République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

L'existence et multiplicité de solutions non radiales pour un probléme de perturbation

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Géométrie Différentielle

par

Nabi **H**ayat [1]

Sous la direction de

Mme. N. Bekkouche

Soutenue 22 Mai 2017 devant le jury composé de

Mr. S. Ouakkas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mme. N. Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr. k. Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mr. S. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : hayatnabi94@gmail.com

Table des matières

0.1 Introduction 6

1 Préliminaires **12**

1.1 Espaces fonctionnels 12

1.1.1 Espaces de Lebesgue 12

1.1.2 Espace de Sobolev 13

1.2 Quelques définitions et théorèmes 16

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory 16

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela 16

1.3 Approche variationnelle 17

1.3.1 Formulation variationnelle 18

2 Problème de Laplacien avec terme de perturbation **19**

2.1 Introduction 19

2.1.1 Notion de solution non radiale 20

2.2 Formulation variationnelle 20

2.3 Résultat principal 21

3 Problème de P-Laplacien avec terme de perturbation **29**

3.1 Formulation du problème 29

3.2 Formulation variationnelle 30

3.3 Résultat principal 30

Remerciements

Avant tout propos, nous tenons à remercier Le grand Dieu Le Tout Puissant, de nous avoir donné la force et Le patience pour réalisation de ce travail.
A travers ce modeste de travail, nous remercions notre promoteur, **Mme Bekkouche Noria**, pour ses consiels précieux et pour toutes Les commodites et aisances qu'elle nous a apportées durant la préparation et la finilisation de ce projet.
Nous remerciens les nembres de jury qui nous ont fait l'honneur d'accepter de d'examiner notre travail.
Nous exprimons également nos gratitudes à toutes les enseignants qui contribué à notre cuecus universitaire.
Sans oublier la grande famille de Géométrie Différentielle: etudiants, administrateurs et techniciens.

Dédicace

Avec laide du Dieu j'ai pu réaliser ce modeste travail que je dédie:
A mon cher pére, et ma mére ,et mes soeures, mes fréres.
Et à ma promotion 2ème année master Géométrie Différentielle.
A mes cousins et cousines, ma belle famille.

Abreviations

EDP	Equation aux dérivées partielles.
p.p.	Presque partout.

Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^N$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ N fois.
∇u	Gradient de u défini par $\nabla u \overset{def}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
Δu	Laplacien de u.
$\Delta_p u$	p-Laplacien de u défini par $\Delta_p u = div\left(\lvert\Delta u\rvert^{p-2}\, \Delta u\right)$.

Introduction Générale

0.1 Introduction

Le travail que nous présentons dans ce mémoire est l'existence et multiplicité de
solutions non radiales pour un problème elliptique.
Nous commençons tout d'abord par citer certains résultats d'existence pour le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + g\left(x\right) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^N$, $(N > 2)$ avec $\partial\Omega$ est un bord lisse, $0 \in \Omega$; Δ_p l'opérateur p-Laplacien déféni par

$$\Delta_p u = \nabla\left(\left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u\right).$$

où $|\nabla \cdot|^{p-2}$ est défini par

$$\left|\nabla u\right|^{p-2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right]^{\frac{p-2}{2}}.$$

Dans le cas où $p = 2$, ($\Delta_p u = \Delta u$: Le laplacien de u), ce problème a été amplement étudié par exemple, par Coffman [17], Hempel [21], Ambrosetti- Rabinowitz [5]; dans le cas où $g = 0$ et $f\left(x,u\right) := u\left|u\right|^{k-1}$, tel que $1 < k < \frac{N+2}{N-2}$ et $N \geq 3$ ou bien $1 < k < +\infty$ et $N = 2$. Dans ces travaux, les auteurs ont utilisé le théoreme de Lusternik-Schnirelmann ou plutôt la notion du genre pour un ensemble symétrique. Par conséquent, le fait que la non-linéarité f dans le problème (1) soit impaire par rapport à sa deuxième variable est essentiel pour l'application de ces techniques. (Notre travail étudie le cas de perte de cette symétrie).
Beaucoup d'auteurs se sont penchés sur l'existence et la multiplicité de solutions radiales pour le problème (1), dans le cas où $g = 0$, voir par exemple [23], [10]. Cependant, ils ne jettent aucune lumière sur la façon d'étendre ces travaux à l'existence de solutions non radiales. En fait, malgré le développement intense de la recherche sur les solutions radiales à des problèmes comme

(1), ou autres dans le cas où $g = 0$, les résultats sur l'existence de solutions non radiales est loin d'être aussi abondants. Nous citons les travaux précurseurs de G. J. Butler [12], et B. L. Shekhter [?]. Et ceux de [8], [30], [2], [14], [10], ces derniers temps.
Dans ce qui suit nous donnons un petit aperçu sur la recherche de solutions non radiales pour differents problèmes aux limites associés au Laplacien, dans le cas où $g = 0$. anterieure à notre travail [8, 30, 14, 13, 1, 20, 10]
Tout d'abord pour les problèmes de Dirichlet sur des domaines bornés objet de notre travail, nous citerons les travaux suivants:
A. Castro et B. Finan [14] (2000), ont étudié le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + f\ (u) = 0 & x \in \Omega_\varepsilon \\ u > 0 & x \in \Omega_\varepsilon \\ u = 0 & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{cases}, \tag{2}$$

où

$$\Omega_\epsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 1 - \epsilon < |x| < 1 \right\},$$

et la non-linéarité f est de classe $C^1(\mathbb{R})$ et satisfait aux conditions suivantes;

(h_0) $f\ (0) = 0$ et $f\ '(0) < \lambda_1$ avec λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$.

(h_1) $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{f\ (u)}{u} = +\infty$.

Si pour tout entier $k > 0$ il existe un $\epsilon_1(k) > 0$ telle que $0 < \varepsilon < \epsilon_1(k)$, les auteurs ont montré par approche variationnelle que le problème (2) possède k solutions non radiales positives distinctes.
H. Aduen et A. Castro dans [1] (2000), ont considéré le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u + f\ (u) = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{3}$$

où Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 superlinéaire au voisinage de ∞, et f n'est pas impaire, et sous les hypothèses suivantes, (reliant f, $f\ '$et sa primitive $F(t) = \int_0^t f\ (\zeta)\, d\zeta$).

(h0) Il existe des constantes $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\rho > 0$, $\omega > 1$ et $p \in]1, (n + 2/n - 2)[$ tel que $|t| \geq \rho$,

$$\mu_1 \left|f\ '(t)\right|^{\frac{p+1}{p-1}} \leq \Phi_\omega(t) \leq \Phi_1(t) \leq \mu_1 \left(\frac{1}{2} t f\ \ (t) - F(t)\right),$$

avec $\Phi_s(t) := 2nF(t) - s(n-2)\, t f\ (t)$,pout tout $t \in \mathbb{R}$.

(h1) Il existe $\mu_3 > 0$ telle que $t^2 f\ '(t) - t f\ (t) \geq \mu_3$ pour $|t| \geq \rho$.

Les auteurs ont montré en utilisant l'indice de morse que le problème (3) possède une suite de solutions non radiales non bornée.
Maintenant concernant les problèmes de Newman sur un domaine borné, nous passons en revue quelques travaux :
Dans [30] (1994) , le problème considéré est,

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^p, \quad u > 0 & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{4}$$

où $\lambda > 0$ et $p \leq \frac{N+2}{N-2}$), et v est l'unité de la normale extérieure à $\partial\Omega$.
L'auteur s'est intéressé en particulier à l'existence de solutions non radiales et par approche variationnelle; il a établi l'existence d'une suite de solutions non radiales pour $N \geq 3$ quand Ω est un domaine radiale et symétrique. Remarquons que lorsque la condition au bord de Neumann est remplacée par la condition de Dirichlet le résultat Gidas-Nirenberg bien connu affirme que les solutions positives doivent être radialement symétrique. Cependant, Z.Q. Wang montra que contrairement au problème de Dirichlet, (4) possède de nombreuses solutions non radiales lorsque Ω est une boule.
D. Cao, P. Han [13] (2003) , ont étudié le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2} u + \mu |u|^{q-2} & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

où Ω est la boule unité dans $\mathbb{R}^N$ centrée à l'origine, $N \geq 3$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et $1 < q < 2$, $\mu > 0$.
En coupant la boule unité en des secteurs angulaires et en utilisant la méthode variationnelle pour faire face à un problème aux limites mixtes sur ces domaines, ils ont démontré l'existence d'une infinité de solutions non radiales avec une énergie positive pour les petits μ $(0 < \mu < \mu^*)$.
Des résultats d'existence de solutions non radiales ont été obtenu dans le cas où le domaine est non borné, par exemple :
Dans [8] (1993) , les auteurs ont considéré le problème suivant:

$$\begin{cases} \Delta u + b(|x|) u = f(|x|, u), & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases},$$

où b est une fonction minorée par une constante positve et f vérifiant

(h1) $f \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, il existe deux constantes positives a_1, R telle que pour tout $r \geq 0$, $|u| \geq R$

$$|f(r, u)| \leq a_1 |u|^q; \text{ avec } 1 < q < \frac{N+2}{N-2}. \tag{5}$$

(h2) f impaire en u.

