République Algérienne Démocratique et Populaire
"Ministèrede l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique"

Nř Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Géométrie des espaces homogènes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie différentielle

par

Mekkaoui **F**atima Zohra[1]

Sous la direction de

Dr K. Djerfi

Soutenu le 24 Mai 2017 devant le jury composé de

S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
K. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
D. Djebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail : mekkaouimekkaoui@yahoo.fr

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à monsieur K.Djerfi mon encadreur, pour le temps qu'il a si généreusement consacré à mon apprentissage. Je le remercie pour la grande liberté qu'il m'a accordée durant la préparation de ce mémoire, tout en me guidant par ses conseils et ses encouragements.

Je souhaite également remercier chaque membre de mon jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce mémoire en commençant par S.Abbas, S.Ouakkas et D.Djebbouri.

Je tiens à remercier mes amis mathématiciens pour tant de bons moments.

Enfin, je voudrais terminer ces remerciements par une pensée toute particulière à ma famille et à mes proches, pour leur soutien et leur affection.

Table des matières

Introduction

Une géométrie, au sens de klein, est un espace homogène G/H, où G est un groupe de Lie (de dimension finie) et H un sous-groupe fermé de G.
Le groupe G est alors le groupe des symétries (isométries) de la géométrie est joue le rôle central suivant : deux parties de l'espace G/H seront considérées équivalentes si l'une est l'image de l'autre par une transformation appartenant au groupe G.
L'exemple type est celui de la géométrie euclidienne, associée au groupe des déplacements $G = O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, où le stabilisateur d'un point est le groupe d'isotropie $H = O(n, \mathbb{R})$. Comme le sous-groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ agit librement et transitivement sur G/H, un modèle de la géométrie euclidienne sera alors $\mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique standard définie positive $dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$.
Autres exemples remarquables de géométries :

- La géométrie pseudo-riemannienne plate de signature (p, q), obtenue pour $G = O(p, q) \times \mathbb{R}^n$ et $H = O(p, q)$, avec p, q des entiers positifs de somme égale à n. Un modèle de cette géométrie est $\mathbb{R}^n$ muni de la forme quadratique $dx_1^2 + \cdots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \cdots - dx_{p+q}^2$, non dégénérée et de signature (p, q). La géométrie lorentzienne plate correspond au cas particulier $q = 1$.
- La géométrie affine obtenue pour $G = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ et $H = GL(n, \mathbb{R})$.
  L'action de G sur $\mathbb{R}^n$ préserve les droites paracourues à vitesse constante.
- La géométrie projective, où G est le groupe des transformations projectives de l'espace projectif $P^n(\mathbb{R})$ et H est le stabilateur d'un point.
  ddco Dans ce cas G préserve les droites projectives, sans respecter le paramétrage.

Gau$\mathcal{B}$ et Riemann sont les premiers à avoir introduit et étudié l'objet infinitésimal associé à la géométrie euclidienne : en language moderne, une métrique riemannienne sur une variété est un champ lisse de formes quadratiques définis les objets infinitésimaux

associés aux géométries de Klein G/H, qui sont, à ces géométries, ce que les métriques riemanniennes sont à la géométrie euclidienne. Par exemple, une connexion affine est la généralisation infinitésimale de la géométrie projective. Cartan associe à ces objets un tenseur de courbure qui s'annule si et seulement si l'objet infinitésimal est plat, autrement dit localement équivalent à G/H.
Cartan et Lie ont longuement étudié les symétries (isométries) de ces objets infinitésimaux.
Ehresmann est celui qui a posé le cadre moderne (intrinsèque) dans lequel ces structures géométriques infinitésimales se définissent. La définition de structure géométrique, dégagée par Ehresmann et reprise fructueusement le lecteur pourra se contenter de penser au cas des métriques pseudo-riemanniennes, au cas des connexions affines et, éventuellement, à celui des structures conformes pseudo-riemanniennes.
Rappelons qu'une métrique pseudo-riemanniennes de signature (p, q) est un champ lisse de formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q).
Dans le cas particulier $q = 1$, la métrique est dite lorentzienne.
Une structure conforme pseudo-riemannienne est la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne définie seulement à un multiple scalaire prés.

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'étude de la géométrie des espaces hommogènes.
Mon travail constitue une première étude de ces espaces.
Le travail est divisé en trois chapitres.
Le premiér chapitre est consacré à l'étude la notion d'un groupe de Lie, algèbre de Lie et espaces homogènes où on rappelle les différentes définitions illustrées par des exemples. On cite aussi les différentes propriétés liées à la notion d'un groupe de Lie notamment l'algèbre de Lie, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, l'application exponentielle et quelques résultats géométriques.

Dans le deuxième chapitre on introduit la notion d'une variété riemannienne, On s'interesse les notions fondamentales de variété riemannienne, dérivée covariante et connexion de Levi-Civita, tenseur de courbure, géodésique.

Le troisième chapitre est consacré à quelques applications et théorèmes de rigidité sur les espaces homogènes, on traite notament quelques résultats sur ls espaces lorentziennes de dimension trois.

Mots-clés : Groupe de Lie, Algèbre de Lie, espace homogène, Variété riemannienne, connexion de Levi-Civita, courbure riemannienne, espace symétrique, théorèmes de rigidité.

Chapitre 1

Groupes de Lie, algèbres de Lie et espaces homogènes

La théorie des groupes et algèbres de Lie commence à la fin du 19*me* siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie. Elle a connu de nombreuses ramifications (géométries non euclidiennes, espaces homogènes, analyse harmonique, théorie des représentations, groupes algébriques, groupes quantiques...) et reste encore très active. Par ailleurs ces deux structures interviennent aussi dans des branches a priori plus éloignées des mathématiques : en théorie des nombres, par le truchement des formes automorphes et en physique théorique, notamment dans la physique des particules ou la relativité générale.

1.1 Groupes de Lie

• **Groupes topologiques.**

Définition 1.1.1 *Un groupe topologique est un ensemble G muni d'une loi de groupe $(x, y) \longmapsto x.y$ et d'une topologie vérifiant les axions suivants :*

- *L'application produit $(x, y) \longmapsto x.y$ est continue.*
- *L'application inverse $x \longmapsto x^{-1}$ est continue de G dans G.*

Un homomorphisme de groupes topologiques est un homomorphisme de groupes entre deux groupes topologiques qui est continu.
−Un sous-groupe H de G peut être muni de la topologie induite. Ceci fait de H un groupe topologique, on dit dans ce cas que H est un sous-groupe topologique de G.

Exemples 1.1.1 *(Groupes discrets)*

- *Tout groupe Γ, muni de la topologie discrete est un groupe topologique. Par exemple, $\mathbb{Z}$, tout groupe fini, etc.*

Exemples 1.1.2 *(Groupes additifs et multiplicatifs).*

- $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe topologique, puisque l'application* $(x, y) \to x + y$ *est continue. De même,* $(\mathbb{C}, +)$ *est un groupe topologique, isomorphe à* $(\mathbb{R}^2, +)$. *Plus généralement,* $(\mathbb{R}^n, +)$ *est un groupe topologique.*
- $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe topologique, puisque l'application* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *est continue. Il n'est pas connexe :* $\mathbb{R}^*_+$ *est un sous-groupe ouvert et fermé.*

  De même,$(\mathbb{C}^*, \times)$ *est un groupe topologique. Le cercle* $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z\bar{z} = 1\}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{C}^*, \times)$. *On note ausi* $U(1)$. *Comme espace topologique, il est compact. On a un isomorphisme de groupes topologiques* $\mathbb{C}^* \simeq S^1 \times \mathbb{R}^*_+$.

Exemples 1.1.3 *(Groupes linéaires)*

- *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On munit* $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ *de la topologie usuelle. L'application* $A \mapsto det\, A$ *est continue, puisque c'est un polynôme en les coefficients* $a_{i,j}$ *de* A. *Donc le groupe*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K} \ : \ det\, A \neq 0\}$$

est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$. *L'application* $(A, B) \mapsto AB$ *est continue, puisque chaque coefficient*

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

est une fonction continue (un polynôme quadratique) en les coefficients de A *et* B. *Soit* $C(A)$ *la matrice des cofacteurs de* A, *c'est-à-dire* $C(A)_{i,j}$ *est le déterminant de la matrice de taille* $n-1$ *obtenue à partir de* A *en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne ; c'est un polynôme homogène de degré* $n-1$ *en les coefficients de* A. *D'aprés la formule*

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A}\, {}^t C(A),$$

où ^{t} *désigne la transposé, on voit que* $A \mapsto A^{-1}$ *est une application continue. Donc* $GL_n(\mathbb{K})$ *est est un groupe topologique.*
Le groupe $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \ : \ det\, A = 1\}$ *est un sous-groupe fermé.*

Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e. Définissons la translation à gauche $L_g : G \to G$ et la translation à droite $R_g : G \to G$ respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$.
Ces applications sont des homéomorphismes, car continues et bijectives d'inverses $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ respectivement. Il est à remarquer que ces applications commutent : pour tous g, h dans G,

$$R_g \circ L_h = L_h \circ R_g.$$

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, avec G' un groupe topologique, alors, pour tout g dans G,

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$$

. Donc un morphisme de groupes entre deux groupes topologiques est continu si et seulement s'il est continu en l'élément neutre.

- **Composante connexe d'un groupe topologique.**

Soit G un groupe topologique. On note G^0 la composante connexe de l'élément neutre e, c'est-à-dire la plus grande partie connexe de G contenant e.

Proposition 1.1.1 *Si* G_0 *est la composante neutre d'un groupe topologique* G*, alors*

- G_0 *est un sous-groupe distingué de* G
- *Les composantes connexes de* G *sont les classes à gauche (ainsi que les classes à droite) de* G *modulo* G_0*,*
- *Si* G_0 *est ouverte, alors le groupe topologique quotient (i.e. l'ensemble quotient muni des structures de groupe quotient et d'espace topologique quotient qui est un groupe topologique)* G/G_0 *est discret.*

Preuve. L'application de $G_0 \times G_0$ dans G définie par $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est un sous-groupe. Pour tout g dans G, l'application de G_0 dans G définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est distingué. Le reste est immédiat.

Définition 1.1.2 *Un groupe de Lie est un groupe $(G, .)$ muni d'une structure de variété différentiable, telle que les deux applications*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned} \qquad et \qquad \begin{aligned} \psi : G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g.h \end{aligned}$$

soient des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$

Exemples 1.1.4

- *Le premier exemple est le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{K})$. Il s'agit du groupe des matrices inversibles de $M(n, \mathbb{K})$:*

  $$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M(n, \mathbb{K}) / detA \neq 0\}$$

  Le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ est effectivement un groupe pour la multiplication des matrices. Ce groupe est ouvert dans $M(n, \mathbb{K})$ en tant que préimage de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ par l'application continue det. Il est isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$. Autrement dit, $GL(n, \mathbb{K})$ est une variété différentielle. Pour que ce soit un groupe de Lie, il suffit de constater que la loi de multiplication et l'opération de passage à l'inverse sont différentiables, ce qui est clairement le cas puisque

  $$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad et \quad A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \, {}^t Com(A),$$

  où $Com(A)$ désigne la comatrice de A. Une autre manière de montrer que $GL(n, \mathbb{K})$ est bien un groupe de Lie matriciel est d'utiliser notre définition précédente. Le résultat est alors immédiat.
- *Le groupe $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe de Lie réel de dimension n.*
- *Le groupe $(\mathbb{C}^n, +)$ est un groupe de Lie complexe de dimension n.*
- $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / detA = 1\}$ *groupe spécial linéaire de dimension $n^2 - 1$.*
- $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / A^t A = id\}$ *groupe orthogonal de dimension $(n^2 - n)/2$.*

Définition 1.1.3

- *Un morphisme de groupe de Lie est un morphisme de groupe entre deux groupes de Lie qui est différentiel.*

- *Les groupes de Lie G_1 et G_2 seront dits isomorphes si $f : G_1 \to G_2$ est à la fois un isomorphisme de groupes et un difféomorphisme.*

Exemples 1.1.5

- *Les morphismes $\lambda : (\mathbb{R}, +) \to G$ sont appelés (abusivement) sous-groupes à 1 paramètre.*
- *Un morphisme du type $\rho : G \to GL(V)$ est appelé représentation (linéaire) de G sur V.*

Définition 1.1.4 *Un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G, est un sous-groupe de G qui possède une structure de groupe de Lie, et qui est une sous variété de G.*

Proposition 1.1.2 *Soit G un groupe de Lie alors,*

- *Tout sous-groupe de Lie H dans G est fermé.*

Preuve. Cela découle des deux points ci-dessous.

- Puisque H est une sous-variété, H est localement fermé (i.e. tout point h de H admet un voisinage U dans G tel que $H \cap U$ soit fermé dans U).
- Supposons plus généralement que G est un groupe topologique et H un sous-groupe localement fermé. Alors H est fermé. En effet, soit g dans l'adhérence $\bar{H}$ de H dans G :

- choisissons U voisinage ouvert de e dans G t.q. $U \cap H$ soit fermé dans U. Quitte à remplacer U par $U \cap U^1$ on peut supposer que $U = U^{-1}$ (on dit alors que U est symétrique).

- U_g est un voisinage ouvert de g donc $U_g \cap H \neq \emptyset$. Choisissons h dans cette intersection ; on a donc $g \in U_h^{-1} \cap \bar{H} = U_h \cap \bar{H}$. Puisque U_h est ouvert, $U_h \cap \bar{H}$ est l'adhérence de $U_h \cap H$ dans U_h.
  Or, $U_h \cap H = (U \cap H)_h$

Théorème 1.1.1 *Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G, il existe sur l'espace quotient G/H une unique structure de variété $\mathcal{C}^\infty$ telle que l'application*

$$p : G \longrightarrow G/H$$

soit une submersion

Définition 1.1.5 *(Sous-groupe à un paramètre) : Un sous-groupe à un paramètre d'un groupe de Lie G est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(G,.)$. Autrement dit : une application lisse $h : \mathbb{R} \to G$ telle que*

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \quad h(t+s) = h(t).h(s)$$

1.2 Algèbres de Lie

Définition 1.2.1 *Une algèbre de Lie sur un corp $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'une application $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, appelée crochet de Lie, qui possède les propriétés suivantes :*

1. *Bilinéarité pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

2. *Antisymétrie pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$*

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

3. *Identité de Jacobi pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Une algèbre de Lie est abélienne (ou commutative) si

$$[X, Y] = [Y, X] = 0, \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

.

Exemples 1.2.1

- *Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$, muni du crochet de Lie nul, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, dite abélienne (ou commutative).*

Définition 1.2.2 *Un morphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire entre deux algèbres de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ telle que*

$$f([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [f(X), f(Y)]_{\mathfrak{g}'} \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Si f est inversible et f^{-1} est aussi un morphisme, on dit alors que f est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

Définition 1.2.3

- *Une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de Lie est un sous-espace vectoriel* $\mathfrak{h}$ *stable par le crochet de Lie, i.e.* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$
- *Un idéal d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est un sous-espace vectoriel* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\forall\, X \in \mathfrak{h}$ *et* $Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ *i.e.* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$.

Définition 1.2.4 *Supposons qu'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *peut être écrite comme une somme,*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$$

(dans le sens d'une addition d'espaces vectoriels) où $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *sont des sous-algèbres de Lie. Soit* $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$*, représente l'ensemble*

$$\{[X, Y] : \, X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2\}.$$

Si $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = 0$*,* $\mathfrak{g}$ *est appelé une somme directe de* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$*, alors elle est dénotée par*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

- **Constantes de structure des algèbres de Lie.**

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base (vectorielle) de $\mathfrak{g}$. Tout élément de $\mathfrak{g}$ s'écrivant comme combinaison linéaire des éléments de cette base, il existe donc des scalaires $(C^{\gamma}_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq n}$ dans $\mathbb{K}$ tels que (toujours en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$\forall \alpha, \beta \in \{1, \cdots, n\}, \quad [e_\alpha, e_\beta] = C^{\gamma}_{\alpha\beta} e_\gamma.$$

Les scalaires $(C^{\gamma}_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha,\beta,\gamma \leq n}$ s'appellent les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ (relatives au choix de base). D'aprés les propriétés 2) et 3) elles satisfont aux relations

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

$$C^{\rho}_{\alpha\beta} C^{\delta}_{\rho\gamma} + C^{\rho}_{\beta\gamma} C^{\delta}_{\rho\alpha} + C^{\rho}_{\gamma\alpha} C^{\delta}_{\rho\beta} = 0$$

- **Centre d'une algèbre de Lie.**

On appelle centre d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'idéal

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{g}, [X,Y] = 0\}$$

de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, c'est-à-dire, si le crochet de $\mathfrak{g}$ est nul.

