République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année: 2016/2017

Sur l'adjoint du produit et de la somme des opérateurs fermés

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse, géométrie et Applications

par

Keddri **M**ohamed **A**mine [1]

Sous la direction de

Dr A. Azzouz

Soutenu le 24 Mai 2017 devant le jury composé de

Mlle. H. Abbas	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr. A. Azzouz	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr. O. Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Dr. G. Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : keddarimedamine20@gmail.com

Remerciements

Avec l'aide de dieu tout puissant, on a pu achever ce modeste travail.

Je tien a remercier mon encadreur **Abdelhalim Azzouz** enseignant a l'université Dr. Moulay Tahar Saida, pour avoir accepté de diriger ce travail. Son soutien, sa clairvoyance et ses compétence m'ont été d'une aide inéstimable.

Je tiens à remercies M^{ade} **Hafida Abbas** d'avoir accepté de présider mon jury, mes enseignants D_r **Djellouli Ghaoti** et D_r **Bennihi Omar** de lieu vouloir juger mon travail.

Je veux aussi adresser mes remerciements à mes amis et mes collègues et à toute ma promotion pour ses encouragement et leurs soutiens.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents :

Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçoit à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

Mes frères et soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Mes familles.

Mes chères amis.

Mon chér professeur **Abdelhalim Azzouz**.

Tous mes chèr professeurs de Mathématique qui doivent voir dans ce travail la fierté d'un savoir bien acquis.

Table des matières

Introduction

Durant le dernier siècle, les mathématiciens se sont investis à résoudre la question

$$(AB)^* = B^* A^*$$

et les conditions diverses sur les opérateurs qui aboutissent à conclure pour plusieurs types des opérateurs. Dixmier et Holland ont commencé par étudier la question pour permettre à d'autres chercheurs de faire des analyses rigoureuses de la question.

Parler d'égalité dans la relation de l'adjoint c'est d'abord imposer une homogénité du caractère dans les deux membres de l'égalité. Pour deux opérateurs fermés (à domaines denses) il est nécessaire de montrer la fermeture du produit avant de parler de l'adjoint. Ainsi, nacquit un axe de recherche dit stabilité du produit et de la somme des opérateurs non bornés, particulièrement ceux qui sont fermés.

Pour les opérateurs bornés, la somme et le produit sont bien connus et ne posent aucune difficulté apparente. De plus, on sait que $\mathfrak{L}(H)$ muni de ces opérations est une algèbre de Banach unifère. Par ailleurs, si l'on regarde les opérateurs linéaires fermés, qui ne sont que partiellement définis sur un espace de Hilbert H le sujet est à investiguer. La question liée au domaine de la multiplication par un scalaire reste la seule inchangée entre ces deux classes. Pour les opérations d'addition et de multiplication, le domaine deviendra plus petit par intersection des domaines des opérateurs dans le cas de la somme, et par image réciproque pour le produit. Et pour des opérateurs férmes, cela fait une situation délicate au moins de faire agir le théorème spectral et de ne considérer que des opérateurs auto-adjoints.

On suppose la non trivialité des domaines de la somme de deux opérateurs fermés et de leur produit. Il se peut que ni leur produit ni leur somme ne soient fermés et là, on est devant une perte de caractère des opérateurs de départ même en les considérant auto-adjoints ou encore essentiellement auto-adjoints. Outre le problème du domaine, du perte du caratère, les formules de l'adjoint de la somme et du produit de deux opérateurs fermés bien connues dans le cas des opérateurs bornés ne subsistent plus.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un rappel élémentaire sur la théorie des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert, particulièrement les opérateurs fermés, symétriques, et la théorie de Fredholm qui joue un rôle important en théorie des EDP, En analyse fonctiennelle.

Le deuxième chapitre est consacré pour établir les propriétés des opérateurs fermés sous l'effet des opérations algébriques usuelles, la trivialité (en tant que phénomène chaotique) et instabilité de la somme et du produit. On passera en revue les résultats traditionnels de stabilité de la somme et le produit de deux opérateurs fermés et pour d'autres caractères.

Dans le dernier chapitre, on fera une synthèse des principaux résultats de recherche concernant l'adjoint du produit des opérateurs non bornés, en particulier les fermés et les Fredholm. Le cadre de travail sera dans la plupart des cas Hilbertien sauf mention du contraire.

Chapitre 1

Eléments de la théorie des opérateurs linéaires

On présent dans ce chapitre la théorie élémentaire des opérateurs linéaire, Le chapitre est composé de trois parties, la premiere partie est une rappel sur l'espace de Hilbert H, deuxièment les élements de base de la théorie des opérateurs linéaires, troisièment la perturbation des non bornés et adjoints.

1.1 Espaces de Hilbert

Tout au long de ce chapitre, on travaillera sur un corps K, qui sera soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1. *Un* ***produit scalaire*** *sur un espace vectoriel H est une application $\langle , \rangle$ vérifiant*
– *Pour tout $h \in H$, l'application $g \to \langle g, h\rangle$ est linéaire.*
– *Pour tout $g, h \in H$, $\langle g, h\rangle = \overline{\langle h, g\rangle}$.*
– *pour tout $g \in H\backslash\{0\}$, $\langle g, g\rangle > 0$.*

Définition 1.2. *Une* ***norme*** *est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui associe à tout vecteur X de E un nombre réel positif noté $\|X\|$, satisfaisant les trois axiomes suivants étant satisfaits :*

1. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0;$
2. $\|\lambda X\| =| \lambda |, \lambda \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$
3. $\|X + Y\| \leq\| X \| + \| Y \|$.

Lorsque 1 est remplacé par $1'$: $X = 0 \Rightarrow \|X\| = 0$, on dit qu'il s'agit d'une ***semi-norme****.*

On note alors $\|g\| = \sqrt{\langle g, g\rangle}$ et on vérifie que c'est une norme sur H. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme $\|.\|$. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés séparables, c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense. Une inégalité fondamentale est **l'inégalité de Cauchy Schwarz**

$$|\langle g, h\rangle| \leq \|g\| \cdot \|h\|$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

$$\|g\| = \sup_{h\in H,\ \|h\|\leq 1} |\langle g, h\rangle| \tag{1}$$

Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont orthogonaux, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h\rangle = 0$. Si M est une partie de H, l'orthogonal de M est défni par :

$$M^{\perp} = \{h \in H \text{ tq } \ h \perp g \ , \forall g \in M\}$$

On remarque donc qu'un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.
De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe dite somme orthogonale $H = M \oplus M^{\perp}$. On peut énoncer le théorème de Pythagore :
Si $f_1.......f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\|f_1 + ... + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + ... + \|f_n\|^2$$

Une identité à retenir est l'identité du parallélogramme :
Si $f, g \in H$, qui sent à

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Si $M \subset H$ est un sous-espace fermé, on peut définir la projection orthogonale sur M, notée P_M, de la manière suivante :

Proposition 1.1.1. *Pour $h \in H$, $P_M h$ est l'unique élément de M tel que $h - P_M h \perp M$. P_M est une application linéaire telle que :*
- $P_M^2 = P_M$, *(Involutif)*
- $\|P_M h\| \leq \|h\|$ *pour tout* $h \in H$,
- $\ker P_M = M^{\perp}$
- $ImP_M = M$.

Définition 1.3. *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite une base orthonormale d'un espace de Hilbert H si :*

- *L'espace engendré $Vect\{e_i\}$ est dense dans H*
- $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ *où le δ est le symbole de Kronecker,*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Tout espace de Hilbert H admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace H est de dimension finie. Les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert sont particulièrement simples à décrire mais semblent être trés importantes dans la théorie des opéarteurs.

Théorème 1.1.1. ***(représentation de Riesz)*** *Soit l une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H. Alors il existe un (unique) vecteur $y_l \in H$ tel que, pour tout $x \in H$*

$$l(x) = \langle x, y_l\rangle$$

Donnons notion fondamentale de la compacité dans les espaces de Hilbert.

Théorème 1.1.2. ***(Riesz- Fisher)*** *Soit H un espace de Hilbert et B_H sa boule-unité. Alors B_H est compacte si et seulement si H est de dimension finie.*

Donnons quelques exemples d'espaces de Hilbert :

Exemple 1.1.1. *L'espace K^n, muni du produit scalaire défini par :*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert. La base canonique de K^n est une base orthonormale.

Exemple 1.1.2. *Lespace $l_2(\mathbb{N}) = \{(U_n)_{n\in N} \subset \mathbb{C},\ tq \sum_{n\in\mathbb{N}} |U_n|^2$ converge$\}$ muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\in N} u_n \overline{v_n}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note (e_k) la suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du k-ème qui vaut 1. Alors $(e_k)_{k\in N}$ est une base orthonormale de $l_2(N)$. On peut définir de manière identique l'espace $l_2(\mathbb{Z})$ des suites de carré sommables indexées dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 1.1.3. *Si* (X, Ω, μ) *est un espace mesuré, l'espace*

$$L^2(X, \Omega, \mu) = \{f : X \to K \ tq \ \int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) < +\infty\} / \sim$$

est l'espace des fonctions de carré intégrable.
Alors,

$$L^2(X, \Omega, \mu)$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu(x).$$

Si $K = \mathbb{C}$*, une base orthonormale de* $L^2([0; 1]; dx)$ *est donnée par* $(e_n)_{n \in Z}$*, où* e_n *est la fonction*

$$e_n(x) = exp(2\pi inx).$$

On retrouve ainsi la théorie des séries de Fourier. [24]

1.2 Opérateurs linéaires dans un espace de Hilbert

1.2.1 Premières définitions

Définition 1.4. *Un* ***opérateur*** *sur* H *est une application linéaire continue d'un sous espace vectoriel* $D(A)$ *(appelé domaine* $D(A)$*) de* H *dans* H*. On note* $\mathcal{L}(H)$ *l'ensemble des opérateurs sur* H*. Si* $A \in \mathcal{L}(H)$*, on définit sa* ***norme d'opérateur*** *par :*

$$\|A\| = sup\{\|Ah\| : h \in H, \|h\| \leq 1\}$$

Proposition 1.2.1.
1. *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $\|A\| = 0$ *si seulement si* $A = 0$.
2. *Si*$A, B \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $A + B \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. *Si*$\alpha \in K$ *et* $A \in \mathcal{L}(H)$ *alors* $\alpha \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|\alpha A\| = \mid \alpha \mid \cdot \|A\|$.
4. *Si*$A, B \in \mathcal{L}(H)$*, alors* $AB \in \mathcal{L}(H)$ *et* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$*.(*$AB$ *désigne la composition* $A \circ B$*).*

Définition 1.5. *On dit que l'opérateur* A *est dit* ***fermable*** *s'il existe une extension fermée de* A*.*

Graphe d'un opérateur

Il est clair que le graphe d'une transformation linéaire représente l'un des outils puissants dans l'étude des opérateurs linéaire en particulier ceux non bornés sur les espace de Hilbert. Introduit depuis un siècle déja par Von Neumann, le graphe d'un opérateur permet à ce stade de caractériser une classe d'opérateur non borné appeles opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle.

Définition 1.6. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H.* ***Le graphe*** *de A noté $G(A)$ est le sous espace vectoriel de $H \times H$ défini par :*

$$G(A) = \{(x, Ax) \in H \times H / x \in D(A)\}$$

Théorème 1.2.1. *(**graphe fermé**) Soit $A : H \to H$ est un opérateur linéaire,*

$$G(A) = \{(h, Ah) : h \in H\}$$

Si $G(A)$ est fermé dans $H \times H$, alors A est fermé.

Théorème 1.2.2. *(**Hellinger-Toeplitz**) :Soit T une application auto-adjointe sur un espace Hilbert H,i.e.*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

pour tout $x, y \in H$ Alors T est borné sur H

Démonstration. Montrons que T a un graphe fermé.
Soit $x_n \to x$ une suite convergente dans H tel que $Tx_n \to y$ pour certains $y \in H$ Puis par l'hypothèse selon laquelle $G(T)$ est fermée équivaut à montrer que $Tx = y$. Pour un $z \in H$ nous avons :

$$\begin{aligned} \langle Tx, z \rangle &= \langle Tz, x \rangle \\ &= lim_n \langle Tz, x_n \rangle \\ &= lim_n \langle z, Tx_n \rangle \\ &= \langle z, Tx_n \rangle . \end{aligned}$$

Choisissons $z = Tx - y$, alors $\langle Tx, Tx - y \rangle = \langle Tx - y, Tx \rangle$ est équivalent à $\|Tx - y\| = 0$. Par conséquent et donc $G(T)$ est fermé. Le théorème de **graphe fermé** nous donne la limite de T.
■

1.2.2 Adjoint d'un opérateur linéaire

Le théorème de **Riesz-Fisher** affirme que toute forme linéaire s'ecrit sous la forme d'un produit scalaire se qui définit comme l'adjoint d'un opérateur borné ou d'une application linéaire, ainsi tout opérateur borné sur un espace de Banach (ou Hilbert) possède un adjoint. Examinons d'abord le cas des opérateurs partout définis.

Théorème 1.2.3. ***(Dualité de Riesz)*** *Soit $T \in B(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in B(H)$, pour tout $x, y \in H$, on ait :*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \tag{1.1}$$

Démonstration. Soit y fixé dans H, l'application $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H. Il suit qu'il existe un unique $z \in H$ tel que, pour tout $x \in H$, on ait $\langle Tx, y = \langle x, z\rangle$. On note $z = T^*y$.
T^* est bien défini, et ce de manière unique, en tant qu application de H dans H car pour y donné, on définit z, l'image de y par T^*, de façon unique. Montrons que T^* est linéaire :

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Tx, (\alpha y_1) + (\beta y_2)\rangle \\
&= \langle Tx, \alpha y_1\rangle + \langle Tx, \beta y_2\rangle \\
&= \overline{\alpha}\,\langle Tx, y_1\rangle + \overline{\beta}\,\langle Tx, y_2\rangle \\
&= \left\langle \overline{\alpha}\,\langle x, T^*y_1\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, T^*y_2\rangle\right. \\
&= \langle x, \alpha T^*y_1\rangle + \langle x, \beta T^*y_2\rangle
\end{aligned}$$

d'où pour tout $x \in H$,

$$\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle = \langle x, T^*\alpha y_1 + T^*\beta y_2)\rangle$$

Montrons maintenant que T^* est borné,

$$\begin{aligned}
\|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y\rangle \\
&= \langle TT^*y, y\rangle \\
&\leq \|TT^*y\|\|y\| \\
&\leq \|T\|\|T^*y\|\|y\|
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|T^*y\| \leq \|T\|\|y\| \Rightarrow T^*$ et donc T^* est un opérateur borné vérifiant

$$\|T^*\| \leq \|T\| \tag{1.2}$$

Il suit que $T^* \in B(H)$. ∎

Définition 1.7. *L'operateur T^* définit ci-dessus est appelé opérateur adjoint de T.*

Proposition 1.2.2. *Soient $T, S \in B(H)$ et T^*, S^* leurs adjoints (respectifs), alors :*

1. $(T^*)^* = T$.
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
4. $\|T^*\| = \|T\|$.
5. $(TS)^* = S^* T^*$.

Démonstration. 1. Soient $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, (T^*)^* y\rangle &= \langle T^* x, y\rangle \\ &= \overline{\langle x, T^* y\rangle} \\ &= \overline{\langle Ty, x\rangle} \\ &= \langle x, Ty\rangle\end{aligned}$$

d'où

$$(T^*)^* = T$$

2. Soit $x, y \in H$

$$\begin{aligned}\langle x, (T+S)^* y\rangle &= \langle (T+S)x, y\rangle \\ &= \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle \\ &= \langle x, (T^* + S^*) y\rangle\end{aligned}$$

d'où

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$

3. Soit $x, y \in H, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\langle \alpha T x, y\rangle = \alpha \langle Tx, y\rangle = \alpha \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle$$

d'où

$$(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

4. En combinant avec l'inegalité (1.2)

$$\|T^*\|^* \leq \|T\|^* \Rightarrow \|T\| \leq \|T^*\| \tag{1.3}$$

Donc (1.2) et (1.3) $\Rightarrow \|T^*\| = \|T\|$

5. Soit $x, y \in H$

$$\begin{aligned} \langle TSx, y\rangle &= \langle Sx, T^*y\rangle \\ &= \langle x, S^*T^*y\rangle \end{aligned}$$

d'où

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

■

Corollaire 1.2.1. *Pour* $T \in B(H)$ *on a :*

1. $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T^*\|^2$

2. $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0.$

Démonstration. 1.

