République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Saïda

Faculté des Sciences

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Equations Différentielles

Sujet

Existence et stabilité des solutions de certaines classes d'équations différentielles hyperboliques

Présenté par

Boukhatem Brahim

Soutenue le : 22/05/2017

Jury :

Président : S. Ouakkas, à l' Université de Saïda, Algérie

Encadreur : S. Abbas, MCA à l' Université de Saïda, Algérie

Examinatrice : N. Bekkouche, à l' Université de Saïda, Algérie

Examinateur : K. Djerfi, à l' Université de Saïda, Algérie

Dédicaces

Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté ainsi que la conscience afin de terminer mes études.

Je dédie ce mémoire.

A mes très chèrs parents qui ont sacrifié leur vie pour moi.

*A tous mes proches de la famille "**Boukhatem**" et plus particulièrement, mes soeurs*

*et mes frères tout à son nom et sans oublier les familles "**kerrouche** et **kechiouche**".*

A mes amis surtout " Abdelmoumen, Bilal, Maha, Khokha et Hanaa ".

A tous mes chèrs amis et mes collègues de l'université Dr.Moulay Taher Saida promo $2^{\text{ème}}$ *année master géométrie différentielle.*

A tous mes chèrs enseignants qui ont enseigné moi.

Boukhatem Brahim

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie monsieur S. Abbas qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée de ses précieux conseils, suggestions et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de travail.

Je remercie monsieur le président et les examinateurs qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir étudier mon modeste travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chèrs parents qui ont toujours été là pour moi, " Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière ".

Je remercie mes frères, mes soeurs et toute ma famille pour leur encouragement. Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers les amis et collègues qui m'ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Mes remerciements vont enfin à toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résume

Dans ce mémoire, on a étudier un problème de Darboux. Dans le cas borné, nous pouvent utilisé des versions du théorème d'Ascoli-Arzelà mais dans notre problème des équations différentielles partielles hyperbolique fonctionnelles(le cas non borné), nous utilisons un résultat plus générale de théorème du point fixe Schauder accompagné par le théorème du Corduneanu qui assure l'existence d'un point fixe d'où l'existence des solutions. Pour les équations différentielles perturbées, on a étudier l'existence des solutions par le théorème du Burton-Kirk. Pour les deux cas de notre équation on a étudier la stabilité qui y'est vérifié par des hypothèses posées.

Mots clés : Espace de Banach, problème de Darboux, Stabilité, Les théorèmes du point fixe(Schauder, Burton-Kirk et Corduneanu).

Abstrat

In this memory, we studied a Darboux problem in the bounded case. We can use versions of the Ascoli-Arzelà theorem but in our problem of fonctional hyperbolic partial differential equation (the unbounded case), we use a more general result of Schauder's fixed point theorem accompanied by the theorem of Corduneanu which ensures the existence of a fixed point hence the existence of solutions. For the perturbed differential equations, we have studied the existence of the solutions by the Burton-Kirk theorem. For both cases of our equation we have to study the stability of the solutions which are verified by hypotheses posed.

Keywords : Banach space, Darboux problem, Stability, fixed-points theorems(Schauder, Burton-Kirk and Corduneanu)

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) expriment sous forme d'égalités, des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue u de plusieurs variables afin de d'écrire un phénomène physique, satisfaire une propriété prescrite,...etc. Quand on s'intéresse à une application donnée, on est très vite amené à faire la distinction entre les EDP stationnaires (où toutes les variables jouent un rôle équivalent) et les EDP d'évolution (où une des variables joue un rôle privilégié : le temps). On rencontre de telles équations dès qu'on s'intéresse à des questions de modèlisation : en physique, en électromagnétisme, en mécanique du solide et des fluides bien sûr, mais aussi en biologie, en chimie, en économie, en finance... On y est naturellement confronté quand on s'intéresse à des problèmes de calcul des variations ou plus généralement d'optimisation. Savoir manipuler des équations aux dérivées partielles fait de nos jours partie du quotidienne l'ingénieur.

Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équations : les équations elliptiques (qui servent typiquement à d'écrire des phénomènes d'équilibre en physique) pour les problèmes stationnaires, les équations paraboliques (qui permettent de d'écrire des phénomènes de diffusion) et les équations hyperboliques (qui permettent de d'écrire les phénomènes de propagation) pour les problèmes d'évolution. C'est cette dernière classe d'équations qui fera l'objet de ce mémoire.

Ce mémoire consiste à étudier l'existence et la stabilité des solutions de quelques classes d'équations différentielles hyperboliques fonctionnelles et perturbées. Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe (le théorème de Schauder et le théorème de Burton-Kirk).

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres :

Dans le premier Chapitre, nous présentons des notations, des définitions et certaines notions préliminaires. Dans la section 1.1, on va donner des notations concernant la théorie des espaces de Banach. La section 1.2 est consacrée le problème de Darboux. La section 1.3 on va donner des notions de la stabilité et puis dans la section 1.4 on va citer quelque théorèmes de point fixe.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la stabilité des solutions de quelques classes d'équations différentielles hyperboliques fonctionnelles. Nous présentons deux résultats, le premier est basé sur le théorème de Schauder et l'autre résultat sur la stabilité des solutions.

Le dernier chapitre est intéressé à étudier un problème perturbé. Nous présentons un résultat basé sur un théorème de point fixe de Burton-Kirk pour la somme de deux opérateurs, un opérateur contractif et un autre complètement continu et enfin nous présentons un exemple illustratif.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et les faits préliminaires qui seront utilisées dans ce mémoire.

1.1 Notations et Définitions

Définition 1.1.1. *On appelle espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Exemples.