- **Forme de Killing et représentation adjointe.**

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $ad\,X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ défiinie par

$$ad\,X(Y) = [X,Y]$$

est une dérivation d'algèbres de Lie (parfois appelée dérivation intérieure), car pour tous les Y et Z dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad\,X([Y,Z]) = [ad\,X(Y), Z] + [Y, ad\,X(Z)],$$

ce qui est une simple réécriture de l'identité de Jacobi. L'application $ad : \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$ définie par $X \mapsto ad\,X$ est un morphisme d'algèbres de Lie, car pour tous les X et Y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$ad[X,Y](Z) = ad\,X \circ ad\,Y(Z) - ad\,Y \circ ad\,X(Z) = [ad\,X, ad\,Y](Z),$$

ce qui est aussi une simple réécriture de l'identité de Jacobi (le crochet de Lie à droite est celui de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$). La représentation d'algèbres de Lie

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

s'appelle la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Elle est à valeur dans $Der(\mathfrak{g})$(l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$).

Si $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est l'application $B = B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ définie par

$$B(x,y) = tr(ad\,x \circ ad\,y).$$

Par les propriétés de la trace des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, et par linéarité de la représentation adjointe, la forme de Killing est bilinéaire et symétrique.

Elle est invariante par tout automorphisme d'algèbres de Lie : si $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, alors, pour tous les x et y dans $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B_{\mathfrak{g}'}(f(x), f(y)) = B_{\mathfrak{g}}(x, y),$$

Elle est de plus ad-alternée c'est-à-dire alternée pour les endomorphismes $ad\,x$: pour tous les $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$B(ad\,x(y), z) = -B(y, ad\,x(z)).$$

En effet, en appliquant deux fois l'identité de Jacobi,

$$\begin{aligned} B([x,y],z) &= tr((ad\,x \circ ad\,y - ad\,y \circ ad\,x) \circ ad\,z) \\ &= tr(ad\,y \circ ad\,z \circ ad\,x) - tr(ad\,y \circ ad\,x \circ ad\,z) = B(y,[z,x]) = -B(y,[x,z]). \end{aligned}$$

Par exemple, la forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ est

$$\forall\, X, Y \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \quad B(X,Y) = 2n\, tr(XY) - 2tr\, X\, tr\, Y.$$

1.3 Translation à gauche et à droite

Soit $(G, .)$ un groupe de Lie, on définit les deux applications de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ x &\mapsto L_g = g.x, \end{aligned}$$

est la translation à gauche sur le groupe.

$$\begin{aligned} R_g : G &\to G \\ x &\mapsto R_g = x.g \end{aligned}$$

est la translation à droite sur le groupe.
Ainsi que leurs applications réciproques $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$, par suite R_g et L_g sont des difféomorphismes de G dans G, et ils commutent entre eux :

$$L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g.$$

. Les propriétés des applications tangentes aux difféomorphismes impliquent que, pour chaque $x \in G$:
TL_g (resp. TR_g) induit un isomorphisme linéaire de T_xG sur $T_{g.x}$ (resp. $T_{x.g}G$).

• **Champs de vecteurs invariants.**

Si X est un champ de vecteurs sur G, nous dirons que
X est invariant à gauche si $\forall\, g \in G,\ \forall\, x \in G,\ d_xL_g(X_x) = X_{g.a}$ où pour mémoire nous rappelons que nous avons $d_xL_g\ : d_xG \to d_{g.a}G$. Nous pouvons encore écrit cette condition sous la forme

$$(L_g)_*X = X$$

pour tout $g \in G$.

$$\mathfrak{L}(G) = \{X \in \mathfrak{X}(G)\ /(L_g)_*X = X \quad \forall g \in G\}$$

L'ensemble des champs de vecteurs invariant à gauche est un espace vectoriel.

1.4 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Il existe dans chaque groupe de Lie G un point privilégié $g_0 = e \in G$ (point unité où point neutre du groupe), ainsi qu'un espace tangent T_eG au groupe dans ce point. La transformation

$$\begin{array}{rcl} i_g: G & \to & G \\ x & \to & gxg^{-1} \end{array}$$

s'appelle automorphisme interne engendré par l'éléments g de G. Cette transformation conserve le point unité $g_0 = e$ $(hg_0h^{-1} = g_0)$ et engendre une application linéaire de l'espace tangent

$$Ad(g) = T_ei_g : T_eG \to T_eG,$$

l'application tangente en e de i_g. avec $Ad(g^{-1}) = [Ad(g)]^{-1}$ et $Ad(g_1g_2) = Ad(g_1)Ad(g_2)$. Autrement dit, la correspondance $g \mapsto Ad(g)$ est une représentation linéaire

$$Ad : G \mapsto GL(n, \mathbb{R})$$

n étant la dimension de G.
Notons

$$ad = T_eAd : T_eG \longrightarrow End(T_eG)$$

l'application tangente en e de Ad. Pour tous X, Y dans T_eG, posons

$$[X, Y] = adX(Y),$$

et notons que $[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4.1 *L'espace vectoriel T_eG, est une algèbre de Lie par rapport au crochet. Cette algèbre de Lie s'appelle généralement l'algèbre de Lie du groupe G.*
De plus pour tout g dans G, l'application $Ad\, g : T_eG \to T_eG$ est un morphisme d'algèbre de Lie :

$$Ad\, g([X, Y]) = [Ad\, g(X), Ad\, g(Y)].$$

Proposition 1.4.2 *Soit G un groupe de Lie alors l'application :*

$$\begin{array}{rccl} \theta_G : & \mathfrak{L}(G) & \to & T_eG \\ & X & \to & X_e \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve. θ_G est une application linéaire.
θ_G est injective. En effet :
Soient $X, Y \in \mathfrak{L}(G)$ / $X_e = Y_e$, donc on a :

$$\begin{array}{rcl} d_eL_g = d_eL_g(X_e) & \Rightarrow & X \circ L_g(e) = Y \circ L_g(e) \\ & \Rightarrow & X_g = Y_g \qquad \forall g. \end{array}$$

θ_G est surjective. En effet :
Soit $v \in T_eG$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} X : G & \longrightarrow & TG \\ x & \longmapsto & d_eL_x(v) \end{array}$$

on a $X_e = d_eL_e(v)$
On montre que X est invariant à gauche

$$\begin{array}{rcl} d_xL_g(X_x) & = & d_xL_g \circ d_eL_x(v) \\ & = & d_eL_g \circ L_x(v) \\ & = & X_{g.x} \\ & = & X \circ L_g(x) \end{array}$$

d'ou, $(L_g)_* = X$. $(X \in \mathfrak{L}(G))$

Remarque 1.4.1 *Sur T_eG on définit le crochet de Lie par :* $\forall v, w \in T_eG$,

$$[v, w] = [\theta_G^{-1}(v), \theta_G^{-1}(w)]_e$$

dans ce cas θ_G est un isomorphisme d'algèbre de Lie.

Remarque 1.4.2 *L'algèbre de Lie du groupe de Lie G est l'espace tangent en e muni du crochet de Lie précédent.*

Exemples 1.4.1 *Pour les groupes donnés en exemples, nous donnons leur algèbre de Lie :*

$$GL(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$$

$$SL(n, \mathbb{R}) \to \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) \backslash trM = 0\}$$

$$O(n) \to \mathfrak{o}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mathbb{I}\mathrm{M}^t + M = 0\}$$

1.5 Notion de représentation (linéaire). Exemple d'un groupe de Lie non matriciel

Définition 1.5.1 *On appelle représentation d'un groupe G son homomorphisme dans un groupe de matrices $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ où $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$.*
L'application $\chi_\rho : G \to \mathbb{R}$ (rep. $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$), définie par la formule $\chi_\rho(g) = Tr\rho(g)$, $g \in G$, s'appelle le caractère de la représentation ρ.

La représentation est dite irréductible si l'espace $\mathbb{R}^n$ (res. $\mathbb{C}^n$) n'admet aucun sous-espace non trivial invariant par l'ensemble des matrices du type $\rho(g)$, $\quad g \in G$. On a un théorème simple mais important que voici :

Théorème 1.5.1 *(lemme de schur). Soient deux représentations irréductibles $\rho_i : G \to GL(n_i, \mathbb{R})$ d'un groupe G, $i = 1, 2$. Si $A : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ est un opérateur linéaire qui fait passer de ρ_1 à ρ_2 (c'est-à-dire tel que $A\rho_1(g) = \rho_2(g)A$, alors A est soit l'opérateur nul, soit un automorphisme.*
c'est à dire que la seule application linéaire qui commute avec toutes les transformations $\rho(g)$ est une transformation multiple de l'identité.

Preuve. Si A n'est pas l'opérateur nul, on doit avoir $Ax \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, sinon le "noyau" $\{Ax = 0\}$ de A serait un sous-espace invariant non trivial relativement à la représentation ρ_1. De même, l'image $A(\mathbb{R}^{n_1}) \subset \mathbb{R}^{n_2}$, qui est invariante relativement à ρ_2, doit ou bien s'annuler, ou bien se confondre avec $\mathbb{R}^{n_2}$. Le théorème est démontré.

Remarque 1.5.1 *Soit une représentation $\rho : G \to GL(N, \mathbb{R})$ d'un groupe G.*
La différentielle ρ_* de cette représentation dans le point unité de G applique l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_{(1)}$ dans l'espace des matrices :

$$\rho_* : \mathfrak{g} \to M(N, \mathbb{R}).$$

L'application ρ_* définit une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (homomorphisme d'algèbres de Lie), c'est-à-dire qu'on a l'égalité

$$\rho_*[\zeta, \eta] = [\rho_*\zeta, \rho_*\eta]$$

Pour des vecteurs quelconques ζ, η appartenant à $\mathfrak{g}$ (vérifier !).
La représentation $\rho : G \to GL(N, \mathbb{R})$ (ou $\rho : G \to GL(N, \mathbb{C})$) est dite exacte si elle n'a pas de noyau, c'est-à-dire si $\rho(g) \neq 1$ pour $g \neq 1$. Tout groupe de Lie matriciel admet naturellement une représentation exacte, puisqu'il est réalisé à priori comme un groupe de transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). Or, tout groupe de Lie ne peut se réaliser comme groupe des transformations linéaires de l'espace euclidien. Considérons par exemple le groupe $G = \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ des transformations d'une droite du type

$$x \quad \mapsto \quad x + 2\pi a + \frac{1}{i} \ln \frac{1 - ze^{-ix}}{1 - \overline{z}e^{ix}}, \tag{1.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\mid z \mid < 1$ et $\ln$ est la branche continue du logarithme népérien définie par la condition que ce logarithme s'annule pour $z = 0$. (Le numérateur et le dénominateur de la fraction sous le signe de logarithme sont conjugués complexes l'un par rapport à l'autre ; la fraction se ramène donc à une quantité de module égal à 1, son logarithme est une grandeur imaginaire pure, si bien que le second membre tout entier est réel.) Le groupe $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie connexe à trois dimensions. Il contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$: $a \in \mathbb{Z}$, $z = 0$; les éléments de ce sous-groupe commutent avec tous les autres éléments du groupe, ou, comme l'on dit aussi, le sous-groupe est au centre

du groupe (nous verrons plus loin qu'il se confond avec le centre). Les transformations (1.1) avec $z = 0$ et a réel quelconque ont la structure d'un sous-groupe à un paramètre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.
Toute transformation du type (1.1) *possède la propriété suivante : si $x \mapsto y$, on a $x+2\pi k \mapsto y + 2\pi k$ pour $k \in \mathbb{Z}$, elle définit donc une transformation du cercle $\mid w \mid= 1$, exactement*

$$w \mapsto \frac{w - z}{1 - \overline{z}}\, e^{2\pi i a}.$$

On obtient ainsi une projection (homomorphisme) du groupe $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ dans le groupe $SL(2, \mathbb{R})/ \pm 1 = SU(1, 1)/ \pm 1$ des transformations homographiques du cercle unité dans $\mathbb{C}$. Cette projection admet évidemment pour image la totalité du groupe $SL(2, \mathbb{R})/ \pm 1$, et pour noyau, le groupe $\mathbb{Z}$ indiqué plus haut. Puisque le groupe $SL(2, \mathbb{R})/ \pm 1$ n'a pas de centre, on conçoit que le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ se réduit justementà $\mathbb{Z}$.

Théorème 1.5.2 *Le groupe $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ n'admet aucune représentation linéaire exacte.*

Preuve. Rappelons que $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ admet un sous-groupe à un paramètre qui présente une intersection infinie (isomorphe à $\mathbb{Z}$) avec le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ sans être contenu dans ce centre. Nous montrerons tout de suite que cette propriété est suffisante pour que le groupe en question ne puisse jamais être plongé dans un groupe matriciel.
Soit un groupe $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ isomorphe à $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$. Soit ensuite H le sous-groupe à un paramètre de G tel qu'on vient de le décrire, on a $H = \{exptA\,/\,t \in \mathbb{R}\}$, où A est une matrice $n \times n$. Par un automorphisme interne du groupe $GL(n, \mathbb{C})$, on peut toujours ramener A à sa forme jordanienne normale, ce qui veut dire que la matrice devient diagonale par blocs ; ses blocs se présentent comme suit :

$$\begin{bmatrix} \lambda & a_1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_k \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

où $a_i = 0$ ou 1 (nous admettons que les différents blocs correspondent aux λ différents ; les ordres des blocs sont égaux aux nombres de multiplicité des valeurs propres de A). La matrice $exp\, tA$ est diagonale par blocs ; ses blocs, qui sont de même ordre, s'écrivent sous la forme $e^{\lambda t} B_\lambda(t)$, où

$$B_\lambda(t) = \begin{bmatrix} 1 & a_1 t & \frac{1}{2} a_1 a_2 t^2 & \frac{1}{6} a_1 a_2 a_3 t^3 & \cdots & \frac{1}{k!} a_1 \cdots a_k t^k \\ 0 & 1 & a_2 t & \frac{1}{2} a_2 a_3 t^2 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} a_2 \cdots a_k t^{k-1} \\ 0 & 0 & 1 & a_3 t & \cdots & \frac{1}{(k-2)!} a_3 \cdots \ a_k t^{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisqu'un nombre infini de telles matrices sont permutables avec les éléments du groupe G, tous les éléments de G sont des matrices diagonales par blocs aux blocs de même ordre.

L'ensemble P des matrices (Y compris les matrices dégénérées) qui sont permutables avec toutes les matrices de G est un sous-espace linéaire de l'espace $\mathbb{C}^{n^2}$ de toutes les matrices $n \times n$; l'intersection $P \cap G$ est le centre de G. Les matrices faisant partie de P sont encore des matrices diagonales par blocs aux blocs de même ordre qu'auparavant ; la condition pour qu'une telle matrice appartienne à P se résume par un système d'équation linéaires homogènes en éléments matriciels, chacune des équations se rapportant à un bloc déterminé. Ainsi donc, la condition pour que la matrice $exp\ tA$ appartienne au centre s'écrit sous forme d'un système d'équations linéaires en éléments de matrices $B_\lambda(t)$, c'est-à-dire sous forme d'un système d'équations algébriques en t. De pareilles équations ou bien sont identiquement vraies pour t quelconque, ou bien n'admettent qu'un nombre fini de solutions. Cela serait pourtant impossible si le groupe $H = \{\, exp\, tA \,\}$ n'était pas contenu dans le centre mais admettait une intersection infinie avec celui-ci. Le théorème est démontré.