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= |< Tx, Tx >| \\ &= |\ \langle x, T^*Tx\rangle\ | \\ &\leq \|x\|\|T^*T\|\|x\| \\ &\leq \|T^*T\|\|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|Tx\| \leq \|T^*T\|^{1/2}\|x\|;$$

posons

$$\begin{aligned} \|T\| &\leq \|T^*T\|^{1/2} \\ \|T\|^2 &\leq \|T^*T\| \end{aligned}$$

d'ou $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

La deuxième égalité se démontre en interchangent T par T^*.

2. on montre si $T^*T = 0$ si $T = 0$

$$\begin{aligned} T^*T = 0 \ &\Leftrightarrow \ \langle T^*Tx, x\rangle = 0, \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \ \langle Tx, Tx\rangle = 0, \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow \ Tx = 0, \quad \forall x \in H \end{aligned}$$

Réciproquement, si $T = 0$ Alors $TT^* = 0$

$$\begin{aligned} T = 0 \Leftrightarrow Tx &= 0 \quad , \qquad \forall x \in H \\ \langle Tx, Tx\rangle &= 0 \quad , \qquad \forall x \in H \\ \langle T^*Tx, x\rangle &= 0 \quad , \qquad \forall x \in H \end{aligned}$$

d'où

$$\Rightarrow T^*T = 0.$$

■

Théorème 1.2.4. *Soit $T \in B(H)$;*

$$\forall x \in H \Rightarrow T \equiv 0$$

$$et \quad \langle Tx, x\rangle = 0.$$

Démonstration. Comme

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$$

on voit que

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0, \quad \forall (x, y \in H) \tag{1.4}$$

On remplace y par iy dans l'équation (1.4), on obtient :

$$-i\,\langle Tx, y\rangle + i\,\langle Ty, x\rangle = 0 \tag{1.5}$$

Multiplions (1.5) par i et sommant avec l'équation (1.4) on trouve :

$$\langle Tx, y\rangle = 0, \quad \forall y \tag{1.6}$$

En particulier pour $y = Tx$, (1.6) devient $\|Tx\|^2 = 0$ Alors :

$$Tx = 0, \quad \forall x \in H$$

Donc
$$T = 0$$
■

Théorème 1.2.5. *Soit $T \in B(H)$, les assertions suivantes sont equivalentes :*

(i) $T = 0$;

(ii) $\langle Tx, x\rangle = 0, \quad \forall x \in H$;

(iii) $\langle Tx, y\rangle = 0, \quad \forall x, y \in H$;

Donnons quelques liens entre les ensembles caractéristiques d'un opérateur et de son adjoint.

Théorème 1.2.6. *Soit $T \in B(H)$, alors on a :*

1. $kerT = (Im(T^*))^{\perp}$.
2. $\overline{Im(T)} = (ker(T^*))^{\perp}$.

Démonstration. 1. On a

$$kerT = \{x \in H, Tx = 0 = x \in H, \forall y \in H, (Tx, y) = 0\}$$
$$= \{x \in H, \forall y \in H, (x, T^*y) = 0 = (Im(T^*))^{\perp}\}$$

2. D'aprés (1), on a :

$$\begin{aligned}(ker(T^*))^{\perp} &= (Im(T^{\perp}))^{\perp} \\ &= \overline{Im(T)}\end{aligned}$$

■

Adjoint d'un opérateur non borné

Considérons un opérateur non borné A de domaine $D(A)$ dense dans H, l'application $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est continue sur $D(A)$ muni de la topologie induite par celle de H, elle possède une extension continue à H d'après le théorème de Hahn-Banach, il existe aussi d'après le théorème de **représentation de Riesz** un vecteur unique $a(y)$ dans H tel que :

$$\forall x \in D(A), \langle Ax, y\rangle = \langle x, a(y)\rangle$$

L'adjoint A^* de A sera donné alors par $A^*y = a(y)$ de domaine noté $D(A^*)$ défini par

$$D(A^*) = \{y \in H : \exists z \in H \text{ tel que } \langle Ax, y\rangle = \langle x, z\rangle\,, \quad \forall x \in D(A)\}\,.$$

D'autre part, l'unicité de $a(y)$ est assurée grâce à la densité du domaine $D(A)$ de A. Bien entendu on a

Proposition 1.2.3. *Si $A \subset B$ alors $B^* \subset A^*$*

Signalons que le passage à l'adjoint d'un opérateur non borné est une opération conduisant à la réduction du domaine de l'adjoint voire le rendre trivial.
En effet, considérons $H = L^2[-1,1]$. $D(A) = \left\{f \in C^\infty[-1,1] \cap L^2[-1,1]; \left|f^{(i)}(0)\right| \leq C_f 2^{-i} i!(i \geq 0)\right\}$

$$(Af)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i$$

Remarquons que $D(A)$ est dense dans H puisqu'il ne contient que des fonctions f dont leurs développements en série de Taylor convergent uniformément ou absolument.
$N(A)$ et $R(A)$ sont denses dans H mais $D(A^*) = \{0\}$ n'étant pas dense dans H, puisque $R(A)$ est dense ce qui montre que l'opérateur adjoint est à domaine trivial, mais on peut aussi voir que cette condition induit que l'opérateur A n'est pas fermable (voir théorème 1.2.7).
Ainsi, l'unicité de l'adjoint repose sur la densité du domaine $D(A)$, Encore, on ne peut pas garantir la densité du domaine de l'adjoint, et par suite, l'existence de A^{**} est mise en doute.
La symétrie des opérateurs bornés étant identique à la notion d'auto-adjointé, elle se démarque dans le cadre des opérateurs non bornés et devient une notion moins forte. On rappelle qu'un opérateur non borné est dit symétrique si

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in D(A)$$

Il est auto-adjoint si $A = A^*$. Il vient par suite que tout opérateur auto-adjoint est fermé, la réciproque en général est fausse. Une connexion entre le graphe d'un opérateur et le graphe de son adjoint peut se faire via une tranformation unitaire, on a alors :

Lemme 1.2.1. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans H, de domaine dense $D(A)$, alors*

1. *$V(x,y) = (-y,x)$ est un opérateur unitaire sur $H \times H$, tels que $V^2 = -I_{H\times H}$ et $V(E^\perp) = (V(E))^\perp$ pour tout sous espace E de $H \times H$.*
2. *$G(A^*) = (V(G(A)))^\perp$*

3. *Si A est fermé alors $H \times H = V(G(A)) \oplus G(A^*)$*

Démonstration. 1. On considère l'isométrie $V : H \oplus H \to H \oplus H, V(x,y) = (-y,x)$ pour tout $x, y \in H$. En particulier, on a $V^2(x,y) = -(x,y)$ et si E est un sous-espace de $H \oplus H$ alors $V(E^\perp) = V(E)^\perp$.

2. On a

$$\begin{aligned}(x,y) \in G(A^*) &\Leftrightarrow x, Az) = (y,z), \forall z \in D(A)\\ &\Leftrightarrow \langle (x,y), (-Az, z)\rangle = 0, \forall z \in D(A)\\ &\Leftrightarrow (x,y) \in VG(A)^\perp.\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\overline{G(A)} &= (G(A)^\perp)^\perp\\ &= (V^2G(A)^\perp)^\perp\\ &= (V[VG(A)^\perp)^\perp\\ &= VG(A^*)^\perp.\end{aligned}$$

■

Grâce à la notion de l'adjoint, on peut énoncer une condition nécessaire et suffisante de fermablilité d'un opérateur linéaire A.

Théorème 1.2.7. *[16] Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans un espace de Hilbert H. Alors*

1. *A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense dans H et on a dans ce cas $A^{**} = \overline{A}$*
2. *Si A est fermable, alors $(\overline{A})^* = A^*$.*

Démonstration. 1. Si A^* est à domaine dense alors

$$G(T^{**}) = (VG(A^*))^\perp = \overline{G(A^*)} \tag{2}$$

Il en résulte que $\overline{G(A^*)}$ est le graphe d'un opérateur et donc A est fermable. D'autre part, si $D(A^*)$ n'est pas dense alors il existe $y \neq 0$ appartenant à $D(A^*)^*$. Ainsi, on vérifie que $(y,0) \in G(A^*)^*$ et que $(y,0) \in \overline{G(A)} = VG(A^*)^*$. Par conséquence, A n'est pas fermable puisque $\overline{G(A)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur vu qu'il contient $(y,0)$ avec $y \neq 0$.

2. Il en résulte de (2) que $A^{**} = \overline{A}$. Pour A^* est fermé, on voit que

$$A^* = \overline{A^*} = (A^*)^{**} = (A^{**})^* = (\overline{A})^*$$

■

Ce théorème est très utile du moment qu'il permet d'identifier les opérateurs non fermables parmi les opérateurs non bornés par la simple vérification que $D(A^*)$ n'est pas dense.
En effet, si on considère $H = l^2$ et $D_0 = \{y \in l^2 : y_n = 0 \text{ pour tout } n \geq N = N(y)\}$.
Fixons un vecteur $x \notin D_0$ disons $x = (x_n = 1/n)$ et posons $D(T) = L(x) + D_0$ où $L(x)$ est l'espace engendré par le vecteur x dans l^2.
Définissons l'opérateur T sur $D(T)$ par $T(cx + y) = cy$ où $c \in \mathbb{C}, y \in D_0$.
D_0 est dense dans l^2 car si $x \in l^2$, $x = (x_n)$ tel que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n^2| < +\infty$, posons $X_n = (x, x_0, x_1..., x_n, 0, ...)$, il est clair que $X_n \in D_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x$ puisque $\|x - X_n\|_{l^2}^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2$ est le reste de la série convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_k|^2$.
Parsuite,

$$D_0 \subset D(T) \subset l^2$$

D_0 et alors $D(T)$ sont denses dans l^2. Ainsi T^* est défini sur l^2 de domaine $D(T^*)$. Montrons que $D(T^*) = \{x\}^{\perp}$.
Si $X \in \{x\}^{\perp}$ alors $\langle X, x\rangle = 0$ par suite

$$\langle T(cx + y), X\rangle = c\langle x, X\rangle = 0$$

On conclut donc que $X \in D(T^*)$.
Inversement, si $X \in D(T^*)$ alors $\langle T(cx+y), X\rangle = c\langle x, X\rangle$ admet une extension continue à l^2 si et seulement si $\langle x, X\rangle = 0$ donc $X \in \{x\}^{\perp}$ car sinon, on peut proofndre par exemple $x = (1/n)$, $X = (1, 2, ..., n, 0, ...0)$ on a $\langle x, X\rangle = n$ et $\langle T(cx + y), X\rangle = cn \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ ne peut être borné. Il vient de ce qui précède que T n'est pas fermable sur H.

Théorème 1.2.8. *Soit A un opérateur non borné de domaine $D(A)$ dense dans H. Alors A^* est un opérateur fermé et* $\ker A^* = (ImA)^{\perp}$.

Résumons alors quelques résultats importants :

Proposition 1.2.4. *[15] Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dans H, de domaine dense $D(A)$. Alors*

1. *$A \subset A^{**} \subset A^*$ si A est symétrique.*
2. *$A = A^{**} \subset A^*$ si A est symétrique et fermé.*
3. *$A = A^{**} = A^*$ si A est auto-adjoint.*
4. *Si A est fermé alors A^*A est un opérateur auto-adjoint positif.*
5. *Si A est fermable, alors $(I + A^*A)$ est injectif à image H et à inverse borné de norme inférieure à 1.*

Il se peut, dans certains cas, que le passage à l'adjoint de T réduit le domaine de T^*, en fait, il peut être trivial. En effet,

Exemple 1.2.1. *Voici un exemple plus spectaculaire d'un opérateur avec non densément définie T^*. $H = L^2(-1, 1)$,*
$D(T) = \{f^\infty \cap L^2(-1,1) : |f^j(0)| \leq C_f 2^{-j} j! \quad (j \geq 0)\}$

$$(Tf)x = \Sigma_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(0)}{j!} x^j;$$

alors T envoie f à sa série de Taylor, dont le domaine ne contient que des fonctions dont l'image converge uniformément et absolument. T est un opérateur densément défini mais $D(T^*) = \{0\}$. Pour le voir, on peut se baser sur la stratégie suivante :

(a) *Si T est un opérateur linéaire arbitraire et $N(T)$ est dense, alors $D(T^*) = N(T^*)$*

(b) *Si $R(T)$ est dense, alors $D(T^*) = \{0\}$.*

(c) *Pour l'opérateur ainsi défini, on montre que $N(T), R(T)$ sont denses et conclure.*

1.2.3 Opérateurs fermés

La majorité des opérateurs définis sur des des espaces de Hilbert rencontrés dans la littérature mathématique liée à la physique ne sont pas bornés. En effet, les opérateurs différentiels sur $L^2(R^n)$ ne sont jamais bornés. Dès lors, l'analyse comtemporaine essaye d'analyser les opérateurs linéaires $A : D(A) \to H$ où $D(A)$ est supposé un sous espace vectoriel de H.
Si on regarde de près la nature des opérateurs interférant dans la physique moderne, on trouve des opérateurs différentiels, partiellement définis sur un espace de Hilbert H, et pour la topologie induite qui ne sont pas continus. Le théorème de Hellinger- Toeplitz (voir [23]) affirme qu'un opérateur linéaire complètement défini sur un espace de Hilbert H vérifiant :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \ \forall x, y \in H$$

est nécessairement borné. Cela suggère qu'un opérateur non borné A sur H est seulement défini sur un domaine $D(A)$ sous-espace vectoriel de H souvent supposé dense dans H. L'existence du domaine $D(A)$ d'un opérateur non borné consitue à lui seul une raison pour laquelle l'étude des opérateurs reste incomplète et souvent difficile. Regardons le cas où A et B sont deux opérateurs non bornés à domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$. La défintion classique de la somme et de la multiplication est connue par :

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) \quad \text{et} \quad (A+B)(x) = Ax + Bx$$

$$D(AB) = \{x \in D(B) : Bx \in D(A)\} \quad \text{et} \quad (AB)x = A(Bx)$$

Cette définition, aussi simple qu'elle paraît, dégage un nombre de difficultés que l'on va expliciter dans les sections suivantes de ce chapitre. Ainsi, par exemple, par passage aux puissances naturelles d'un opérateur non borné A, qu'en est il du domaine $D(A^n)$ de l'opérateur A^n? Le symbole $kerA$ ou $N(A)$ désigne le noyau d'un opérateur A tandis que $Im(A)$ ou $R(A)$ désigne son image sur H. Ils constituent evidemment des sous-espaces vectoriels de H. Un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert de domaine $D(A)$ est souvent noté $(A, D(A))$.
La notion d'égalité entre deux opérateurs A et B notée $A = B$ est réalisée lorsque $D(A) = D(B)$ et $Ax = Bx$,$\forall x \in D(A)$. Dans le cas où $Ax = Bx$, $\forall x \in D(A) \subset D(B)$ on dit que B est une extension de A avec la notation $A \subset B$.