Ils ont montré l'existence d'une suite de solutions non radiales si $N = 4$ ou $N \geq 6$. en se basant sur le théorème de Fountain (cf. [9] th. 2.5).
Et, G. Francesca, G. Massimo, N. Sérgio [20] (2013) , ont considéré le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = (N+\alpha)(N-2)|x|^{\alpha} u^{\frac{N+2+2\alpha}{N-2}} & x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ u \in D^{1,2}\left(\mathbb{R}^N\right) & \end{cases}, \tag{6}$$

avec $N \geq 3$, ils ont étudié l'existence de solutions non radiales qui bifurquent à partir d'une radiale quand α est un entier pair.
Le problème considéré dans [3] (2016), est

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} F(u) & x \in \mathbb{R}^N \\ u > 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ \quad u(x) \to 0 \text{ qd } |x| \to +\infty & \end{cases}, \tag{7}$$

Où $\alpha > 0$ qui est dans un intervalle ouvert $J \subset [0, +\infty)$ et $N \geq 3$ et $F \in C^1[0, +\infty)$, telle que $F(0) = 0$, $F'(0) = -m < 0$.
Les auteurs montrent en utilisant l'indice Morse que le problème (7) possède des solutions non radiales qui bifurquent de solution radiale (α_J, u_{α_J}) avec $\alpha_J = 2i \in \mathbb{N}$.
Dans [10] (2015) , l'étude du système d'équations elliptiques suivant est considérée,

$$\begin{cases} -\Delta u + u = F_u(|x|, u, v), \\ -\Delta v + v = F_v(|x|, u, v), \\ u,\ v \in H^1\left(\mathbb{R}^N\right). \end{cases},$$

Il a montré que, si F est pair en (u, v) et satisfait une certaine condition de croissance, le système admet une infinité de solutions à la fois radiales et non radiales. La preuve repose sur le principe introduit et le théorème de Fountain.
Nous devons faire la remarque que très peu de travaux abordent la question d'existence de solutions non radiales pour des EDP faisant intervenir le p Laplacien nous citerons quelques résultats récents [25], [19], [15].
V. Felli, M. Schneider [19] (2003), ils ont considéré le problème elliptique suivant dans $\mathbb{R}^N$ de dimension $N \geq 3$:

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a} \nabla u\right) - \frac{\lambda}{|x|^{2(1+a)}} u = k(x) \frac{u^{p-1}}{|x|^{bp}} \quad x \in \mathbb{R}^N \diagdown \{0\}, \tag{8}$$

où

$$\begin{aligned} -\infty &< a < \frac{N-2}{2}, \quad -\infty < \lambda < \left(\frac{N-2a-2}{2}\right)^2, \\ p &= p(a,b) = \frac{2N}{N-2(1+a-b)} \text{ et } a \leq b < a+1. \end{aligned} \tag{9}$$

Supposons a, b, p satisfait (9) le problème (8) possède une solution non radiale. Ils ont utilisé la méthode variationnelle perturbative.
F. Catrina, [15] (2006) , il a considéré le problème suivant

$$-\operatorname{div}\left(|x|^{-2a}\nabla u\right)=\frac{\lambda}{|x|^{2(1+a)+c}}u+\frac{u^{p-1}}{|x|^{bp}},\ u>0\quad \text{dans } B,\ u\in D_a(B);\qquad (10)$$

avec $D_a(B)$ désigne l'espace de Hilbert obtenu comme l'achèvement des fonctions lisses avec support compact dans B sous la norme induite par le produit interne

$$\langle u,v\rangle=\int_\Omega |x|^{-2a}\nabla u.\nabla v dx.$$

Et

$$\begin{aligned} N &\geq 2,\ a<\frac{N-2}{2},\ a<b<a+1,\\ p &= \frac{2N}{N-2(a+1-b)},\ 0<c. \end{aligned}$$

L'auteur a montré et utilisé la méthode de l'itération de Moser et l'inégalité de Harnack que le problème 10 possède une solution non radiale.
M. Musso, J. Wei, [25] (2012) , ils ont considéré le problème suivant

$$\nabla\left(|x|^{-2a}\ \nabla u\right)+|x|^{-\frac{2N}{N-2}a}|u|^{\frac{4}{N-2}}u=0,\ \text{dans } \mathbb{R}^N\backslash\{0\},\qquad (11)$$

avec $N\geq 5$, $a<0$ ou bien $a>N-2$.
Donnant suite au travail de Catrina-Wang [16], ils montrent l'existence de solutions (radiale ou non radiale) au problème (11) quand $a<0$. Et, pour $a>N-2$, ils établissent l'existence de solutions pouvant changer de signe pour le problème (11) .
Le problème (1) est considéré dans ce chapitre dans le cas où la non linéarité f a une croissance sublinéaire en 0, i.e

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(r,u)}{|u|^{p-1}}=+\infty,\ \text{pour presque tous } r\in[0,R];$$

ce genre de nonlinéarité n'a pas été largement étudié dans le passé, nous ne disposons dans la littérature que de peu de travaux sur ce sujet. Dans le cas des équations différentielles ordinaires, le livre de M. A. Krasnoselskii, A. I. Pera, A. I.Povolotskiy et P. P. Zabreiko [23] [6, Section 22]. E. W. C. Van Groesen [28], a considéré une hypothèse sur le comportement de f au voisinage de ∞ en plus de la croissance sublinéaire en 0. En utilisant une approche variationnelle de Min-Max, il a établi l'existence de trajectoires périodiques multiples. Et dans [29] le problème (1) est considéré avec $N=2$ et $g=0$, il a montré l'existence d'une suite de solutions radiales et non radiales, la preuve de

ce résultat se base sur une approche variationnelle avec application du lemme du col (mountain pass theorem). Et dans des travaux plus récents, F.Alessio, W.Dambrosio [2] ont généralisé ce résultat au cas où $N > 2$.
Une question naturelle est de savoir si le nombre infini de solutions persiste pour le problème (1) sous l'effet de perturbations de l'équation originale. c'est à dire lorsque $g \neq 0$ donc, dans le cas de perte de symétrie.
Le premier résultat dans cette direction pour $N \geq 2$ est un théorème de perturbation de A. Ambrosetti [4] indiquant, dans le cas où $f(x, u) = |u|^{k-1} u$, $k > 1$, que pour tout nombre $\nu \in \mathbb{N}$, il existe $\epsilon_\nu > 0$, de telle sorte que si $\|g\|_{L^2} < \epsilon_\nu$, alors le problème (1) possède au moins ν solutions distinctes. Un résultat plus général de multiplicité-perturbation a été obtenue par A. Bahari, H. Berestycki [7]. Nous citons également [26] et [27].
Remarquons que l'existence d'au moins une solution de (1) pour g assez petit est une application directe du théorème de fonctions implicites.
Le résultat que nous obtenons pour (1) dans ce travail peut être considéré comme une réponse à la question mentionnée ci-dessus dans le cas de solutions non radiales (cf. 2.1.1).
Ce mémoire se présente comme suit :
Dans le premier chapitre, nous introduisons les outils nécessaires à la suite de notre travail. Dans le second, nous montrerons l'existence de solutions non radiales pour le problème de Dirichlet dans le cas de perte de symétrie .
Dans le chapitre 3 nous présentons les démonstrations détaillées d'un résultat de [18] pour un problème de Dirichlet associé au p- Laplacien, Nous appliquerons une methode variationnelle pour établir l'existence et la multiplicité des solutions non radiales.
Finalement, parmi les nombreuses références bibliographiques, nous avons choisi à la fin de ce travail un nombre assez consistant permettant au lecteur interéssé d'avoir accés à quelques sources que nous avons utilisées pour réaliser cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 Espaces fonctionnels 12
1.1.1 Espaces de Lebesgue 12
1.1.2 Espace de Sobolev 13
1.2 Quelques définitions et théorèmes 16
1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory 16
1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela 16
1.3 Approche variationnelle 17
1.3.1 Formulation variationnelle 18

Dans ce chapitre, nous dressons une liste non exhaustive des principales notations et outils utilisés tout au long de ce mémoire. D'autres, plus spécifiques, seront introduites dans le texte. Nous rappelons également divers résultats généraux qui pour la plupart sont accompagnés de références à la bibliographie et seront utilisés dans le texte de manière transparente.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Nous commençons par introduire les espaces de Lebesgue.
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, $D(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

L^p est muni de la norme $\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$. Cette norme le rend complet, c'est donc un espace de Banach.
Pour $p = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable; } ess \sup |u| < +\infty\},$$

$L^\infty(\Omega)$ est muni de la norme suivante: $\|u\|_\infty = ess\sup\limits_{\Omega} |u|$; avec

$$ess \sup |u| = \inf\{C > 0; \ \ |u(x)| \le C \quad p.p \text{ dans } \Omega\}.$$

$L^p(\Omega)$ est reflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec q le conjugué de p c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hôlder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \le p \le \infty$ et q le conjugué de p alors :

$$f.g \in L^1(\Omega) \text{ et } \int_\Omega |f.g| \, dx \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

lemme de Fatou

Lemme 1.1.1

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(\Omega)$ telle que , pour chaque n, $f_n(x) \ge 0$ $\ p.p$ sur Ω,
Si $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$,pour tout $x \in \Omega$; alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega f(x) \, dx \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx,$$

i.e.