1.6 Application exponentielle

Nous allons maintenant construire une application entre $\mathfrak{g}$ et G. Cette application est un pont entre les deux structures, et permet de trouver certaines propriétés de G connaissant $\mathfrak{g}$.
Pour cela, soit $X \in \mathfrak{g}$ considéré comme champ de vecteurs invariant à gauche. Il définit donc une équation différentielle, dont le flot est noté $\phi_X(t, y)$. C'est à dire que :

$$\frac{d\phi_X(t,y)}{dt} = X_{\phi_X(t,y)}$$

et

$$\phi_X(0, y) = y$$

Définition 1.6.1 *L'application entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe de Lie G et le groupe de Lie lui même est appelée application exponentielle définie par :*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longrightarrow \phi_X(1, e) \end{aligned}$$

Par construction, cette application vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tX) = \phi_X(t, e) \qquad \phi_X(t, y) = y\exp(tX) \qquad \frac{d\exp(tX)}{dt} = X_{exp(tX)} \qquad \exp 0 = e$$

Définition 1.6.2 *Soit X un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'exponentielle de X désigne la somme de la série (normalement convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!}.$$

Donnons quelques propriétés de l'exponentielle.

Proposition 1.6.1 *Quels que soient X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

(i) *Si X et Y commutent $exp\,X\, exp\,Y = exp\,(X + Y)$.*

(ii) *L'exponentielle est à valeurs dans $GL(n, \mathbb{K})$ et*

$$(exp\,X)^{-1} = exp\,(-X).$$

(iii) *Quels que soient t, s dans $\mathbb{K}$,*

$$exp\,(sX)exp\,(tX) = exp\,((s+t)X)$$

(iv) *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & GL(n,\mathbb{K}) \\ t & \rightarrow & exp\,(tX) \end{array}$$

est l'unique solution différentiable de l'équation différentielle du premier ordre

$$a'(t) = X\,a(t)$$

avec la condition initiale $a(0) = Id_n$.

(v) *tout Pour $g \in GL(n,\mathbb{K})$, $g\,exp\,X\,g^{-1} = exp\,(gXg^{-1})$.*

Remarque 1.6.1 *On peut reformuler* (iii) *en disant que $t \rightarrow exp\,tX$ est un morphisme de groupes (continu) de $\mathbb{R}$ dans $GL(n,\mathbb{K})$. On appelle un tel morphisme un sous-groupe à un paramètre de $GL(n,\mathbb{K})$.*

Proposition 1.6.2 *L'application exponentielle*

$$exp\,:\;\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{K})$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$, sa différentielle à l'origine est l'application identique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1.7 Action d'un groupe de Lie sur une variété

Définition 1.7.1 *Soit M une variété différentiable et G un groupe de Lie. Une action à gauche d'un groupe G sur M est une application*

$$\begin{array}{rcl} \phi : G \times M & \longrightarrow & M \\ (g,x) & \longrightarrow & \phi(g,x) = g.x \end{array}$$

telle que $\phi(e,x) = x$ pour tout $x \in E$, et

$$\phi(g,\phi(h,x)) = \phi(gh,x)$$

Une action de G sur M est dite :

- Libre si pour tous les $g \in G$ et $x \in M$, avec $g \neq e$ ona $g.x \neq x$;
- Propre si pour tout compact K de M, l'ensemble $\{g \in G \,:\, K \cap gK \neq \emptyset\}$ est compact dans G. C'est toujours le cas si G est compact.

Définition 1.7.2

- *Si G agit sur M, pour tout $x \in M$, On appelle stabilisateur de x le sous-ensemble $G_x = \{g \in G \setminus \; g.x = x\}$ de G, qui est un sous-groupe fermé de G.*
- *Si G agit sur M, pour tout $x \in M$ on appelle orbite de x le sous-ensemble $O_x = \{g.x \setminus \; g \in G\}$*

Définition 1.7.3 *Une action de G sur M est transitive si elle possède une seule orbite : pour tout $x, y \in M$, $\quad \exists g \in G / \quad y = g.x$.*

1.8 Espaces homogènes

Définition 1.8.1 *Un espace homogène d'un groupe de Lie G est une variété différentiable M munie d'une action à gauche transitive (et différentiable) de G.*

Proposition 1.8.1 *Un espace homogène est le quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé.*

Exemples 1.8.1

a) *La sphère S^n dans un espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension $n+1$ a pour équation*

$$(x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1;$$

le groupe $\mathrm{O}(n+1)$ des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$ opère naturellement sur S^n. Son action étant évidemment transitive sur la sphère S^n, celle-ci est un espace homogène du groupe $\mathrm{O}(n+1)$. Cherchons le groupe d'isotropie d'un point $x = (1, 0, \cdot \cdot \cdot, 0) \in \mathrm{S}^n$; ce groupe est formé par les matrices. Il vient donc $\mathrm{S}^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n)$. Le groupe $G = \mathrm{SO}(n+1)$ opère transitivement sur S^n lui aussi ; le groupe d'isotropie est donc $\mathrm{SO}(n)$. On a parsuite $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n) = \mathrm{S}^n$.

b) *L'espace projectif* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *peut être assimilé à l'ensemble des droites qui passent par l'origine des coordonnées dans* $\mathbb{R}^{n+1}$*. Le groupe* $\mathrm{O}(n+1)$ *opère transitivement sur la variété* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$*. Considèrons une droite de vecteur directeur* $(1, 0, \cdots, 0)$*. Elle revient à elle-même par des transformations orthogonales du type*

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathrm{O}(n).$$

Le groupe d'isotropie est donc isomorphe au produit direct $\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n)$*, si bien que*

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(n).$$

1.9 Classification des algèbres de Lie

1.9.1 Algèbres de Lie nilpotentes

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Définition 1.9.1 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$*. On pose pour tout entier* $j \geqslant 0$, $\mathfrak{g}_{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j)}]$*, avec* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$*. La suite décroissante d'idéaux* $\mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}_{(j)} \supseteq \cdots$ *est appelée la suite centrale descendante de* $\mathfrak{g}$*.*

Définition 1.9.2 *Une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *sur* $\mathbb{K}$ *est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier* $k \geqslant 1$ *tel que* $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$*. Si* $\mathfrak{g}_{(k-1)} \neq \{0\}$ *et* $\mathfrak{g}_{(k)} = 0$*, on dit que* $\mathfrak{g}$ *est nilpotente de cran* k*.*

Exemples 1.9.1
- *Toute algèbre de Lie abélienne est nilpotente.*
- *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supéérieures (ou inférieures), dont les éléments diagonaux sont nuls, est nilpotente.*

1.9.2 Algèbres de Lie résolubles.

Définition 1.9.3 *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* $\mathbb{K}$*. On pose pour tout* $j \geqslant 0$, $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$*, avec* $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$*. La suite décroissante d'idéaux* $\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \cdots$ *est appelée la suite dérivée de* $\mathfrak{g}$*.*

Définition 1.9.4 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est résolube si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ et $\mathfrak{g}^{(k-1)} \neq 0$.*

Exemples 1.9.2

- *Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble, puisque $\mathfrak{g}^{(j)} \subseteq \mathfrak{g}_{(j)}$ pour tout j.*
- *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieurs (ou inférieurs) est résolubles (et nilpotente si tous les termes diagonaux sont nuls).*

1.9.3 Algèbres de Lie semi-simples

La notion d'algèbre de Lie semi simple est liée à la notion de radical :

Définition 1.9.5 *Le radical d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. On notera $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ ce radical.*

Définition 1.9.6 *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite semi simple si son radical est réduit à $\{0\}$.*
Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite simple si $\mathfrak{g}$ n'est pas commutative et ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathfrak{g}$.

Définition 1.9.7 *Une involution de Cartan d'une algèbre semi-simple réelle $\mathfrak{g}$ est un automorphisme σ tel que $\sigma^2 = 1$ et tel que la forme bilinéaire symétrique B_σ donnée par*

$$B_\sigma(X, Y) = B(\sigma X, Y)$$

est définie négative. On a alors la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ où

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \,:\, \sigma(X) = X\} \quad et \quad \mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \,:\, \sigma(X) = -X\}.$$

Les sous-espaces $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux pour la forme de Killing B_σ qui est définie négative sur $\mathfrak{h}$ et définie positive sur $\mathfrak{p}$.

Définition 1.9.8 *Soit G un groupe de Lie connexe. On dit que G est semi-simple si son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est semi-simple. On dit que G est quasi-simple si $\mathfrak{g}$ est simple.*

Chapitre 2

Métriques riemanniennes et connexions

La géométrie riemannienne traite des propriétés intrinséques des espaces courbés et représente une généralisation de la géométrie euclidienne : Une variété riemannienne est une variété différentiable munie d'un tenseur fondamental qui fournit une structure euclidienne sur chaque espace tangent. Pour commencer on introduira les notions fondamentales de variété riemannienne, dérivée covariante et connexion de Levi-Civita, tenseur de courbure, géodésique et application exponentielle.

2.1 Métriques riemanniennes. Exemples

Soit M une variété différentiable lisse de dimension finie m.

Définition 2.1.1 *Une Métrique riemannienne sur une variété différentiable M est un champ de tenseur g de type $(0,2)$ (c-à-dire 2-covariant) tels que, pour tout $x \in M$, le tenseur $g_x \in T_x^*M \otimes T_x^*M$ soit une métrique sur T_xM. Autrement dit, une métrique est une application $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longmapsto \mathrm{C}^\infty(M)$ telle que*

i) *g est $\mathrm{C}^\infty(M)$-bilinéaire ;*

ii) *$g(X,Y) = g(Y,X)$, pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$;*

ii) *$g(X,X) \geqslant 0 \; \forall X \in \mathfrak{X}(M)$.*

• *Une métrique pseudo-riemannienne g de signature (p,q) sur une variété M de dimension m est la donnée, en tout point x de M, d'une forme quadratique non dégénérée sur l'espace tangent en x, telle que g_x varie de façon lisse avec x. Lorsque g est de signature $(m-1,1)$, on parle de métrique lorentzienne.*

L'expression d'une métrique g dans une carte (U, φ) de M avec coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^m)$ est donc

$$g|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}^U \, dx^i \otimes dx^j,$$

où (g_{ij}^U) est une matrice symmétrique (i.e. $g_{ij}^U = g_{ji}^U$) et de détérminant non-nul, à coéfficients dans $C^\infty(U)$ donnés par les fonctions

$$\begin{aligned} g_{ij}^U : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_{ij}^U(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}|_x\right) \end{aligned}$$

Une variété différentiable M, munie d'une métrique riemannienne g est appelée variété Riemannienne. On note (M, g).

Théorème 2.1.1 *Si M est paracompacte, alors elle admet une métrique riemannienne.*

Preuve. : Si $\{U_r\}$ est un atlas localement fini, supportant des cartes locales de coordonnées $(x^1 \cdots, x^m)$ et une partition de l'unicité p_r, on défini une métrique riemannienne g_r sur chaque ouvert U_r en posant

$$g_x\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, m$$

et on colle les métriques locales avec la partition de l'unicité

$$g = \sum_r p_r \, g_r.$$

La valeur de g en chaque point x de M est strictement positive car $\sum_r p_r(x) = 1$ et g_r est riemannienne. Donc g bien une métrique riemannienne sur M.

Exemples 2.1.1 *L'exemple le plus simple d'une variété riemannienne $(\mathbb{R}^n, g_{can})$, où g_{can} est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ i.e.*

$$g_{can} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$[g_{can}(X,Y)](x) = \langle X, Y\rangle,$$

pour $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n$

les vecteurs tangents $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]$, $i = 1, 2, \cdots, n$ *forment une base orthonormée de l'espace tangent* $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= \delta_{ij} \\ &= \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Exemples 2.1.2 *Soit* B^n *la boule unité dans* $\mathbb{R}^n$ *(ouverte). On muni* $B^n(0,1)$ *par la métrique hyperbolique définie par* $h : \mathfrak{X}(B^n) \times \mathfrak{X}(B^n) \to \mathrm{C}^\infty(B^n)$

$$[h(X,Y)](x) = \frac{4\langle X_x, Y_x\rangle}{\left[1 - \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^2},$$

où $X, Y \in \mathfrak{X}(B^n), x = (x^1, \cdots, x^n) \in B^n$ *et* $\langle ., .\rangle$

$$h_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x\right) = \frac{4}{\left[1 - \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right]^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$h_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x\right) = 0, \quad i \neq j$$

$x = (x^1, \cdots, x^n) \in B^n$

Exemples 2.1.3 *L'exemple fondamental d'une métrique riemannienne sur un groupe de Lie compacte, semi simple*

Soit G *un groupe de Lie de dimension finie et* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie. La forme bilinéaire* $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$B(X,Y) = -trace(adX \circ adY),$$

$X, Y \in \mathfrak{g}$,*où* $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ *la représentation adjointe de* $\mathfrak{g}$ *définie par*

$$(adX)(Z) = [X, Z],$$

$Z \in \mathfrak{g}$, s'appelle la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$. Cette forme bilinéaire symétrique est invariante sous la représentation adjointe $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ de G donnée par

$$Ad(g) = (dI_g)_e,$$

où $I_g : G \to G$ est défini par

$$I_g(x) = gxg^{-1},$$

$x \in G$, $e \in G$ Étant l'élément d'identité de G. Cela signifie que

$$B(X,Y) = K(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)),$$

Pour tout $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$. En effet, notez d'abord que

$$ad(\alpha(X)) = \alpha \circ adX \circ \alpha^{-1}$$

Pour tout automorphisme de l'algèbre de Lie $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} ad(\alpha(X))Y &= [\alpha(X), Y] \\ &= \left[\alpha(X), \alpha\alpha^{-1}(Y)\right] \\ &= \alpha\left[X, \alpha^{-1}(Y)\right] \\ &= \alpha(adX(\alpha^{-1}(Y))) \\ &= (\alpha \circ adX \circ \alpha^{-1})(Y), \end{aligned}$$

Pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. D'autre part, compte tenu de cette égalité, nous avons successivement

$$\begin{aligned} B(Ad(g)X, Ad(g)Y) &= -trace(ad(Ad(g)X) \circ ad(Ad(g)Y)) \\ &= -trace(Ad(g) \circ adX \circ adY \circ (Ad(g))^{-1}) \\ &= -trace(adX \circ adY) \\ &= B(X,Y), \end{aligned}$$

Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $g \in G$.
Si B est non dégénéré, le groupe de Lie G est dit semi-simple. De plus, si G est compact, B est définie positive. En effet, soit $\langle ., . \rangle$ intérieur sur $\mathfrak{g}$. Par intégration on obtient un produit intérieur $\langle ., . \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ invariante par Ad :

$$\langle X, Y \rangle = \int_G (Ad(g)X, Ad(g)Y dg,$$

Pour chaque $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Par conséquent* $Ad(g)$ *est une transformation orthogonale de* $(\mathfrak{g}, \langle ., . \rangle)$ *pour chaque* $g \in G$, *i.e.* $Ad(G) \subseteq \mathrm{O}(\mathfrak{g})$ *(Le groupe orthogonale de* $\mathfrak{g}$*). Depuis*

$$Ad \circ exp_G = exp_{\mathrm{O}(\mathfrak{g})} \circ ad$$

Il s'ensuit que $ad(X)$ *est oblique symétrique pour tout* $X \in \mathfrak{g}$. *Ainsi si* $[a_{ij}]$ *est la matrice d'*$ad(X)$ *par rapport à une base orthonormée de* $\mathfrak{g}$. *On déduit que*

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= -trace(adX \circ adY) \\ &= -\sum_{i,j} a_{ij} a_{ji} \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Puisque G *est semi-simple,* B *est non dégénérée, et ainsi* K *est définie positive. Par conséquent si* G *est compact et semi-simple,* K *donne lieu à une métrique riemannienne sur* G *par translations à gauche.*

Définition 2.1.2 *Si* $f : M \to N$ *est une immersion entre variétés, et si* g_N *est une métrique riemannienne sur* N, *alors* $f^* g_N$ *est une métrique riemannienne sur* M *appelée métrique induite par* f.