1.2.4 Opérateurs symétriques et auto-adjoints

On suppose le long de cette section que les opérateurs considérés sont à domaines denses dans l'espace de travail (Un espace de Hilbert H)

Définition 1.8. *Un opérateur $(A, D(A))$ est dit **symétrique** si $A \subset A^*$ c'est-à-dire :*

$$D(A) \subset D(A^*) \quad \textit{et } Au = A^*u \;\; \textit{pour } u \in D(A) \tag{1.7}$$

Autrement dit :

$$\forall x, y \in D(A) : (Ax, y) = (x, Ay) \tag{1.8}$$

Définition 1.9. *On dit qu'un opérateur T est **auto-adjoint** si $T^* = T$, i.e :*

$$D(T) = D(T^*) \;\; \textit{et } Tx = T^*x, \quad \forall x \in D(T)$$

Théorème 1.2.9. *[?] Soit T un opérateur* ***symétrique*** *dans H. Les assertions suivantes sont équivalentes ;*

(i) *T est auto-adjoint*

(ii) *T est fermé et $ker(T^* \pm i) = \{0\}$.*

(iii) *$Im(T \pm i) = H$*

Exemple 1.2.2. *Soit $H = L^2(0,1)$ et défini $Tf = if'$ sur $D(T) = C_0^\infty(0,1)$, les fonctions dérivable sur $(0,1)$ dont le support est compact de $(0,1)$. Comme ils sont denses dans $L^2(0,1)$, T est densément défini. Il est facile de vérifier que T est symétrique :*
Une intégration par partie montre que si $f, g \in C_0^\infty(0,1)$, alors

$$\langle f, Tg\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} i g'(x) dx = -i \int_0^1 \overline{f'(x)} g(x) dx = \langle Tf, g\rangle$$

donc T n'est pas auto-adjoint. Le calcul ci-dessus montre en fait que si f est une fonction C_1 arbitraire, alors nous avons toujours cela $\langle f, Tg\rangle = \left\langle if', g\right\rangle$, alors $D(T^*)$ est strictement supérieur à $C_0^\infty = D(T)$.

Opérateurs essentiellement auto-adjoint

Définition 1.10. *Soit $(T, D(T))$ un opérateur symétrique dans un espace de Hilbert H. T est dit essentiellement auto-adjoint si $\overline{T}$ est auto-adjoint ou bien $(\overline{T})^* = \overline{T} = T^*$*

Proposition 1.2.5. *Si T est* ***essentiellement auto-adjoint****, alors T possède une unique extension auto-adjointe.*

Démonstration. S est une extension auto-adjointe de T, comme S est fermé alors $\overline{T} \subset S$ donc $S^* \subset (\overline{T})^*$ et $S = \overline{T}, S^* = S$ est $(\overline{T})^* = \overline{T}$, et on a $\overline{T} \subset S$. Montrons que $S \subset \overline{T}$.
S^* est auto-adjoint

$$\Rightarrow S^* = S \tag{1.9}$$

S est fermé $\Rightarrow S^* = S = \overline{S}$. D'autre part :

$$S^* \subset (\overline{T})^*, \tag{1.10}$$

et comme T est **essentiellement auto-adjoint** alors

$$\overline{S} = (\overline{T})^* \tag{1.11}$$

et donc (1.9) et (1.10) donnent,

$$S^* \subset \overline{T}$$

et de (1.9) et (1.11)

$$\Rightarrow S = S^* \Rightarrow S \subset \overline{T}$$

■

Remarque 1.2.1. *Tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse.*

Remarque 1.2.2. *Si T est essentiellement auto-adjoint, alors T^* est la plus petite extension fermé de T.*

Remarque 1.2.3. *Si T et S sont deux opérateurs auto-adjoints et $T \subset S$ alors $T = S$*

Fermeture des opérateurs linéaires, Fermabilité

Il est clair que le graphe d'une transformation linéaire représente l'un des outils puissants dans l'étude des opérateurs linéaires en particulier ceux non bornés sur des espaces de Hilbert. Introduit depuis un siècle déjà par Von neumann (voir [23], [16]), le graphe d'un opérateur permet à ce stade de caractériser une classe d'opérateurs non bornés appelés opérateurs fermés qui occupe une place importante dans le domaine de la théorie spectrale et de l'analyse fonctionnelle. On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A)$ est fermé s'il vérifie la propriété :

$$\left.\begin{array}{c} \forall (x_n)_n \subset D(A) \\ x_n \to x \text{ dans } H \\ Ax_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in D(A) \\ Ax = y \end{array}\right.$$

Les détails dans cette définition sont importants, le fait que A soit fermé n'implique pas que $x \in D(A)$ si $(x_n)_n \subset D(A)$ et $x_n \to x$. Ceci voudra dire que l'ensemble $D(A)$ est lui même fermé, alors qu'on sait que cette situation ne peut se produire pour les opérateurs non bornés. Le graphe d'un opérateur non borné A à domaine dense $D(A)$ dans H, que l'on note $G(A)$, est le sous espace de $H \times H$ défini par :

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$$

où $H \times H$ est muni de la structure hilbertienne naturelle. Il est clair que si A et B sont deux opérateurs linéaires sur H alors $A \subset B \Leftrightarrow G(A) \subset G(B)$. En particulier, un sous espace vectoriel M de $H \times H$ est le graphe d'un opérateur linéaire si la condition suivante est satisfaite

$$(o, y) \in M \Rightarrow y = 0$$

Par le théorème du graphe fermé, on sait qu'un opérateur non borné partout défini est nécessairement borné donc continu. Ainsi, la fermeture et la continuité se ressemblent de loin, mais en réalité chacun de ces concepts diffère de l'autre. Une connexion importante entre un opérateur fermé A et son graphe est donnée par :

Proposition 1.2.6. *un opérateur linéaire A à domaine $D(A)$ est fermé dans H si et seulement si $G(A)$ est un sous espace fermé de $H \oplus H$.*

Si l'on munit $H \times H$ du produit scalaire usuel :

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, x_2) \rangle_{H \times H} = \langle x_1, y_1 \rangle_H + \langle x_2, y_2 \rangle_H \quad, \forall x_i, y_i \in H, i = 1, 2 \tag{1.12}$$

$H \times H$ est alors un espace de Hilbert. On peut donner une autre forme équivalente de la fermeture d'un opérateur borné A en munissant $D(A)$ du produit scalaire du graphe noté $\langle \, , \, \rangle_A$

$$\langle x, y \rangle_A = \langle x, y \rangle_H + \langle Ax, Ay \rangle_H \quad \forall x, y \in D(A) \tag{1.13}$$

$\|\cdot\|_A = \sqrt{\langle \, , \, \rangle_A}$ est une norme appelée norme du graphe. Elle définit une topologie sur $D(A)$ moins fine que la topologie induite par celle de H. On a :

Proposition 1.2.7. *[15] Soit A un opérateur non borné à domaine dense dans $\mathcal{H}$ alors :*

1. *A est fermé sur $\mathcal{H}$ si et seulement si $(D(A), \langle \, , \, \rangle_A)$ est un espace de Hilbert.*
2. *Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, alors $\ker A$ est fermé dans $\mathcal{H}$*
3. *Si A est inversible alors $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ si et seulement si $A^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. En particulier, si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ avec $ImA = \mathcal{H}$ et A est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.*
4. *Si ImA est fermé dans $\mathcal{H}$ et il exsite $c > 0$ tel que*

$$\|Ax\| \geq c \|x\|, \forall x \in D(A)$$

Alors A est fermé dans $\mathcal{H}$.

Une première utilité de la notion du graphe est de montrer que si un opérateur A n'est pas fermé, alors on peut voir s'il possède des extensions fermées grâce à la fermeture de son graphe $G(A)$ dans $H \times H$. Soit A un opérateur non borné à domaine dense $D(A)$. On dit que A est fermable si et seulement si le sous espace $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur linéaire sur H. qui peut être réformulée sous la forme :

Définition 1.11.

$$(A \textit{ est fermable}) \Leftrightarrow ((0,y) \in \overline{G(A)} \Longrightarrow y = 0)$$

Dans ce cas, on note $\overline{A}$ l'opérateur tel $\overline{G(A)} = G(\overline{A})$ et l'opérateur $\overline{A}$ est une extension fermée de A. En fait, elle est la plus petite extension fermée de A.
Un opérateur linéaire est fermable si et seulement s'il admet une extension fermée. Il existe, néanmoins, des opérateurs qui n'admettent aucune extension fermée et par suite ils sont non fermables. Si A est fermable, on note par $D(\overline{A})$ son domaine, avec :

$$D(\overline{A}) = \left\{ \begin{array}{c} x \in H; \text{ il existe une suite } (x_n)_n \in D(A) \text{ telle que } (x_n) \\ \text{converge vers } x \text{ dans } H \text{ et } (Ax_n)_n \text{ ait une limite dans } H \end{array} \right\}$$

et

$$\overline{A}x = \lim_{n \to +\infty} Ax_n \text{ pour } x \in D(A)$$

Attention : le domaine $D(\overline{A})$ de $\overline{A}$ contient $D(A)$ mais n'est pas égal à $\overline{D(A)}$, autrement l'opérateur sera borné.
Bien entendu, les opérateurs bornés sont fermables, et si A est injectif et fermable, alors A^{-1} est fermable si et seulement si $\overline{A}$ est injectif et on a $\overline{A^{-1}} = \overline{A}^{-1}$, A^{-1} est borné et $Im\overline{A} = \overline{ImA}$.
La classe des opérateurs fermables contient strictement la classe des opérateurs fermés qui est, à son tour, strictement emboitée dans la classe des opérateurs non bornés.
$i)$ Posons $H = L^2(I)$ muni de la mesure de lebsegue où $I =]0,1[$. On peut définir alors l'opérateur $A = -i\frac{d}{dx}$ sur H avec plusieurs domaines différents puisque A ne peut pas être défini sur H tout entier. On note :
$A_1 = (A, {C_0}^\infty(I))$ où ${C_0}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I à support compcat dans I.
$A_1 = (A, H^1(I))$ où $H^1(I) = \{f \in L^2(I); \frac{df}{dx} \in L^2(I)\}$.
$A_0 = (A, H_0^1(I))$ où $H_0^1(I)$ est l'adhérence de ${C_0}^\infty(I)$ dans $H^1(I)$.
Il est clair que A_0 et A_2 sont des extensions fermées de A_1.

$$A_1 \subset A_0 \subset A_2$$

$ii)$ On considère $H = L^2([0,1])$ et $D(A) = C([0,1])) \subseteq H$.
Posons $T : D(T) \to H$ et $Tx(t) = x(0)$. T est non fermable. En effet, si l'on considère $(x_n)_n$ une suite dans $D(T)$ définie par $x_n(t) = (1-t)^n$, on a

$$\|x_n\| = (\int_0^1 (1-t)^{2n} dt)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \to 0$$

Mais $(Tx_n) = 1$ qui montre que T est non fermable.

1.2.5 Opérateurs de Fredholm

Soient H un espace complet, T un opérateur linéaire dans H notons par $kerT, ImT = R(T)$ le noyau et l'image de T.

Définition 1.12. *L'indice d'un opérateur est :*

$$\begin{aligned} ind \quad &: \quad \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}. \\ T \quad &\to \quad ind(T) := \dim(\ker T) - \dim(cokerT) \end{aligned}$$

où $cokerT$ est l'espace $Y \diagup ImT$

Exemple 1.2.3. *Considérons deux espace de Hilbert X et Y de dimension finie. (Par exemple $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne.) Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire continu. Supposons que, $\dim(\ker T)$ et $\dim(co\ker T)$ sont finies et $R(T)$ est fermée, étant de dimension finie. Alors,*

$$\begin{aligned} ind(T) &= \dim(\ker T) - \dim(co\ker T) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y/R(T)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) - \dim(R(T)) \\ &= \dim(\ker T) - \dim(Y) + \dim(R(T)) \\ &= \dim(X) - \dim(Y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Opérateurs de Fredholm bornés

Définition 1.13. *Soient X et Y deux espaces de Hilbert. Un opérateur linéaire borné $T : X \to Y$ est appelé opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$R(T)$ est fermé dans Y ;*

2. $\dim(\ker T)$ *est finie.*

3. $\dim(Y/R(T)) = \dim(cokerT)$

Nous noterons $n(T) := \dim(\ker T), d(T) := \dim(co\ker T)$ ainsi que $\mathcal{F}(X,Y)$ l'ensemble de tous les opérateurs de Fredholm de X dans Y.

Définition 1.14. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}^{'})$. A est dit un opérateur* ***semi-Fredholm*** *à* ***droite*** *(respectivement à gauche) s'il existe un opérateur borné $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}^{'})$ et un opérateur K compact sur $\mathcal{H}^{'}$ (respectivement sur $\mathcal{H}$) tel que $AB = I + k$ (respectivement $BA = I + K$)*

Définition 1.15. *[17] Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}^{'})$ avec $(X. \|.\|_{\mathcal{H}})$ et $(Y. \|.\|_{\mathcal{H}})$ des espaces de Banach. A est dit un presque plongement de X dans Y s'il existe un sous-espace X_1 de X de codimension finie et une constante $K > 0$ tel que :*

$$\|Ax\|_Y \geq K \|x\|_X \,; \forall x \in X_1$$

Proposition 1.2.8. *Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ est une opérateur presque plongement alors le noyau de A est de dimension finie.*

Démonstration. Comme A est un presque plongement, il vérifie la condition (1) sur le sous-espace X_1 de X de codimension finie. Cherchons maintenant $\ker(A) \cap X_1$.
Si $x \in \ker(A) \cap X_1$, alors :

$$\begin{cases} x \in \ker A \\ x \in X_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ax = 0 \\ x \in X \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Alors A est injective sur X_1 ailleurs qu'en 0. Donc on a $\ker A \cap X_1 = \{0\}$, et alors :

$$\ker A \subset (X/X_1) \cup \{0\}.$$

D'où

$$\dim \ker A \leq codim X_1 < +\infty$$

■

Définir l'ascent et le descent

Définition 1.16. *[17],[4] Un opérateur $T \in L(X)$ a un acsent topologique uniforme d (Où d est un entier non négatif), si $N(T^n) + R(T) = N(T^d) + R(T)$ est un sous-espace fermé pour tout $n \geq d$.*

Un opérateur T est ***quasi-Fredholm*** *si T a un decsent topologique uniforme d pour un nombre entier d et $R(T^n)$ est fermé pour tous $n \geq d$.*

Définition 1.17. *[17],[4] Soit $T \in L(X)$. Alors T s'appelle un opérateur **quasi-Fredholm** de degré d s'il y a un nombre entier $d \in N$ tel que :*

a) $dis(T) = d$

b) $R(T^d) \cap N(T)$ *est un sous-espace fermé et complété de X.*

c) $R(T) + N(T^d)$ *est un sous-espace fermé et complété de X.*

Produit des opérateurs de Fredholm

Une propriété l'intéressante de indce est que l'indice d'une composition opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices des opérateurs composants.

Proposition 1.2.9. *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}')$.*
Soient $M \subset \mathcal{H}$ tel que $codimM = n < +\infty$, et $A_0 = A/M$. A est de Fredholm si seulement si :

$$A_0 : M \to \mathcal{H}\ .\quad \textit{est de Fredholm}$$

De plus :

$$ind(A) = ind(A_0) + n$$

Lemme 1.2.2. *[11] Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur fermé à image fermé dans H.*
Si M est sous-espace vectoriel de H (non nécessairement fermé dans H)tel que $M + \ker A$ est fermé dans H alors $AM = R(A/M)$ est fermé dans H. En particulier, si M est fermé dans H et $\dim \ker A < +\infty$, alors AM est fermé dans H

Opérateurs de Fredholm non bornés

Soit A un opérateur linéaire, $D(A)$ son domaine.
Donnons d'abord un brève aperçu sur les opérateurs à image fermée.

Définition 1.18. *X,Y deux espaces de Banach.*
Un opérateur $T \in L(X, Y)$, de domaine $D(T)$ dense dans X et d'image $ImT \subset Y$, est dit normalement résoluble si, $\overline{ImT} = ImT$, autrement dit, l'opérateur T à image fermé.