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x) \, dx \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega f_n(x) \, dx.$$

1.1.2 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont omniprésents dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Il s'avère donc judicieux d'en faire une brève présentation avant d'aborder ces équations. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de Kavian [22] et de Brezis [11], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev se référer à [24].
Pour Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_J} \in L^p(\Omega), \text{ pour } J \in \{1, ..., N\} \right\},$$

où les dérivées sont au sens des distributions.
$W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{J=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_J} \right\|_p , \tag{1.1}$$

est un espace de Banach.
L'espace $W^{1,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il est noté $H^1(\Omega)$.
$W_0^{1,p}(\Omega)$ denote la complétion de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ i.e $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$, pour $1 \leq p < +\infty$. Où $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, ensemble des fontions de classe C^∞ a support compact dans Ω.
Comme, l'espace $D(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ (pour $1 \leq p < +\infty$), le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ peut être identifié à un sous-espace de l'espace des distributions $D'(\Omega)$ par:

$$W^{1,q}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'; \ q \text{ conjugué de } p.$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 1.1.2 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est :*

un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.
un espace réflexif pour $1 < p < \infty$.
un espace separable pour $1 \leq p < \infty$.

Remarque 1 *Soit $1 < p < \infty$, l'espace de Sobolev $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions T-périodiques ayant une dérivée faible $u' \in L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $W_T^{1,p}(\mathbb{R})$ est muni de la norme*

$$\|u\|_{W_T^{1,p}(\mathbb{R})} = \left[\int_0^T |u(t)|^p \, dt + \int_0^T |u'(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Les injections de Sobolev

Les injections de Sobolev sont très utilisées lorsqu'on étudie les équations aux dérivées partielles. Elles fournissent des inégalités entre les normes des espaces de Sobolev et les normes des espaces de Lebesgue. Pour l'espace $W^{k,p}(\Omega)$, on a le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Soit Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$. Soient $k \geq 1$ et $p \in [1, +\infty)$. Alors*

1. Si $\frac{1}{p}-\frac{k}{N}>0$, on a $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{k}{N}$.
2. Si $\frac{1}{p}-\frac{k}{N}=0$, on a $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ pour tout $q\in[p;+\infty[$, (mais pas pour $q=+\infty$).
3. Si $\frac{1}{p}-\frac{k}{N}<0$, on a $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$.
Toutes ces injections sont continues.
Sans hypothèse de régularité sur Ω, les injections sont vraies localement : $W^{k,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}_{loc}(\Omega)$ elles restent globalement vraies si on remplace $W^{k,p}(\Omega)$ par $W_0^{k,p}(\Omega)$. Concernant la compacité des injections précédentes, on a le théorème suivant.

Théorème 1.2 ***(Rellich-Kondrachov*** ([11])***)***

Ω un domaine ouvert borné de classe C^1 dans $\mathbb{R}^N$. On a,
si $p<N$ alors $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ pour tout $q\in[1,p^*[$, où $p^*=\frac{N.p}{N-p}$,
si $p>N$ alors $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{q}(\Omega)$ pour tout $q\in[1,+\infty[$.
Pour tout $q\in]1,+\infty[$, $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\bar{\Omega}\right)$.

Remarque 2 ***a)*** *La condition sur le domaine Ω est nécessaire, si Ω n'est pas borné alors les injections ne sont pas compactes en général comme le démontre le contre exemple suivant : Soit $\phi\in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que, $\phi\geq 0$, on pose $\phi_n(x)=\phi(x+ne)$, $e=(1,1,1,...,1)$, il est facile de voir que $\phi_n\to 0$ p.p. Et $\|\phi_n\|_{L^q}=\|\phi\|_{L^q}>0$.*
b) *On note $\alpha(N,q)>0$, la constante de Sobolev de l'injection compacte de $W_0^{1,p}(\Omega)\circlearrowleft L^{q}(\Omega)$, avec $q\in[1,p^*)$ où $p^*=\frac{Np}{(N-p)}$. Ainsi, pour chaque $u\in W_0^{1,p}$, nous avons*
$$\|u\|_{L^q}\leq\alpha(N,q)\|u\|. \tag{1.2}$$

Inégalitè de Poincaré

l'inégalité de Poincaré est un résultat de la théorie des espaces de Sobolev. Cette inégalité permet de borner une fonction à partir d'une estimation sur ses dérivées et de la géométrie du domaine sur lequel elle est considérée.
Soit p, tel que $1\leq p<\infty$ et Ω un ouvert borné. Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$,nous avons
$$\|u\|_p\leq C\|\nabla u\|_p. \tag{1.3}$$

Remarque 3 *L'inégalité de Poincaré permet d'établir l'équivalence sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ entre la norme* 1.1 *et celle définie par*
$$\|u\|=\sum_{k=0}^{m}\left\|\nabla^k u\right\|_p.$$

Il est évident que l' inégalité (1.3)*ne peut être généralisée à* $W^{m,p}(\Omega)$. *Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur* Ω *borné (ou de mesure finie).*

1.2 Quelques définitions et théorèmes

1.2.1 Fonction L^p-Carathéodory

Définition 1.2.1 *Nous rappelons que* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction* L^p*-Carathéodory si*
(a) $f(x,u)$ *est dans* $L^p(\Omega)$ *pour chaque* $u \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x,u)$ *est continue presque par tous* $x \in \Omega$;
(c) *Pour chaque* $\rho > 0$ *il existe une fonction* $l_\rho \in L^p(\Omega)$ *telle que p.p* $x \in \Omega$.

$$\sup_{|u|\leq\rho} |f(x,u)| \leq l_\rho(x).$$

1.2.2 Théorème d'Ascoli-Arzela

Définition 1.2.2 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions définies sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On dit que la suite* $(f_n)_n$ *est équicontinue ssi :*

$$\forall x \in I,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in I,\ \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon.$$

Autrement dit, toutes les fonctions (f_n) sont continues sur I, et elles sont continues "de la même façon".
La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Ascoli-Arzela :

Théorème 1.3 ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)***

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle fermé borné I, à valeurs réelles. On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue, et qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $|f_n(x)| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$.
Alors on peut extraire une sous-suite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur I vers une fonction continue f.

Théorème 1.4 *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de* L^p*et* $f \in L^p$, *tels que*

$$\|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \text{ lorsque } u \to \infty.$$

Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que*
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *p.p sur* Ω,
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ *pour tout* k *et p.p sur* Ω *avec* $h \in L^p(\Omega)$.

Convergence forte et Convergence faible

Soient X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $(u_n)_n$ une suite dans X.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u dans X si $\|u_n - u\|_E \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Définition 1.2.3 *$(u_n)_n$ est dite convergente faiblement vers u si $\langle u_n, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ $\forall v \in X'$ dual de X et elle est notée par $u_n \rightharpoonup u$.*

Définition 1.2.4 *On dit que $C \subset X$ est faiblement fermé si pour toute suite $(u_n) \subset C$ telle que : $u_n \rightharpoonup u$ alors $u \in C$.*

Théorème 1.5 *Un convexe C de X est faiblement fermé si et seulement si il est fortement fermé.*

Dans le cas particulier de $X = W_T^{1,p}$, nous avons le résultat suivant

Proposition 1.2.1 *Si une suite $(u_k)_k$ converge faiblement vers u dans $W_T^{1,p}$, alors $(u_k)_k$ converge uniformement vers u sur $[0,T]$. Et il existe $c > 0$ telle que pour $u \in W_T^{1,p}$,*

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W_T^{1,p}(\Omega)} \text{ où } \|u\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.$$

Théorème 1.6 ***(Eberlein–Šmulian)***

Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si de toute suite bornée (x_n) de X, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans X.