Exemples 2.1.4 *Une surface de classe* $\mathcal{C}^k$ *de* $\mathbb{R}^3$ *hérite ainsi d'une métrique de classe* $\mathcal{C}^{k-1}$. *En coordonnées locales, c'est la première forme fondamentale.*

Définition 2.1.3 *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux varietés Riemanniennes. Un difféomorphisme* $\phi : M \longrightarrow N$ *est une isométrie si* $g = \phi^* h$ *i.e.*

$$g_x(u, v) = h_{\phi(x)}(d\phi_x(u), d\phi_x(v)).$$

Pour tout $x \in M$ *et* $u, v \in T_x M$, *où* $d\phi_x : T_x M \longrightarrow T_{\phi(x)} N$
L'ensemble des isométries de la variété riemannienne (M, g) *forment un groupe pour la composition des applications, on le note* $Isom(M, g)$.

Définition 2.1.4 *(variétés riemanniennes homogènes) Soient (M, g) et (M', g') deux variétés riemanniennes. Une submersion riemannienne $f : M \to M'$ est une application de M dans M' telle que pour tout $x \in M$, l'application $T_xf : Ker(T_xf)^\perp \to T_{f(x)}M'$ soit une isométrie.*
Comme une isométrie est en particulier surjective, une submersion riemannienne est une submersion.

Proposition 2.1.1 *Soit M une variété riemannienne, munie d'une action isométrique, lisse, libre et propre d'un groupe de Lie réel G. Il existe une et une seule métrique riemannienne sur la variété quotient M/G telle que la projection canonique $\pi : M \to M/G$ soit une submersion riemannienne.*

Preuve. L'unicité est immédiate.
Par les propriétés des submersions, pour tout x dans M, l'orbite $G.x = \pi^{-1}(x)$ est une sous-variété lisse de M et l'application $T_x\pi : T_xM \to T_{\pi(x)}(M/G)$, induit un isomorphisme linéaire $(T_x(G.x))^\perp \to T_{\pi(x)}(M/G)$, dépendant de manière lisse de x, dont nous noterons l'inverse $(T_x\pi)^{-1}$. Pour tout $x \in M$ et tous les $v, w \in T_{\pi(x)}(M/G)$, notons

$$\langle v, w\rangle_\pi(x) = \langle (T_x\pi)^{-1}(v),\, (T_x\pi)^{-1}(w)\rangle_x.$$

Montrons que le terme droite de cette formule ne dépend que de l'orbite de x, et donc définit une métrique riemannienne sur M/G.
Pour tout γ dans G, notons $f_\gamma : M \to M$ l'application $z \mapsto \gamma z$, qui est une isométrie telle que $\pi \circ f_\gamma = \pi$, et en particulier envoie $T_x(G.x) = \ker T_x\pi$ sur $T_{\gamma x}(G.x) = \ker T_{\gamma x}\pi$.
Si $y = \gamma x$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\langle (T_y\pi)^{-1}(v), (T_y\pi)^{-1}(w)\rangle_y &= \langle (T_yf_\gamma)^1 \circ ((T_x\pi)^{-1}(v), (T_yf_\gamma)^{-1} \circ (T_x\pi)^{-1}(w)\rangle_y \\
&= \langle (T_y\pi)^{-1}(v), (T_y\pi)^{-1}(w)\rangle_x,
\end{aligned}$$

comme voulu.

2.2 Connexion linéaire

Nous allons introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M. Cette structure nous permettra de définir une nouvelle dérivation, la dérivation covariante, par un mécanisme géométrique analogue à celui utilisé lors de la définition de la dérivée de Lie. Cette dérivation agira tout d'abord sur les champs de vecteurs, mais par le même processus que celui utilisé pour la dérivée de Lie, nous l'étendrons aux tenseurs en général.

Définition 2.2.1 *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

telle que pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) = f\nabla_X(Z) + g\nabla_Y(Z)$.
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$.
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)Y$.

On dit que $\nabla_X(Y)$ est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 2.2.2 *Soit (U, φ) une carte sur une variété différentiable M de dimension m et $\{x^i\}$ les coordonnées associées pour les quelles on note $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Les symboles de Christoffel d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x^i\}$ sont les m^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ définies par*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Lemme 2.2.1 *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entièrement la connexion ∇. Plus précisément, pour $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j} = Y^j\partial_i$*

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^iY^j\Gamma_{ij}^k)\partial_k$$

Preuve. On développe l'expression,

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(Y^j\partial_j) && \textit{par décomposition dans la base canonique,} \\
&= Y^j\nabla_X\partial_j + X(Y^j\partial_j) && \textit{par Leibniz-linéarité en } Y, \\
&= Y^jX^i\nabla_{\partial_i}\partial_j + X(Y^j)\partial_j && \textit{par linéarité en } X, \\
&= Y^jX^i\Gamma_{ij}^k\partial_k + X(Y^k)\partial_k && \textit{par définition des } \Gamma_{ij}^k. \\
&= (XY^k + X^iY^j\Gamma_{ij}^k)\partial_k
\end{aligned}$$

■

Exemples 2.2.1 *(Le cas de $\mathbb{R}^n$). La connexion standard $\bar{\nabla}$ de $\mathbb{R}^n$ est définie pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ par*

$$\bar{\nabla}_X Y := X(Y^j)\partial_j$$

Les composantes du champ résultant sont,

$$(\bar{\nabla}_X Y)^j = X(Y^j) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial X^i} = \langle X, grad\, Y^j \rangle = \frac{\partial Y^j}{\partial \overrightarrow{X}}$$

Définition 2.2.3 *On dit qu'un champ de vecteurs Y est dite parallèle respectivement à ∇ si $\nabla_X Y = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

2.2.1 Torsion d'une connexion

Définition 2.2.4 *La torsion d'une connexion est le tenseur de type (1,2) défini par l'expression*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

$T(X, Y)$ est un champ de vecteurs. De la définition, on remarque que $T(X, Y) = -T(Y, X)$

Expression locale de la torsion T d'une connexion ∇ :

pour $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&- Y^j X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} - X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(Y^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&= X^i Y^j (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}) \\
&= X^i Y^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \frac{\partial}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

Définition 2.2.5 *Une connexion linéaire ∇ sur une variété M est dite sans torsion si $T = 0$ c-à-d on peut exprimer le crochet de Lie en fonction de la connexion*

$$X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Exemples 2.2.2 *Si TM est muni d'une connexion localement triviale, alors localement $T(X, Y) = dY(X) - dX(Y) - [X, Y] = 0$, donc $T = 0$.*

Définition 2.2.6 *Soit T un champ de tenseur de type $(0, r)$ sur une variété Riemannienne M. La dérivée covariante ∇T du tenseur est un tenseur de type (0,r+1) défini par*

$$\begin{aligned}(\nabla T)(X_0, X_1, \cdots, X_r) &= \nabla_X T(Y_1, \cdots, Y_r) \\ &= X(T(Y_1, \cdots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_r)\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$
Si le tenseur T est de type (1,r) la dérivée covariante de T est définie par

$$\nabla_X T(Y_1, \cdots, Y_r) = \nabla_X T(Y_1, \cdots, Y_r) - \sum_{i=1}^{r} T(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, Y_r)$$

pour tout $X, Y_1, \cdots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$.

Exemples 2.2.3 $(\nabla_X g)(Y_1, Y_2) = Xg(Y_1, Y_2) - g(\nabla Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla Y_2)$

Remarque 2.2.1 *Pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, la dérivée covariante $\widetilde{\nabla} f$ correspond à la dérivée usuelle d'une fonction réelle, notée*

$$\widetilde{\nabla} f = df \in \mathfrak{T}_0^1(M).$$

- **Transport parallèle.**

Définition 2.2.7 *(Champ de vecteurs parallèle). On dit d'un champ de vecteurs le long d'une courbe γ qu'il est parallèle le long de γ si $\nabla_{\gamma'(t)} V = 0$*

Théorème 2.2.1 *(Transport parallèle). Soit $\gamma : I \to M$, $_0 \in I$, $X \in T_\gamma(t_0)M$. Il existe un unique champ de vecteurs V le long de γ tel que $V(t_0) = X$*

2.3 Connexion de Levi-Civita

Soit (M, g) une variété riemannienne.

Théorème 2.3.1 *Il existe une et une seule connexion linéaire compatible avec g et sans torsion (symétrique) sur M La connexion ∇ est appelée connexion de Levi-Civita de la variété riemannienne (M, g).*

Preuve. On montre ici l'unicité. Puisque ∇ est une connexion sans torsion sur M pour laquelle g est parallèle, alors pour tous les $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Y(g(Z,X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \\ Z(g(X,Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

En ajoutant les deux premieres equations et en enlevant la troisieme, nous avons, puisque g est symetrique et ∇ sans torsion,

$$\begin{aligned} X &\quad (g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Z, Y) - g(\nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z, X) - g(\nabla_Z Y, X) \\ &= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X,Y], Z) + g([X,Z], Y) + g([Y,Z], X). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X). \tag{2.1}$$

pour tous les $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$
D'autre part pour $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ fixé, soit $w_{X,Y} : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ donné par

$$w_{X,Y}(Z) = \frac{1}{2}\left[X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X)\right]$$

pour $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 2.3.1 *Si ∇ est la connexion de Levi-Civita on a d'aprés (2.1), puisque $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant m$,*

$$\forall i, j, k, \quad 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \partial_i g_{ik} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}.$$

On obtient :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).

Exemples 2.3.1 *Soit $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ une variété riemannienne considéré dans l'exemple* 2.1.1. *Dans ce cas, tout champ de vecteur X sur $\mathbb{R}^n$ peut être considéré comme une application $\mathcal{C}^\infty \quad X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Maintenant on definit*

$$(\nabla_X Y)(x) = (d_x Y)(X_x),$$

Où $x \in \mathbb{R}^n, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ et $d_x Y$ désigne la différentielle au sens de Fréchet de Y en x. Ensuite, ∇ satisfait aux conditions 1,3 *de la définition* 2.2.1 *ainsi que* 1,2 *du théorème* 2.3.1 *et donne la connexion Levi-Civita associée à $(\mathbb{R}^n, g_{can})$.*
Soit $(\partial_1, \cdots, \partial_n)$ la base naturelle par rapport au système de coordonnées $(x^1, \cdots, x^n)$. Pour

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \; Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j,$$

$X^i, Y^j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \cdots, n$. Ona

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)(x) &= d_x Y(\sum_{j=1}^{n} X^j(x)(\partial_j)_x) = \sum_{j,k=1}^{n} X^j(x)\partial_j Y^k(x)(\partial_k)_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} X_x(Y^k)(\partial_k)_x.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k = \nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{l,k=1}^{n} \delta_i^l \partial_l(\delta_j^k)\partial_k = 0,$$

C'est $\Gamma_{ij}^k = 0$ pour $i, j, k = 1, \cdots, n$.

2.4 Courbure sur une variété riemannienne

Soient (M, g) une variete riemannienne, ∇ sa connexion de Levi-Civita.

Définition 2.4.1 *La courbure d'une connexion ∇ sur M est est le tenseur, de type (1,3), $R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ défini par :*

$$R(X, Y, Z) \overset{not}{=} R(X, Y)Z \overset{def}{=} \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{2.2}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- R est antisymétrique par rapport aux deux premières variables, i.e.

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z.$$

- $R(X, Y)$ est antisymétrique par rapport à g, i.e.

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z).$$

-

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y).$$

Proposition 2.4.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne. Son tenseur de courbure riemannienne R a les propriétés suivantes :*
Pour tous les $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$, on a

- *R vérifie l'identité de Bianchi algébrique*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

- *R vérifie l'identité de Bianchi différentielle*

$$(\nabla_X R)(Y, Z)U + (\nabla_Y R)(Z, X)U + (\nabla_Z R)(X, Y)U = 0.$$

Preuve.

- Montrons l'identité de Bianchi algébrique (iii) (aussi appelée première identité de Bianchi). En utilisant le fait que ∇ est sans torsion, nous avons

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \quad \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_X[Y,Z] \\
&- \quad \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= \quad [Z,[X,Y]] + [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] = 0.
\end{aligned}
$$

– Pour la 2ème identité de Bianchi.
En appliquant la règle de Leibnitz et la définition de la dérivée covariante sur le tenseur de la courbure R, on obtient

$$\nabla_Z(R(X,Y)U) = (\nabla_Z R)(X,Y)U + R(\nabla_Z X,Y)U + R(X,\nabla_Z Y)U + R(X,Y)\nabla_Z U.$$

Une sommation avec permutation circulaire de (X,Y,Z), on a

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)U \quad &+ \quad (\nabla_Y R)(Z,X)U + (\nabla_Z)R(X,Y)U \\
&= \quad \nabla_X(R(Y,Z)U) - R(\nabla_X Y,Z)U - R(Y,\nabla_X Z)U - R(Y,Z)\nabla_X U \\
&+ \quad \nabla_Y(R(Z,X)U) - R(\nabla_Y Z,X)U - R(Z,\nabla_Y X)U - R(Z,X)\nabla_Y U \\
&+ \quad \nabla_Z(R(X,Y)U) - R(\nabla_Z X,Y)U - R(X,\nabla_Z Y)U - R(X,Y)\nabla_Z U.
\end{aligned}
$$

Aprés développement, et en utilisant le fait que, dans le cas de la connexion de Levi-Civita, $T(X,Y)$ est un vecteur nul ce qui implique que

$$R(T(X,Y),Z)U = R(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],Z)U = 0$$

et en utilisant les propriétés de la connexion et l'identité de Jacobi pour les champs de vecteurs, on obtient le résultat demandé

•**Calcul en coordonnées locales.**

Comme toujours on pose $(U,(x^1,\cdots,x^m))$ une carte locale de M, et les champs de vecteurs $(\partial_1,\cdots,\partial_m)$ forment une base de TU.
Soient $1 \leqslant i,j,k,l \leqslant m$. Par la proposition 2.4.1, nous avons

$$R_{ijk}^l = -R_{jik}^l.$$

Posons

$$R_{ijkl} = g\left(R\left(\partial_i,\partial_j\right)\partial_k,\partial_l\right) = g\left(R_{ijk}^s\partial_s,\partial_l\right) = g_{sl}R_{ijk}^s = g_{ls}R_{ijk}^s$$

qui appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(U)$ et sont les coordonnées du tenseur de courbure $(4,0)$ dans le repère mobile, de sorte que

$$R^l_{ijk} = \sum_{s=1}^{m} R_{ijks} g^{sl}.$$

et les propriétés précédentes s'écrivent

i) $R^l_{ijk} = -R^l_{jik}$ donc $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij} = R_{lkji}$.

ii) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

iii) $R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0$ (Identité de Bianchi algébrique)

iv $R_{ijkl} = R_{klij}$

v) $\nabla_i R^l_{jks} + \nabla_j R^l_{kis} + \nabla_k R^l_{ijs} = 0$ (Identité de Bianchi différentielle)

2.4.1 Courbure sectionnelle, courbure de Ricci, courbure scalaire

Définition 2.4.2 *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension $n \geqslant 2$ et soit σ un 2-plan de T_xM de base $\{X,Y\}$. On appelle courbure sectionnelle en x de σ*

$$K_x(\sigma) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} = \frac{R(X,Y,Y,X)}{|X \wedge Y|^2}. \tag{2.3}$$