1. Soit $\Delta := [0, a] \times [0, b];\ a, b > 0$. On note $C(\Delta, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de Δ dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{(t,x)\in\Delta} |u(t, x)|.$$

2. $B(X, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des applications bornées d'un espace métrique

(X,d) à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|u\|_B = \sup_{x\in X} |u(t)|.$$

3. $C(K,\mathbb{R})$ l'espace de Banach des applications continues d'un espace métrique compact (K,d) à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme du sup.

Lemme 1.1.1. *L'ensemble $BC := BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach avec la norme standard*

$$\|u\|_{BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |u(t)|.$$

Preuve : D'une part, nous pouvons montrer que $B(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est un espace de Banach. En effet

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $B(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, alors ; pour tout $\epsilon > 0$

$$\|u_n - u_{n+k}\|_B = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u_n(t) - u_{n+k}(t)| \to 0,$$

lorsque $n \mapsto +\infty$ uniformément en $k \geq 0$. Autrement dit ; il existe une suite $\epsilon_n \mapsto 0$ pour $n \to +\infty$ telle que

$$\sup_{k\geq 0} \|u_n - u_{n+k}\|_B = \sup_{\substack{k>0 \\ X\in J}} |u_n(t) - u_{n+k}(t)| \leq \epsilon_n.$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $u_n(t)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet. Cette suite converge donc vers une limite que nous notons $u(t)$.

Or ; on sait que

$$|u_n(t) - u_{n+k}(t)| \leq \epsilon_n, \forall n \in \mathbb{N}, k \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

en passant à la limite de $K \mapsto +\infty$, on trouve que

$$|u_n(t) - u(t)| \leq \epsilon_n; \forall n \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}_+;$$

autrement dit ; pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u\|_B = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |u_n(t) - u(t)| \leq \epsilon_n.$$

D'abord, ceci montre que pour n'importe quelle valeur de n

$$|u(t)| \leq \|u_n - u\|_B + \|u_n\|_B, \forall u \in \mathbb{R}_+,$$

de sorte que $u \in B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
Puis, $\|u_n - u\|_B \to 0$ ce qui signifie que $u_n \to u$ pour $n \mapsto +\infty$.

D'autre part, nous savons $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. En plus $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est fermé dans l'espace de Banach $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ car une limite uniforme de fonctions continues est continue. Donc, $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est fermé dans l'espace complet $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, Comme un fermé dans un complet est forcément complet, alors $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un espace complet. Donc $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Corollaire 1.1.1. *L'ensemble $BC := BC(J, \mathbb{R})$ des fonctions continues et bor-*

nées de $J := \mathbb{R}_+ \times [0, b]$ dans $\mathbb{R}$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_{BC} = \sup_{(t,x)\in J} |u(t, x)|.$$

La Compacité.

Définition 1.1.2. *(Borel-Lebesgue) On dit qu'un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini*

$$\left(X = \bigcup_{i\in I} Q_i\right) \Rightarrow \left(\exists J \in I, J < \infty, X = \bigcup_{i\in J} Q_i\right)$$

Proposition 1.1.1. *Un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de toute famille des fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide*

$$\left(\bigcup_{i\in I} F_i = \emptyset\right) \Rightarrow \left(\exists J \in I, J < \infty, \bigcup_{i\in J} F_i = \emptyset\right)$$

Remarque.

Dans le cas borné nous pouvent utiliser des versions du théorème d'Arzelà Ascoli. Dans notre problème (cas non borné) nous utilisons un résultat plus générale du théorème de Corduneanu pour démontrer la compacité.

La Convexité.

Définition 1.1.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C, \forall\theta \in [0, 1], \theta x + (1 - \theta)y \in C$$

Autrement dit, si x et y sont deux points de C le segment reliant x à y doit être inclus dans C.

Fonction uniformément bornée.

Définition 1.1.4. *On dit qu'une suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ est uniformément bornée s'il existe un nombre M telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq M \text{ ou } \|f_n(x)\| \leq M.$$

Il est équivalent de dire que la suite des normes $\|f_n(x)\|_\infty$ est bornée par M ou bien que les fonctions f_n sont toutes dans une boule $B(0, M)$ de l'espace normé $(B(E, \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ des fonctions bornées sur E.

L'équicontinuité.

Définition 1.1.5. *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques, on dit qu'une partie A de $C(X, X')$ est équicontinue si*

$$\forall x, y \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in A. \text{ telle que } d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$$

Autrement dit, toutes fonctions de $A \subset C(X, X')$ sont continues sur X et elles sont continues "de la même façon".

L'équiconvergence.

Définition 1.1.6. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de suites dans un espace topologique X et $\ell \in X$. On dit que $(u_n)_{\in\mathbb{N}}$ est équiconvergente vers ℓ si*

$$\forall \theta \in \vartheta(\ell), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \theta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1.7. *Une fonction continue* $f : \mathbb{R}_+ \times [0, b] \times BC \to BC$ *définie sur un ouvert* U *de* BC *est dite Lipschitizienne par rapport à son troixième argument, si pour tout* $u_1, u_2 \in U$ *et* $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, b]$, *il existe* $c > 0$ *telle que*

$$\|f(t, x, u_1) - f(t, x, u_2)\|_{BC} \leq c\|u_1 - u_2\|_{BC}.$$

De plus, si $0 < c \leq 1$, f *est dite Contractante.*

1.2 Le Problème de Darboux

Les modèles de la physique étant le plus souvent constitués de systèmes d'EDP, nous allons nous intéresser à celles qui sont hyperboliques. Nous rappellerons dans un premier temps la définition usuelle pour une EDP du second ordre et nous montrerons comment celle-ci peut se ramener à un système de deux équations du premier ordre. Nous étendrons en suite la classification adoptée aux systèmes d'EDP du premier ordre en nous limitant toujours aux systèmes d'EDP linéaires à deux variables qui peuvent être selon le cas deux coordonnées d'espace ou une coordonnée d'espace et le temps.