Définition 1.19. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur normalement résoluble non borné A est dit de Fredholm si :*

1. *$R(A)$ est fermé dans H'*

2. *dim* $\ker A$ *est finie*
3. *codim*$R(A)$ *est finie*

1.3 Perturbations des opérateurs non bornés et adjoints

Soient A, B deux opérateurs linéaire de domaine $D(A), D(B)$.
Un premier pas dans la théorie des perturbations, consiste à étudier le caractère de l'opérateur $A+B$ lorsqu'on perturbe A par un autre opérateur B assez petit mais non borné appelé relativement borné.

Définition 1.20. *B est dit relativement borné à A ou simplement A-borné si et seulement si, $D(A) \subset D(B)$ et il existe deux constantes positives a et b telles que :*

$$\|Bx\|_H \leq a\,\|Ax\|_H + b\,\|x\|_H\,, \qquad \forall x \in D(A)$$

L'infimum de a vérifiant cette inégalité est appelé la borne relative de A. En particulier, si B est borné, la borne relative de A est égale à 0. Cette définition est plus utilisée, dans le cadre des espaces de Hilbert, sous la forme :

Théorème 1.3.1. *[2] B est relativement borné à A de borne relative a si et seulement si*

$$\inf_{b>0} \sup_{x\in D(A)\setminus\{0\}} \left(\frac{\|Bx\|^2}{\|Ax\|^2 + b\,\|x\|^2} \right)^{1/2} < \infty$$

1.3.1 Perturbations des opérateurs fermés

L'un des premiers théorèmes de la théorie des perturbations des opérateurs fermés est donné par HESS *et* KATO *dans [13].*

Théorème 1.3.2. *Soit A un opérateur fermé de domaine dense $D(A)$, et B un opérateur A-borné tel que B^* est A^*-borné dont les bornes relatives sont strictement infèrieures à 1. Alors $A+B$ est fermé et $(A+B)^* = A^* + B^*$.*

Ce résultat, important dans la théorie des perturbations, ne subsiste plus si la borne relative est égale à 1. En effet, si on considère $B = -A$, la borne relative est égale à 1, mais l'opérateur nul n'est jamais fermé s'il est défini sur un sous espace non fermé de H. La stabilité des opérateurs fermés sous des perturbations.

Le théorème suivant constitue une version plus intéréssante pour connaître le caractère d'un opérateur à partir d'un autre :

Théorème 1.3.3. *Supposons A, B deux opérateurs non bornés ayant le même domaine $D(A) = D(B) = D$ vérifiant :*

$$\|(A-B)x\| \leq a(\|Ax\| + \|Bx\|) + b\,\|x\| \quad \text{pour certain} \quad a > 0$$

Alors :

1. *A est fermé sur D si et seulement si B l'est aussi*
2. *A est fermable sur D si et seulement si B est fermable et on a $D(\overline{A}) = D(\overline{B})$*

1.3.2 Perturbations des opérateurs (essentiellement) auto-adjoints

Ou encore le théorème de Wüst pour les opérateurs essentiellement auto-adjoints (Voir par exemple [23]) :

Théorème 1.3.4. *Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$. Si B, de domaine $D(B)$, est un opérateur symétrique A-borné de borne relative égale à 1, alors l'opérateur $A+B$ de domaine $D(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(A)$.*

1.3.3 Perturbations des opérateurs auto-adjoints

La littérature affirme que les opérateurs intérférant avec la physique ou les équations différentielles abstraites ne sont pas toujours fermés. Ils sont intéréssants et utiles lorsqu'ils sont auto-adjoints ou essentiellement auto-adjoints. On peut établir que si un opérateur est proche d'un opérateur auto-adjoint alors lui aussi est auto-adjoint. En effet on a :

Théorème 1.3.5. *Soit T un opérateur auto-adjoint. S'il existe $\delta > 0$ tel que : Pour tout opérateur symétrique et fermé A vérifiant $g(A,T) < \delta$ est nécessairement auto-adjoint, g désigne la métrique du gap, défini dans définition (2.4).*

L'importance de ce théorème n'est pas à discuter, mais le calcul de l'écart entre T et A par la métrique g constitue parfois une difficulté importante. Les opérateurs auto-adjoints constituent, de leur côté, une classe importante des opérateurs linéaires non bornés. En fait, les opérateurs rencontrès dans la physique quantique sont souvent auto-adjoints ou essentiellement auto-adjoints. En partciulier, les opérateurs de SCHRÖDINGER *sont considérés comme une perturbation par* *un champ de potentiel de l'opérateur de* Laplace *sur l'espace de Hilbert* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. *Pour ces raisons on préfère, parfois, utiliser la stabilité du caractère auto-adjoint des opérateurs à travers le théorème de* Kato- Rellich *[16] :*

Théorème 1.3.6. *Soit T un opérateur auto-adjoint. Si A est symétrique et $T-$borné de borne relative strictement inférieure à 1, alors $T+A$ est aussi auto-adjoint. En particulier, $T+A$ est auto-adjoint si A est borné et symétrique avec $D(T) \subset D(A)$.*

Chapitre 2

Produit et somme des opérateurs fermés

Soit H un espace de Hilbert séparable sur un corps complexe, $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermés dand H.

On a mentionné que la tivialité des domaine peut entraver toute opération algébrique sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, et malgré que la situation $D(AB) = \{0\}$ existe, on ne trouve par réellement une variété d'exemples la confirmant.

2.1 Trivialité du produit et de la somme des opérateurs fermés

Etant donnés deux opérateurs A et B, de domaines $D(A)$ et $D(B)$ ils représentent physiquement l'ensemble des informations sur A et B. Si on considère les opérateurs $A+B$ et AB, les domaines $D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ et $D(AB) = A^{-1}D(B)$ vont certainement se retricir (physiquement ceci est connu par la perte de données) ou encore se réduire à $\{0\}$. Pour ce qui est de la trivialité de la somme de deux opérateurs A et B, de domaines respectifs $D(A)$ et $D(B)$, le domaine $D(A) \cap D(B))$ peut être réduit à zéro. Examinons l'exemple suivant [20] :
Sur $L^2(\mathbb{R})$, considèrons A l'opérateur de multiplication par x et B l'opérateur de multiplication par x^2.
A et B sont essentiellement auto-adjoints sur $D(A), D(B)$ respectivement avec

$$D(A) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\}$$

$\widehat{f} = \mathfrak{F}f$ *étant la transformée de Fourier de* f.
On a

$$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = \{f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}); \widehat{f} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})\} = \{0\}.$$

Puisque la transformée de Fourier d'une distribution à support compact n'est jamais à support compact sauf si elle est identiquement nulle en s'appuyant sur le théorème de Paley-Wiener-Schwartz *qui affirme bien le résultat suivant :*

$$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{F}(\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})) = \{0\}$$

En ce qui concrene la trivialité du produit des opérateurs fermés, la littérature n'offre pas beaucoup d'exemples. En fait, le cas le plus traité est de chercher un domaine trivial pour le carré d'un opérateur qui est au moins symétrique. Lorsque $A = B$, *on trouve la construction de Chernoff [7] : qui remarque que la procédure de* naimark *[22] est très compliquée en terme de construction,* Chernoff *utilise la transfomation de Cayley (voir [15]), précisement :*
Si M *et* N *sont deux sous espaces fermés de* H, V *est une isométrie de* M *dans* N *tel que* $(V-I)M = D$ *est un sous espace dense de* H. *Alors, l'application* $V - I$ *est injective et la relation :*

$$T = i(V+I)(V-I)^{-1}$$

définit un opérateur symétrique T *à domaine dense* D. *Si*

$$Im(V+I) \cap Im(V-I) = \{0\}$$

il est clair que $D(T^2) = \{0\}$ *où*

$$T^2 = i(2(V-I)^{-1} + I)T$$

Il considère dans cette construction, $H = L^2(S)$ *où* S *est le cercle unité.* M *sera l'espace de* Hardy*[2]*

$$H^2(S) := \{f \in hol(S) : \sup_{0<r<1} (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta)^{1/2}\} < \infty$$

où $hol(S)$ *désigne l'espace des fonctions holomorphes de* S *dans* $\mathbb{C}$.
V *sera la multiplication par une fonction convenable* $\Omega(\theta)$ *de module* 1, *et* $N = VM = \Omega H^2$.
Le choix de Chernoff consiste à prendre :

$$\Omega(\theta) = \begin{cases} \exp(ie^{-1/\theta}) & 0 < \theta < \pi \\ -1 & 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

Les propriètés de $\Omega(\theta)$ permettent de construire aisement les ensembles M et N.
Dixmier[9] dans un celebre papier montre :

Lemme 2.1.1. *Éant donnés deux couples de variétés J complémentaires non fermées, $(D_1, D_1^{'})$ et $(D_2, D_2^{'})$ il existe un unitaire U tel que $U(D_2)$ et $U(D_2^{'})$ soient disjointes de D_1 et $D_1^{'}$.*

Théorème 2.1.1. *Soit A et B deux opérateurs auto-adjoints biunivoques, non bornés et d'inverses non bornés. On peut trouver un unitaire U de telle sorte que, en posant $B^{'} = UBU^{-1}$, on ait : $D_{AB'} = D_{B'A} = 0$.*

Pour démontrer ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Démonstration. D_A et Δ_A sont complémentaires, de même D_B et Δ_B. Il suffit de choisir U, de façon que $U(D_B)$ et $U(\Delta_B)$ soient disjoints de D_A et Δ_A. ■

Remarques 2.1.1.
1. *On a alors, avec les notations de E, $AB' = \omega$, donc $(AB')^* = 0$. Et donc, $B^{'*}A^* = B^{'}A = \omega$.*
2. *De même, on peut trouver un opérateur linéaire fermé A dans le cas p tel que :*

$$D_{A^2} = D_{A^{*2}} = 0$$

2.2 Instabilité de la somme et produit des opérateurs fermés

On a vu jusqu'à présent que la somme $A + B$ de deux opérateurs possède le même caractère de l'opérateur A si B est correctement choisi (par exemple $A-$borné). Qu'en est-il de la somme des opérateurs fermés ou auto-adjoints sans contrôle de la perturbation ?
La réponse est en général négative, la somme $A + B$ de deux opérateurs fermés n'est fermée. En effet :
Si H est un espace de Hilbert séparable ayant une base orthonormale (ξ_n). Posons

$$D = \left\{ x \in H ; \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left| \langle x, y_n \rangle \right|^2 < \infty \right\}, z = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} y_n$$

et définissons les opérateurs S et T de domaine D, qui est dense dans H, par :

$$Sx = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \langle x, y_n \rangle y_n \quad , \quad Tx = Sx + \langle Sx, z \rangle y_1 \quad x \in D$$

L'opérateur T aussi bien que S sont fermés à domaines denses mais $T - S$ n'est pas fermé puisque non fermable.
Pour le produit des opérateurs fermés, supposons que le domaine du produit est non trivial, le produit de deux opérateurs fermés n'est pas en général fermé. Considérons en effet sur $L^2(\mathbb{R})$, les opérateurs

$$A = -i\frac{d}{dx}, \qquad B = |x|$$

A et B sont auto-adjoints (par suite fermés) sur leurs domaines respectifs

$$D(A) = H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \quad \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

et

$$D(B) = \{f \in L^2(\mathbb{R}); |x|f \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Alors l'opérateur défini par

$$ABx = -i(|x|f)'$$

de domaine

$$D(AB) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : |x|f \in L^2(\mathbb{R}), -i(|x|f)' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Où la dérivée est considérée au sens des distributions. $D(AB)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ mais AB ne peut être fermé (voir [19]).
Donnons d'abord quelques propriétés élémentaires de la somme de deux opérateurs non bornés :

Proposition 2.2.1. *Soient A, B deux opérateurs linéaires non bornés de domaines respectifs $D(A), D(B)$. Alors*

1. *Si A est borné et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.*
2. *Si $D(A), D(B), D(A) \cap D(B)$ sont denses dans H, alors $A^* + B^* \subset (A + B)^*$, si de plus A est borné alors $A^* + B^* = (A + B)^*$*

2.3 Résultats de stabilité de la somme et du produit des opérateurs fermés

2.3.1 Stabilité du produit des opérateurs fermés

La littérature montre qu'il est judicieux de chercher une autre loi de composition des opéar-teurs qu'imposer des conditions qui peuvent s'avérer non vérifiables. A notre connaissance, deux *types de produit ont été introduits, le premier en 1947 par Dixmier et le second est venu 60 ans aprés.*

Produit de dixmier

DIXMIER *[9] a essayé, de contourner le problème de stabilité du produit usuel et celui de la formule de l'adjoint rencontrée dans la littérature mathématique en cette période. Il proposa alors une nouvelle manière de composer deux opérateurs comme suit :*

Définition 2.1. *Le produit $A.B$ de deux opérateurs A et B est défini de la manière suivante : On dit que $f \in D(A.B)$ et $g := A.Bf$ s'il existe deux suites (f_n) dans $D(B)$ et (g_n) dans $R(A)$ vérifiant $f_n \to f$ et $g_n \to g$ et tels que $A^{-1}g_n - Bf_n \to 0$ Pour $A^{-1}g_n$ et Bf_n convenablement choisis.*

A partir de cette définition, DIXIMIER *donne un premier résultat concernant la stabilité du produit deux opérateurs fermés.*

Théorème 2.3.1. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ Alors :*
i) $A.B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.
ii) $A.B = AB$ si A est borné et B est fermé borné ou si A^{-1} est fermé borné et B est fermé.
iii) $A.B = \overline{AB}$ si A est fermé borné et B^{-1} est fermé ou si A est fermé borné et B fermé.

Concernant la formule de l'adjoint du produit, Le résultat de DIXMIER *reste limité à la formule :*

$$(AB)^* = B^*.A^*$$

Plus récemment, En 2008, MESSIRDI *et* MORTAD *introduisent un nouveau produit d'opérateurs assez général que l'on va donner un aperçu maintenant.*

Produit de Messirdi- Mortad

Le produit proposé par MESSIRDI *et* MORTAD *dans [20], que l'on note dorénavant produit MM, est inspriré de la notion du bissecteur d'un opérateur fermé développé par* LABROUSSE *et* MERCIER *[18]. Soit A un opérateur fermé à domaine dense $D(A)$. Alors l'opérateur $(I + A^*A)$ est fermé (puisque auto-adjoint) et à inverse borné (voir [23]). Son inverse, noté R_A est positif. En conséquence du lemme de la racine carée ([24]) on sait qu'il existe un opérateur (unique) C positif tel que $C^2 = R_A$. Il est alors légitime de considérer $S_A = (I + A^*A)^{-\frac{1}{2}}$.*

Proposition 2.3.1. *L'opérateur R_A vérifie :*
(i) R_A est borné.
ii) AR_A est borné si A est fermé.
iii) $R(R_A) = D(AA^*)$.
iv) $A^*AR_A = I - R_A$.

Démonstration. Si A est un opérateur linéaire fermé, il est connu que A^*A est un opérateur auto-adjoint positif. Il vient que $(I + A^*A)^1 = R_A$ est un opérateur borné de norme inférieure à 1. De plus, pour tout $u \in D(A^*A) \subset D(A)$ on a,

$$\|AR_Au\|^2 = (R_Au, A^*AR_Au) \leq (R_Au, (1 + A^*A)R_Au) \leq (R_Au, u) \leq \|u\|^2$$

Plus précisement, On a aussi

$$\forall x \in H \qquad \|(\frac{1}{2} - R_A)x\|^2 + \|AR_Ax\|^2 = \frac{1}{4}\|x\|^2$$

par conséquent $\|R_A\| \leq 1$ et $\|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$.
On $A^*AR_A = A^*A(\frac{1}{I+A^*A}) = I - R_A$ ■
On peut ajouter, pour $x \in D(A)$ on a $R_AAx = AR_Ax$ de sorte que $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$ et on a aussi $ker(AR_A) = ker(A)$.
Donnons à présent quelques propriétés de S_A qui seront utiles dans la suite de ce travail.