On a donc une application sur la grassmannienne $(G_2(TM),\pi,M)$ du fibré tangent

$$\begin{array}{rccl} K: & G_2(TM) & \to & \mathbb{R} \\ & \sigma & \mapsto & K_{\pi(\sigma)}(\sigma) \end{array}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par λX pour $\lambda \neq 0$ et Y par $Y - g(X,Y)X$. On peut donc supposer que $\{X,Y\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas

$$K_x(\sigma) = g(R(X,Y)Y,X).$$

On vérifie que $K_x(\sigma)$ ne dépend pas de la base orthonormée :
En effet, si $\{Z,T\}$ est une autre base orthonormale, il existe $a,b \in \mathbb{R}$, tels que $a^2+b^2=1$ avec

$$Z = aX + bY, \;\; T = -bX + aY \;\; où \;\; T = bX - aY.$$

Une simple vérification montre que $g(R(X,Y)Y,X) = g(R(Z,T)T,Z)$.
Dans une carte locale au voisinage de x, soient $X = X^i\partial_i$ et $Y = Y^j\partial_j$ deux vecteurs de σ formant une base orthonormale. Alors,

$$K_x(\sigma) = R_{ijkl}X^iY^jY^kX^l.$$

Définition 2.4.3 *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n. On dit que M est une variété à courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan σ de T_xM,*

$$K_x(\sigma) = k.$$

Exemples 2.4.1

1. *La sphère $\mathbb{S}^2$*

   La sphère $\mathbb{S}^2$ étant plongée dans $\mathbb{R}^3$ elle hérite d'une métrique riemannienne dont l'écriture en coordonnées sphériques est :

$$g = \sin^2\varphi\, d\theta \otimes d\theta + d\varphi \otimes d\varphi.$$

   La matrice de g s'écrit donc :

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Pour adapter les calculs aux formules dont on dispose on posera $x_1 = \theta$ et $x_2 = \varphi$. Les champs $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ seront respectivement $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial}{\partial\varphi}$. On a bien entendu $[X_1,X_2] = 0$. La formule (2.3) donne :

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Calculons maintenant la quantité $R(X_1,X_2,X_2,X_1) = g(R(X_1,X_2,X_2,X_1))$ on a :

$$\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 = \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2) = \nabla_{X_2}(-\cos\varphi\sin\varphi X_2) = -\cos(2\varphi)X_2$$

et

$$\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1 + \Gamma^2_{21}X_2) = \nabla_{X_1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}X_1\right) = -(\cos\varphi)^2 X_2.$$

Finalement :

$$R(X_1, X_2)X_1 = \nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 - \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1 = \sin^2\varphi X_2$$

et donc $(X_1, X_2, X_2, X_1) = \sin^2\varphi$. *La formule donnant la courbure sectionnelle par rapport à la base* (X_1, X_2) *est :*

$$K_x(\sigma) = \frac{g(R(X_1, X_2)X_2, X_1)}{g(X_1, X_1)g(X_2, X_2) - g(X_1, X_2)^2} = \frac{R(X_1, X_2, X_2, X_1)}{|X_1 \wedge X_2|^2}$$

Comme $g(X_1, X_1) = \sin^2\varphi$, $g(X_2, X_2) = 1$ *et* X_1 *et* X_2 *orthogonaux on obtient* $K_x(\sigma) = 1$.
La sphère $\mathbb{S}^2$ *munie de sa métrique standard (celle induite par la métrique euclidienne de* $\mathbb{R}^3$*) est une variété riemannienne compacte orientable simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* 1.

2. *Le demi-espace* $\mathbb{H}^2$
On rappelle que $\mathbb{H}^2$ *est le demi-espace* $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 > 0\}$ *muni de la métrique riemannienne :*

$$g = \frac{dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2}{x_2^2}$$

dont la matrice associée est $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2^2} \end{pmatrix}$. *On calcule les symboles de Christoffel de la même manière que précédemment*

$$(\Gamma^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_2} \\ -\frac{1}{x_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad (\Gamma^2_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} \end{pmatrix}$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1 &= \nabla_{X_2}(\Gamma^1_{11}X_1+\Gamma^2_{11}X_2)\\
&= \nabla_{X_2}(\frac{1}{x_2}X_2)\\
&= \frac{1}{x_2}\nabla_{X_2}X_2-\frac{1}{x_2^2}X_2\\
&= \frac{1}{x_2}(\Gamma^1_{22}X_1+\Gamma^2_{22}X_2)-\frac{1}{x_2^2}X_2\\
&= -\frac{2}{x_2^2}X_2\\
&= \nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1=\nabla_{X_1}(\Gamma^1_{21}X_1+\Gamma^2_{21}X_2)\\
&= \nabla_{X_1}\left(-\frac{1}{x_2}X_1\right)\\
&= -\frac{1}{x_2^2}X_2
\end{aligned}$$

D'ou

$$R(X_1,X_2)X_1=\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}X_1-\nabla_{X_1}\nabla_{X_2}X_1=-\frac{1}{x_2^2}X_2$$

et par suite :

$$\begin{aligned}
(X_1,X_2,X_1,X_2) &= \langle R(X_1,X_2)X_1,X_2\rangle\\
&= \langle -\frac{1}{x_2^2}X_2,X_2\rangle\\
&= -\frac{1}{x_2^2}\langle X_2,X_2\rangle\\
&= -\frac{1}{x_2^4}
\end{aligned}$$

La courbure sectionnelle est nalement :

$$K(X_1,X_2)=\frac{(X_1,X_2,X_1,X_2)}{\|X_1\|^2\|X_2\|^2-\langle X_1,X_2\rangle^2}=-1$$

car $\|X_1\|^2\|X_2\|^2 = \left(\frac{1}{x_2^2}\right)\left(\frac{1}{x_2^2}\right)$ *et* $\langle X_1, X_2\rangle = 0$ *(les vecteurs* X_1 *et* X_2 *étant orthogonaux).*

Le demi-plan $\left(\mathbb{H}^2, \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}\right)$ *est une variété riemannienne orientable et simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à* -1.

Les variétés $\mathbb{R}^2$ *,*$\mathbb{S}^2$ *et* $\mathbb{H}^2$ *seront supposées munies respectivement des métriques que l'on vient de considérer.*

Théorème 2.4.1 *(Kobayashi) Soit* (M, g) *une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle* K *constante. Alors si :*

- $K = 0$, M *est isométrique à* $\mathbb{R}^n$ *(cas parabolique) ;*
- $K = 1$, M *est isométrique à* $\mathbb{S}^n$ *(cas elliptique) ;*
- *K=-1,* M *est isométrique à* $\mathbb{H}^n$ *(cas hyperbolique).*

Définition 2.4.4 *La courbure de Ricci ou tenseur de Ricci d'une variété riemannienne* (M, g) *est le* $(2, 0)$*-tenseur*

$$Ric(X, Y) = tr(Z \to R(Z, X)Y),$$

où tr désigne la trace de l'application linéaire $Z \to R(Z, X)Y)$.

Notons que le tenseur de Ricci est symétrique, pour tous les $X, Y \in \Gamma(TM)$*, nous avons*

$$Ric(X, Y) = Ric(Y, X).$$

Par définition, les composantes du tenseur de Ricci sont obtenues en contractant l'espace tangent avec le premier exemplaire d'espace cotangent.

$$Ric_{jk} = tr(\partial_i \to R(\partial_i, \partial_j)\partial_k) = \sum_i g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_i) = \sum_i g(R^l_{ijk}\partial_l, \partial_i) = g_{li}R^l_{ijk} = R_{ijki}.$$

Définition 2.4.5 *Une variété riemannienne* (M, g) *est une variété d'Einstein s'il existe une constante* λ *telle que pour tout* $x \in M$ *et tous* $X, Y \in T_xM$ *on ait*

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y).$$

Définition 2.4.6 *On appelle courbure scalaire d'une variété riemannienne (M, g) la fonction définie sur M par*

$$s = tr_g(r) = \sum_i g(Ric(\partial_i), \partial_i).$$

En coordonnés locales

$$s = \sum_i g(Ric_i^k \partial_k, \partial_i) = g_{ki} Ric_i^k = Ric_{ii} = R_{jiij}.$$

2.5 Géodésiques

Soit γ une courbe dans M paramétrée par un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 2.5.1 *Un champ de vecteurs le long de la courbe γ est une application X de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I dans TM, telle que $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout t dans I. On note $\mathfrak{X}(\gamma)$ l'espace des champs de vecteurs le long de γ.*

Exemples 2.5.1 *Si γ est une courbe de M de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ alors $t \to \dot{\gamma}(t)$ est un champ de classe $\mathcal{C}^k$ le long de γ.*

On peut définir une dérivation le long de n'importe quelle courbe à l'aide d'une connexion linéaire ∇ sur M par le lemme suivant :

Lemme 2.5.1 *Pour toute courbe γ, ∇ détermine un unique opérateur :*

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$$

possédant les propriétés suivantes :

$\mathbb{R}$-linéarité à droite	*$\frac{D}{dt}$ est $\mathbb{R}$-linéaire.*
Leibnitz-linéarité à droite	*Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $\frac{D}{dt}(fX) = \dot{f}X + f\frac{D}{dt}X$*

Preuve. Soit $t_0 \in I$ et (U, φ) une carte de M au voisinage de $\gamma(t_0)$. Si on note $(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$ les composantes de $\varphi^{-1} \circ \gamma$ dans $\mathbb{R}^n$ et $X(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$, on pose

$$\frac{D}{dt}X(t) = \sum_{i=1}^n \dot{X}_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \sum_{i,j,k} \dot{\gamma}_i(t) X_j(t) \Gamma_{ij}^k \circ \gamma(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \circ \gamma(t)$$

où les Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la métrique g. On montre alors que le membre de droite ne dépend pas du choix de la carte (U, φ) (et donc que $\frac{D}{dt}X(t)$ est bien défini) et qu'alors vérifie les propriétés anoncées.

Définition 2.5.2 *Soit (M, g) une variété riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
Un chemin $\gamma : I \to M$ est une géodésique de (M, g) si, et seulement si γ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation $\dfrac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0$ sur I. i.e. γ est une géodésique de (M, g) si, et seulement si pour tout $t \in I$ et pour toute carte (U, φ) de M au voisinage de $\gamma(t)$ on a

$$\ddot{\gamma}_i(s) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i(\gamma(s))\dot{\gamma}_j(s)\dot{\gamma}_k(s) = 0$$

au voisinage de t pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, où $(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) = \varphi^{-1} \circ \gamma$.

Exemples 2.5.2 *Sur $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$, on a $\Gamma_{jk}^i = 0$ pour tout (i, j, k) et donc $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est une géodésique si, et seulement si $\ddot{\gamma}_i(t) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $t \in I$. On en déduit que les géodésique de $\mathbb{R}^n$ sont les chemins $\gamma(t) = a + tb$, où a et b sont des vecteurs fixés de $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 2.5.1 *Si γ est une géodésique alors $\mid \dot{\gamma} \mid_g$ est constant. En particulier, si $\gamma : [a, b] \to M$ est une géodésique, alors $l_g(\gamma) = (b - a)\|\dot{\gamma}(a)\|_g$.*

Preuve. On a $\frac{d}{dt}\langle\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\rangle = 2\langle\frac{D}{dt}\dot{\gamma(t)}, \dot{\gamma}\rangle = 0$.

Définition 2.5.3 *On dit qu'une variété Riemannienne est géodésiquement complète si toutes les géodésiques de (M, g) sont définies sur tout $\mathbb{R}$.*

Chapitre 3

Espaces symétriques et rigidité

3.1 Espaces (globalement) symétriques

Définition 3.1.1 *Un espace (globalement) symétrique (riemannien) est une variété riemannienne connexe M telle que pour tout $x \in M$, il existe une isométrie s_x de M fixant x telle que $T_x s_x = -id_{T_x M}$.*
Notons $Isom(M)$ le groupe des isométries de M, muni de la topologie compacte-ouverte. Notons de plus $G = Isom_0(M)$ la composante neutre de $Isom(M)$, et $K = K_{x_0}$ le stabilisateur dans G d'un point fixé x_0 de M.

Exemples 3.1.1 *Les sphères $\mathbb{S}^n$, les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ et les espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ sont des espaces symétriques, ainsi que leurs produits riemanniens.*

Proposition 3.1.1 *Si M est un espace symétrique, il existe une unique structure de groupe de Lie sur $Isom(M)$ compatible avec la topologie compacte ouverte (voir [[21], Lemma 3.2, p. 205])*

Proposition 3.1.2 *Soit M un espace symétrique, et fixons un point p_0 de M. Posons $G = Isom_0(M)$, $K = \{g \in G, g.p_0 = p_0\}$ le fixateur du point p_0 et $\sigma : G \to G$ le morphisme $g \mapsto s_{p_0} g s_{p_0}$. Alors G est un groupe de Lie connexe, σ est une involution de G et K est un sous-groupe compact de G tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. De plus, l'application suivante est un difféomorphisme :*

$$\begin{array}{rcl} G/K & \to & M \\ gK & \mapsto & g.p_0. \end{array}$$

En particulier, l'action de G sur M est transitive. (Voir [[21]78, Theorem 3.3, p. 208].)

Proposition 3.1.3 *Soient G un groupe de Lie connexe, σ une involution de G et K un sous-groupe compact de G tel que $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$. Alors pour toute structure riemannienne G-invariante sur G/K (et il en existe), G/K est un espace symétrique (Voir [[21], Proposition 3.4, p. 209].)*

Exemples 3.1.2 *Ces propositions sont illustrées par les exemples des sphères $\mathbb{S}^n = SO(n+1,\mathbb{R})/SO(n,\mathbb{R})$, des espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = SO_0(n,1)/SO(n,\mathbb{R})$ et des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n = Isom_+(\mathbb{R}^n)/SO(n)$.*

3.2 Décomposition de Cartan

Soient M un espace symétrique, $G = Isom_0(M)$, $x_0 \in M$, $K = Stab_G(x_0)$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G.
Pour tout $x \in M$, Si s_x est la symétrie géodésique en x, l'application $\sigma_x : G \to G$ définie par $g \mapsto s_x \circ g \circ s_x$ est un automorphisme involutif du groupe de Lie G. Donc $\theta_x = T_e\sigma_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelé l'involution de Cartan de M (relativement à x).
Notons $\sigma = \sigma_{x_0}$, et pour tout automorphisme de groupes α de G, notons $G^\alpha = \{g \in G \ : \ \alpha(g) = g\}$ le sous-groupe fixe de α et G^α_0 la composante neutre de G^α. Ce sont des sous-groupes fermés, donc des sous-groupes de Lie plongés de G.

Définition 3.2.1 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et $ad : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ la représentation adjointe. On rappelle que pour tous vecteurs X, Y, Z de $\mathfrak{g}$, nous avons*

$$B(X, ad\,Y(Z)) = B(Y, ad\,Z(X)) = B(Z, ad\,X(Y)).$$

Et, pour tout automorphisme θ de $\mathfrak{g}$, et pour tous vecteurs X, $Y \in \mathfrak{g}$, nous avons

$$B(\theta(X), \theta(Y)) = B(X, Y).$$

On appelle décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ toute décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe vectorielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ un sous-espace vectoriel *de $\mathfrak{g}$ tels que, si l'on note θ l'involution de Cartan :*

$$\begin{array}{rcl} \theta\,:\ \mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p} & \to & \mathfrak{g} \\ X+Y & \mapsto & X-Y \end{array}$$

alors θ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ et la forme bilinéaire $B_\theta(X,Y) = -B(X,\theta(Y))$ est définie positive sur $\mathfrak{g}$. De plus, pour tous vecteurs X,Y,Z de $\mathfrak{g}$, nous avons

$$B_\theta(X, ad\,Y(Z)) = B_\theta(Y, ad\,Z(X)) = B_\theta(Z, ad\,X(Y))$$

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3.2.1 *Une décomposition en somme directe vectorielle $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan si et seulement si :*

- *on a les inclusions : $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}, [\mathfrak{h},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$ et $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{h}$,*
- *la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est définie négative sur $\mathfrak{h}$, et définie positive sur $\mathfrak{p}$*

Théorème 3.2.1 *Toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ admet une décomposition de Cartan. De plus, les décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées entre elles : si $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}'\oplus\mathfrak{p}'$ sont deux décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}$, il existe un élément $g\in G$ tel que $Ad\,g(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}'$ et $Ad\,g(\mathfrak{p})=\mathfrak{p}'$ (voir [[1], Theorem 7.1, p. 182]).*

Remarque 3.2.1 *Si $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan, alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{p}$ sont en somme directe orhtogonale pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.*

Exemples 3.2.1 *Soient $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie des matrices réelles nn de trace nulle, $\mathfrak{h}=\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ des matrices antisymétriques et $\mathfrak{p}$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ des matrices symétriques (de trace nulle). Alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$, et l'involution de Cartan associée est $\theta:\ Y\mapsto -{}^tY$. La forme de Killing $B(X,Y)=2ntr(XY)$ est bien symétrique définie positive sur $\mathfrak{p}$, et définie négative sur $\mathfrak{h}$.*
Si G est un groupe de Lie, nous noterons Lie(G) son algèbre de Lie et exp : $Lie(G)\to G$ son application exponentielle.