Classification des EDP du second ordre.

Considérons tout d'abord l'équation du 2ème ordre linéaire, qui décrit le comportement de la grandeur inconnue u par rapport aux variables x et y

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial^2 u}{\partial x} + e\frac{\partial^2 u}{\partial y} + fu = g$$

Si a, b, c, d, e, f et g sont constants, l'EDP est linéaire à coéfficients constants. S'ils dépendent de x et y, elle est linéaire. S'ils dépendent en plus de l'inconnu u, elle est quasi-linéaire. Dans cette partie, nous nous limiterons au cas d'EDP linéaire. Le caractère de ses solutions dépend pour une large part du signe de $b^2 - ac$. Selon que les racines sont réelles, complexes ou doubles, l'EDP est :

1- hyperbolique , si $b^2 - ac > 0$

2- parabolique , si $b^2 - ac = 0$

3- elliptique , si $b^2 - ac < 0$

On peut considérer $b^2 - ac$ comme le discriminant de l'équation algébrique formée avec les coéfficients des dérivées du second ordre

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0.$$

Si l'EDP est hyperbolique, cette équation possède deux racines réelles

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Dans ce mémoire nous intérisons au EDP hyperbolique de la forme

$$(D^2_{tx}u)(t, x) = f(t, x, u(t, x)).$$

1.3 Les notions de la stabilité

Définition 1.3.1. *(Équilibre)*

Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y), f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On dit que* y_0 *est un équilibre si la fonction constante* $t \mapsto y_0$ *est solution du système* $\dot{y} = f(y)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *ce qui équivaut à dire que* $f(y_0) = 0$.

Définition 1.3.2. *(Stabilité)*

Soit le système d'équations différentielles $\dot{y} = f(y), f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et soit* $y_0 \in \mathbb{R}$ *un équilibre. On dit que*

1. y_0 *est un équilibre stable si pour tout voisinage* U *de* y_0, *il existe un voisinage* V *de* y_0 *tel que* $\forall \tilde{y_0} \in V$,

   (i) $y(t, \tilde{y_0})$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$,

   (ii) $y(t, \tilde{y_0}) \in U$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$

2. y_0 *est un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable et s'il existe t un voisinage* W *de* y_0 *tel que* $\forall \tilde{y_0} \in W$,

   (i) $y(t, \tilde{y_0})$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$,

   (ii) $\lim\limits_{t \mapsto y_0} y(t, \tilde{y_0}) = y_0$.

Soit $\Omega \neq \emptyset \subset BC$ et soit $G : \Omega \to \Omega$, on considère la solution d'équation

$$(Gu)(t, x) = u(t, x). \tag{1.1}$$

Maintenant nous définissons l'attractivité locale et globale des solutions de l'équation (1.1).

Définition 1.3.3. *Les solutions de l'équation (1.1) sont localements attractives, s'il existe une boule* $B(u_0, \eta)$ *dans l'espace* BC *telle que pour des solutions arbitraires* $v = v(t, x)$ *et* $w = w(t, x)$ *de l'équation (1.1) appartenant à* $B(u_0, \eta) \bigcap \Omega$, *on a pour tout* $x \in [0, b]$

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \Big(v(t, x) - w(t, x) \Big) = 0. \tag{1.2}$$

quand la limite (1.2) est uniforme par rapport à $B(u_0, \eta)$, *alors les solutions de l'équation (1.1) sont uniforméments localements attractives (ou de manière équivalente, les solutions de (1.1) sont localements asymptotiquements stables).*

Définition 1.3.4. *les solutions* $v = v(t, x)$ *de l'équation (1.1) sont globalements attractives si (1.2) est vérifiée pour toute solution* $w = w(t, x)$ *de (1.1).*
Si (1.2) est satisfaite uniformément par rapport à l'ensemble Ω, *alors les solutions de l'équations (1.1) sont globalements asymptotiquements stables (ou uniformements globalements attractives).*

1.4 La théorie des points fixes

Dans ce chapitre nous présentons le principe célèbre de contraction de Banach qui depuis concept dans la thèse en 1922 de Banach à trouver beaucoup d'application dans différents parties d'analyse mathématique. Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom de théorème d'application contractante) est un théorème simple à prouver et qui s'applique au espaces complets et possède de nombreuse applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions pour les équations différentielles ou les équations intégables et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton dans la résolution d'équations non linéaires, ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Banach-Picard) [5]*
soit I *un intervalle fermé non vide et soit* $f : I \to I$ *une application contractante sur* I *alors*

– *f admet un unique point fixe L dans I,*

– *$\forall u_0 \in I$, la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \textit{converge vers } L \tag{1.3}$$

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Banach) [5]*
Soient (F, d) un espace métrique complet et $f : F \to F$ une application strictement contractante i.e, il existe $0 < c < 1$ telle que, pour tout $u, v \in F, d(f(u), f(v)) < cd(u, v)$. Alors il existe un unique point fixe u_0 telle que $f(u_0) = u_0$.

Pour les problèmes d'équations différentielles partielles fonctionnelles, nous avons besoin du théorème de point fixe suivant

Théorème 1.4.3. *(Théorème de Schauder) [5]*
Soit E un espace de Banach, M un convexe fermé et borné de E et $N : M \to M$ un opérateur continu et compact. Alors N admet au moins un point fixe dans M.