Proposition 2.3.2. *Pour tout $x \in H$ on a :*

$$\|S_Ax\|^2 + \|AS_Ax\|^2 = \|x\|^2$$

et $R(S_A) = D(A)$.

Démonstration. A partir de l'équation :

$$\|R_Ax\|^2 + \|AR_Ax\|^2 =< x, R_Ax > \qquad \forall x \in H$$

on obtient

$$\|S_AS_Ax\|^2 + \|AS_AS_Ax\|^2 = \|S_Ax\|^2 \quad \forall x \in H \tag{2.1}$$

et donc AS_A est borné sur $R(S_A)$ avec une norme inférieure à 1. Puisque $R(R_A) \subset R(S_A) \subset D(A)$ est dense dans $D(A)$ relativement à la norme du graphe et du fait que l'équation (2.1) montre que $R(S_A)$ est dense dans $D(A)$ il s'en suit alors que $R(S_A) = D(A)$. ■
On remarque, de la proposition (2.3.2), que :
$\|S_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$ *et* $\|AS_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$ *et on a :*

Proposition 2.3.3. *[18] Les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) Si $x \in D(A) \quad S_{A^*}Ax = AS_Ax$

ii) $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$

iii) $ker(AS_A) = ker(A)$

Démonstration. i) Puisque R_A est une contraction positive, il existe alors une suite de polynômes P_n de degré 2^{n-1} vérifiant :

- $P_n(0) = 0$
- $P_n(R_{A^*})A = AP_n(R_A)$
- $lim\|P_n(R_A) - S_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0$

Ainsi, si $x \in D(A)$ alors

$S_{A^*}As = \lim_{n\to+\infty} P_n(R_{A^*})Ax = \lim_{n\to+\infty} AP_n(R_A)x = AS_Ax$

ii) Soit $x \in D(A)$ alors

$$\forall y \in H \quad < AS_Ax, y >=< S_{A^*}Ax, y >=< x, A^*S_{A^*}y >$$

de sorte que $AS_A = (A^*S_{A^*})^*$ sur $D(A)$ et donc sur tout H puisque $D(A)$ est dense dans H

iii) Cette propriété est triviale.

■

Exprimons maintenant le bissecteur d'un opérateur fermé.

Définition 2.2. *Soit* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$*. Alors le bissecteur de A est l'opérateur* $F(A)$ *défini par :* $F(A) = AS_A(I + S_A)^{-1}$

Il vérifie alors :

Proposition 2.3.4. *[18] Soit* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *alors*

1. $F(A) \in \mathcal{C}_0(\mathcal{H})$
2. $F(A)^* = F(A^*)$
3. $R_{F(A)} = \frac{I+S_A}{2}$
4. $F(A)R_{F(A)} = \frac{AS_A}{2}$

Donnons à présent la définition du produit MM.

Définition 2.3. *[21] Soient $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Le produit $\bullet$ de deux opérateurs A et B est défini par :*

$$A \bullet B = F^{-1}(F(A)F(B))$$

où $F(A)F(B)$ étant le produit usuel des opérateurs bornés dans H.

Messirdi *et* Mortad *montrent, à partir des propriètés de l'application F (voir [18]) :*

Théorème 2.3.2. *Soient $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$*

1. *Si $\|F(A)F(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < 1$ alors*

$$A \bullet B = 2F(A)F(B)(1 - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B))^{-1}$$

ceci revient à dire que $A \bullet B$ est borné sur H et

$$\|A \bullet B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \frac{2\,\|F(A)F(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}}{1 - \|F(A)F(B)\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}}$$

2. *Si $\|F(A)F(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 1$ alors $A \bullet B$ est un opérateur non borné, fermé et à domaine dense dans H avec*

$$D(A \bullet B) = R(I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B))$$

et pour $\quad y = [I - F(B^*)F(A^*)F(A)F(B)]x \in D(A \bullet B)$
On a

$$(A \bullet B)y = 2F(A)F(B)x$$

Remarque 2.3.1. *La loi $\bullet$ n'est pas commutative, elle est asociative mais n'ayant pas d'élément neutre. Son avantage est qu'elle préserve la fermabilité et l'égalité du produit des adjoints :*

Proposition 2.3.5. *Pour tout $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ on a $(A \bullet B)^* = B^* \bullet A^*$.*

Démonstration. On a $(A \bullet B)^* = F^{-1}((F(A)F(B))^*)$. donc on a :

$$(A \bullet B)^* = F^{-1}(F(B^*)F(A^*)) = B^* \bullet A^*$$

■

Définition 2.4. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. Dénotent leur graphique par $G(A)$ et $G(B)$. Soit $P_{G(A)}$ et $P_{G(B)}$ désignent les projections orthogonales respectivement sur $G(A)$ et $G(B)$. Maitenant*

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \left\|(1-P_{G(B)})P_{G(A)}\right\|_{B(H\times H)},\\ g(A,B) &= \left\|P_{G(B)}-P_{G(B)}\right\|_{B(H\times H)}.\end{aligned}$$

lors $g(A,B)$ est un métrique sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, G énéralement appelé l'écart métrique, tandis que $\delta(A,B)$ n'est pas une distance.De plus, La topologie induite par g sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est équivalente à la topologie uniforme habituelle, et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est ouvert dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$. Pour [16], on a

$$g(A,B) = \max(\delta(A,B), \delta(B,A)), \quad g(A,B) = g(A^*, B^*),$$

Et si A et B sont inversible dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$, alors

$$g(A^{-1}, B^{-1}) = g(A,B).$$

corollaire 2.3.1. *Si l'un des opérateurs A et B est borné, alors $A \bullet B$ l'est aussi puisque $\|F(A)F(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < 1$ alors $A \bullet B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

Ce corollaire est en fait une propriété qui n'est pas toujours vérifiée pour le produit usuel des opérateurs fermés, ce qui constitue un avantage supplémantaire du produit MM.

Resultat stabilité du produit

Définition 2.5. *Soit M un sous-espaee vectoriel d'un espace de Banach B. Nous dirons que M est un sous-espace paracomplet de B si M est un espace de Banach et l'injection de M dans B est continue.*

Proposition 2.3.6. *Soit M, N deux sous-espaces paracomplets de B tel que $M + N$ et $M \cap N$ soient fermés dans B. Alors M et N sont des sous-espaces fermés de B.*

Définition 2.6. *Soit A un opérateur linéaire non nécessairement borné de domaine $D(A)$ contenu dans un espace de Banach B et à valeurs dans un espace de Banach B_1. On notera $G(A)$ le graphe de A c'est à dire le sous-espace lin6aire de $B \times BI$ constitué par les couples (u, Au) avec $u \in D(A)$. Alors on dira que A est un opérateur paracomplet si $G(A)$ est un sous-espace paracomplet de $B \times B_1$.*

Proposition 2.3.7. *AB est paracomplet si A et B sont paracomplets et tels que $N(AB)$ et $R(AB)$ sont fermés dans H.*

il montre aussi que dans le même travail :

Théorème 2.3.3. *Si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

1. *A et B sont des opérateurs de Fredholm.*
2. *A et B sont des opérateurs quasi-Fredholm et AB est quasi- Fredholm à indice égal à* 0.
3. *B est un inverse généralisé de A et $R(A)$ est ferm é dans H, et inversement.*
4. *B est un inverse généralisé de A tel que $R(A) \oplus R(B) = H$.*

Alors AB est fermé dans H.

Topologie de l'image réciproque sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$
L'ensemble $\tau = \{F^{-1}(\omega) : \omega$ ouvert dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{H})\}$
Par Ailleurs,τ est métrisable et pour $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ la métrique définie par

$$d(A, B) = \|F(A) - F(B)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$$

est une métrique bornée dans $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ rendant à la fois F et F^{-1} continues, ce qui traduit que F est une isométrie entre $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{C}_0(\mathcal{H})$. En particulier, la topologie induite par d sur $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ coincide avec τ.
On a vu que pour $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ on a

$$d(A, B) = d(A^*, B^*) \quad et \quad g(A, B) \leq 32\sqrt{2}d(A, B)$$

Lemme 2.3.1. *[21] Soient $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ et $0 < \varepsilon < \frac{1}{32\sqrt{2}}$. Alors*
$d(A, B^*) < \ \Rightarrow G(A) \oplus G(B)^{\perp} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

Démonstration. Si $d(A, B^*) < \varepsilon$, alors $g(A, B^*) < 1$ et $\left\|P_{G(A)} - P_{G(B^*)}\right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < 1$.
Soit $X \in G(A) \cap G(B^*)^{\perp}$, alors $(P_{G(A)} - P_{G(B^*)})X = X$. En utilisant les matrices caractéristiques de Stone [27]

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & I - R_{A^*} \end{pmatrix}$$
$$P_{G(B^*)} = \begin{pmatrix} R_{B^*} & BR_B \\ B^* R_{B^*} & I - R_B \end{pmatrix}$$

on a alors

$$\|X\| \leq 32\sqrt{2}d(A, B^*) < \|X\|$$

ce qui donne $X = 0$.

De façon similaire, on obtient $G(B^*) \cap G(A)^{\perp} = \{0\}$,
par conséquent

$$\left(G(B^*) \cap G(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{G(A) + G(B^*)^{\perp}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$$

Pour conclure cette preuve, il nous reste à vérifier que $G(A) + G(B^*)^{\perp}$ est fermé dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.
■

Théorème 2.3.4. *[2] Soient A, B deux opérateurs fermés à domaines denses dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $0 < \varepsilon < \frac{1}{32\sqrt{2}}$. Si $d(A, B^*) <$ alors AB et BA sont tous deux des opérateurs fermés à domaines denses dans $\mathcal{H}$.*

corollaire 2.3.2. *Si $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ sont tels que*

$$d(A, B^*) < \varepsilon \qquad \text{où } 0 < \varepsilon < \frac{1}{32\sqrt{2}}$$

alors $(I + AB)^{-1}$,$(I + BA)^{-1} \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$

Démonstration. Puisque $(I + BA)P = I$ et $(I + AB)P' = I$ où $R(P)$ et $R(P')$ sont denses dans $\mathcal{H}$, P et P' sont deux éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ alors $(I + BA)$ et $(I + AB)$ sont inversibles sur leurs domaines respectifs prenant leurs valeurs dans $\mathcal{H}$ et $(I + BA)^{-1} = P$ et $(I + AB)^{-1} = P'$. ■

corollaire 2.3.3. *La réciproque du théorème (2.3.4) est vraie.*

Démonstration. Si $R_1 = (\mathcal{I} + BA)^{-1}$ et $R_2 = (\mathcal{I} + AB)^{-1}$ sont dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ alors pour tout f, g dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ posons :
$x = R_1 f + BR_2 g$ et $y = AR_1 f - R_2 g$. On a alors :

$$(f, g) = (x, Ax) + (By, -y)$$

Alors $G(A) + G(B^*)^{\perp} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. D'après le lemme (2.3.1) on obtient $d(A, B^*) < \varepsilon$ ■

2.3.2 Stabilité de la somme des opérateurs fermés

Si on prend la relation de l'adjoint, les résultats ne sont pas alors plus meilleurs. En effet, l'adjoint de $A + B$ si A et B sont des opérateurs non bornés ne vaut pas exactement $A^* + B^*$. On verra dès lors, que la somme $A + B$ peut être fermée et que $(A + B)^* = A^* + B^*$ si l'on impose des conditions adéquates sur $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.
Rappelons d'abord deux propriétés importantes de la somme de deux sous espaces de $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$: où $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ et $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ à domaine dense

Proposition 2.3.8. *Soient $M, N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Alors,*

$$M + N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \Leftrightarrow M^\perp + N^\perp = (M \cap N)^\perp \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$$

Démonstration. Puisque $M + N = (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$ alors $M + N$ est fermé du fait que l'orthogonal d'un sous espace de $\mathcal{H}$ est toujours fermé.
Inversement :

$$M^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$$

et

$$N^\perp \supseteq M^\perp \cap N^\perp$$

entrainent,

$$M \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$$

et

$$N \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$$

d'où : $M + N \subseteq (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$.
De même,

$$M + N \supseteq M \Rightarrow (M + N)^\perp \subseteq M^\perp$$

et

$$M + N \supseteq N \Rightarrow (M + N)^\perp \subseteq M^\perp$$

d'où : $(M + N)^\perp \subseteq M^\perp + N^\perp$
et par conséquent :
$M + N = (M^\perp \cap N^\perp)^\perp$ donc,

$$(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$$

Cette égalité étant vraie pour tous M, N dans $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, on obtient le résultat en remplaçant M par $M^\perp$ et N par $N^\perp$. ■

Proposition 2.3.9. *Soit $M, N \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $g(M, N) < 1$

ii) $M \oplus N^\perp = \mathcal{H}$

iii) *Il existe une projection Q de $\mathcal{H}$ sur M telle que $(I - Q)$ soit une projection sur $N^\perp$*

Démonstration. $i) \Rightarrow ii)$ Soit $x \in M \cap N^{\perp}$, alors

$$(P_M - P_N)x = (I - P_N)x = P_{N^{\perp}}x = x$$

d'où,

$$\|x\| = \|(P_M - P_N)x\| \leq g(M,N)\|x\| < \|x\|$$

Il suit que $x = 0$ et donc $M \cap N^{\perp} = \{0\}$.
En inversant les rôles de M, N, on obtient aussi $N \cap M^{\perp} = \{0\}$.
De ce qui précède, il vient que

$$(M^{\perp} \cap N)^{\perp} = \overline{M + N^{\perp}} = \mathcal{H}$$

Il reste à vérifier que $M + N^{\perp}$ est fermé montrer cette implication. En effet, si $x \in M + N^{\perp}$ alors il existe y, z dans M et $N^{\perp}$ respectivement tels que $x = y + z$, un simple calcul nous fournit :

$$\|y\|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1 - g^2(M,N))}; \quad \|z\|^2 = \frac{\|x\|^2}{(1 - g^2(M,N))}$$

Ainsi, si $x \in M + N^{\perp}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n = y_n + z_n$. Les majorations précédentes montrent alors que $(y_n)_n$ et $(z_n)_n$ sont des suites convergentes de limites respectives y et z alors $x = y + z \in M + N^{\perp}$.
$ii) \Rightarrow iii)$ Si $x \in \mathcal{H}$, alors $x = y + z$ avec $y \in M$ et $z \in N^{\perp}$. On considère l'opérateur Q tel que $Qx = y$ et $(I - Q)x = z$ pour tout $x \in \mathcal{H}$. Il est facile de voir que $Q, (I - Q)$ sont des projections sur M et $N^{\perp}$ respectivement, en plus ils sont surjectifs. La continuité de Q et $(I - Q)$ découle du théorème du graphe fermé.
$iii) \Rightarrow i)$ Posons $Q_N = Q|_N$, de normes égales sur et Q_N est bijective de N dans M. Un simple calcul de $\|y\|^2$ nous fournit

$$\delta^2(M,N) = \|(I - P_N)P_M y\|^2 \leq (1 - \frac{1}{\|Q_N\|^2})$$

Par $iii)$ on a $M \cap N^{\perp} = M^{\perp} \cap N = \{0\}$, puisque si $x \in M \cap N^{\perp}$ on a :

$$x = Qx + (1 - Q)x = 2x \Rightarrow x = 0$$

on achève la preuve par remarquer que

$$g^2(M,N) = \delta^2(M,N) < 1 - \frac{1}{\|Q\|^2}$$

■

On rappelle au début de cette section, quelques résultats classiques concernant la somme et l'adjoint de la somme de deux opérateurs non bornés. On suppose par ailleurs que $(A+B)^*, (A^*+B^*)^*, \overline{(A+B)}, \overline{(A^*+B^*)}$... *existent lorsque* A *et* B *sont dans* $\mathcal{C}(\mathcal{H})$