1.3 Approche variationnelle

Dans ce mémoire, nous nous sommes basées sur l'approche varitionnelle de problèmes de Dirrichlet associés à des EDP elliptiques.
Considérons un problème de Dirichlet associé a une EDP elliptique de type :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}, \tag{1.4}$$

où L est un opérateur uniformément elliptique, Ω est un domaine régulier dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 1$.Les solutions de (1.4) sont cherchées comme points critiques de fonctionnelles réelles définies sur un espace de Banach X.
Dans le cas où f est minorée ou majorée, il est raisonnable d'essayer de montrer que le minimum ou le maximum est atteint. Pour plus de détails, nous référons le lecteur à [27] et [26].

1.3.1 Formulation variationnelle

Au problème (1.4) on associe une fonctionnelle dite fonctionnelle d'énergie, définie par $J : X \to \mathbb{R}$,

$$J(u) = \int_\Omega \langle Lu, u\rangle - F(x,u)\,dx,$$

où

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds.$$

Points critiques

Définition 1.3.1 *Soit J une fonctionnelle de classe C^1 définie sur X à valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que $u \in X$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$.*
La valeur c est dite valeur critique de J s'il existe un point critique u de dans X tel que : $J(u) = c$.

Solution faible

Définition 1.3.2 *u est dite solution faible du problème (1.4) si*

$$\int_\Omega Lu.\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x).\varphi(x)\,dx \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Définition 1.3.3 *Une fonction $J : X \to \mathbb{R}$, est dite semi-continue inférieurement et on la note (s.c.i), en $x \in X$ si, pour toute suite $\{x_k\} \in X$ convergente vers x,*

$$\liminf_{x_k \to x} J(x_k) \geq J(x).$$

Définition 1.3.4 *Une fonctionnelle J est dite coercive si :* $\lim\limits_{\substack{\|u\| \to +\infty \\ u \in E}} J(u) = +\infty$.

Théorème 1.7 ***(minimisation directe** [27]) Si X est réflexif, $M \subset X$ un sous ensemble faiblement fermé de X. et $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, coercive et faiblement semi continue inférieurement sur M, alors J est borné inférieurement dans M et atteint son minimum dans M.*

Définition 1.3.5 ***(Suite minimisante)** Une suite minimisante pour une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est une suite $(w_k)_k$ telle que $J(w_k) \to \inf J$ quand $k \to \infty$.*

Chapitre 2

Problème de Laplacien avec terme de perturbation

Sommaire

2.1 Introduction **19**

2.1.1 Notion de solution non radiale 20

2.2 Formulation variationnelle **20**

2.3 Résultat principal **21**

.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'établir l'existence d'une suite de solutions faibles non radiales pour le problème suivant,

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) + g(x), & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.1}$$

où, Ω est la boule unité de $\mathbb{R}^N$ $(N > 2)$, $g \in L^2$ et f vérifie les hypothèses suivantes :

(H_1) (i) $f \in C^{0,\alpha}([0,1], [-\epsilon_0, \epsilon_0])$ pour $\alpha \in (0,1)$ et $\epsilon > 0$, et impaire en u c.à.d

$$f(|x|, u(x)) = -f(|x|, -u(x)) \text{ pour } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\lim\limits_{u \to 0} \frac{f(|x|,u)}{u} = +\infty$, pour presque tous $x \in \Omega$.

2.1.1 Notion de solution non radiale

Nous commençons par introduire la paramétrisation standard de $\Omega = B(0,R)$ en coordonnées polaires $(r,\theta_1,...,\theta_{N-1})$,

$$\Omega = \{(r,\theta_1,...,\theta_{N-1})\,;\ r\in[0,R]\,,\ \theta_i\in[0,\pi]\,,\ i=1,...,N-2,\ \theta_{N-1}\in[-\pi,\pi]\}\,. \tag{2.2}$$

Définition 2.1.1 *On appelle solution non radiale de* (1) *toute solution qui ne dépend pas seulement de r, mais de θ_i aussi.*

Définition 2.1.1 *[28] Une valeur propre est dite radiale respectivement non radiale si sa fonction propre associée est radiale respectivement non radiale.*

2.2 Formulation variationnelle

Nous définissons la fonction F par:

$$F(|x|,u) := \int_0^u f(|x|,s)\,ds.$$

Et nous considérons la fonctionnelle associée à (2.1) par,

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(|x|,u) - g(x).u(x)\right]dx, \tag{2.3}$$

La fonctionnelle J est bien définie dans $W_0^{1,2}(\Omega)$. J est une fonctionnelle différentiable pour tout $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, de dérivée $J'(u) \in \left(W_0^{1,2}\right)^*(\Omega)$ qui, pour tout $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, est définie par,

$$J'(u)(v) = \int_\Omega |\nabla u|\,\nabla v dx - \int_\Omega f(|x|,u(x))v dx - \int_\Omega g(x)\,v dx. \tag{2.4}$$

Les solutions faibles de (2.1) sont cherchées comme points critiques de la fonctionnelle (2.3).

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(|x|,u) - g(x).u(x)\right]dx, \tag{2.5}$$

la fonctionnelle d'énergie associée au
problème (2.1) (le terme perturbateur g fait perdre la parité à J).

La fonctionnelle

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}(J(u) + J(-u)), \tag{2.6}$$

est paire, admet une suite des points critiques (Résultat obtenu par Rabinowitz th1 [?], Van Groesen [29] et F.A Lessio et W. Dambresio [2]).
On a :

$$\Psi(u) \leq \max(J(u), J(-u)) \ \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

2.3 Résultat principal

Nous avons un résultat d'existence et de multiplicité de solutions nonradiales pour le problème considéré.

Théorème 2.1 *: Sous les hypothèse $(H_1)(i) - (ii)$ et $g \in L^2$ le problème* (2.1) *admet une suite $(u_k)_{k\geq 1}$ de solutions faibles non radiales dans $W_0^{1,2}(\Omega)$.*

Preuve: Pour ce, nous commençons par modifier le problème initial (2.1) en (2.7)

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f}(|x|, u) + g(x) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{2.7}$$

où $\tilde{f}$ est un prolongement par continuité impaire de f vérifiant:
(H_1') $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{\tilde{f}(r,u)}{u} = 0$, uniformément en $r \in [0,1]$.
Considérons le problème modifié (2.7), nous montrerons par la méthode directe du calcul variationnel, qu'il existe une suite $(u_k)_k$ de solutions non radiales telles que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_\infty = 0. \tag{2.8}$$

De (2.8) nous déduirons que pour k assez grand les fonctions $(u_k)_k$ sont des solutions du problème initial (2.1).
On peut donner un exemple d'un tel prolongement.
Exemple:
Soit le prolongement par continuité et imparité suivant : pour $0 < \alpha < 1$

$$\tilde{f}(r,\zeta) = \begin{cases} f(r,\zeta) & -\epsilon_0 \leq \zeta \leq \epsilon_0 \\ a(r)\zeta^\alpha + b(r) & |\zeta| > \epsilon_0 \end{cases}$$

$a(r)$ et $b(r)$ choisis de tel sorte que la continuité en $\pm\epsilon_0$ est obtenue ainsi que l'imparité et $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{\tilde{f}(r,u)}{u} = 0$.

Soit

$$\widetilde{J}(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \widetilde{F}(|x|, u) - g(x).u(x)\right] dx, \tag{2.9}$$

où

$$\widetilde{F}(|x|, u) = \int_0^u \widetilde{f}(|x|, v)\, dv.$$

Pour obtenir la multiplicité des solutions non radiales on cherchera des solutions périodiques en θ_{N-1} sur les ensembles E_k, $k = 1, 2, ...$définis par

$$E_k = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\; u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, .) \text{ impaire, et } \frac{2\pi}{k} \text{ périodique}\right\}. \tag{2.10}$$

Lemme 2.3.1 *Supposons que* $(H_1)(i)$ *et* (H_1') *est vérifiée alors :*
1- *L'ensemble* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.
2- *La fonctionnelle* $\widetilde{J}$ *est semi continue inferieurement et coercive dans* E_k.