Et pour les problèmes perturbés, nous utilisons le théorème de point fixe suivant

Théorème 1.4.4. *(Théorème de Burton-Kirk) [2]*
Soient X un espace de Banach et $A, B : X \to X$ deux fonctions vérifiant

(i) A est une contraction,

(ii) B est complètement continue.

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite

(S1) l'équation $u = A(u) + B(u)$ admet une solution, ou

(S2) l'ensemble $E = \left\{u \in X : u = \nu A\left(\frac{u}{\nu}\right) + \nu B(u);\ \nu \in (0,1)\right\}$ *n'est pas borné.*

1.5 Lemmes Préliminaires

Pour toute fonction $w \in C$, on pose $(D^2_{tx}w)(t,x) := \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} w(t,x);\ (t,x) \in J.$

Lemme 1.5.1. *Soit* $f \in C$. *Une fonction* $w \in C$ *telle que sa dérivée* $(D^2_{tx}w)(t,x)$ *existe et est intégrable sur* J *est une solution du problème*

$$(D^2_{tx}w)(t,x) = f(t,x);\ (t,x) \in J. \tag{1.4}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(t,0) = \varphi(t);\ t \in [0,+\infty[, \\ u(0,x) = \psi(x);\ x \in [0,b], \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{1.5}$$

si et seulement si $w(t,x)$ *vérifie*

$$w(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi)d\xi d\tau. \tag{1.6}$$

où

$$\lambda(t,x) = \varphi(t) + \psi(x) - \varphi(0).$$

Preuve : Soit $w(t,x)$ une solution du problème (1.4)-(1.5). Alors

$$(D^2_{tx}w)(t,x) = f(t,x),$$

d'où nous obtenons

$$\int_0^t \int_0^x (D^2_{\tau\xi} w)(\tau, \xi) d\xi d\tau = \int_0^t \int_0^x f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Depuis la relation

$$\int_0^t \int_0^x (D^2_{\tau\xi} w)(\tau, \xi) d\xi d\tau = w(t, x) - w(t, 0) - w(0, x) + w(0, 0),$$

il s'ensuit

$$w(t, x) = \lambda(t, x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Donc $w(t, x)$ vérifie (1.6).

Maintenant, si $w(t, x)$ vérifie (1.6), il est claire que $w(t, x)$ vérifie (1.4)-(1.5).

Le lemme suivant généralise le théorème d'Arzelà Ascoli dans le cas non-borné

Lemme 1.5.2. *[8] (Théorème de Corduneanu)*

Soit $D \subset BC$. Alors, D est relativement compacte si et seulement si les conditions sont vérifiées :

(a) *D est uniformement bornée dans BC,*

(b) *Toute fonction dans D est équicontinue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, b]$*

(équicontinue sur chaque compact de $\mathbb{R}_+ \times [0, b]$),

(c) *Toute fonction de D est équiconvergente, c'est-à-dire ;*

$$\forall x \in [0, b], \forall \epsilon > 0, \exists \mathrm{T}(\epsilon, x) > 0 \ \textit{telle que} \ |u(t, x) - \lim_{t \mapsto +\infty} u(t, x)| < \epsilon,$$

pour tout $t \geqslant \mathrm{T}(\epsilon, x)$ et $u \in D$.

Chapitre 2

Résultats d'existence et de stabilité pour les équations différentielles partielles fonctionnelles

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la stabilité des solutions de l'équation différentielle partielle fonctionnelle suivante

$$(D^2_{tx}w)(t,x) = f(t,x,u(t,x));\ \ (t,x) \in J := [0,+\infty] \times [0,b]. \qquad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(t,0) = \varphi(t);\ t \in [0,+\infty[, \\ u(0,x) = \psi(x);\ x \in [0,b], \\ \varphi(0) = \psi(0), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée, $\varphi \in C([0,a])$ et $\psi \in C([0,b])$.

2.2 Existence des Solutions

Définition 2.2.1. *Une fonction $u \in BC$ où sa dérivées D^2_{tx} existe et intégrable est dite solution du problème (2.1)-(2.2) si elle est vérifie l'équation (2.1) et les conditions (2.2) sur J.*

Maintenant, nous présentons les conditions suffisantes pour l'existence des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H_1) *la fonction $\lambda \in BC$ vérifie*

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \lambda(t,x) = 0;\ x \in [0,b],$$

(H_2) *Il existe des constantes $L, M > 0$ et une fonction positive $P \in BC$ telle que*

$$|f(t,x,u) - f(t,x,v)| \leq \frac{M|u-v|}{L + M|u-v|} P(t,x);\ (t,x) \in J;\ u,v \in \mathbb{R},$$

avec,

$$\lim_{t\mapsto+\infty}\int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau=0;\ \ x\in[0,b],$$

(H_3) *La fonction* $h:(t,x)\to h(t,x)=f(t,x,0)$ *vérifie* $h\in BC$ *et*

$$\lim_{t\mapsto+\infty}\int_0^t\int_0^x h(\tau,\xi)d\xi d\tau=0;\ \ x\in[0,b].$$

Alors, le problème (2.1)-(2.2) admet une solution définie sur J.