Lemme 2.3.2. *Soient* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, *alors*

1. $G(A^* + B^*) \subset [V(G(A+B))]^{\perp}$
2. $A^* + B^* \subset \overline{A^* + B^*} \subset (A+B)^*$
3. $A + B \subset \overline{A+B} \subset (A^* + B^*)^*$
4. *Si* $A \in B(H)$, $A + B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *et* $(A+B)^* = A^* + B^*$

Démonstration. 1. Soit $x \in D(A^*) \cap D(B^*)$, alors pour tout $t \in D(A) \cap D(B)$, on a

$$\begin{aligned} < (x, A^*x + B^*x), V(t, At + Bt) > &= - < x, At + Bt > + < A^*x + B^*x, t > \\ &= - < A^*x + B^*x, t > + < A^*x + B^*x, t > \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Est une conséquence immédiate de *1* puisque $V(G(A+B))^{\perp} = G((A+B)^*)$.
3. En utilisant *2* on obtient :

$$G(A+B) = G(A^{**} + B^{**}) \subset G(\overline{A+B}) \subset G\left((A^* + B^*)^*\right)$$

4. A est relativement borné de borne relative nulle et on applique le théorème de Hess-kato.

■

Commençons par donner un résultat classique mais fondamental :

Proposition 2.3.10. *Soit* $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. *Si* $g(A, 0) < 1$ *alors pour tout* $B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, $A + B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *et* $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Démonstration. $g(A, 0) < 1$ implique que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ainsi, $D(A+B) = D(B)$ et $A+B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. On obtient aussi la relation $(A+B)^* = A^* + B^*$ en vertu du lemme (2.3.2), propriétés (3) et le théorème de Hess- kato [16] dans le cas des perturbations des opérateurs fermés. ■

Commençons par examiner le lemme suivant :

Lemme 2.3.3. *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$.

i) Si $G(A) + G(-B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, *alors* $G(A^*) + G(-B^*) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$
ii) Si $G(A) + V(G(B)) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, *alors* $G(A^*) + V(G(B^*)) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$

Démonstration. i) Si $G(A) + G(-B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ alors, en vertu de la proposition (2.3.8) :

$$G(A)^{\perp} + G(-B)^{\perp} \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$$

Cependant,

$$G(A^*) = V(G(A)^{\perp}) = (V(G(A)))^{\perp}$$

et

$$G(-B^*) = V(G(-B)^{\perp}) = (V(G(-B)))^{\perp}$$

Ainsi,

$$V(G(A))^{\perp} + V(G(-B))^{\perp} \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$$

et alors $G(A^*) + G(-B^*) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$.
ii) est démontré de la même manière.

■

On va établir à partir de ce point la fermeture de la somme et la relation de la somme des adjoints de deux opérateurs linéaires fermés.

Théorème 2.3.5. *Soit* $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ *tels que* $G(A) + G(-B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ *alors :*
i) $R(A + B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$,
ii) $R(A^* + B^*) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$
iii) $(A + B)^* = \overline{A^* + B^*}$ *si* $N((A + B)^*) = N\left(\overline{A^* + B^*}\right)$
iv) $(A^* + B^*)^* = \overline{A + B}$ *si* $N((A^* + B^*)^*) = N\left(\overline{A + B}\right)$

Démonstration. i) On remarque, en effet, que $R(A + B) = [N(A^* + B^*)]^{\perp}$.
Soit $(x, y) \in G(A^*) \cap G(-B^*)$ alors $x \in D(A^* + (-B^*))$ et $y = A^*x = -B^*x$ puisque $x \in N(A^* + B^*)$.
Aussi que, si $z \in [N(A^* + B^*)]^{\perp}$ alors

$$(z, 0) \in [G(A^*) \cap G(-B^*)]^{\perp} = \left[V(G(A))^{\perp} \cap V(G(-B))^{\perp}\right]^{\perp}$$

En utilisant le fait que,

$$G(A^*) = V(G(A))^{\perp}$$

et

$$G(-B^*) = V(G(-B))^{\perp}$$

et que V est une isométrie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, alors

$$(0, z) \in \left(G(A)^{\perp} \cap G(-B)^{\perp}\right)^{\perp} = G(A) + G(-B)$$

Par conséquent, pour tout $z \in [N(A^* + B^*)]^{\perp}$ il existe une décomposition unique de $(0, z)$ en $(x, Ax) \in G(A)$, $(y, -By) \in G(-B)$ et $(u, v) \in G(A) \cap G(-B)$ telle que

$$(0, z) = (x, Ax) + (y, -By) + (u, v)$$

avec (x, Ax), $(y, -By) \in [G(A) \cap G(-B)]^{\perp}$.
Ainsi

$$\begin{cases} x + y + u = 0 & (1) \\ Ax - By + v = z & (2) \end{cases}$$

On déduit que $x \in D(A + B)$.
Posons $x = Tz$ où $T : [N(A^* + B^*)]^{\perp} \to D(A + B)$ vérifiant en vertu des équations (1) et (2)

$$\begin{aligned} (A + B)x &= Ax - By - Bu \\ &= Ax - By + v \\ &= z \text{ , pour tout } z \in [N(A^* + B^*)]^{\perp} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(Tz, z) = (x, (A + B)x) \in G(A + B)$$

alors,

$$[N(A^* + B^*)]^{\perp} \subset R(A + B)$$

Inversement, nous avons par le lemme (2.3.2), propriété (2),

$$R(A + B) \subseteq \overline{R((A^* + B^*)^*)} = [N(A^* + B^*)]^{\perp}$$

iii) En utilisant le lemme (2.3.3), $G(A^*) + G(-B^*) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, il existe, comme précedemment, une application T^* définie de $[N(A + B)]^{\perp}$ sur $D(A^* + B^*)$ telle que pour tout $t \in [N(A + B)]^{\perp}$, on a

$$(T^*t, t) \in G(A^* + B^*) \subseteq G(\overline{A^* + B^*})$$

Soit $v \in D((A+B)^*)$ et $t = (A+B)^* v \in R((A+B)^*) \subseteq [N(A+B)]^{\perp}$
on a alors, en vertu du lemme (2.3.2),

$$(T^* t, t) \in G(A^* + B^*) \subset G((A+B)^*)$$

Par conséquent, $(A+B)^* T^* t = t$ et tenant compte de (i),

$$\begin{aligned} (v - T^* t) &\in N((A+B)^*) = [R(A+B)]^{\perp} \\ &= \overline{N(A^* + B^*)} \subseteq N(\overline{A^* + B^*}) \end{aligned}$$

Alors $v \in D(\overline{A^* + B^*})$ du fait que $(v - T^* t) \in D(\overline{A^* + B^*})$ et $T^* t \in D(A^* + B^*)$.
On a aussi l'inclusion inverse par la propriété (2) du lemme (2.3.2).
En conséquence,

$$D((A+B)^*) = D(\overline{A^* + B^*})$$

.
De plus, Soit $(u, v = (A+B)^* u) \in G((A+B)^*), u \in D((A+B)^*) = D(\overline{A^* + B^*})$. Alors,

$$\left(u, w = \overline{(A^* + B^*)} u\right) \in G(\overline{A^* + B^*}) \subseteq G((A+B)^*)$$

relativement à (2) du lemme (2.3.2). On obtient

$$(v - w) = 0 \quad \text{et } (u, v) \in G(\overline{A^* + B^*})$$

ainsi,

$$u \in N((A+B)^*) = N(\overline{A^* + B^*})$$

. Ce qui montre que

$$G((A+B)^*) \subset G(\overline{A^* + B^*})$$

.
Du fait que l'inclusion inverse est vraie en vertu du lemme (2.3.2), on a alors $G((A+B)^*) = G(\overline{A^* + B^*})$ et par suite $(A+B)^* = \overline{A^* + B^*}$.
ii) et iv) sont montrés par la même manière en vertu de la symétrie des hypothèses. ■

Théorème 2.3.6. *Si A est un opérateur auto-adjoint de domaine $D(A)$. Si B, de domaine $D(B)$, est un opérateur symétrique A-borné de borne relative égale à 1, alors l'opérateur $A + B$ de domaine $D(A)$ est essentiellement auto-adjoint sur $D(A)$.*

corollaire 2.3.4. *Soit $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ tels que $G(A) + G(-B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$.*

i) *Si $N(A+B) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ alors $A+B$ est fermé et ainsi $A+B \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ si $D(A) \cap D(B)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

ii) *$(A+B)^* = A^* + B^*$ si $N(A^* + B^*) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ et $N\left((A+B)^*\right) = N(\overline{A^* + B^*})$.*

Démonstration. i) Comme $R(A+B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ et $N(A+B) \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, alors

$$(H \oplus \{0\}) + G(A+B) = H \oplus R(A+B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$$

et

$$(H \oplus \{0\}) \cap G(A+B) = N(A+B) \oplus \{0\} \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$$

Ainsi à partir de [17] il s'en suit que $G(A+B)$ est fermé dans $H \oplus H$.
ii) Evidente. ■

Par le biais des distances g et d on peut donner une caractérisation de la fermeture et l'adjoint de la somme de opérateurs linéaires fermés sur un espace de Hilbert H.

Théorème 2.3.7. *Soient $A, B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ tels que $g\left(G(A), G(-B)^{\perp}\right) < 1$, alors :*
i) $(A+B)^* = \overline{A^* + B^*}$
ii) $(A+B) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$

Démonstration. Notons, qu'à partir de la proposition (2.3.9), $g\left(G(A), G(-B)^{\perp}\right) < 1$ implique que $G(A) \oplus G(-B) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$.
On a d'une part,

$$G(A) \cap G(-B) = \{0\}$$

et alors

$$N\left(A+B\right) = \{0\}$$

D'autre part, si $a \in \mathcal{H}$ il existe $x \in D(A)$ et $y \in D(B)$ tels que :

$$(0, a) = (x+y, Ax - By)$$

Ainsi, $x = -y \in D(A) \cap D(B)$ et $a = (A+B)x$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned} R(A+B) &= \mathcal{H} \\ N((A+B)^*) &= \{0\} \end{aligned}$$

En vertu du point 1 du lemme (2.3.2), on a aussi

$$N(\overline{A^* + B^*}) = \{0\}$$

Il vient du théorème (2.3.5) que

$$(A+B)^* = \overline{A^* + B^*}.$$

Puisque 0 est à l'exterieur du spectre de $A+B$ on conclut que $(A+B)^{-1} \in B(\mathcal{H})$, et par suite $G(A+B) \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$.
En effet, si $(x_n, (A+B)x_n)_n$ converge vers (x, y) dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, alors $(x_n)_n \subset D(A) \cap D(B)$ converge vers x dans $\mathcal{H}$ et $((A+B)x_n)_n$ converge vers $y = (A+B)z$ dans H où $z \in D(A) \cap D(B)$.
Par la continuité de $(A+B)^{-1}$ on déduit que $x = z$ et $(x, y = (A+B)x) \in G(A+B)$. $\blacksquare$

Chapitre 3

Adjoint de la somme et du produit des opérateurs fermés

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ désigne l'ensemple de tous les espace fermé de $\mathcal{H}$ alors que $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ est lensemple de tous les sous espace fermés de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Il s'agit dans ce chapitre, d'établir des conditions suffisantes pour que la somme et le produit de deux opérateurs A et B à domaines $D(A)$ et $D(B)$ respectivement soit fermés dans $\mathcal{H}$ et aussi pour récupérer l'igalité $(A+B)^* = A^* + B^*$ et $(AB)^* = B^*A^*$.
On utilisant [2] pour notre travail le long de ce chapitre.

3.1 Sur l'adjoint du produit des opérateurs

En ce qui concerne la relation de l'adjoint de deux opérateurs fermés. Il est connu que si T et S sont deux opérateurs fermés à domaines denses sur un espace de hilbert H.
Alors $(TS)^* \supseteq S^*T^*$ avec une inclusion qui peut être stricte. La question :

"sous quelles conditions à t-on l'égalité "

s'avére trés imporante.

On sait, que l'existence d'un adjoint d'un opérateur linéare est assuré par la densité de son domaine, un premier résultat concernant l'existence de l'adjoint du produit de deux opérateurs (de Fredholm) est donné par Gokhberg et Krein (voir [11], p103.) :

Théorème 3.1.1. *Soient X et Y deux espaces complets et soit T un opérateur normalement résoluble (i.e opérateur fermé à image fermée) avec un indice de noyau fini ($\alpha(T) < \infty$).*
Soit B un opérateur linéaire à domaine dans un espace normé Z et à image dans X.

(i) *Si B est fermé, alors TB est fermé.*

(ii) *Si B est à image fermé alors TB est à image fermé.*

(iii) *Si $D(T)$ est dense dans X et Z est complet. Si T et B sont des opérateurs de Fredholm, alors TB est un opérateur de Fredholm et :*

$$k(TB) = k(T) + k(B)$$

(iv) *Supposons Z complet, et $D(T)$ et $D(B)$ denses dans X et Z, respectivement. Si B est fermé avec un indice à définir ($\beta(B) < \infty$), alors $D(TB)$ est dense dans Z.*

Démonstration. (i) : On suppose que $z_n \to z$ et $TBz_n \to y$. Puisque $\gamma(T) = \inf\limits_{x \in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x, \mathfrak{N}(T)\|}$ est positive, Il suit que la suite $\{[Bz_n]\}$dans $D(T)/\mathfrak{N}(T)$ est une suite de Cauchy. Il existe donc $[x] \in X/\mathfrak{N}(T)$ tel que $[Bz_n] \to [x]$.
Cela implique l'existence d'une suite $\{x_n\}$ dans $M(T)$ tel que $Bz_n + x_n \to x$. On voit que $\{x_n\}$ est bornée. Par conséquent, il existe une sous-suite $\{x_{n'}\}$ de $\{x_n\}$ et $w \in \mathfrak{N}(T)$ tel que $x_{n'} \to w$. Par suite, $Bz_{n'} \to x - w$, puisque $z_{n'} \to z$ et B est fermé , z est dans $D(B)$ et

$$Bz = x - w = \lim_{n' \to \infty} Bz_{n'}$$

Puisque T est fermé et $TBz_{n'} \to y$, Bz est dans $D(T)$ et $TBz = y$, ce qui prouve que TB est fermé.
(ii) : Si BZ est fermé , alors $R(TB) = TBZ$ est fermé.

(iii) : L'application linéaire η de $\mathfrak{N}(TB)/\mathfrak{N}(B)$ dans $R(B) \cap \mathfrak{N}(T)$, définie par $\eta[x] = Bx$ est

injective et surjective. Donc, pour

$$N_1 = R(B) \cap \mathfrak{N}(T)$$

$$\alpha(TB) = \alpha(B) + n_1 \quad , \quad n_1 = \dim N_1 \tag{1}$$

Soit N_2 un sous-espace de $\mathfrak{N}(T)$ tel que $\mathfrak{N}(T) = N_1 \oplus N_2$. Alors

$$\alpha(T) = n_1 + n_2 \quad , \quad n_2 = \dim N_2 \tag{2}$$

Les sous-espaces $R(B)$ et N_2 sont linéairement indépendants, puisque $Bx \in N_2 \subset \mathfrak{N}(T)$ implique $Bx \in N_1 \cap N_2 = 0$.
Puisque $R(B)$ et $dim N_2$ sont finis, $R(B)$ et $R(B) \oplus N_2$ sont fermés. Par les hypothéses $D(T)$ est dense dans X par le lemme (3.1.1)

$$R(B) \oplus \quad N_2 \oplus N_3 = X \tag{3}$$

Où N_3 est un sous-espace de dimension finie de $D(T)$. Par suite

$$\beta(B) = n_2 + n_3 \qquad , \qquad n_3 = \dim N_3 \tag{4}$$

Maintenant, $\mathfrak{N}(T) = N_1 \oplus N_2 \subset R(B) \oplus N_2$, ceci avec (3), implique que T est injectif sur N_3 et

$$TX = TR(B) \oplus \; TN_3 \tag{5}$$

Il résulte de (5) et le fait que T est injectif sur N_3 que

$$\beta(TB) = \beta(T) + \dim TN_3 = \beta(T) + n_3 \tag{6}$$

De (1),(2),(4) et (6) on obtient :

$$\begin{aligned} k(TB) &= \alpha(B) + n_1 - \beta(T) - n_3 = \alpha(B) + \alpha(T) - n_2 - \beta(T) - n_3 \\ &= \alpha(B) + \alpha(T) - \beta(B) - \beta(T) = k(T) + k(B) \end{aligned}$$

(iv) : par corollaire (3.3.1), l'opérateur $\widehat{B}$ induit par B (défini par la réstriction de B sur $D(T) \setminus \mathfrak{N}(T)$) a un inverse borné sur le sous-espace fermé $R(B)$, puisque $D(T)$ est dense dans X , $D(T) \cap R(B)$ est dense dans $R(B)$ par lemme (3.1.1) Ainsi, par la continuité de $\hat{B}^{-1}$, il s'ensuit que

$$\frac{D(B)}{\mathfrak{N}(B)(T)} = \widehat{B}^{-1}R(B) = \widehat{B}^{-1}\overline{D(T) \cap R(B)} \subset \overline{\widehat{B}^{-1}}D(T) \cap R(B) = \overline{D(TB)/\mathfrak{N}(B)} \tag{7}$$

Puisque $D(B)$ est dense dans Z, l'expression (7) implique que $D(TB)$ est dense dans Z.