Preuve: ***1***- *L'affirmation 1 du lemme* (3.3.1), *est une conséquence de la nature de l'ensemble* E_k *, qui est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé (cf.* (1.5) *chap1).*
E_k *est convexe en effet, soit* $u, v \in E_k$

$$\begin{aligned} & tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) \\ = \; & -\left[tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)\, v(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})\right] \end{aligned}$$

Donc $tu + (1-t)\, v$ *est impaire.*

$$\begin{aligned} & tu\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) + (1-t)\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) \\ = \; & tu(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) + (1-t)(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \end{aligned}$$

Donc $tu + (1-t)\, v$ *est périodique. Alors* $tu + (1-t)\, v \in E_k$ $\forall t \in [0, 1]$. *Par conséquent* E_k *est convexe.*
Montrons que E_k *est fortement fermé:*
Soit $(u_n)_n \subset E_k$ *tel que* $u_n \to u$, *montrons que* $u \in E_k$.
Nous avons $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *car* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *est complet*

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$\|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

d'aprés théorème (*cf.* (1.4) *chap1*) *nous obtenons*

$$u_{n_k} - u \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad p.p \ sur \ \Omega.$$

Nous avons $x \in \Omega$, $x = (r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1})$

$$\begin{aligned} u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) &= \lim_{n\to\infty} u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, -\theta_{N-1}) \quad p.p \ sur \ \Omega \\ &= \lim_{n\to\infty} -u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \\ &= -\lim_{n\to\infty} u_n(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \\ &= -u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) &= \lim_{n\to\infty} u_n\left(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1} + \frac{2\pi}{k}\right) \\ &= u(r, \theta_1, ..., \theta_{N-2}, \theta_{N-1}), \end{aligned}$$

donc $u \in E_k$.
E_k *est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé.*
2- *Vérifions la semi continuité inferieurement de* $\widetilde{J}$. *Soit* $(u_n) \subset E_k$, *telleque* $u_n \rightharpoonup u$ *montrons que* $\widetilde{J}(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \widetilde{J}(u_n)$

$$\widetilde{J}(u_n) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} |\nabla u_n|^2 - \widetilde{F}(|x|, u_n) - g(x).u_n(x)\right] dx,$$

$W_0^{1,2}(\Omega)$ *étant un espace de Banach, alors la norme* $\|.\|$ *est faiblement semi continue* [31] *nous avons*

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

en utilisant l'hypothèse $(H_1)(i)$ *et le lemme de Fatou* (*cf.* (1.1.1) *chap1*) *entraine :*

$$\int_\Omega \widetilde{F}(|x|, u(x))\, dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega \widetilde{F}(|x|, u_n(x))\, dx.$$

De la, nous obtenons

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(u) &\leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega \widetilde{F}(|x|, u_n(x))\, dx \\ &\quad - \lim_{n\to\infty} \inf \int_\Omega g(x).u_n(x)\, dx, \end{aligned}$$

$$\widetilde{J}(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \widetilde{J}(u_n).$$

Ce qui entraine que la fonctionnelle $\widetilde{J}$ est semi continue inferieurement.
Montrons maitnant que $\widetilde{J}$ est coercive dans E_k, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E_k}} \widetilde{J}(u) = +\infty$.
D'après (H_1') on a:

$$\lim_{|u|\to+\infty} \frac{\widetilde{f}(r,u)}{u} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta(\epsilon) > 0;\ |u| > \delta(\epsilon) \Longrightarrow \frac{\widetilde{f}(r,u)}{u} \leq \epsilon,$$

donc pour tout $\epsilon > 0$, $\widetilde{f}(r,u) \leq \epsilon u$ si $|u| > \delta(\epsilon)$;
ce qui entraine que $\widetilde{F}(r,u) \leq \frac{\epsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$ pour $|u| > \delta(\epsilon)$.
d'aprés $(H_1)(i)$ on a f est continue en u, alors pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$$\widetilde{F}(r,u) \leq \frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \max_{|u|\leq\delta}\left|\widetilde{F}(r,u)\right|.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega \widetilde{F}(r,u)\,dx \leq \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{2}|u|^2 + \max_{|u|\leq\delta}\left|\widetilde{F}(r,u)\right|\right)dx = \frac{\epsilon}{2}.\|u\|^2_{L^2} + C,$$

avec, $C = C(\delta) := \int_\Omega \max_{|u|\ \leq\delta}\left|\widetilde{F}(r,u)\right| dx < +\infty.$
D'autre part utilisant (H_2) et l'inégalité de Hőlder
(cf. (1.1.1) chap1), nous obtenons,

$$\int_\Omega g(x)\,u(x)\,dx \leq \|g\|_{L^2}\|u\|_{L^2}. \tag{2.11}$$

Donc pour $|u|$ assez grand on a:

$$\widetilde{J}(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\epsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - C(\delta) - \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)};$$

Or $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$
Maintenant, par application du théorème (cf. (1.2) chap1) nous obtenons

$$\|u\|_{L^2} \leq c_1\|u\|_{W_0^{1,2}} \quad \textit{tel que } c_1 > 0,$$

ce qui entraine,

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\epsilon.c_1}{2}\|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} - c_2\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - C(\delta) \\ &\geq \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\left(\frac{1-\epsilon.c_1}{2}\right) - c_2\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} - C(\delta), \end{aligned}$$

alors, pour $(\frac{1-\epsilon.c_1}{2}) > 0$, $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} \widetilde{J}(u) = +\infty$. *Cela implique que* $\widetilde{J}$ *est coercive.*
Du (2.3.1) *on a* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *et* $\widetilde{J}$ *est semi continue inferieurement et coercive dans* E_k. *Nous déduisons que* $\widetilde{J}$ *est bornée inferieurement.*
Posons $m_k = \inf\limits_{E_k} \widetilde{J}$. ■

Le lemme suivant, nous donne un ordre sur, $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Lemme 2.3.2 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$-\infty < m_1 \leq m_k < 0.$$

Preuve: *1- On'a* $m_k = \inf\limits_{E_k} \widetilde{J}$ *et la fonctionnelle* $\widetilde{J}$ *est coercive c'est -à-dire* $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} \widetilde{J}(u) = +\infty$.
D'où

$$-\infty < m_k = \inf_{E_k} \widetilde{J}(u), \ \forall k \in \mathbb{R}.$$

2- Et $u \in E_k$, *donc* u *est impaire et* $\frac{2\pi}{k}$ *périodique en* θ_{N-1}, *en particulier, elle est est impaire et* $k\frac{2\pi}{k} = 2\pi$ *périodique en* θ_{N-1}
ce qui entraine que $u \in E_1 \Rightarrow E_k \subset E_1$.
De plus nous avons:

$$\inf_{E_1} \widetilde{J}(u) \leq \inf_{E_k} \widetilde{J}(u),$$

alors:

$$m_1 \leq m_k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ *nous considèrons l'ensemble suivant :*

$$\Omega_k := \left\{ (r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) \in \Omega \backslash \theta_{N-1} \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right) \right\}.$$

Soit λ_1^k *la première valeur propre de* $-\Delta$ *dans* $W_0^{1,2}(\Omega_k)$ *et* v_1^k *la fonction propre associée à* λ_1^k *(cf. [6]).*
On considère v_k *le prolongement impaire et périodique de* v_1^k *dans* Ω. *Alors :* $v_k \in E_k \cap L^\infty$ *et on a :*

$$\int_\Omega |\nabla v_k|^2 \, dx = 2k \int_{\Omega_k} \left|\nabla v_1^k\right|^2 dx = 2k\lambda_1^k \int_{\Omega_k} \left|v_1^k\right|^2 dx = \lambda_1^k \int_\Omega |v_k|^2 \, dx,$$

On applique (H_1) (ii) *on a :* $f = \widetilde{f}$ *alors au voisinage de zéro. Alors*

$\lim\limits_{u\to 0}\frac{\widetilde{f}(r,u)}{u} = +\infty \Leftrightarrow$ *pour* $\lambda_1^k > 0$; $\exists\epsilon_k \in (0,\epsilon_0)\,,\ |u| < \epsilon_k \Rightarrow \frac{\widetilde{f}(r,u)}{u} > 2\lambda_1^k \Rightarrow$
$\int_0^u \widetilde{f}(r,s)\,ds > \int_0^u 2\lambda_1^k v dv.$
Alors:

$$\widetilde{F}(r,u) \geq \int_0^u 2\lambda_1^k v dv = \lambda_1^k |u|^2 .$$

Soit $\epsilon_k \in (0,\epsilon_0)$ *de* (H_1) (ii) : $\widetilde{F}(r,u) \geq \lambda_1^k |u|^2$ *pour* $r \in [0,1]$ *et* $|u| \leq \epsilon_k$.
On a:

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= \frac{1}{2}\left(\widetilde{J}(u) + \widetilde{J}(-u)\right)\\ \Psi(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega \widetilde{F}(r,u(x))\,dx.\end{aligned}$$