Démonstration :

Posons

$$\lambda^*=\sup_{(t,x)\in J}|\lambda(t,x)|,\ \ P^*=\sup_{(t,x)\in J}P(t,x),\ \ P_*=\sup_{(t,x)\in J}\int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau,$$

$$h^*=\sup_{(t,x)\in J}|h(t,x)|\ et\ h_*=\sup_{(t,x)\in J}\int_0^t\int_0^x|h(\tau,\xi)|d\xi d\tau.$$

Considérons l'opérateur de point fixe $N:BC\to BC$, défini par

$$(Nu)(t,x)=\lambda(t,x)+\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau.$$

Soient $(t, x) \in J$ et $u \in B_\eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t,x)| &= |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant |\lambda(t,x)| + \int_0^t \int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))| d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + \int_0^t \int_0^x \Big(|f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,0)| + |f(\tau,\xi,0)|\Big) d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + \int_0^t \int_0^x \left(|h(\tau,\xi)| + P(\tau,\xi)\left|\frac{Mu(\tau,\xi)}{L+Mu(\tau,\xi)}\right|\right) d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x \Big(|h(\tau,\xi)| + \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi)\Big) d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + h_* + P_* \\
&:= \eta.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(t, x) \in J$, nous avons

$$|(Nu)(t,x)| \leqslant \eta.$$

Considérons la boule

$$B_\eta = \{u \in BC; \| \, u \, \|_{BC} \leqslant \eta\}.$$

Il est clair que B_η est un fermée et bornée.

On montre que $N : B_\eta \to B_\eta$ satisfait les conditions du théorème 1.4.3. La preuve sera donnée dans quatre étapes.

Etape 1 : N est continu.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans B_η, pour tout $(t,x) \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)| &= |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u_n(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x) - \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x |f(\tau,\xi,u_n(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi)\frac{M|u_n(\tau,\xi)-u(\tau,\xi)|}{L+M|u_n(\tau,\xi)-u(\tau,\xi)|}d\xi d\tau \\
&\leqslant \frac{M}{L}\sup_{(t,x)\in J}|u_n(t,x)-u(t,x)| \sup_{(t,x)\in J}\int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau \\
&\leqslant \frac{MP_*}{L}\|u_n - u\|_{BC} \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $N : B_\eta \to B_\eta$ est continu.

Etape 2 : $N(B_\eta)$ est uniformément bornée.

Nous avons $N(B_\eta) \subset B_\eta$. Comme B_η est bornée, alors $N(B_\eta)$ est uniformément bornée.

Etape 3 : $N(B_\eta)$ est équicontinue sur chaque compact $[0,a] \times [0,b]$ de J.

Soient $(t_1, x_1),\ (t_2, x_2) \in J,\ t_1 < t_2,\ x_1 < x_2$ et soit $u \in B_\eta$, alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t_2,x_2) - (Nu)(t_1,x_1)| &= |\lambda(t_2,x_2) + \int_0^{t_2}\int_0^{x_2} f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t_1,x_1) - \int_0^{t_1}\int_0^{x_1} f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant |\lambda(t_2,x_2) - \lambda(t_1,x_1)| \\
&+ \int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1} |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))|d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t_2,x_2) - (Nu)(t_1,x_1)| &\leqslant |\lambda(t_2,x_2) - \lambda(t_1,x_1)| \\
&+ \int_0^{t_1}\int_{x_1}^{x_2} |h(\tau,\xi) + P(\tau,\xi)|d\xi d\tau \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{x_1} |h(\tau,\xi) + P(\tau,\xi)|d\xi d\tau \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} |h(\tau,\xi) + P(\tau,\xi)|d\xi d\tau \\
&\leqslant |\lambda(t_2,x_2) - \lambda(t_1,x_1)| \\
&+ (h^* + P^*)[t_1(x_2 - x_1) + x_1(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)] \\
&\longrightarrow 0 \ quand \ t_1 \to t_2.
\end{aligned}$$

Donc l'opérateur $N(B_\eta)$ est équicontinue.

Etape 4 : $N(B_\eta)$ est équiconvergente.

Soient $(t, x) \in J$ et $u \in B_\eta$. Alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t,x)| &= |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant |\lambda(t,x)| + \int_0^t \int_0^x |h(\tau,\xi)|d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Donc,

$$|(Nu)(t,x)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t,x) - (Nu)(+\infty,x)| &= |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant |\lambda(t,x)| + \int_0^t \int_0^x |h(\tau,\xi)|d\xi d\tau \to 0 \text{ quand } t \mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$|(Nu)(t) - (Nu)(+\infty)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Donc $N(B_\eta)$ est équiconvergente.

Le Lemme 1.5.2 implique que l'opérateur $N : B_\eta \to B_\eta$ est continu et compact. Finalement, d'après le théorème 1.4.3 ; le problème (2.1)-(2.2) possède une solution définie sur J.

2.3 La stabilité des Solutions

Dans cette section, nous démontrons la stabilité des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont localements asymptotiquements stables.*

Preuve :

Soit w une solution du problème (2.1)-(2.2). Considérons la boule $B(w, P_*)$, Soit $u \in B(w, P_*)$, alors pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,b]$ nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t,x) - w(t,x)| &= |(Nu)(t,x) - (Nw)(t,x)| \\
&= |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x) - \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))| d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) \frac{M|u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|}{L + M|u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|} d\xi d\tau \\
&\leqslant \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) d\xi d\tau \\
&\leqslant P_*.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|N(u) - w\|_{BC} \leqslant P_*.$$

Donc $N(B(w,P_*)) \subset B(w,P_*)$. En plus, si u est solution du problème (2.1)-(2.2), alors

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-w(t,x)| &= |(Nu)(t,x)-(Nw)(t,x)| \\
&= |\lambda(t,x)+\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x)-\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)\frac{M|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}{L+M|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}d\xi d\tau \\
&\leqslant \sup_{(t,x)\in J}\int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau \to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont localements asymptotiquements stables.