■

Notons que la multiplication à gauche d'un opérateur de Fredholm par un opérateur normalement solvable ne garantit pas que le produit est un opérateur fermé. En effet,

Exemple 3.1.1. *[11] Soit T un opérateur dérivé, soit $B : X \to X = C([0,1])$ défini comme l'opérateur linéaire qui Prend chaque $x \in X$ dans la fonction constante $x(0)$. B est une projection.*

Toutefois,BT n'est pas fermé. Soit $x_n(t) = e^{-nt}/n$. Alors $x_n \to 0$ et BTx_n est la fonction constante -1 mais $\lim\limits_{n\to\infty} BTx_n = -1 \neq BT0 = 0$.

Il semble que les travaux sur la relation de l'adjoint du produit remontent aux années 1950's. Stinger [26] montre l'auto'adjointé des produits des opératreurs et ainsi leur proprités qui ont ont servi é d'autres plus tard pour inverstiguer ce sujet. En se basant, sur un lemme de Kohberg et kein :

Lemme 3.1.1. *[11] Soit M un sous-espace fermé ayant une dificience finie dans X. Alors*

(i) *Pour tout sous-espace V de X il existe un sous-espace de dimension finie N contenu dans V tel que*

$$\overline{V} = \overline{V} \cap M \oplus N$$

(ii) *Si V est dense dans X, alors $V \cap M$ est dense dans M.*

ce qui a permit à Stenger de montrer son premier concernant les opérateurs auto adjoints. Pour un opérateur T autoadjoint à domaine dense $D(T)$ dans H. Posons $\mathfrak{Y}$ un sous espace fermé quelconque de H et $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}^{\perp}$.

Proposition 3.1.1. *Si $\mathfrak{X}$ est de dimension finie, alors l'opérateur $T_0 = YTY$ est auto-adjoint, où P est la projection de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$*

Puis il démontre un résultat plus général :

Lemme 3.1.2. *Si $\mathfrak{X}$ est un sous-espace linéaire de $D(T)$ alors l'opérateur est auto-adjoint.*

Démonstration. Puisque $\mathfrak{X}$ est contenu dans D, nous avons $D = \mathfrak{X} \oplus (D \cap \mathfrak{Y}) = D_0$ et donc D_0 est dense dans H, comme dans la proposition 2.3.2. Il suffit de montrer que $D_0 = D_0^*$. Le même argument utilisé ci-dessus prouve que $D_0 \subset D_0^*$.
Supposons maintenant que $u \in D_0^*$, alors $(YTYv, u) = (TYv, Yu)$ est continu pour tout $v \in D_0$, ce qui signifie que :

$$|(Tw, Yu)| \leq \alpha \|w\| \tag{3.1}$$

Pour tout $w \subset D \cap Y$, puisque T est un opérateur fermé et X est un sous-espace fermé de D. Il résulte du théoréme du graphe fermé que T est continu sur X, nous avons donc

$$|(Tx, Yu)| \leq \beta \|x\| \tag{3.2}$$

Pour tout $x \in X$, soit $\gamma = 2\max\{\alpha, \beta\}$. Pour toute $z \in D = \mathfrak{X} \oplus (D \cap \mathfrak{Y})$ nous pouvons écrire $z = x + w$ où $x \in X$ et $w \in D \cap \mathfrak{Y}$.
En appliquant les inégalités (3.1) et (3.2), On obtient

$$\begin{aligned} |(Tz, Yu)| &\leq |(Tx, Yu)| + |(Tw, Yu)| \\ &\leq \beta \|x\| + \alpha \|w\| \\ &\leq \beta \|x + w\| \quad . \end{aligned}$$

Ceci veut dire $Yu \in D^* = D = D_0$, et donc $u \in D_0$. Basé sur les travaux de Stenger, Holland [14] montre le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *[14]: Si T est un opérateur fermé à domaine dense dans un espace de Hilbert H, et S est un opérateur borné sur H tel que $R(B)$ est fermé et de codimension finie dans H, alors $(TS)^* = S^*T^*$.*

Il est important de souligner que ce résultat est couvert par le résultat de Stenger en posant $S = Y$, Y l'opérateur de projection sur un sous espace fermé de codimension finie. Pour le cas des opérateurs linéaires, donnons un résultat essentiel.

Lemme 3.1.3. *Soit T un opérateur dans un espace de Hilbert H. Alors :*

1. *Si $D(T)$ est dense alors T^* est un opérateur linéaire fermé.*
2. *Si T^{-1}existe et de domaine dense alors $(T^*)^{-1}$ existe et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$*
3. *Si B est un opérateur borné partout défini alors $(T + B)^* = T^* + B^*, (BT)^* = T^*B^*$*
4. *$R(T)^{\perp} = \ker(T^*) := \{y \in D(T)/T^*y = 0\}$*

Pour établir ce résultat, donnons quelques propriétés de l'adjoint d'un opérateur via les isométries.

Lemme 3.1.4. *[10]Soient A_1 et A_2 deux homéomorphismes isometriques dans $H \oplus H$ définis par les équations:*

$$A_1 [x, y] = [y, x], \qquad A_2 [x, y] = [y, -x]$$

Alors

$$G(T^{-1}) = A_1G(T) \qquad\qquad G(T^*) = (A_2G(T))^{\perp}$$
$$A_1A_2 = -A_2A_1 \qquad A_1^2 = I \qquad\qquad A_2^2 = -I$$

Démonstration. Nous avons $[y, y^*] \in G(T^*)$ si et seulement si :

$$0 = (Tx, y) - (x, y^*) = ([Tx, -x], [y, y^*]), x \in D(T)$$

par conséquent, $G(T^*) = (A_2G(T))^{\perp}$.
Pour les autres assertions :

$$\begin{aligned} A_1A_2[x; y] &= A1[y; -x] \\ &= [-x; y] \qquad\qquad et \\ A_2A_1[x; y] &= A_2[y; x] \\ &= [x; -y]. \\ &\Longrightarrow [-x; y] = -[x; -y] \\ &\Longrightarrow A_1A_2 = -A_2A_1. \end{aligned}$$

Le lemme (3.1.3) Puisqu'un complémentaire orthogonal est fermé, L'énoncé (1) résulte du lemme (3.1.4) Pour prouver (2), notons que $T^*y = 0$ implique $(Tx, y) = 0$ pour x dans $D(T)$ puisque $R(T) = D(T^{-1})$ est dense, cela signifie que $y = 0$ et donc $(T^*)^{-1}$ existe. Maintenant, par le lemme (3.1.4) on a :

$$\begin{aligned} G((T^*)^{-1}) &= A_1G(T^*) = A_1(A_2G(T))^{\perp} \\ &= (A_1A_2G(T))^{\perp} = (-A_2A_1G(T))^{\perp} \\ &= (A_2A_1G(T))^{\perp} = (A_2G(T^{-1}))^{\perp} = G(T^{-1})^* \end{aligned}$$

Et ainsi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
Pour prouver (3) nous avons, puisque B est borné :$D(T + B) = D(T)$, et B est continue et $((T + B)x, y) = (Tx, y) + (Bx, y)$ On voit que $D(T^*) = D(T + B)^*$ donc, pour x dans $D(T) = D(T + B)$ et y dans $D(T^*) = D(T + B)^*$ nous avons :

$$\begin{aligned} (x, (T + B)^*y) &= ((T + B)x, y) = (Tx, y) + (Bx, y) \\ &= (x, T^*y) + (x, B^*y) = (x, (T^* + B^*)y) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $(T + B)^* = T^* + B^*$ ■

3.2 Sur le produit des opérateurs de Fredholm

Sous les mémes notations de Holland et Stenger, Gustafson [12] redémontre le théoréme (3.1.1) et donne réponse à une question intéressante à savoir quand $(TS)^* = S^*T^*$ *est vrai au-delé du cas borné. Le cadre Fredholm devient alors intéressant :*

Proposition 3.2.1. *Soient* S *et* T *deux opérateurs de Fredholm, alors* $(TS)^* = S^*T^*$

Démonstration. Si on note par k l'indice d'un opérateur. Puisque $(TS)^* \supseteq S^*T^*$, il suffit de démontrer (propriétés de l'indice de l'adjoint voir [1]) que

$$\begin{aligned} k((TS)^*) &= -k(TS) \\ &= -k(T) - k(S) \\ &= k(T^*) + k(S^*) \\ &= k(S^*T^*) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.2. *Soient* T *et* S *deux opérateurs densément définis dans un espace de Hilbert* H*, si* S *est fermé et* $R(S)$ *est de codimension finie, alors* $(TS)^* = S^*T^*$.

Remarquons que la condition T *est fermé n'est pas nécessaire.*

Proposition 3.2.3. *Soient* T *et* S *est deux opérateurs à domaines denses dans un espace de Hilbert. Si* S *est fermé et* $codim R(S)$ *est finie, alors* $(TS)^* = S^*T^*$.

3.3 Conjugué d'un produit des opérateurs (cadre banachique)

Il s'agit dans cette section de regarder le travail de M. Schechter et ses résultats dans un cadre banachique.

Théorème 3.3.1. *Soient* X, Y, Z *des espaces de Banach, Soit* A *une opérateur linéaire fermé à domaine dense de* X *dans* Y *et* B *un opérateur linéaire à domaine dense de* Y *dans* Z*. Si l'image* $R(A)$ *de* A *est fermée dans* Y *et de codimension finie, alors* $(BA)' = A'B'$, *où* E' *désigne le conjugué d'un opérateur* E.

Donnons deux résultats liés à la relation de l'adjoint du produit inspirés de travaux précédents :

corollaire 3.3.1. *Soient A et B sont deux opérateurs fermés domaines denses dans un espace de Hilbert et $R(A)$ est fermé et de codimension finie, alors $(BA)^* = A^*B^*$.*

Ce résultat est démontré dans [25], mais l'hypothèse supplémentaire que le noyau de A est de dimension finie s'est avérée non nécessaire dans la preuve.

corollaire 3.3.2. *Si A et B deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert tel que A est opérateur de Fredholm, alors $(BA)^* = AB$. Si de plus A est borné, alors ABA est auto-adjoint.*

Pour le cas où A est borné, le résultat a été démontré par Holland [14]. Lorsque A est un opérateur de projection nous l'avons vu dans le travail de Stenger [26]. La démonstration est basée sur le résultat de Gohberg et Krein relativement à la densité de domaine de l'adjoint. Ensuite ***C.S. Lin*** *démontre ce résultat pour A Fredholm et B fermé. D'autres résultats ont suivi lorsque $R(A)$ n'est plus supposé fermé, (non n'avons pas trouvé le travail de lin).*
J. Van Casteren, S. Goldberg [11] affirment que le résultat de Schechter peut être meilleur dans le sens suivant :

Théorème 3.3.2. *Soit S un opérateur fermé à domaine dense et à image dans un espace de Hilbert. Alors $(TS)^* = S^*T^*$ pour tout opérateur T linéaire fermé à domaine dense dans H ssi $R(S)$ est de codimension finie*

Si on garde T fixé et on varie S on obtient :

Théorème 3.3.3. *Supposons que T soit fermé. Alors $(TS)^{'} = S^{'}T^{'}$ pour tous les opérateurs densément définis dans H ssi T est borné sur Y.*

Démonstration. Il est facile de voir que si T est borné sur Y, alors $(TS)^{'} = S^{'}T^{'}$ pour tout opérateur à domaine dense S.
Supposons que $(TS)^{'} = S^{'}T^{'}$ pour tout opérateur dans S mais $D(T) \neq Y$.
Choisissons $y \notin D(T)$ et $x^{'} \neq 0$ dans X. Définissons un opérateur borné S sur X pour $Sx = x^{'}(x)y$. Alors $D(TS) = N(x^{'})$ qui n'est pas dense dans X aboutissant à une contrediction avec l'hypothése que TS est densément défini. Donc T est défini sur tout Y et est borné par le théoréme du **graphe fermé**. ■
La condition T borné est necessaire pour la relation de l'adjoint, en effet :

Lemme 3.3.1. *Si S est fermé et $\overline{R(S) \cap D(T)} = R(S)$, alors TS est densément défini, dans ce cas $(TS)^{'}$ est une extension de $S^{'}T^{'}$.*

Démonstration. Soit $\hat{S}$ l'opérateur injectif induit par S (càd $\hat{S} = S\diagup(H\diagup kerS)$). Puisque $\hat{S}^{-1}$ est fermé et $R(S)$ est complet, $\hat{S}^{-1}$ est continu sur $R(S)$. ainsi

$$\begin{aligned} D(S)/N(S) &= \hat{S}^{-1}R(S) = \hat{S}^{-1}\overline{R(S) \cap D(T)} \sqsubset \overline{\hat{S}^{-1}R(S) \cap D(T)} \\ &= \overline{D(TS)/N(S)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

L'hypothése S est densément défini jointe avec l'égalité (3.3) implique $\overline{D(TS)} = X$. On peut aussi donner une généralisation immédiate du théoréme (3.4.1) : ■

Théorème 3.3.4. *Supposons S est fermé, $Y = R(S) \oplus N$ et est bornée sur le sous-espace fermé $N \sqsubset D(T)$, alors $(TS)' = S'T'$.*

Démonstration. $R(S)$ est fermé (Voir [11]). Puisque

$$D(T) = R(S) \cap D(T) \oplus N$$

est dense dans $Y = R(S) \oplus N$, il suit que $\overline{R(S) \cap D(T)} = \overline{R(S)} = R(S)$ il suit donc TS est densément défini par le lemme 3.3.1. Ansi $(TS)'$ est un extension de $S'T'$. Le reste de la preuve reste comme dans le travail de Schechter. ■

De ce qui a précédé, Von Casteren et Goldberg montrent la relation de l'adjoint du produit pour des opérateurs fermés.

corollaire 3.3.3. *Supposons T, S deux opérateurs fermés, $Y = R(S) \oplus N$ oé N est un sous espace fermé de $D(T)$, alors $(TS)^* = S^*T^*$*

On peut aussi prendre une restriction sur l'image de T sans exiger sa fermetrure

corollaire 3.3.4. *Supposons S fermé et $R(S)$ à codimension finie dans Y. Alors $(TS)^* = S^*T^*$*

Un résultat important, en levant quelques restrictions sur les opérateurs, est devenu le resultat de base dans cet axe :

corollaire 3.3.5. *Soient $X = Y = Z$ des espaces de Hilbert. supposons que S et T sont des opérateurs verifiants les propriétés suivantes :*

(i) $N = N(S^*) \cap D(T)$ *est fermé*

(ii) $N^{\perp} \cap N(S^*)$ *est de dimension finie*

(iii) $R(S)$ *est fermé* $(i.e., N(S^*) \subset D(T)$ *et* $R(S)$ *est fermé ou* $codimR(S) < \infty)$.
Alors $(TS)^* = S^*T^*$

Démonstration. $M = R(S) \oplus N$ est un sous-espace fermé de X et $M^{\perp} = R(S)^{\perp} \cap N^{\perp} = N(S^{*}) \cap N^{\perp}$ est un dimension finie par (ii). Puisque $D(T)$ est dense dans X. Il existe sous-espace de dimension finie W de $D(T)$ tel que $X = M \oplus W = R(S) \oplus N \oplus W$.
Alors $N_1 = N + W$ est un sous-espace fermé de $D(T)$. ■

Lemme 3.3.2. *Soit T et S deux opérateurs linéaires densément définis dans un espace de Hilbert H, alors pour $|T| = (T^{*}T)^{1/2}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $(TS)^{*} = S^{*}T^{*}$ *;*

(ii) $(|T|\, S)^{*} = S^{*}\, |T|$ *;*

(iii) $((I + |T|\, S)^{*})\, |T| = S^{*}\, |T|\, (I + |T|)$.