Soit $s \in \left(-\frac{\epsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}, \frac{\epsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}\right)$, *alors* $sv_k \in E_k$. *(par définition de* E_k*)*
et

$$\begin{aligned}\Psi(u) &= s^2\left(\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla v_k|^2\,dx - \lambda_1^k \int_\Omega |v_k|^2\,dx\right) < 0,\\ \forall s &\in \left(-\frac{\epsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}, \frac{\epsilon_k}{\|v_k\|_{L^\infty}}\right);\end{aligned}$$

et par suite $\widetilde{J}(sv_k) < 0$ *ou* $\widetilde{J}(-sv_k) < 0$, *ce qui entraine* $\inf\limits_{E_k} \widetilde{J}(u) < 0$.
Delà nous concluons que $m_k < 0$. ■

Lemme 2.3.3 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $u_k \in E_k \setminus \{0\}$, *solutions non radiales faibles de* (2.1) *telles que* $\widetilde{J}(u_k) = m_k$. *De plus, il existe* $M > 0$ *telle que*

$$\|u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Preuve: *L'ensemble* E_k *faiblement fermé convexe, et la fonctionnelle* $\widetilde{J}$ *est semi continue inferieurement et coercive dans* E_k, *par application du théorème (cf.* (1.7) *chap1) nous concluons que* $\widetilde{J}$ *est bornée inférieurement est atteint son minimum sur* E_k *c'est-à-dire il existe* $u_k \in E_k$ *tel que* $m_k = \inf\limits_{E_k}\widetilde{J}(u) = \widetilde{J}(u_k)$.
Piusque $\widetilde{J}(0) = 0$ *et* $m_k < 0$ *alors* $u_k \neq 0$ *donc* $\widetilde{J}$ *atteint son minimum en* $u_k \in E_k \setminus \{0\}$.

$\begin{cases} u_k \in E_k \\ u_k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow u_k$ *est impaire et* $\frac{2\pi}{k}$ *périodique en* θ_{N-1} *donc* u_k *et application du* (2.3.2) *on a:*

$$m_1 \leq m_k = \widetilde{J}(u_k) < 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

en utilisant le fait que $\widetilde{J}$ *est coercive; on conclut qu'il ,existe* $M > 0$ *telle que*

$$\|u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

La suite $(u_k)_k$ *des solutions non radiales du problème* (2.1) *est bornée dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Lemme 2.3.4 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_\infty = 0,$$

où $\|u_k\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u_k(x)|$.

Preuve: *Nous allons montrer que la suite de solutions non radiales* (u_k), *obtenue par le théorème* (2.1), *converge vers* 0.
Ainsi, nous établissons que de toute sous-suite de (u_k), *il est possible d'extraire une sous-suite convergente vers zéro, ce sera suffisant pour prouver que toute la suite* (u_k) *converge vers zéro.*
Soit (u_{k_n}) *une suite extraite de* (u_k). *Utilisant* (2.13), *et la réflexivité de l'espace de Sobolev* $W_0^{1,2}(\Omega)$ *nous en déduisons qu'il existe une sous-suite* $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ *de* (u_{k_n}) *de telle sorte que* $u_{k_{n_j}} \rightharpoonup u$ *dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$. *Du fait que les ensembles* E_k *sont faiblement fermé dans* $W_0^{1,2}(\Omega)$, $u \in E_k$. *Le théorème Ascoli- Arzelà* (*cf.* (1.3) *chap1*), *entraine la convergence forte de* $\left(u_{k_{n_j}}\right)$ *vers* u.
Nous allons prouver que $u \equiv 0$, *pour simplifier l'écriture, notons* $u_j := u_{k_{n_j}}$.
Pour chaque $y \in [0,R]\times[0,\pi]^{N-2}$ *rappelons que la fonction* $u_j(y,.)$ *est* $\frac{2\pi}{j}$*périodique.*
Maintenant, supposons au contraire que $u \neq 0$ *alors il existe* $y_0 \in [0,R] \times [0,\pi]^{N-2}$ *et* $\theta_0 \in [-\pi,\pi]$ *tel que* $u(y_0,\theta_0) \neq 0$. *Posons,*

$$\begin{cases} \epsilon := |u(y_0,\theta_0)| \\ v_j(\theta) = u_j(y_0,\theta) \\ v(\theta) = u(y_0,\theta) \end{cases}.$$

Par la continuité de v, *il existe un intervalle* $J_0 \subset [-\pi,\pi]$, *tel que* $|v(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tout* $\theta \in J_0$. *Par conséquent, et par la convergence uniforme de* v_j *vers* v, *nous déduisons qu'il existe* $j_0 \in \mathbb{N}$ *de sorte que, pour chaque* $j \geq j_0$, $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tous les* $\theta \in J_0$.
D'autre part, pour $j \geq j_0$. *Mais si* $|J_0| > \frac{2\pi}{j}$, *alors* J_0 *doit contenir au moins un zéro de* v_j.
Ce-ci est une contradiction avec $|v_j(\theta)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ *pour tous les* $\theta \in J_0$. ■

Pour $\epsilon > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$, telles que $\|u_k\|_\infty < \epsilon_0$ pour tout $k \geq k_0$

$$f(|x|, u_k(x)) = \widetilde{f}(|x|, u_k(x)) \ \forall x \in \Omega.$$

D'après la définition du prolongement :
$f = \widetilde{f}$ pour $u \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$.
D'après le lemme (2.3.3), pour $\epsilon_0 > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\|u_k\|_\infty < \epsilon_0$, $\forall k \geq k_0$. Or sur $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$, f et$\widetilde{f}$ coïncident donc u_k est solution faible non radiale du problème initial et la preuve du théorème se trouve achevée. ■

Remarque 4 *On a $h(x,u) = f(r,u) + g(x)$ /$h \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, espace de Hőlder.*
On montre que toute solution faible $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ est en fait solution classique.
En utilisant la technique "Bootstarping procedure"
Pour h vérifiant :

$$h(x,u) \leq a_1 + a_2 |u|^p, \ \ 0 < p < 1.$$

$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, l'injection de Sobolev donne $u \in L^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = \frac{N+1}{N+2}$.
L'opérateur de Nemitski $u \to h(x,u)$ étant continue de $L^{2^*}(\Omega)$ vers $L^\beta(\Omega)$ avec $\beta = \frac{2^*}{p} = \tau \frac{2N}{N+2}$ on a $h(x,u(x)) \in L^\beta(\Omega)$.
Puisque

$$-\Delta u = f(x,u(x)) + g(x),$$

on obtient $u \in W_0^{2,\beta}(\Omega)$.
Si $2\beta \leq N$ on répète les étapes précédentes : $u \in W_0^{2,\beta}(\Omega)$.
L'injection de Sobolev donne $u \in L^{\beta^*}(\Omega)$ où $\beta^* = \frac{\beta N}{N-2\beta} > \tau \frac{2N}{N+2}$.
La continuité de l'opérateur Nemitski donne $h(x,u(x)) \in L^\gamma(\Omega)$ avec $\gamma = \frac{\beta^*}{p} > \tau\beta$.
On déduit $u \in W_0^{2,\gamma}(\Omega)$.
Il suffit de répéter les étapes précédentes autant de fois que cela sera nécessaire pour obtenir $2\gamma > N$.
L'injection continue de Sobolev: $W_0^{2,\gamma}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$.
Si $h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ en posant

$$h(x) = f(x,u(x)) + g(x),$$

on a $h(.) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ l'estimation de Schauder donne $h(.) \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
Maintenant nous utilisons l'injection compacte de $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ dans $C^2(\overline{\Omega})$ pour conclure que u est une solution classique du problème (2.1).

Chapitre 3

Problème de P-Laplacien avec terme de perturbation

Sommaire

3.1 Formulation du problème 29
3.2 Formulation variationnelle 30
3.3 Résultat principal 30

.

3.1 Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(|x|, u) + g(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \Omega \end{cases}, \tag{3.1}$$

où $\Omega = B(0, R)$ est la boule de $\mathbb{R}^N$, de centre 0 et de rayon R; $N > 2$, $1 < p < N$, $|x| := \sqrt{\sum_{J=1}^{N} x_J^2}$, est la norme euclidienne de x dans $\mathbb{R}^N$, g et f deux fonctions vérifiant les hypothèses suivantes

(H_1) (i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction de Carathéodory, impaire en u c.à.d

$$f(|x|, u(x)) = -f(|x|, -u(x)) \text{ pour } x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\lim\limits_{|u|\to+\infty} \frac{f(r,u)}{|u|^{p-1}} = 0$, pour presque tous $r \in [0, R]$.