Maintenant, sous les conditions du théorème 2.2.1, nous pouvons démontrer la stabilité globale des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.3.2. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées. Alors les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont globalements asymptotiquements stables.*

Démonstration :

Soient u et v deux solutions du problème (2.1)-(2.2). Alors, pour tout $(t,x)\in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-v(t,x)| &= |(Nu)(t,x)-(Nv)(t,x)| \\
&= |\lambda(t,x)+\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x)-\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,v(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-f(\tau,\xi,v(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)\frac{M|u(\tau,\xi)-v(\tau,\xi)|}{L+M|u(\tau,\xi)-v(\tau,\xi)|}d\xi d\tau \\
&\leqslant \sup_{(t,x)\in J}\int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau \to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto+\infty.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x\in[0,b]$, on trouve,

$$|u(t,x)-v(t,x)|\to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto+\infty.$$

Par conséquent, les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont globalements asymptotiquements stables.

2.4 Exemple

Considérons l'équation différentielle hyperbolique suivante

$$u_{tx}(t,x)=f(t,x,u(t,x));\ \text{ pour tout } \ (t,x)\in\mathbb{R}_+\times[0,1], \tag{2.3}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(t,0) = \frac{1}{1+t};\ t \in \mathbb{R}_+, \\ \\ u(0,x) = 1;\ x \in [0,1], \end{cases} \tag{2.4}$$

où,

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{e^{x-t}|u(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t,x)|)}.$$

Nous avons

$$\lambda(t,x) = \frac{1}{1+t},$$

d'où l'hypothèse (H_1) est satisfaite donc

$$\lim_{t\mapsto+\infty} \lambda(t,x) = \lim_{t\mapsto+\infty} (\frac{1}{1+t}) = 0;\ x \in [0,1],$$

et $\lambda^* = 1$,

L'hypothèse (H_2) est satisfaite pour $M = L = 1$ car

$$\begin{aligned} \Big|f(t,x,u(t,x)) - f(t,x,v(t,x))\Big| &= \Big|\frac{e^{x-t}|u(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t,x)|)} - \frac{e^{x-t}|v(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|v(t,x)|)}\Big| \\ &= \Big|\frac{e^{x-t}}{(1+x+t^2)}\Big(\frac{|u(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)} - \frac{|v(t,x)|}{(1+|v(t,x)|)}\Big)\Big| \\ &\leq \Big|\frac{e^{x-t}}{(1+x+t^2)}\Big|\Big|\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)(1+v(t,x)|)}\Big| \\ &\leq e^{x-t}\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{1+|u(t,x)-v(t,x)|} \end{aligned}$$

avec $P(t,x) = e^{x-t}$.

Ainsi, on a

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) d\xi d\tau = \lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x e^{\xi-\tau} d\xi d\tau = 0; \; x \in [0,1].$$

Aussi (H_3) est satisfaite pour $f(t,x,0) = 0$.

Donc toutes les conditions du théorème 2.2.1 sont satisfaites, le problème (2.3)-(2.4) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

En plus d'après le théorème 2.3.2, les solutions du problème (2.3)-(2.4) sont globalements asymptotiquements stables.

Chapitre 3

Equations différentielles partielles perturbées

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation différentielle perturbée suivante

$$(D^2_{tx}u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x));\ (t,x) \in J := \mathbb{R}_+ \times [0,b], \qquad (3.1)$$

avec les conditions initiales (2.2), où $f, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues données, $\varphi, \psi \in C(J, \mathbb{R})$.

3.2 Existence des Solutions

Définition 3.2.1. *Une fonction $u \in BC$ où sa dérivées D^2_{tx} existe et intégrable est dite solution du problème (3.1)-(2.2) si elle est vérifie les conditions (2.2) et* *l'équation (3.1) sur J.*

Maintenant, nous présentons des conditions pour l'existence des solutions du problème (3.1)-(2.2).

Introduisons les hypothèses suivantes :

(H_1) la fonction $\lambda \in BC$ vérifie

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \lambda(t,x) = 0;\; x \in [0,b],$$

(H_2) Il existe une fonction positive $P \in BC$ telle que

$$|f(t,x,u) - f(t,x,v)| \leq \frac{|u-v|}{1+|u-v|} P(t,x);\; (t,x) \in J;\; u,v \in \mathbb{R},$$

avec,

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) d\xi d\tau = 0;\; x \in [0,b],$$

(H_3) La fonction $h : (t,x) \to h(t,x) = f(t,x,0)$ vérifie $h \in BC$ et

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x h(\tau,\xi) d\xi d\tau = 0;\; x \in [0,b],$$

(H_4) La fonction $(t,x) \to g(t,x,0)$ est bornée.

En plus, il existe une fonction positive $Q \in BC$ telle que

$$(1+|u-v|)|g(t,x,u) - g(t,x,v)| \leq Q(t,x)|u-v|;\; (t,x) \in J;\; u,v \in \mathbb{R},$$

avec,

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi) d\xi d\tau = 0;\; x \in [0,b],$$

(H_5) La fonction $(t,x) \to g(t,x,0)$ vérifie et

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,0) d\xi d\tau = 0; \;\; x \in [0,b].$$

Posons

$$\lambda^* = \sup_{(t,x)\in J} |\lambda(t,x)|, \;\; P^* = \sup_{(t,x)\in J} P(t,x), \;\; P_* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) d\xi d\tau < 1,$$

$$Q^* = \sup_{(t,x)\in J} Q(t,x), \;\; Q_* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi) d\xi d\tau,$$

$$h^* = \sup_{(t,x)\in J} |h(t,x)|, \;\; h_* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x |h(\tau,\xi)| d\xi d\tau,$$

$$g^* = \sup_{(t,x)\in J} |g(t,x,0)| \; et \; g_* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x |g(\tau,\xi,0)| d\xi d\tau.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *sont vérifiées. Si* $Q_* < 1$, *alors, le problème (3.1)-(2.2) admet une solution définie sur J.*

Démonstration :

Considérons les opérateurs $F, G : BC \to BC$

$$(Fu)(t,x) = \lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\xi d\tau,$$

et

$$(Gu)(t,x) = \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) d\xi d\tau,$$

Alors le problème à trouver les solutions du problème (3.1)-(2.2) est réduit à trouver les solutions de l'équation

$$(Fu)(t,x) + G(u)(t,x) = u(t,x); \ (t,x) \in J.$$

Nous montrerons dans trois étapes que les opérateurs F et G satisfont les conditions du théorème 1.4.4.