3.3 Décomposition de De Rham

Soit M une variété riemannienne. Pour $x \in M$, notons $Hol_M(x)$ le groupe d'holonomie en x, i.e, le groupe d'isométries de T_xM obtenues par transport parallèle le long de lacets basés en x. Nous notons $Hol_M^0(x)$ le groupe d'holonomie restreinte, i.e., en considérant seulement des lacets homotopes à 0.

Définition 3.3.1 *Une variété riemannienne est dite irréductible si elle est non vide et non réduite à un point, et n'est pas isométrique à un produit riemannien de deux variétés riemanniennnes non réduites à un point.*

Proposition 3.3.1 [25]. *Soit M une variété riemannienne compacte. Alors son revêtement universel s'écrit comme un produit riemannien maximal, unique à transposition de facteurs prés, $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \times \cdots \times \tilde{M}_k \times \mathbb{R}^n$.*

La décomposition ainsi définie de $T\tilde{M}$ est caractérisée par le fait d'être la décomposition maximale en sous-fibrés parallèles.
Soit $x \in M$ et $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_k, \tilde{y})$ un relèvement dans $\tilde{M}$. Alors le groupe d'holonomie restreinte $Hol_M^0(x)$ s'identifie au produit direct : $Hol_{\tilde{M}_1}(\tilde{x}_1) \times \cdots \times Hol_{\tilde{M}_k}(\tilde{x}_k)$. De plus chaque groupe $Hol_{\tilde{M}_i}(\tilde{x}_i)$ est compact et agit irréductiblement sur $T_{\tilde{x}_i}\tilde{M}_i$.
La décomposition de de Rham détermine des feuilletages parallèles de M.
Les groupes d'holonomies restreintes feuilletage défini par le facteur euclidien). Les groupes d'holonomies restreintes feuilletés en x seront notés : $Hol_1^0(x), \cdots, Hol_k^0(x)$. On a donc $Hol_M^0(x) = Hol_1^0(x) \times \times \times Hol_k^0(x)$.

Théorème 3.3.1 *Soit (M, g) une variété riemannienne complète simplement connexe non vide. Alors il existe $k, l \in \mathbb{N}$ et $M_1, \cdots, M_l$ des variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, irréductibles, non isométriques à $\mathbb{R}$ telles que M soit isométrique au produit riemannien $\mathbb{R}^k \times M_1 \times \cdots \times M_l$.*
De plus, le couple (k, l) est unique, et les $M_1, \cdots, M_l$ sont uniques à isométries et permutations près. En particulier, il existe un groupe fini F et une suite exacte de groupes

$$1 \to Isom(\mathbb{R}^k) \times Isom(M_l) \times \cdots \times Isom(M_l) \to Isom(M) \to F \to 1.$$

Les variétés riemanniennes $\mathbb{R}^k, M_1, \cdots, M_l$ sont appelées les facteurs de de Rham de M, et sont bien définies à isométries et permutations près. Le facteur $\mathbb{R}^k$ est appelé le facteur euclidien de M. De plus, nous avons par restriction un isomorphisme de groupes

$$Isom_0(\mathbb{R}^k) \times Isom_0(M_1) \times \cdots \times Isom_0(M_l) \simeq Isom_0(M).$$

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la dimension de M. Si M est irréductible, le résultat est immédiat, avec $(k, l) = (1, 0)$ si M est isométrique à $\mathbb{R}$ et $(k, l) = (0, 1)$ sinon. Si M n'est pas irreductible, c'est-a-dire si M est isometrique à un produit riemannien non trivial $M' \times M''$, alors une décomposition de de Rham de M est obtenue en prenant une décomposition de de Rham de M' et de M'' et en regroupant leurs facteurs euclidiens. L'unicite, qui est la partie délicate de ce résultat, vient du fait que le groupe d'holonomie d'un produit riemannien est le produit des groupes d'holonomie des facteurs, et que ce facteur est irréductible si et seulement si son groupe d'holonomie ne préserve pas de sous-espace vectoriel de dimension et de codimension non nulle. □

3.4 Espaces localement symétriques

Définition 3.4.1 *Un espace localement symétrique est une variété riemannienne M telle que pour tout $x \in M$, il existe une symétrie locale en x qui est une isométrie. Nous renvoyons par exemple à [[21], chap.IV ;§1, §5] pour une démonstration des deux résultats suivants, qui donnent des caractérisations locales des espaces symétriques.*

Théorème 3.4.1 *Soit M une variété riemannienne. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est localement symétrique ;*

(ii) *le tenseur de courbure R de M est parallèle :*

$$\nabla R = 0$$

Théorème 3.4.2 *Une variété riemannienne complète simplement connexe localement symétrique est globalement symétrique.*

En particulier, un revêtement riemannien universel d'une variété riemannienne complète connexe localement symétrique est globalement symétrique.

3.5 Espaces symétriques de type non compact

Soient M un espace symétrique, $G = Isom_0(M)$, $x_0 \in M$, $K = Stab_g(x_0)$, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ relativement à x_0, et $B = B_g$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Identifions toujours $\mathfrak{p}$ avec $T_{x_0}M$ par $T_e\varphi_{x_0}$ où $\varphi_{x_0} : g \to gx_0$ est l'application orbitale en x_0.
Rappelons qu'un sous-groupe G du groupe linéaire $GL(V)$ d'un espace vectoriel V est irréductible (ou agit irréductiblement sur V) si les seuls sous-espaces vectoriels de V préservés par G sont $\{0\}$ et V.

Définition 3.5.1 *Un espace symétrique M est dit de type non compact si sa courbure sectionnelle est partout négative ou nulle, et si le revêtement universel $\widetilde{M}$ de M n'admet pas de facteur de De Rham euclidien (i.e. $\widetilde{M}$ n'est pas le produit riemannien d'une variété riemannienne M' et d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, avec $n \geqslant 1$).*

Exemples 3.5.1 *Les espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ sont des espaces symétriques de type non compact car de courbure constante strictement négative, le produit riemannien de deux espaces symétriques de type non compact est encore de type non compact.*

On dit qu'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est sans facteur compact si $\mathfrak{g}$ n'admet pas d'idéal compact (i.e. un idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tel que la forme de Killing $B_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ soit définie négative) autre que $\{0\}$. On dit qu'un groupe de Lie semi-simple G est sans facteur compact si son algèbre de Lie est sans facteur compact.

Proposition 3.5.1 *Si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont deux algèbres de Lie sans facteur compact, alors la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ est sans facteur compact.*

Preuve. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal compact de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, alors $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ est un idéal compact de $\mathfrak{g}_1$, donc $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$. Or $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1$ donc $\mathfrak{h}$ commute avec $\mathfrak{g}_1$. De même, $\mathfrak{h}$ commute avec $\mathfrak{g}_2$. Ainsi, $\mathfrak{h}$ est un idéal abélien de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, nous avons $\mathfrak{h} = \{0\}$.

3.6 Quelques théorèmes de rigidité

3.6.1 Théorème de l'orbite ouverte de Gromov

La présence d'une structure géométrique sur une variété différrentiable M induit une partition de la variété en classes d'équivalence : deux points se trouvent dans la même classe d'équivalence s'ils sont reliés par un difféomorphisme local qui préserve la structure géométrique.

À l'instar du cadre riemannien, il convient d'appeler isométrie locale un difféomorphisme local qui préserve la structure géométrique. Les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont alors les classes de la partition donnée par la relation d'équivalence précédente.

Dans [26] Gromov montre que cette partition est trés régulière pour les structures géométriques rigides, qui se caractérisent par le fait que le pseudo-groupe des isométries locales est un pseudo-groupe de Lie de dimension finie. Par exemple, les métrique pseudo-riemanniennes, les connexions affines ou encore les structures conformes pseudo-riemanniennes en dimension supérieure ou égalle à trois sont des structures géométriques en rigides.

Dans ce cas, il existe un ouvert dense de M dans lequel les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont des sous-variétés fermées. En particulier, si une telle orbite est dense, alors celle-ci est ouverte et, par conséquent, la structure géométrique en question est localement homogène sur un ouvert dense de M (i.e. le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur un ouvert dense).

Le résultat précédent est connu dans la littérature sous le nom du théorème de l'orbite ouverte et a été commmenté et appliqué par de nombreux auteurs [17], [10], [5], [42], [4]. Il a été utilisé de manière essentielle pour la classification des structures qui mélangent la géométrie et la dynamique, comme les flots d'Anosov de contact [4], dans l'étude des actions de "gros groupes" (par exemple, les réseaux des groupes demi-simples) ou encore dans l'étude des variétés lorentziennes compactes dont le groupe d'isométries est non compact. Dans tous ces cas, on montre à un moment de la preuve qu'une certaine structure géométrique riigide, localement homogène sur un ouvert dense (d'aprés le théorème de l'orbite ouverte), l'est en fait sur toute la variété grâce à la dynamique d'un groupe d'isométries.

Une motivation importante a été pour nous la question naturelle posée dans [10] :

Question.3.7.1

Soit M une variété compacte connexe munie d'une structure géométrique rigide ϕ, localement homogène sur un ouvert dense.
Sous quelles conditiond ϕ est-elle localement homogène sur M ?
Remarquons que l'homogénéité locale de ϕ sur un ouvert dense implique que tout invariant différentiel scalaire de ϕ est constant sur M.
Dans le cas où ϕ est une métrique lorentzienne ou riemannienne sur une surface ceci est suffisant pour conclure. En effet, en dimension deux la courbure sectionnelle est un invariant scalaire qui est constant si et seulemmentt si la métrique est localement homogène [23]. Pour ce qui du cadre riemannien, où (grâce à la compacité du groupe orthogonal) les invariants scalaires suffisent pour séparer les orbites du pseudo-groupe des isométries locales (Voir [16] pour une version effective de cette propriété). ceci est également suffisant.
La quetion 3.7.1 est donc réglée pour les variétés riemanniennes, mais ouverte et intéressante pour les variétés pseudo-riemanniennes de dimension supérieure ou égale à trois. En effet, pour une métrique pseudo-riemannienne les invariants scalaire ne suffisent pas pour tester l'homogénéité locale [24]. Notamment, il existe des métriques lorentziennes de dimension trois, non localement homogènes, dont tous les invariants scalaires sont nuls.
Dans [35] nous avons pu obtenir un résultat qui règle positivement la question 3.7.1 dans le cas des variétés lorentziennes analytiques réelles de dimension trois. Ceci sera détaillé un peu plus loin. La question 3.7.1 reste pourtant ouverte pour les métriques lorentziennes de dimension trois lisses (indéfiniment dérivables), ainsi que pour d'autres structures géométriques (par exemple, des structures conformes pseudo-riemanniennes et même conformes riemanniennes).
Une autre version de ce problème est l'étude de la question 3.7.1 en présence d'un groupe d'isométries et formule la conjecture vague suivante qui se dégage de [26],[34] et qui est explicitement posée dans [10] :

CONJECTURE.3.7.2 (Gromov, Zimmer).

- Il est possible de classifier les variétés compactes M munies d'une structures géométrique rigide ϕ admettant un groupe d'isométries important (par exemple, agissant non proprement).

Dans ce sens Zeghib démontre dans [3] que les variétés lorentziennes compactes de dimension trois admettant une action isométrique non propre de $\mathbb{R}$ sont nécessairement localement homogènes et il classifie tous les exemples. Ce résultat est à rapprocher de

celui de Ghys qui classifie les flots d'Anosov en dimension trois dont les feulletages stables et instables sont lisses [13]. En effet, dans [13] Ghys construit une structure géométrique rigide préservée par le flot d'Anosov et montre qu'elle est localement homogène, avant de classifier tous les exemples. Cette méthode a été développée dans [4].
Un résultat célèbre qui supporte la conjecture 3.7.2 est le théorème de Ferrand-Obata [22],[30] qui affirme qu'une variété riemannienne compacte, dont le groupe des isométries conformes est non compact, est conformément équivalente à la sphère standard. Il convient de mentionner ici le résultat principal de [8], où Frances donne une preuve unifiée du théorème de Ferrand-Obata et d'un résultat similaire de Schoen [33] sur les structures CR.
Un cas plus précis de la conjecture 3.7.2 est la recherche d'un théorème du type Ferrand-Obata dans le cas conforme pseudo-riemannien :
CONJECTURE.3.7.3 (Lichnerowicz).

i) Soit M une variété compacte munie d'une structure pseudo-riemannienne coforme ϕ admettant un groupe d'isométries essentiel (i.e. qui ne préserve aucune métrique pseudo-riemannienne dans la classe conforme). Alors ϕ est conformément Plate.

ii) Soit M une variété compacte munie d'une connexion projective ϕ admettant un groupe d'isométries essentiel (i.e.qui ne préserve aucun connexion affine représentant la connexion projective). Alors ϕ est projectivement plate.
Mentionnons que si le point ii) de la conjecture précédente a été ré glé récemment par Matveev, dans le contexte des connéxions projectives associées à des métriques riemanniennes [39], il reste ouvert en général.

3.6.2 Variétés localement modelées sur des espaces homogènes

L'idée générale pour mener à bien le programme de la conjecture 3.7.2 est la suivante. On montre d'abord que ϕ est localement homogène, localement modelée sur une géométrie de Klein G/H. Nous sommes alors dans la situation décrite par la définition suivante.

Définition 3.6.1 *La variété M est localement modelée sur la géométrie G/H, au sens d'Ehresmann-Thurston [7],[41], ou encore admet une $(G, G/H)-$géométrie, s'il existe un atlas de M à valeurs dans des ouverts de G/H tel que les applications de changement de* *carte soient données par des éléments du groupe G.*

Si M est compacte, nous dirons aussi que la géométrie G/H admet une réalisation compacte sur M.
De plus, la structure géométrique ϕ sur M proviendra d'une structure géométrique du même type, $G-$invariante, sur G/H. Par exemple, si ϕ est une métrique pseudo-riemannienne, elle sera localement modelée sur une métrique pseudo-riemannienne $G-$invariante sur G/H. On peut tenter de classifier toutes ces géométries G/H, ainsi que leurs réalisations compactes.
Rappelons que Thurston a donné cette classification pour le cas où G/H est de dimension trois et G préserve une métrique riemannienne sur G/H(voir [38], [41], [31]).
Dans la suite nous présenterons, en particulier,l'article [12] dans lequel, dans un travail en collaboration avec Zeghib, il réalise ce programme dans le cas où G/H est de dimension trois et l'action canoniquede G sur G/H préserve une métrique lorentzienne. Ceci nous permet de classifier les variétés lorentziennes localement homogènes compactes de dimension trois (sans faire d'hypothèse sur le groupe des isométries).

3.6.3 Géométrie Lorentzienne de dimension trois

Nous résumons cette section les résultats que nous avons obtenus dans [12] et [35] pour les métriques lorentziennes en dimention trois. **Extension de l'ouvert dense**
Le théorème suivant est le résultat principal de [35]. Il doit être vu comme un approfondissement du théorème de l'orbite ouverte de Gromov dans le cas particulier des variétés lorentziennes analytiques réelles de dimension 3.