(iii) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{f(r,u)}{|u|^{p-1}} = +\infty$, pour presque tous $r \in [0, R]$.

(H_2) $g:\Omega\to\mathbb{R}$, est une fonction bornée de $L^q(\Omega)$, tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

La fonction g constitue une perturbation de la symetrie de l'EDP $-\Delta_p u = f(|x|,u)$.

3.2 Formulation variationnelle

Nous définissons la fonction F par:

$$F(|x|,u) := \int_0^u f(|x|,s)\,ds.$$

Et nous considérons la fonctionnelle associée à (3.1) par,

$$J(u)=\int_\Omega \left[\frac{1}{p}|\nabla u|^p - F(|x|,u) - g(x).u(x)\right]dx, \tag{3.2}$$

La fonctionnelle J est bien définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. J est une fonctionnelle différentiable pour tout $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$, de dérivée $J'(u)\in\left(W_0^{1,p}\right)^*(\Omega)$ qui, pour tout $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, est définie par,

$$J'(u)(v)=\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}\nabla v dx - \int_\Omega f(|x|,u(x))v dx - \int_\Omega g(x)\,v dx. \tag{3.3}$$

Les solutions faibles de (3.1) sont cherchées comme points critiques de la fonctionnelle (3.2).

3.3 Résultat principal

Nous avons un résultat d'existence et de multiplicité de solutions nonradiales pour le problème considéré.

Théorème 3.1 *: Sous les hypothèse* (H_1), (H_2) *le problème* (3.1) *admet une suite* $(u_k)_{k\geq1}$ *de solutions non radiales dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve: Pour prouver ce résultat, nous adaptons une approche variationnelle. Évidemment, si $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ est un point critique de la fonctionnelle J (3.2), alors u est une solution faible de problème (3.1).
Pour obtenir la multiplicité de solutions non radiales nous cherchons des solutions périodiques en θ_{N-1} sur les ensembles E_k, $k=1,2,\ldots$définis par

$$E_k=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\ u(r,\theta_1,\ldots,\theta_{N-2},.)\ \text{impaire, et } \frac{2\pi}{k}\ \text{périodique}\right\}. \tag{3.4}$$

Les ensembles E_k, $k \geq 1$, sont des contraintes naturelles pour le problème (3.1), dans le sens que chaque point critique de la fonctionnelle d'énergie J associée à (3.1), sur E_k, est un point critique de J, sur tout l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ (cf. [29]). Pour prouver l'existence d'un point critique pour la fonctionnelle J, sur E_k, nous considérons et montrons quelques résultats auxiliaires.

Lemme 3.3.1 *Supposons que* $(H_1)\,(i)-(ii)$ *est vérifiée alors :*
1- *L'ensemble* E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $k \geq 1$.
2- *La fonctionnelle* J *est semi continue inferieurement et coercive dans* E_k.

Preuve: ***1-*** *L'affirmation 1 du lemme* (3.3.1), *est une conséquence de la nature de l'ensemble* E_k *, qui est convexe et fortement fermé alors* E_k *est faiblement fermé (cf.* (1.5) *chap1).*
2- *Vérifions la semi continuité inferieurement de* J. *Soit* $(u_n) \subset E_k$, *telleque* $u_n \rightharpoonup u$ *montrons que* $J(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n)$

$$J(u_n) = \int_\Omega \left[\frac{1}{p}|\nabla u_n|^p - F(|x|, u_n) - g(x).u_n(x)\right] dx,$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ *étant un espace de Banach, alors la norme* $\|.\|$ *est faiblement semi continue* [31], *utilisant l'hypothèse* $(H_1)\,(i)$ *et le lemme de Fatou* (*cf.* (1.1.1) *chap1*), *nous obtenons que la fonctionnelle* J *est semi continue inferieurement.*
Montrons maitnant que J *est coercive dans* E_k, *c'est-à-dire* $\lim_{\substack{\|u\|\to+\infty \\ u\in E_k}} J(u) = +\infty$.
$(H_1)\,(ii)$ *implique que, pour chaque* $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, *de telle sorte que, pour presque toutes* $x \in \Omega$,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon) > 0;\ \ |u| > \delta(\epsilon) \Longrightarrow \frac{|f(|x|, u)|}{|u|^{p-1}} \leq \epsilon,$$

ce qui entraine,

$$|f(|x|, u)| \leq \varepsilon |u|^{p-1} \ \text{ pour tout } |u| > \delta(\epsilon),$$

d'aprés $(H_1)\,(i)$ *on a* f *est continue en* u, *alors pour tout* $u \in \mathbb{R}$.

$$F(|x|, u) \leq \frac{\epsilon}{p}|u|^p + \max_{|u|\leq\delta} |F(|x|, u)|.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega F(|x|, u)\, dx \leq \int_\Omega \left(\frac{\epsilon}{p}|u|^p + \max_{|u|\leq\delta} |F(|x|, u|\right) dx = \frac{\epsilon}{p}.\|u\|_{L^p}^p + C,$$

avec, $C = C(\delta) := \int\limits_{\Omega} \max\limits_{|u| \ \leq \delta} |F(|x|, u)|\, dx < +\infty.$

D'autre part utilisant (H_2) *et l'inégalité de Hőlder* $($*cf.* $(1.1.1)$ *chap1*$)$*, nous obtenons,*

$$\int\limits_{\Omega} g(x)\, u(x)\, dx \leq \|g\|_{L^q} \|u\|_{L^p}. \tag{3.5}$$

Donc

$$J(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\epsilon}{p}. \|u\|_{L^p}^p - C(\delta) - \|g\|_{L^q} \|u\|_{L^p}.$$

Maintenant, par application du théorème $($*cf.* (1.2) *chap1*$)$ *nous obtenons*

$$\|u\|_{L^p} \leq c(N,p) \|u\|_{W_0^{1,p}} \quad \textit{tel que } c(N,p) > 0,$$

ce qui entraine,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p (1 - \epsilon.c(N,p)) - \|g\|_{L^q} \|u\|_{L^p} - C(\delta) \\ &\geq \frac{1}{p} \|u\|^p (1 - \epsilon.c(N,p)) - \|g\|_{L^q} c(N,p) \|u\| - C(\delta), \end{aligned}$$

alors, pour $\epsilon < \frac{1}{2c\,(N,p))}$, $\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} J(u) = +\infty$. *Cela implique que* J *est coercive.* *D'après le lemme* $(3.3.1)$ E_k *est faiblement fermé dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* J *est semi continue inférieurement et coercive dans* E_k. *Nous déduisons que* J *est bornée inférieurement.* ■

Posons

$$m_k = \inf_{E_k} J.$$

Le lemme suivant, nous donne un ordre sur, $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

Lemme 3.3.2 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$,

$$-\infty < m_1 \leq m_k < 0.$$

Preuve: 1- $m_k = \inf\limits_{E_k} J$ et la fonctionnelle J est coercive. D'où

$$-\infty < m_k = \inf_{E_k} J(u),\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

2- Et $u \in E_k$, donc u est impaire et $\frac{2\pi}{k}$ périodique en θ_{N-1}, en particulier, elle est est impaire et $k\frac{2\pi}{k} = 2\pi$ périodique en θ_{N-1}
ce qui entraine que $u \in E_1 \Rightarrow E_k \subset E_1$. De plus nous avons: $\inf\limits_{E_1} J(u) \leq \inf\limits_{E_k} J(u)$ alors: $m_1 \leq m_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous considèrons l'ensemble suivant :

$$\Omega_k := \left\{ (r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) \in \Omega \backslash \theta_{N-1} \in \left[0, \frac{\pi}{k} \right) \right\}.$$

Soit λ_n la première valeur propre de $-\Delta_p$ dans $W_0^{1,p}(\Omega_k)$ telle que $\lambda_n > 1$, et v_n^k la fonction propre associée à λ_n, pour plus de détails sur les valeurs propres de $-\Delta_p$ (cf. [6]). $v_n^k \in L^\infty$
soit v_n le prolongement impaire de v_n^k dans Ω. Alors $v_n \in E_k \cap L^\infty$, et nous avons

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \, dx = 2k \int_{\Omega_k} \left|\nabla v_n^k\right|^p dx = 2k\lambda_n \int_{\Omega_k} \left|v_n^k\right|^p dx = \lambda_n \int_\Omega |v_n|^p \, dx, \quad (3.6)$$

en appliquant $(H_1) - (iii)$, il existe $\beta := \beta(\lambda_n) > 0$, telle que

$$F(|x|, u) > \frac{\lambda_n}{p} |u|^p, \text{ si } |u| \leq \beta.$$

Considérant

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \left(J(u) + J(-u) \right), \quad (3.7)$$

nous voyons que

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{p} |\nabla u|^p - F(x, u) \right] dx.$$