Etape 1 : $F : BC \to BC$ est continu et compact.

D'après le théorème 2.2.1 avec $M = L = 1$ dans l'hypothèse (H_2), il est claire que l'opérateur F est continu et compact.

Etape 2 : $G : BC \to BC$ est un contraction.

Soient $(t,x) \in J$ et $u, v \in BC$. Alors

$$\begin{aligned}
|(Gu)(t,x) - (Gv)(t,x)| &= |\int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x |g(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi)|u(\tau,\xi) - v(\tau,\xi)|d\xi d\tau \\
&\leqslant \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi)|u(\tau,\xi) - v(\tau,\xi)|d\xi d\tau \\
&\leqslant Q_* \|u - v\|_{BC}.
\end{aligned}$$

Donc, on trouve,

$$\|G(u) - G(v)\|_{BC} \leqslant Q_* \|u - v\|_{BC}.$$

Comme $Q_* < 1$, alors G est une contraction.

Etape 3 : L'estimation apriori.

Nous allons maintenant montrer que l'ensemble

$$E = \{u \in BC : u = \nu A(\frac{u}{\nu}) + \nu B(u);\ \nu \in (0,1)\}$$

n'est pas borné.

Soient $(t, x) \in J$ et $u \in E$. D'où

$$u(t, x) = \nu A(\frac{u(t, x)}{\nu}) + \nu (Bu)(t, x);\ \nu \in (0, 1).$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}
|u(t,x)| &= |\nu\lambda(t,x) + \nu \int_0^t \int_0^x f(\tau, \xi, \frac{u(\tau,\xi)}{\nu}) d\xi d\tau + \nu \int_0^t \int_0^x g(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\xi d\tau| \\
&\leqslant \lambda^* + \int_0^t \int_0^x \Big(|f(\tau, \xi, \frac{u(\tau,\xi)}{\nu}) - f(\tau, \xi, 0)| + |f(\tau, \xi, 0)| \Big) d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^x \Big(|g(\tau, \xi, u(\tau,\xi)) - g(\tau, \xi, 0)| + |g(\tau, \xi, 0)| \Big) d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x \Big(|h(\tau,\xi)| + P(\tau,\xi) \Big) d\xi d\tau \\
&+ \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t \int_0^x \Big(|g(\tau,\xi,0)| d\xi d\tau + Q(\tau,\xi) \Big) d\xi d\tau \\
&\leqslant \lambda^* + h_* + g_* + P_* + Q_* \\
&:= \rho.
\end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$\|u\|_{BC} \leqslant \rho,$$

ce qui montre que l'ensemble E est bornée. C'est une contradiction et l'assertion $(S2)$ dans le théorème 1.4.4 est fausse. Par conséquent, l'opérateur $F + G$ possède un point fixe qui représente une solution de notre problème (3.1)-(2.2).

3.3 La stabilité des Solutions

Dans cette section, nous démontrons la stabilité des solutions du problème (3.1)-(2.2).

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses $(H_1)-(H_5)$ sont vérifiées. Alors les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont localements asymptotiquements stables.*

Preuve :

Soit w une solution du problème (3.1)-(2.2). Considérons la boule $B(w, P_* + Q_*)$, Soit $u \in B(w, P_* + Q_*)$, alors pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,b]$ nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t,x) - w(t,x)| &= |(Nu)(t,x) - (Nw)(t,x)| \\
&\leqslant |\lambda(t,x) + \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x) - \int_0^t \int_0^x f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&+ |\int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau - \int_0^t \int_0^x g(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))| d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^x |g(\tau,\xi,u(\tau,\xi)) - g(\tau,\xi,w(\tau,\xi))| d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) \frac{|u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|}{1 + |u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|} d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi) \frac{|u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|}{1 + |u(\tau,\xi) - w(\tau,\xi)|} d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^x P(\tau,\xi) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^x Q(\tau,\xi) d\xi d\tau \\
&\leqslant P_* + Q_*.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|N(u)-w\|_{BC} \leqslant P_* + Q_*.$$

Donc $N(B(w,P_*+Q_*)) \subset B(w,P_*+Q_*)$. En plus, si u est solution du problème (3.1)-(2.2), alors

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-w(t,x)| &= |(Nu)(t,x)-(Nw)(t,x)| \\
&\leqslant |\lambda(t,x)+\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x)-\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&+ |\int_0^t\int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^x g(\tau,\xi,w(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-f(\tau,\xi,w(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t\int_0^x |g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-g(\tau,\xi,w(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)\frac{|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}{1+|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t\int_0^x Q(\tau,\xi)\frac{|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}{1+|u(\tau,\xi)-w(\tau,\xi)|}d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^x Q(\tau,\xi)d\xi d\tau \to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous démontrons la stabilité globale des solutions du problème (3.1)-(2.2).