Théorème 3.6.1 *Soit (M, G) une variété lorentzienne analytique réelle de dimension 3 compacte et connexe. Si le pseudo-groupe des isométries locales de g admet une orbite ouverte non vide dans M, alors celle-ci est égale à M.*

Dans le cadre analytique le théorème de l'orbite ouverte est précisé dans [10],[26] sous la forme suivante : en dehors d'un ensemble analytique compact (éventuellement vide), les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont les fibres d'une fibration analytique de rang constant. Avec ce théorème, notre hypothèse d'existense d'une orbite ouverte pour le pseudo-groupe des isométries locales est donc équivalente à l'existence d'une orbite

ouverte et dense.
Nous pouvons alors énoncer le théorème 3.7.1 sous la forme équivalente suivante :

Corollaire 3.6.1 *Si le pseudo-groupe des isométries locales admet une orbite dont l'adhérence est d'intérieur non vide, alors celle-ci est égale à M (la métrique g est localement homogène).*

Rappelons que nos hypothèses impliquent automatiquement que tout invariant scalaire de la métrique lorentzienne (par exemple, les fonctions symétriques des courbures principales) est constant. En effet, un te invariant doit être une fonction analytique constante sur un ouvert de M et donc partout. En particulier, les 3 courbures principales de g (définies comme les valeurs propres de la courbure de Ricci par rapport à la métrique lorentzienne) sont constantes sur M.
Il convient de remarquer qu'en dimension 3 la courbure ne se résume pas à un scalaire (c'est un tenseur) et la courbure sectionnelle est une fonction méromorphe (en général non constante) définie sur la 2-grassmannienne.
Cette fonction admet, en général, des pôle situés en dehors de l'ouvert formé par les plans non-dégénérés.
Notre preuve utilise l'analyticité de manière essentielle et notamment la propriété suivante de prolongement d'isométries locales : tout point m de M possède un voisinage ouvert U_m tel que toute isométrie locale proche de l'identité définie sur un ouvert connexe U contenu dans U_m se prolonge à U_m. Ce phénomène a été découvert pour la première fois par Nomizu [25] dans le cadre des métriques riemanniennes analytiques et étendu par la suite par Amores [1] et Gromov [26] aux structures rigides analytiques.
L'argument précédent combiné avec le principe de monodromie permet de voir que sur les variétés analytiques compactes et simplement connexes les isométries locales proches de l'identité se prolongent en des isométries globales. C'est précisément cette technique qui est utilisée dans [17] pour montrer que le groupe des isométries d'une variété lorentzienne analytique compacte et simplement connexe est nécessairement compact.
Avec cette remarque le théorème 3.7.1 est naturellement complété par le

Corollaire 3.6.2 *Si de plus M est simplement connexe, alors $(M.g)$ est la phère S^3 munie d'une métrique lorentzienne invariante par l'action par translations du groupe de Lie S^3 sur lui-même.*

La justification du corollaire est la suivante : le pseudo-groupe des isométries locales proches de l'identité agit transitivement sur M [42], ce qui implique qu'il existe un groupe (de Lie) connexe G d'isométries (globalement définies) qui agit transitivement sur M. Il vient que M s'identifie au quotient de ce groupe par le stabilisateur d'un point. D'après le résultat de [17], G est compact et donc M est un quotient de deux groupes de Lie compacts. Le stabilisateur d'un point s'identifie alors à un sous-groupe compact du groupe linéaire $O(2,1)$: il s'agit nécessairement de l'identité ou d'un sous-groupe à un paramètre compact (elliptique).

Dans le premier cas M s'identifie avec l'unique groupe compact connexe et simplement connexe de dimension 3, qui est la sphère S^3 et la métrique lorentzienne g est invariante par l'action de S^3 sur li même. La métrique lorentzienne s'obtient à partir d'une forme quadratique de signature $(2,1)$ sur l'algèbre de Lie se S^3 et qui est transportée par les translations de S^3 sur lui-même.

Dans le deuxième cas M est le quotient d'un groupe de Lie G compact connexe de dimesion 4 par un sous-groupe isomorphe à S^1. Il n'existe que deux possibilités pour G : ou bien $S^3 \times S^1$, ou bien $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$. Le tore $S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ ne possède aucun quotient simplement connexe non trivial. Il vient que G est isomorphe à $S^3 \times S^1$ et que M est un quotient de $S^3 \times S^1$ par un sous-groupe à un paramètre compact. Comme M est supposée simplement connexe, il vient que la projection du stabilisateur d'un point de M dans $S^3 \times S^1$ est surjective sur le facteur S^1 et donc le premier facteur à S^3 agit simplement transitivement sur M.

Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Question.3.7.4 :

i) Le théorème 3.7.1 reste-t-il valide pour des métriques lorentziennes de dimension trois indéfiniment dérivables localement homogènes sur un ouvert dense (on pourait même supposer l'existence d'une action isométrique de $\mathbb{Z}$ avec une orbite dense) ?

ii) Qu'en est-il du cas des métriques pseudo-riemanniennes analytique en dimension plus grande ?

iii) Qu'en est-il pour les structures conformes pseudo-riemanniennes en dimension supérieure u égale à trois ?

Mentionnons que l'analogue de la question 3.7.4 dans le contexte des connexions affines (indéfiniment dérivables ou analytiques) est irrésolu même en dimension deux (quand il ne s'agit pas de la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne ou lorentzienne).

3.6.4 Variétés lorentziennes localement homogènes

Soit G un groûpe de Lie réel et G/H, où H est un sous-groupe ferméde G, un espace homogène supposé simplement connexe.
On dit que G/H est lorentzien et que $(G, G/H)$ est une géométrie lorentzienne (au senss de Klein) si l'action canonique de G sur G/H préserve une métrique lorentzienne, ou de manière équivalente, si l'action adjointe de H préserve une forme quadratique non dégénérée de signature (m-1,1) sur le quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ des algèbres de Lie correspondantes.
Rappelons que si M est localement modelée sur G/H, tout objet géométrique (par exemple, un tenseur ou une connexion) sur G/H, invariant par l'action de G, induit un objet géométrique du même type sur M. En particulier, dans le cas d'un espace homogène lorentzien G/H, la variété M hérite d'une métrique lorentzienne localement homogène.
La géométrie lorentzienne $(G, G/H)$ est dite maximale, si l'action de G ne s'étend pas en une action fidèle d'un groupe de Lie de dimension strictement plus grand G' qui préserve une métrique lorentzienne. Deux métriques lorentziennes sur G/H dont les composantes neutres des groupes des isométries sont conjuguées dans le groupe des difféomorphismes de G/H définissent une même géométrie.
Une $(G, G/H)$-géométrie sur M donne classiquement naissance à une application développante qui est un difféomorphisme local entre un revêtement universel $\widetilde{M}$ de M et G/H et à un morphisme d'holonomie $\rho :\ \pi_1(M) \to G$ [TW, WT, PS]. L'application développante conjugue l'action du grouppe fondamental $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ à l'action du groupe d'holonomie $\Gamma = \rho(\pi_1(M))$ sur G/H.
Une $(G, G/H)$-géométrie est dite complète si son application développante est un difféomorphisme. Dans ce cas le groupe d'hlonomie Γ agit librement et proprement sur G/H. Lorsque H est compact, ceci équivaut au fait que Γ soit un réseau cocompact de G.
Lorsque G préserve une métrique lorentzienne ou riemannienne, ou plus généralement une connexion, on a aussi la notion de complétude géodésique [23]. La complétude géodésique est plus forte que la complétude au sens ci-dessus (voir lemme).
On dit qu'une $(G, G/H)$-géométrie satisfait à une rigidité de Bieberbach si, pour toute réalisation compacte complète sur une variété M. il existe un sous-groupe de Lie connexe

L de G contenant, à indice fini prés, le groupe d'holonomie Γ de M et agissant librement et transitivement sur G/H. Dans ce cas, L s'identifie à G/H et, à indice fini pés, Mest Γ. L'énoncé classique du théorème de Bieberbach correspond au cas de la géométrie euclidienne $(O(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, avec $L = \mathbb{R}^n$, le groupe des translations.
Rappelons que Thurston a classifié les huit géométries riemaniennes maximales de dimension 3 qui possèdent des réalisations compactes (voir [38, 41, 31]). Cette classificcation contient les trois géométries de courbure sectionelle constante, deux géométries produit (entre $\mathbb{R}$ et l'espace hyperbolique de dimension deux, ou bien entre $\mathbb{R}$ et la sphère de dimention deux), ainsi que trois géométries données par des métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie suivants : $SL(2,\mathbb{R})$, Heisenberg et SOL. Le groupe Heisenberg est l'unique groupe de Lie réel de dimension trois, unimodulaire, nilpotent et non abélien, tandis que SOL est l'unique groupe de Lie réel de dimension trois, unimodulaire, résoluble et non nilpotent. La structure des deux algèbres de Lie correspondates sera décrire un peu plus loin.
Une spécificité bien connue des $(G, G/H)-$géométries riemanniennes est que toute réalisation compacte d'une telle géométrie est nécessairement complète. Ce phénomène n'est pas nullement assuré (et souvent faux) pour les $(G, G/H)-$géométries générales, mais est démontré dans [12] pour les $(G, G/H)-$géométries lorentziennes de dimension 3.
Dans [12] nous nous intéressons aux géométries lorentziennes de dimension 3 qui sont non-riemanniennes, i.e. l'action de G sur G/H ne préserve pas de métrique riemannienne. C'est équivalent au fait que l'action adjointe de H soit à image non bornée dans le groupe des transformations linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.
Dans la suite on explicitera des exemples de géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales de dimension 3 qui admettent des réalisations compactes.
Avant de présenter les géométries $(G, G/H)$ qui incarnent, en dimension 3, les géométries lorentziennes de courbure sectionelle constante et qui sont la géométrie plate de Minkowski(courbure nulle), la géométrie de Sitter (courbure positive) et la géométrie anti de Sitter (courbure négative), précisions que, d'aprés un résultat dû à Carrière [43] dans le cas plat et étendu par klingler [6] au cas de courbure sectionelle constante (voir également [19, 28]), toute réalisation compacte de G/H est complète. Ce résultat de complétude est essentiel dans l'étude des géométries lorentziennes de courbure sectionelle constante.
Il implique, en particulier, que la géométrie de courbure sectionnelle constante positive

n'admet pas de réalisation compacte. En effet, d'aprés [9], seuls les groupes finis agissent proprement sur l'espace de Sitter, qui n'admet donc pas de quotient compact.

Géométtrie Minkowski. Un modèle de la géométrie Minkowski est $\mathbb{R}^3$, muni de la forme quadratique $dx^2 + dy^2 - dz^2$. Le groupe G de cette géométrie est $O(2,1)$.

Il est démontré que la géométrie Minkowski satisfait à une rigidité de Beiberbach , avec le groupe L isomorphe à $\mathbb{R}^3$, Heis ou SOL.

Par conséquent, la classification des variétés lorentziennes compactes plates coïncide avec la classification des réseaux cocompacts sans torsion dans les trois groupes précédents.

Géométtrie anti de Sitter. Un modèle de cette géométrie est le revêtement universel $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, muni de la métrique lorentzienne invariante par translations à gauche qui coïncide en identité avec forme de Killing q sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Comme la forme de Killing q est invariante par la représentation adjointe, le groupe des isométries de la géométrie anti de Sitter contient également les translations à droite. La composante neutre du groupe des isométrie de la géométrie anti de Sitter est (modulo quotient par le noyau de l'action qui est fini, de cardinal quatre) $G = \widetilde{SL(2,\mathbb{R})} \times \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, avec isotropie H isomorphe à $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ et plongée diagonalement dans G.

Comme le groupe $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ agit librement transitivement sur G/H, il suffit de considérer le quotient à gauche de $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ par un réseau cocompact Γ de $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, pour construire ainsi des variétés compactes $M = \Gamma \backslash \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ localement modelées sur la géométrie anti de Sitter.

La rigidité de Bieberbach, valable dans le cas plat, n'est plus valide pour la géométrie anti de Sitter [40, 15].

Géométtrie Lorentz-Heisenberg Il s'agit de la géométrie d'une certaine métrique lorentzienne invariante par translations à gauche sur le groupe de Heisenberg Heis. Désignons par heis l'algèbre de Lie de Heis et rappelons que heis est engendrée par un élément central X et par deux autres éléments Z et T tels que $[Z,T] = X$.

Proposition 3.6.1 *Modulo automorphisme et à constante multiplicative prés, il existe sur Heis une seule métrique lorentzienne invariante à gauche et affectant une longueur positive au centre de heis. Cette métrique définit une géométrie lorentzienne non-riemannienne maximale, dont la composante neutre du groupe des isométries est de dimension quatre,* *isomorphe à un produit semi-directe $\mathbb{R} \ltimes Heis$ et dont l'isotropie est semi-simple (i.e. agit sur l'espace tangent au point base comme un groupe à un paramètre diagonalisable). Cette géométrie sera appelée Lorentz-Heisenberg.*

Il suffit de considérer un quotient (à gauche) de Heis par un réseau cocompact Γ, pour se convaincre qque la géométrie Lorentz-Heisenberg se réalise bien sur des variétés compactes.

Géométtrie Lorentz-SOL C'est une géométrie obtenue à partir d'une métrique lorentzienne invariante à gauche sur SOL. Rappelons que l'algèbre de Lie correspondante sol est engendrée par X,Z,T, avec seuls crochets non nuls $[T, X] = X$ et $[T, Z] = -Z$. L'algèbre dérivéeest donc $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}Z$. Considérons sur SOL la métrique lorentzienne invariante à gauche g définie en identité par : X et T sont isotropes, Z est orthogonal à $\mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}T$, et g(X,T)=g(Z,Z)=1.

Proposition 3.6.2 *À automorphisme prés, g est l'unique métrique lorentzienne invariante à gauche sur SOL, qui rend l'algèbre dérivée dégénérée et telle que l'une des deux directions propres de ad(T) est isotrope. La composante neutre du groupe des isométries de g est de dimension quatre : il s'agit d'une extension non triviale de Heis (ici, Heis n'agit pas transitivement) et l'isotropie est non compacte (unipotente). Cettemétrique définit une géométrie lorentzienne maximale et non-riemannienne qu'on désignera par Lorentz-SOL.*

Le théorème suivant est le résultat principal de [12]. Il montre, en particulier, que les quatre exemples précédentes constituent les seules géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales qui se réalisent sur des variétés compactes de dimension 3 :

Théorème 3.6.2 *Soit M une variété lorentzienne compacte connexe de dimension 3 localement modelée sur une géométrie lorentzienne non-riemannienne $(G, G/H)$.*

- *(i) La géométrie G/H est alors isométrique à une métrique lorentzienne invariante à gauche sur l'un des quatre groupes suivants : $\mathbb{R}^3, \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, Heis ou SOL.*
  La classification de métriques lorentziennes invariantes à gauche est la suivante :
  - *Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, toutes les métriques invariantes par translations sont plates.*
  - *Dans le cas de $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, il y a trois géométries lorentziennes non-riemanniennes qui proviennent des métriques lorentziennes invariantes à gauche : la seule géométrie maximale est anti de Sitter, les deux autre sont données par des métriques*

lorentziennes de courbure sectionelle non constante, invariantes à gauche et également par un sous-groupe à un paramètre unipotent (respectivement semi-simple) de translations à droite.

  - *Dans le cas de Heis, il y a deux géométries lorentziennes non-riemanniennes invariantes à gauche. L'une est plate et l'autre correspond à la géométrie Lorentz-Heisenberg.*
  - *Dans le cas de SOL, il y a deux géométries lorentziennes non-riemanniennes invariantes à gauche. L'une est plate et l'autre correspond à la géométrie Lorentz-SOL.*

- *(ii) Si la géométrie lorentzienne $(G, G/H)$ est maximale, alors c'et l'une des 4 géométries suivantes : Minkowski, anti de Sitter, lorentz-Heisenberg ou Lorentz- SOL. La géométrie globale de M est la suivantes :*
- *(iii) La $(G, G/H)-$géométrie est complète.*
- *(iv) On a une rigidité de Bieberbach dans tous les cas où la géométrie maximale correspondante n'est pas anti de Sitter. Dans le cas des géométries Lorentz-Heisenberg ou Lorentz-SOL, le groupe d 'holonomie est, à indice fini prés, un réseau cocompact de Heis ou SOL, respectivement.*
- *(v) M est géodésiquement complète, sauf si elle est localement modelée sur la géométrie Lorentz-SOL.*

Précisons à présent les implications qui existent entre les différents points du théorème précédent. Un résultat essentiel qui permet de passer de la complétude géodésique à la complétude au sens des $(G, G/H)-$géométries est le lemme bien connu suivant :

Lemme 3.6.1 *Soit M une variété qui admet une $(G, G/H)-$géométrie telle que l'action de G sur G/H préserve une connexion affine ∇. Si la connexion induite sur M par ∇ est géodésiquement complète , alors la $(G, G/H)-$géométrie de M est complète.*

Ce résultat, combiné avec le théorème riemannien classique de complétude déodésique de Hopf-Rinow [23], implique que les $(G, G/H)-$géométries riemanniennes sur des variétés compactes sont automatiquement complètes.