Soit $s \in]\frac{-\beta}{1+\left\|v_n^k\right\|_{L^\infty}}, \frac{\beta}{1+\left\|v_n^k\right\|_{L^\infty}}[$, alors $\left|sv_n^k\right| < \beta$ et

$$\begin{aligned} \Psi\left(sv_n^k\right) &= \int_\Omega \frac{1}{p} \left|\nabla sv_n^k\right|^p dx - \int_\Omega F(x, sv_n^k) dx \\ &\leq \frac{1}{p} (\int_\Omega \left|\nabla sv_n^k\right|^p dx - \int_\Omega \lambda_n \left|sv_n^k\right|^p dx) \\ &\leq \frac{|s|^p}{p} [1 - \lambda_n] \int_\Omega \left|\nabla v_n^k\right|^p dx < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après (3.7), $J\left(sv_n^k\right) < 0$ ou $J\left(-sv_n^k\right) < 0$, ce qui entraine

$\inf_{E_k} J_k < 0$.
Delà nous concluons que $m_k < 0$. ■

Lemme 3.3.3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $u_k \in E_k \diagdown \{0\}$, solutions non radiales de* (3.1) *telles que $J(u_k) = m_k$. De plus, il existe $M > 0$ telle que*

$$\|u_k\| \leq M \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Preuve: *L'ensemble E_k faiblement fermé convexe, et la fonctionnelle J est semi continue inferieurement et coercive dans E_k, par application du théorème (cf. (1.7) chap1) nous concluons que J est bornée inférieurement est atteint son minimum sur E_k c'est-à-dire il existe $u_k \in E_k$ tel que $m_k = \inf_{E_k} J(u) = J(u_k)$.*
Ainsi qu'il a été déjà remarqué que, u_k est une solution faible du problème (3.1). Puisque $u_k \neq 0$ et u_k est impaire et $\frac{2\pi}{k}$ périodique en θ_{N-1}, alors u_k est une solution non radiale de (3.1).
Par définition de m_k et application du lemme (3.3.2), nous avons,

$$m_1 \leq m_k = J(u_k) < 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

ce qui entraine,

$$|J(u_k)| < |m_1|. \tag{3.9}$$

Par conséquent, il existe $M > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|u_k\| < M. \tag{3.10}$$

En effet, si $(\|u_k\|)_k$ n'est pas bornée, il existe $k_0 \geq 1$; de telle sorte que $\|u_{k_0}\| \to +\infty$, alors la coercivité de la fonctionnelle J implique $\|J(u_{k_0})\| \to +\infty$, ceci est une contradiction (3.9). ■

A partir des lemmes ci-dessus (3.3.1), (3.3.2), le problème (3.1) admet une suite de solutions non radiales satisfaisant (3.10) et la démonstration du théorème (3.1) est achevée. ■

Exemple 3.3.1 *Nous considerons (3.1) avec $N = 4$, $p = 3$*

$$f(|x|, u(x)) = u^{\frac{1}{4}} \cos(u \ln(|x| + 1))$$

et

$$g(r; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = r \sin\theta_1 \ln(2 + \cos\theta_3) + \theta_2$$

f et g satisfont les hypothèses (H_1) et (H_2). L'application du théorème (3.1) donne l'existence d'une suite de solutions non radiales du problème (3.1).

Conclusion

1 Conclution

Une étude variationnelle de certains problèmes faisant intervenir l'opérateur Laplacien et p-Laplacien a été présenté dans cette thèse. Nous avons été essentiellement concernés par l'étude de l' existence et la multiplicité de solutions non radiales de problème de Dirichlet dans le cas de perte de symétrie [18].

Bibliographie

Bibliographie

[1] H. Aduen, A. Castro, Infinitely many non radial solutions to a superlinear Dirichlet problem. Proc. Amer. Math. Soc. 131(2003), $p.835 - 843$.

[2] F. Alessio, W. Dambrosio, Multiple solutions to a Dirichlet problem on bounded symmetric domains. J. Math. Anal. Appl. 235(1999), $p.217 - 226$.

[3] A. Amadori, F. Gladiali, A nonradial bifurcation resule with applications supercritical problems. Math App. (2016) .

[4] A. Ambrosetti, A perturbation theorem for superlinear boundary value problems. Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison, Tech. Sum. Report # . 1446 (1974) .

[5] A. Ambrosetti, On the existence of multiple solutions for a class of nonlinear boundary value problems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 49(1973), $p.195 - 204$.

[6] A. Anane, Etude des valeurs propres et de la résonnance pour l'opérateur p-Laplacien. Thèse, Université libre de Bruxelles, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I.305(1987), $p.725$ -728.

[7] A. Bahri, H. Berestycki, A perturbation method in critical point theory and applications. Trans. Amer. Math. Sco. 267(1981), $p.\ 1 - 32$

[8] T. Bartsch, M. Willem, Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation. J. Funct. Anal. 117(1993), $p.\ 447 - 460$.

[9] T. Bartsch, Infinitely many solutions of a symmetric Dirichlet problem. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 20 (1993) , $p.\ 1205 - 1216$.

[10] C. Batkam, Radial and nonradial solutions of a strongly indefinite elliptic system on $\mathbb{R}^N$. Afr. Mat. 26(2015), $p.65 - 75$.

[11] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, (1983) .

[12] G. J. Butler, Rapid oscillation non extendability on the existence of periodic solution to second order nonlinear ordinary differential equations. J. Dif. Eq. 22(1976), $p.467 - 477$.

[13] D. Cao, P. Han, A note on the positive energy solutions for elliptic equations involving critical sobolev exponents. Applied Mathematics Letters. 16(2003), $p.$ $1105 - 1113$.

[14] A. Castro, M. B. Finan, Existence of many positive nonradial solutions for a superlinear Dirichlet problem on thin annuli. Nonlinear Differential Equations, Electron. J. Diff. Equs. (EJDE), Conf. 05(2000), $p.21 - 31$.

[15] F. Catrina, On a Brezis-Nirenberg type problem. Electronic Journal of Differential Equations. 146(2006), $p.$ $1 - 10$.

[16] F. Catrina, Z.Q. Wang, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal solutions. Comm. Pure Appl. Math. 54(2001), $p.229 - 258$.

[17] C.V. Coffman, A nonlinear boundary value problem with many positive solutions. J. Di .Equa. 54 (1984), $p.$ 429 - 637.

[18] N. Daoudi-Merzagui, N. Bekkouche, A. Boucherif, L. Li, Existence of Many Nonradial Solutions for a Perturbed Dirichlet Problem. Applied Mathematical Sciences. 10(2016) , $p.$ $1047 - 1056$.

[19] V. Felli, M. Schneider, Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg type. Journal of Differential Equations. 19(2003), $p.$ 121–142.

[20] G. Francesca, G. Massimo, N. Sérgio, Nonradial solutions for the Hénon equation in $\mathbb{R}^N$. Adv. Math. 249(2013), $p.1 - 36$.

[21] J. A. Hempel, Multiple solutions for a class of nonlinear elliptic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J. 20(1971), $p.983 - 996$

[22] O. Kavian, Introductiona la théoriedes points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag, (1983).

[23] M. A. Krasnosel'skii, A. I. Perov, A. I. Povolotskii, and P. P. Zabreiko, Plane Vector Fields. Academic Press. New York, (1966) .

[24] A. Munnier., Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan. $2007 - 2008$.

[25] M. Musso, J. Wei, Nonradial Solutions to Critical Elliptic Equations of Caffarelli–Kohn–Nirenberg Type. Oxford Journals. Issue 18 (2012), $p.$ 4120-4162.

[26] P. H. Rabinowitz, Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations, Nonlinear Analysis (L. Cesari, R. Kannan andH. F. Weinberger, eds.), Academic Press, (1978), p. $161 - 177$.

[27] M. Struve, Variationnel methods applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Springer-Verlags. (1999) .

[28] E.W.C. Van Groesen, Existence of multiple normal mode trajectories on convex energy surfaces of even classical hamiltonian systems. J. Differential Eq. 57 (1985) , p. $70 - 89$.

[29] E.W.C. Van Groesen, Applications of natural constraints in critical point theory to boundary value problems on domains with rotation symmetry. Arch. Math. 44 (1985) , p.$171 - 179$.

[30] Z-Q. Wang, Nonradial solutions of nonlinear Neumann problems in radially symmetric domains. Topology in nonlinear analysis (Warsaw, (1994)), p.$85 - 96$.

[31] G.Q.Zhang, K.C.Chang, Lectures on variational methods, Higher Education Press, (2011).