Théorème 3.3.2. *Supposons que les hypothèses $(H_1)-(H_5)$ sont vérifiées. Alors les solutions du problème (3.1)-(2.2) sont globalements asymptotiquements stables.*

Démonstration :

Soient u et v deux solutions du probléme (3.1)-(2.2). Alors, pour tout $(t,x)\in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-v(t,x)| &= |(Nu)(t,x)-(Nv)(t,x)| \\
&\leqslant |\lambda(t,x)+\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau \\
&- \lambda(t,x)-\int_0^t\int_0^x f(\tau,\xi,v(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&+ |\int_0^t\int_0^x g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\xi d\tau-\int_0^t\int_0^x g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))d\xi d\tau| \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x |f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-f(\tau,\xi,v(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&+ \int_0^t\int_0^x |g(\tau,\xi,u(\tau,\xi))-g(\tau,\xi,v(\tau,\xi))|d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x (P+Q)(\tau,\xi)d\xi d\tau \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau+\int_0^t\int_0^x Q(\tau,\xi)d\xi d\tau \\
&\quad \to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto+\infty.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x\in[0,b]$, on trouve,

$$|u(t,x)-v(t,x)|\to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto+\infty.$$

Par conséquent, les solutions du problème (3.1)-(2.2) sont globalements asymptotiquements stables.

3.4 Exemple

Considérons le problème perturbé suivant

$$u_{tx}(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x));\ \text{ pour tout }\ (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \quad (3.2)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u(t,0) = \frac{1}{1+t};\ t \in \mathbb{R}_+, \\ \\ u(0,x) = 1;\ x \in [0,1], \end{cases} \quad (3.3)$$

où,

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{e^{x-t}|u(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t,x)|)}.$$

$$g(t,x,u(t,x)) = \frac{e^{-1-t}|u(t,x)|}{(x^2+1)(1+|u(t,x)|)}.$$

Nous avons

$$\lambda(t,x) = \frac{1}{1+t},$$

d'où l'hypothèse (H_1) est satisfaite donc

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \lambda(t,x) = \lim_{t \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{1+t}\right) = 0;\ x \in [0,1],$$

et $\lambda^* = 1$,

L'hypothèse (H_2) est satisfaite pour $M = L = 1$ car

$$\begin{aligned}
\Big|f(t,x,u(t,x)) - f(t,x,v(t,x))\Big| &= \Big|\frac{e^{x-t}|u(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t,x)|)} - \frac{e^{x-t}|v(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|v(t,x)|)}\Big| \\
&= \Big|\frac{e^{x-t}}{(1+x+t^2)}\Big(\frac{|u(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)} - \frac{|v(t,x)|}{(1+|v(t,x)|)}\Big)\Big| \\
&\leq \Big|\frac{e^{x-t}}{(1+x+t^2)}\Big|\Big|\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)(1+v(t,x)|)}\Big| \\
&\leq e^{x-t}\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{1+|u(t,x)-v(t,x)|}
\end{aligned}$$

avec $P(t,x) = e^{x-t}$.

Ainsi, on obtient

$$\lim_{t\mapsto+\infty}\int_0^t\int_0^x P(\tau,\xi)d\xi d\tau = \lim_{t\mapsto+\infty}\int_0^t\int_0^x e^{\xi-\tau}d\xi d\tau = 0;\ x \in [0,1].$$

Aussi (H_3) est satisfaite pour $f(t,x,0) = 0$.

L'hypothèse (H_4) est satisfaite

$$\begin{aligned}
\Big|g(t,x,u(t,x)) - g(t,x,v(t,x))\Big| &= \Big|\frac{e^{-1-t}|u(t,x)|}{(x^2+1)(1+|u(t,x)|)} - \frac{e^{-1-t}|v(t,x)|}{(x^2+1)(1+|v(t,x)|)}\Big| \\
&= \Big|\frac{e^{-1-t}}{(x^2+1)}\Big(\frac{|u(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)} - \frac{|v(t,x)|}{(1+|v(t,x)|)}\Big)\Big| \\
&\leq \Big|\frac{e^{-1-t}}{(x^2+1)}\Big|\Big|\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{(1+|u(t,x)|)(1+v(t,x)|)}\Big| \\
&\leq e^{-1-t}\frac{|u(t,x)-v(t,x)|}{1+|u(t,x)-v(t,x)|}
\end{aligned}$$

avec $Q(t,x) = e^{-1-t}$.

Ainsi

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x Q(\tau, \xi) d\xi d\tau = \lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t \int_0^x e^{-1-\tau} d\xi d\tau = 0; \ x \in [0,1].$$

Et l'hypothèse (H_5) est satisfaite pour $g(t,x,0) = 0$.

Donc toutes les conditions du théorème 3.2.1 sont satisfaites, le problème (3.2)-(3.3) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

En plus d'après le théorème 3.3.2, les solutions du problème (3.2)-(3.3) sont globalements asymptotiquements stables.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré l'existence et la stabilité (Attractivité) des solutions de certaines problèmes hyperboliques d'équations différentielles fonctionnelles aux dérivées partielles et perturbées. Des conditions suffisantes pour l'existence et la stabilité des solutions de nos problèmes ont été données.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Advanced Fractional Differential and Integral Equations, Nova Science Publishers, New York, 2015.

[2] T.A. Burton and C. Kirk,A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type. Math. Nachr. **189** (1989), 23-31.

[3] S. Abbas and M. Benchohra, Darboux problem for perturbed partial differential equations of fractional order with finite delay, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **3** (2009), 597-604.

[4] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **3** (1990), 163-168.

[5] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[6] Z. Kamont, Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[7] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel,Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York,

1993.

[8] C. Corduneanu, Integral Equations and Applications, Cambridge University Press, 1991.

[9] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Appl. Anal., **40** (1991), 173-180.

[10] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2012.