En particulier, toute $(G, G)-$géométrie (où le groupe de Lie G agit sur lui même par ranslations) sur une variété compacte M est complète et M s'identifie au quotient de G par un réseau cocompact.

Grâce aux résultas de Carrière et Klingler [6, 43] qui affirment que les variétés lorentziennes compactes de courbure sectionnelle constante sont géodésiquement complètes, le lemme 3.7.1 fournit également la complétude des variétés compactes localement modelées sur les $(G, G/H)-$géométries pour lesquelles l'action de G préserve une métrique lorentzienne sur G/H de courbure sectionnelle constante. Le théorème de classification des géométries lorentziennes non-riemanniennes maximales (partie (ii) du théorème 3.7.2) permet alors de restreindre l'étude de la complétude aux variétés compactes localement modelées sur les géométries Lorentz-Heisenberg et Lorentz-SOL. La complétude et la rigidité de Bieberbach des réalisations compactes des géométries Lorentz-Heisenberg et Lorentz-SOL se démontre via les propositions 8.1 et 7.1 dans [12]. Finalement, on obtient le résultat de complétude de la partie (iii) du théorème principal, qui peut s'énoncer également de la manière suivante :

Corollaire 3.6.3 *Toute variété lorentzienne localement homogène compacte connexe et de dimension 3 est isométrique au quotient (à gauche) d'un espace homogène lorentzien G/H par un sous-groupe discret Γ de G agissant proprement.*

Une conséquence du théorème 3.7.2 est le résultat d'uniformisation suivvant :

Théorème 3.6.3 *Toute variété compacte connexe de dimension 3 qui possède une métrique lorentzienne localement homogène dont le groupe d'isotropie locale est non compact admet un revêtement fini qui possède une métrique lorentzienne de courbure sectionnelle constante (négative ou nulle).*

En effet, si la géométrie maximale correspondante n'est pas de courbure sectionnelle constante, celle-ci coïncide alors avec la géométrie Lorentz-Heisenberg, ou bien avec la géométrie Lorentz-SOL. Dans les deux cas, la partie (iv) du théorème 3.7.2 assure que (à revêtement fini prés) la variété M est un quotient (à gauche) de Heis ou de SOL par un réseau. Or, aussi bien Heis, que SOL, possèdent des métrique lorentziennes plates invariantes à gauche [36, 32] qui descendent bien sur M

Ainsi, les quotients compacts de la forme $\Gamma\backslash Heis$ portent deux géométries lorentziennes maximales différentes : Minkowski ett Lorentz-Heisenberg.

Ce phénomène est spécifique à la géométrie non-riemannienne : dans le contexte riemannien il y a unicité de la géométrie maximale portée par les variétés compactes de dimension trois [31].

Par ailleurs, les parties (i) et (iii) du théorème 3.7.2 permettent de ramener l'étude de

la complétude géodésique aux métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie $\mathbb{R}^3$, $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, Heis ou SOL et d'obtenir la partie (v) du théorème 3.7.2, en utilisant des résultats connus dans ce contexte.
Nous avons vu que la complétude géodésique est acquise dans le cas de courbure sectionnelle constante. La complétude géodésique de la géométrie Lorentz-Heinberg est démontrée dans la section 4 de [32], où le calcul explicite des géodésiques est présenté. plus généralement, toutes les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur Heisenberg sont géodésiquement complètes.
Le manque de complètude géodésique de la métrique Lorentz-SOL est prouvé dans [26].
Finalement le cas des métriques invariantes sur $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ est analysé dans [18] : le résultat des auteurs implique bien qu'on a complétude géodésique dés que l'isotropie n'est pas compacte(voir [12]).
Par ailleurs, les exemples de [18] et l'exemple de [26] montrens que la complétudde géodésique peut tomber en défaut pour certaines métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ ou sur SOL (dans ce dernier cas, même en présence d'un groupes d'isotropie non compact). Néanmoins notre résultat de complétude pour les réalisations compactes de $(G, G/H)-$géométries lorentziennes persiste même quand le modèle G/H lui-même n'est pas géodésiquement complet.
Nous n'allons pas donner ici la preuve du thnéorème 3.7.2 pour laquelle le lecteur devra consulter [12], mais la proposition suivantes permet de réduire le problème au cas où la dimension de G est égale à quatre.

Proposition 3.6.3 *À revêtement fini prés, toutr métrique lorentzienne localement homogène g sur une variété compacte M de dimension 3 est localement modèlée sur une unique géométrie maximale $(G, G/H)$, avec G connexe.*

i) La dimension de G est $\leqslant 6$, avec égalité si et seulement si g est de courbure sectionnelle constante.

ii) Si la dimension de G est égales à 3, alors Mest (à revêtement fini prés) un quotient $\Gamma\backslash G$, de G, par un réseau cocompact Γ. De plus, l'image réciproque de g sur G est une métrique lorentzienne invariante par translation à gauche.

iii) La dimension de G est différente de 5 et donc H n'est jamais de dimension 2.

Remarque 3.6.1 *En dimension plus grande, en général, l'existance d'un modèle G/H tombe en défaut, aussi bien dans le contexte riemannien, que dans le contexte pseudo-riemannien.*

Preuve. Désignons par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie (transitive) des champs de Killing locaux de G et par $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre formée par les champs de Killing qui s'annulent en un point donné. Un modèle local G/H existe si et seulement si le groupe H associé à la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est fermé dans l'unique groupe connexe et simplement connexe G associé à $\mathfrak{g}$. Or, d'aprés un résultat de Mostow [20], ceci est vrai dés que la codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est < 5. La codimension de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ étant ici égale à 3 (la dimension de M), le thnéorème de Mostow s'applique. La variété M est alors localement modelée sur une géométrie dont le groupe est le groupe des isométries de G/H (et pas seulement sa composante neutre G).Comme le groupe des isométries de G/H admet un nombre fini de composantes connexes, un revêtement fini de M est localement modelé sur $(G, G/H)$.

i) La dimension de $\mathfrak{g}$ est bornée supérieurement par la somme de la dimension de M et de la dimension du groupe orthogonal correspondant. En dimension 3, la dimension maximale de $\mathfrak{g}$ est donc égale à 6 et elle caractérise les métriques de courbure sectionnelle constante. En effet, dans ce cas $\mathfrak{h}$ est de dimension 3 et agit transitivement sur les 2-plans non dégénérés contenus dans l'espace tangent au point base $x_0 \in G/H$. Ceci implique, dans un premier temps, que la c ourbure sectionnelle en x_0 ne déépend que de x_0 et l'homogénéité locale permet de conclure que la courbure sectionnelle est constante sur G/H (pour les notion classiques de géométrie lorentzienne le lecteur pourra coonsulter [23]).

ii) Dans ce cas M admet une $(G, G)-$géométrie, avec G agi ssant par ranslation à gauche sur lui-même. Le revêtement universel de M s'identifie donc à G et M est isométrique au quotiont de G par un réseau cocompact.

iii) La preuve est basée essentiellement sur le fait que le sabilisateur d'une orbite d'une action linéaire algébrique de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ sur un espace vectoriel de dimension finie est un sous-groupe algébrique qui n'est jamais de dimension 2. Pour la preuve de ce fait il suffit de le constater pour les représentations irréductibles de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et de remarque que, dans le cas général, le stabilisateur dine orbite est l'intersection des sabilisateurs qui correspondent aux projections de cette orbite sur chaque représentation irréductible.

Considérens l'action de $\mathfrak{h}$ sur l'espaces tangent $T_{x_0}M$ (le groupe d'isotropie locale s'identifie alors à un sous-groupe du groupe orthogonal $O(2,1) \simeq$PSL$(2,\mathbb{R})$). Cette action préserve le tenseur courbure de Ricci en x_0, noté $Ricci_{x_0}$.
Considérons l'action du groupe orthogonal PSL$(2,\mathbb{R})$ sur l'espace vectoriel $S^2(T^*_{x_0}M)/\mathbb{R}g_{x_0}$. Le groupe d'isotropie locale est contenu dans le stabilisateur de l'élément induit par $Ricci_{x_0}$ dans l'espace vectoriel $S^2(T^*_{x_0}M)/\mathbb{R}g_{x_0}$.
Si la dimension du groupe d'isotropie est structement supérieure à 1, il vient que le le stabilisateur de la courbure de Ricci est de dimensuion 3 (on a vu que la dimension ne peut être à 2) et que ce s tabilisateur coïncide avec tout le groupe orthogonal. Ceci implique que $Ricci_{x_0} = \lambda g_{x_0}$ avec $\in \mathbb{R}$ (la fonction λ est constante sur M par homogénéité locale) et notre espaces est à courbure secionnelle constante. Le groupe d'isotropie est alors de dimension 3. On vient de prouver que le groupe d'isotropie n'est jamais de dimension 2 et que donc la dimension de G est $\neq 5$. $\square$

Conclusion

La classe la plus connue et la plus étudiée d'espaces homogènes réductifs et dans le cas riemannien, naturellement réductifs est celle des espaces symétriques. Un espace symétrique est la donnée d'un espace homogène $M = G/H$ et d'un automorphisme involutif σ de G tel que H soit compris entre le sous groupe G_σ des points fixes de G par σ et sa composante connexe passant par l'identité de G. Ceci revient à se donner, en tout point $x \in M$, un difféomorphisme involutif, appelée symétrie et notée s_x, tel que x soit un point fixe isolé. Dans ce cas, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est symétrique, c'est-à-dire s'écrit, d'aprés la décomposition réductive

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

Un espace symétrique est dit riemannien s'il est muni d'une métrique G-invariante pour laquelle les symétries s_x sont des isométries pour tout $x \in M = G/H$. En fait, dans ce cas, G correspond au plus grand groupe connexe des isométries de M et H le sous-groupe d'isotropie en un point fixé de M. Si la métrique est riemannienne, alors H est compact, Dans tous les cas, on suppose que le sous-groupe $ad(H)$ des transformations linéaires de $\mathfrak{g}$ est compact.

Si l'algèbre symétrique orthogonale est simple, la forme de Killing- Cartan K de $\mathfrak{g}$ est définie (positive ou négative) sur $\mathfrak{p}$: Elle est dite de type compact si K est définie négative sur $\mathfrak{p}$, et de type non-compact si elle est définie positive.

Bibliographie

[1] A. Amores, Vector fields of a finite type $G-$structure , J. Differential Geom., 14(1), 1979 ; 1-6.

[2] Aziz El Kacimi *Éléments de topologie algébrique et différentielle.*

[3] A. Zeghib, Killing fields in compact Lorentz 3-manifoldss, J. Differential Geom., 43, (1996), 859-894.

[4] Y. Benoist, P. Foulon, F. Labourie, Flots d'Anosov à distributions stables et instables différentiables, Jour. Amer. Math. Soc., 5, (1992), 33-74.

[5] M.Babillot, R. Feres, A. Zeghib, Rigidité, Groupe fondamentalet Dynamique, (P. Foulon Ed.), Panoramas et Synthèses, 13, (2002).

[6] B. Klingler, Complétude des variétés Lorentziennes à courbure sectionnelle constante, Math. Ann., 306, (1996), 353-370.

[7] C. Ehresmann, Sur les espaces localement homogènes, Enseignement Math., P. 317, (1936).

[8] C. Frances, Un théorème de Ferrand-Obata pour les géométries paraboliques de rang un, Ann. Sci. Ens., 40(5), (2007), 741-764.

[9] E. Calabi, L. Markus, Relativistic space forms, Ann. of Math., 75, (1962), 63-76.

[10] G. D'Ambra, M. Gromov, Lectures on transformations groupes : geometry and dynamics, Surveys in Differential Geometry (Cambridge), (1990), 19-111.

[11] Doubrovine, B., Novikov, S. et Fomenko, A. *Géométrie contemporaine.* Tome I Editions MIR, (1979).

[12] S. Dumitrescu, A. Zeghib, Géométries Lorentziennez de dimension 3 : classification et complétude, Geometriæ Dedicata, 149, (2010), 243-273.

[13] E.Ghys, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 20, (1987), 251-270.

[14] Frédéric Paulin. *Groupes et géométries*

[15] F. Salein, Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotique, Ann Inst. Grenoble, 50(1), (2000), 257-284.

[16] P. Friedbert, F. Tricerri, L. Vanhecke, Curvature invariants, differential operators and local homogeneity, Trans. Amer. Math. Soc., 348, (1996), 4643-4652.

[17] G. D'Ambra, Isometry groups of Lorentz manifolds, Invent. Math., 92, (1988), 555-565.

[18] M. Guediri, J. Lafontaine, Sur la complétude de s variétés pseudo-riemanniennes, J. Geom.Phys., 15(2), (1995), 150-158.

[19] G. Mess, Lorentz spacetimes of constant curvature, preprint IHES/M/90/28, (1990).

[20] G. Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, Ann. of Mth., 52(2), (1950), 606-636.

[21] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Grad. Stud. in Math. 34, Amer. Math. Soc. (1978).

[22] J.Ferrand, The action of conformal transformations on a riemannian manifold, Math. Ann., 304, (1996), 277-291.

[23] J. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Series in Higher Math., (1967).

[24] A.Koutras, C. McIntosh, A metric with no symmetries or invariants, Class. Quant. Grav., 13(5), (1996), 47-49.

[25] S.Kobayashi, K.Nomizu : *Foundations of differential geometry, volume1, Interscience, New York, 1963*.

[26] M. Guediri, On completeness of left-invariant Lorentz metrics on solvab Lie groups, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, 9(2), (1996), 337-350.

[27] M.Gromov, Rigid transformation groups, Géométrie Différentielle, (D. Bernard et Choquet-Bruhat Ed.), Travaux en cours, Hermann, Paris, 33, (1988), 65-141.

[28] M. Morrill, Nonexistence of compact de sitter manifolds, PHD, university of California, (1996).

[29] Mircea, C., Mircea, P., Themistocles, M.R. *Old and New Aspects in Spectral Geometry*

[30] M. Obata, The conjecture on conformal transformations on riemannian manifolds, J. Diff. Geom., 6, (1971), 247-258.

[31] P.Scott, the Geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc., 15, (1983), 401-487.

[32] N. Rahmani, S. Rahmani, Lorentzian geometry of Heisenberg group, Geom. Dedicata, 118, (2006), 133-140.

[33] R.Schoen, on the conformal and CR automorphism groups, Geom. Funct. Anal., 5(2), (1995), 464-481.

[34] R. Zimmer, Ergodic theory and semisimple groups, Birkhäuser, (1984).

[35] S.Dumitrescu, Dynamique du pseudo-groupe des isométries locales sur une variété lorentzienne analytique de dimension 3, Ergodic Th. Dyn. Systems, 28(4), (2008), 1091-1116.

[36] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension3, J. Geom. Ohys., 9, (1992), 295-302.

[37] Thomas Richez, *Etude des symétries en physique des particules*.

[38] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. of Amer. Math. Scoc., 6(3), (1982), 357-381.

[39] V. Matveev, Proof of the projective Lichnerowicz-Obata conjecture, J.Diff. Geom., 75(3), (2007), 459-502.

[40] . Goldman, Nonstanderd Lorentz space formes, J. Differential Geom., 21(2), Geom.,211 (1985), 301-308.

[41] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton University Press, (1983).

[42] Y.Benoist, Orbites des structures rigides (d'aprés M.Gromov), Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), Birkhäuser Boston, (1997), 1-17.

[43] Y. Carrière, Flots riemanniens, dans structures transverses des feuilletages, Toulouse, Astérisque, 116, (1984), 31-52.