notre Dame, IN 46556, U.S.A. May 8, 2004.

[4] B. Crompton, An Introduction to Fractional Calculus and the Fractional Diffusion-Wave Equation, May 21- 2011.

[5] B. ROSS, The development of fractional calculus, University of new Haven, conn, 06516-1695. 1900.

[6] C. Castaing and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, lecture notes in mathematics 580, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[7] D. Baleanu, J. J. Trujillo and B. Ahmad, Advanced theoretical and applied studies of fractional differential Equations,Copyright © 2013 Hindawi Publishing Corporation.

[8] F. Liu, O. P. Agrawal, S. Momani, N.N. Leonenko and W. Chen,Fractional differential equations 2012, Copyright © 2013 Hindawi Publishing Corporation.

[9] F. MAINARDI and R. GORENFLO, Fractional calculus and special functions, Lecture Notes on Mathematical Physics , Department of Physics, University of Bologna, Italy.

[10] G.WANG, S. Liu, R. P. Agarwal, L. Zhang, Positive solusions of integral boundary value problem involving Riemann-Lioville fractional derivative, Journal of Fractional Calculus and Applications,Vol. 4(2) July 2013, pp 312-321.

[11] K. BOGDAN AND B. L DYDA, The Best Constant in a fractional Hardy Inequalit, 11 July 2008.

[12] L. Géorniewicz.Topological fixed point theory of multivalued mappings, Mathematics and its Applications, 495, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[13] L. S. Raymond, Analyse fonctionnelle, Université Paris VI and DMA Ecole Normale Supèrieure, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, FRANCE.

[14] M. Benchohra, B. Hedia,Positive solutions for boundary value problems with fractional order, International Journal of Advanced Mathematical Sciences, 2013

[15] M. Benchohra, J. R. Graef and F.Z. Mostefai, Weak Solutions for Boundary-Value Problems with Nonlinear Fractional Differential Inclusions,Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 11 (3) (2011) 227-237,July 20- 2011

[16] M. Benchohra , J. Henderson , S. K. Ntouyas, A. Ouahab,Existence results for fractional functional differential inclusions with Infinite Delay and Applications to control theory, An International Jornal for Theory and Applications,(2008).

[17] M. Benchohra and S. Hamani, Boundary valus problems for differential inclusions with fractional order, 28 (2008) 147 -164.

[18] M. Benchohra and S. Hamani, Nonlinear boundary valus problems for differential inclusions with Caputo fractional derivative ,Volume 32(2008) 115 - 130.

[19] M. FRIGON, A. GRANAS, Resultats du type de Laray-Schauder pour des contractions multivoques, Jornale of the Juliusz Schauder center, Volume 4.1994, 197-208.

[20] M. K. Potapov, B. V. Simonov, and S. Yu. Tikhonov, Mixed moduli of smoothness in $L_p, 1 < p < \infty$: a survey,arXiv :1304.3329v1[math.CA] 11 Apr 2013.

[21] N. Wheeler, Construction et physical pplication of the fractional calculus, February 1997.

[22] P. Muniyappan, S. Rajan, Hyers-ulam-rasslas stability of fractional differential equation, International Journal of Pure and Applied Mathematics, INDIA, No, 4 2015, 631-642.

[23] P. Williams, Fractional Calculus of Schwartz Distributions,2 Nov 2007.

[24] K. Yosida, Functional analysis, spring-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

[25] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, A Survey on Existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and Inclusions, © Springer Science+Business Media B.V. 2008.

[26] S. Abbas and M. Benchohra, Darboux problem for perturbed partial differential equations of fractional order with finite delay, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009), 597-604.

[27] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in fractional differential equations, Springer, New York, 2002.

[28] S. Abbas and M. Benchohra, Upper and lower solutionns method for partial discontinuous fractional differential inclusions with not instantaneous impulses.36 (2016) 155 -179.

[29] S. Abbas, M. Benchohra and M. A. Darwish, New stability results for partal fractional differential inclusions with not instantaneous impulses, 2015.

[30] S. Baghli and M. Benchohra, Unique mild solution for partial functional and Neutral Functional Evolution Equations with state-dependent delay, BP 89- 22000 Sidi Bel-Abbès, Algerie

[31] S. D. Eidelman and A. N. Kochube, Cauchy problem for fractional diffusion equations, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Tereshchenkivska 3, Kiev, 01601 Ukraine, 199 (2004) 211- 255
http ://www.elsevier.com ⁄ locate ⁄ jde.

[32] T. H. Macgregor, Fractional Cauchy transforms, NY 12222 USA, 8 May 1998.