Démonstration. puisque $D(T) = D(|T|)$, L'hypothése selon laquelle $TS, |T|\, S$ ou $(I + |T|)S$ est densément définie implique que chaque opérateur adjoint apparaisse sur le côté gauche des équations (i),(ii) ou (iii) existe et une extension de l'opérateur correspondant apparaissant sur le côté droit.
(ii) implique (i). T peut être exprimée sous la forme $T = V\, |T|$, où V est une isométrie partielle avec un ensemble initial $\overline{R(|T|)}$ et ensemble final $\overline{R(T)}$. puisque V est borné sur H,

$$(TS)^{*} = (V\, |T|\, S)^{*} = (|T|\, S)^{*}V^{*} = S^{*}\, |T|\, V^{*} = S^{*}T^{*}. \tag{A}$$

(i) implique (ii). donné $u \in D((|T|\, S)^{*}), u$ est de la forme $u = V^{*}v + n$pour certaine $n \in R(V^{*})^{\perp} = N(V) = R(|T|)^{\perp} = N(|T|) \subseteq D(S^{*}\, |T|) \subseteq D((|T|\, S)^{*})$. par conséquence $v \in D((|T|\, S)^{*}V^{*})$ ce qui équivaut $D(S^{*}\, |T|\, V^{*})$ par (A), ainsi $V^{*}v$ et donc u sont dans $D(S^{*}\, |T|)$.
(ii)implique (iii). Puisque T est auto-adjoint ,

$$\langle (I + |T|)Su, |T|\, v\rangle = \langle |T|\, Su, (I + |T|)v\rangle \quad , \; u \in D(|T|\, S) \;\; , \quad v \in D(|T|),$$

D'où l'on voit facilement que

$$((I + |T|)S)^{*}\, |T| = (|T|\, S)^{*}(I + |T|) = S^{*}\, |T|\, (I + |T|).$$

(iii) implique (ii). Suppose que $v \in D((|T|\, S)^{*})$. puisque $R(I + |T|) = H$, il existe un w tel que $v = (I + |T|)w$ et

$$\langle u, (|T|\, S)^{*}v\rangle = \langle |T|\, Su, (I + |T|)w\rangle = \langle (I + |T|)Su, |T|\, w\rangle$$

pour tout $u \in D(|T|\, S)$. par conséquence

$$(|T|\, S)^* v = ((I+|T|)S)^* \,|T|\, w = S^* \,|T|\, (I+|T|)w = S^* \,|T|\, v.$$

■

Théorème 3.3.5. *Soit T et S deux opérateurs linéaires fermés densément définies dans un espace de Hilbert H dans H. Si $N(S^*(I+|T|))$ et $R(S)$ sont fermés, alors $(TS)^* = S^*T^*$*

Démonstration. Puisque $N(S^*(I+|T|))$est fermé :

$$(I+|T|)^{-1}\ N(S^*(I+|T|)) = \ N(S^*(I+|T|)^2) \equiv N_1$$

est fermé dans un espace de Hilbert $D(|T|)$ avec le produit donné par

$$\langle u, v\rangle_{|T|} = \langle (I+|T|)u, (I+|T|)v\rangle\,, \quad u, v \in D(|T|).$$

Nous déterminons le complément orthogonal de N_1 dans $D(|T|)$ par rapport à $\langle , \rangle_{|T|}$.
On suppose que $v \in D(|T|)$ et $\langle v, n\rangle_{|T|} = 0$ pour tout $n \in N_1$. Alors $\langle v, (I+|T|)^2 n\rangle = 0$ pour tout $n \in N_1$ ou équivalente, puisque $(I+|T|)^2$ est surjective, $\langle v, z\rangle = 0$ pout tout $z \in (I+|T|)^2 N_1 = N(S^*)$. Ainsi $v \in N(S^*)^\perp = \overline{R(S)} = R(S)$.
conséquence chaque $u \in D(|T|)$ peut être exprimée sous la forme

$$u = Sw + n, n \in N(S^*(I+|T|)^2). \tag{a}$$

Nous montrons maintenant que $D(|T|\, S)$ est dens dans $H^\cdot$
On suppose que $\langle u, u_0\rangle = 0$ pour tout $u \in D(|T|\, S)$. En particulier, $u_0 \in N(S)^\perp = R(S^*)$.
Puisque $R((I+|T|)^2) = H$, Implique

$$R(S^*) = R(S^*(I+|T|)^2) = (S^*(I+|T|)^2)S \tag{b}$$

Par conséquence, $u_0 = S^*(I+|T|)^2 Sv_0$ pour certains v_0 et

$$0 = \langle u, u_0\rangle = \left\langle u, S^*(I+|T|)^2 Sv_0\right\rangle = \langle (I+|T|)Su, (I+|T|)Sv_0\rangle$$

pour tout $u \in D(|T|\, S)$. On prend $u = v_0$, on obtient $(I+|T|)Sv_0 = 0$ ce qui implique $u_0 = 0$, ainsi $D(|T|\, S)$ est dense dans H. Pour compléter la démonstration du théoréme, il suffit de vérifier (iii)de lemme (3.3.2).
On suppose que $v \in D(((I+|T|)S)^* \,|T|); i, e.,$

$$\langle (I+|T|)Su, |T|\, v\rangle = \langle u, (I+|T|)S^* \,|T|\, v\rangle \qquad \text{pour tout } u \in D(|T|\, S).$$

En particulier, puisque $N(S) \subset D(|T|\,S)$, nous avons

$$((I+|T|)S)^*\,|T|\,v \in N(S)^\perp = R(S^*) = R(S^*(I+|T|)^2)S)$$

Par (b). Ainsi $((I+|T|)S)^*\,|T|\,v \in N(S)^\perp = S^*(I+|T|)^2Sw$, pour certains w et puisque $I+|T|$ est surjective, $|T|\,v = (I+|T|)d$ pour certaine d . de plus, par (a) $d = Sz+n$ pour certaine $n \in N(S^*I+|T|)^2)$. résumer, $v \in D(((I+|T|)S)^*\,|T|)$ implique que

$$\begin{aligned}\langle (I+|T|)Su,(I+|T|)(Sz+n)\rangle &= \langle u,((I+|T|)S)^*\,|T|\,v\rangle\\ &= \left\langle u,S^*(I+|T|)^2Sw\right\rangle \quad \text{, pour tout} \quad u\in D(|T|\,S).\end{aligned}$$

puisque $n \in N(S^*(I+|T|)^2)$, Si cela suit

$$\langle (I+|T|)Su,(I+|T|)(Sz-Sw)\rangle = 0 \quad \text{, pour tout} \quad u\in D(|T|\,S).$$

Prise $u = z-w$ et rappelant que $I+|T|$, nous pouvons conclure que $Sz = Sw$. Donc

$$\begin{aligned}((I+|T|)S)^*\,|T|\,v &= S^*(I+|T|)^2Sw\\ &= S^*(I+|T|)^2Sz\\ &= S^*(I+|T|)^2d\\ &= S^*(I+|T|)\,|T|\,v\\ &= S^*\,|T|\,(I+|T|)v.\end{aligned}$$

■

Donc (iii) du lemme (3.3.2) est vérifié

Théorème 3.3.6. *Soit T et S deux opérateurs linéaires fermés densément définis de espace dans un Hilbert H, si $S^*(I+|T|)$ est fermé, alors $(TS)^* = S^*T^*$.*

Démonstration. Puisque $I+|T|$ est auto-adjoint et surjective et $S^*(I+|T|)$ et fermé, il résulte du théoréme (3.4.1) que

$$S^*(I+|T|) = (S^*(I+|T|))^{**} = ((I+|T|)S)^*$$

En particulier, (iii) de lemme (3.3.2) est vraie, par conséquence $(TS)^* = S^*T^*$. ■

3.4 Adjoint des produits des opérateurs dans l'espace de Banach

J. Van Casreren [6] montre au début de 1970 le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soient T et Y complets. Supposons que T est fermé à domaine dense dans X. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $R(T)$ *est fermé .*

(ii) $R(T^{'})$ *est fermé .*

(iii) $R(T^{'})$ *est le complément orthogonal de* $M(T)$ *(i.e* $R(T^{'}) = M(T)^{\perp}$

(iv) $R(T)$ *est le complément orthogonal de* $M(T^{'})$*; (C'est à dire* $R(T) =^{\perp} M(T^{'})$*)*

Lemme 3.4.1. *Pour deux opérateurs fermés, densément S et T nous avons*

$$VG[(T-\lambda)S] =^{\perp} G[S^{'}(T-\lambda)^{'}] \quad \textit{(orthogonal à gauche).}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que :

$$^{\perp}G[S^{'}(T-\lambda)^{'}] \subset VG[(T-\lambda)S]$$

L'autre inclusion étant simple. Nous avons $\{u, v\} \in^{\perp} G[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$ ssi

$$\left\langle \{u, v\}, S^{'}(T-\lambda)^{'}u^{'} \right\rangle = \left\langle u, u^{'} \right\rangle + \left\langle v, S^{'}(T-\lambda)^{'}u^{'} \right\rangle = 0$$

pour chaque $u^{'} \in D[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$. En particulier, $\left\langle u, u^{'} \right\rangle = 0$ pour chaque $u^{'} \in N[(T-\lambda)^{'}]$. Eninvoquant le théoréme (3.4.1) de graphe fermé, nous déduisons

$$u \in^{\perp} N(T^{'} - \lambda^{'}) = (R(T-\lambda))^{-} = R(T-\lambda).$$

Nous avons donc le droit d'écrire $u = (T-\lambda)w$ pour certains$w \in D(T)$, pour que

$$\left\langle w, (T-\lambda)^{'}u^{'} \right\rangle + \left\langle v, S^{'}(T-\lambda)^{'}u^{'} \right\rangle = 0$$

pour tout $u^{'} \in D(S^{'}(T-\lambda)^{'})$. L'hypothése selon laquelle $R(T^{'} - \lambda^{'}) = X^{'}$ implique

$$\left\langle w, y^{'} \right\rangle + \left\langle v, S^{'}y^{'} \right\rangle = 0$$

pour tout $y^{'} \in D(S^{'})$, ou

$$\{w, v\} \in^{\perp} G(S^{'}) =^{\perp} (VG(S)^{\perp}) = VG(S)$$

Ansi, $w = -Sv$ et alors $u = (T-\lambda)w = -(T-\lambda)Sv$, dont la déclaration suit ■

Théorème 3.4.2. *Soit T, S et λ comme ci-dessus et supposons que $G(S^{'}(T-\lambda)^{'})$ est faible * fermé dans $X^{'} \times X^{'}$. Alors $D(TS)$ est dense dans X et*
(*) $(TS)^{'} = S^{'}T^{'}$

Démonstration. Redéfinir (*) fermé (pour une topologie faible) Par le lemme (3.4.1) et la nouvelle hypothése, nous avons

$$VG[(T-\lambda)S]^{\perp} = (^{\perp}G[S^{'}(T-\lambda)^{'}])^{\perp} =^{\perp} G[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$$

Pour montrer que $D(TS)$ est dense dans X, nous considérons un élément $u_0^{'} \in X^{'}$ tel que $\left\langle u, u_0^{'} \right\rangle = 0$pour tout $u \in D(TS)$. Alors

$$\left\langle \{-(T-\lambda)Su, u\}, \{0, u_0^{'}\} \right\rangle = 0$$

Pour tout $u \in D(TS)$, ou

$$\{0, u_0^{'}\} \in (VG[(T-\lambda)S]^{\perp} = G[S^{'}(T-\lambda)^{'}],$$

D'où $u_0^{'} = S^{'}(T-\lambda)^{'}0 = 0$, la densité de $D(TS)$, et donc de $D[(T-\lambda)S]$, implique que $((T-\lambda)S)^{'}$ existe, c'est le graphe $T-\lambda$

$$G[((T-\lambda)S)^{'}] = (VG[(T-\lambda)S]^{\perp} = G[S^{'}(T-\lambda)^{'}].$$

Nous prouvons ensuite que

$$((T-\lambda)S)^{'}T^{'} \supset (TS)^{'}(T-\lambda)^{'}.$$

Une premiére idée est que $D(T-\lambda I) = D(T)$, par conséquence $D((T-\lambda I)S) = D(TS)$, $D(T^{'}-\lambda') = D(T^{'})$ et $(T-\lambda)^{'} = T^{'} - \lambda^{'}$.
Cette remarque avec l'inclusion, $\lambda T \subset T\lambda$ garantissent, pour chaque élément $u \in D(TS) = D[(T-\lambda)S]$ et chaque élément $u^{'} \in D(T^{'}) = D(T^{'}-\lambda)$, la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\left\langle TSu, (T-\lambda)^{'}u^{'} \right\rangle &= \left\langle TSu, T^{'}u^{'} \right\rangle - \left\langle TSu, \lambda^{'}u^{'} \right\rangle \\
&= \left\langle TSu, T^{'}u^{'} \right\rangle - \left\langle \lambda TSu, u^{'} \right\rangle \\
&= \left\langle TSu, T^{'}u^{'} \right\rangle - \left\langle T\lambda Su, u^{'} \right\rangle \\
&= \left\langle TSu, T^{'}u^{'} \right\rangle - \left\langle \lambda Su, T^{'}u^{'} \right\rangle \\
&= \left\langle (T-\lambda)Su, T^{'}u^{'} \right\rangle .
\end{aligned}$$

Puisque. comme montré ci-dessus, $D(TS) = D[(T-\lambda)S]$ est dense dans X, ce dernier équivaut facilement à l'égalité désirée, ainsi $S^{'}T^{'} = (TS)^{'}$, dou (*) tient . ∎

corollaire 3.4.1. *Si $R(S)$ est fermé et si $N[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$ est faiblement (*) fermé dans $X^{'}$, alors (*) est vérifiée.*

Démonstration. Nous affirmons que $G[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$est faiblement * fermé dans $X^{'}\times X^{'}$, ou

$$({}^{\perp}G[S^{'}(T-\lambda)^{'}])^{\perp} = G[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$$

tenant compte de $VG[(T-\lambda)S] = {}^{\perp} G[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$ il suffit de prouver que

$$(VG[(T-\lambda)S])^{\perp} \subset G[S^{'}(T-\lambda)^{'}].$$

Prendre $\{u^{'}, v^{'}\}$ dans $(VG[(T-\lambda)S])^{\perp}$, alors

$$\left\langle (T-\lambda)Su, u^{'} \right\rangle = \left\langle u^{'}, v^{'} \right\rangle, \quad u \in D(TS)$$

Et par le théoréme (3.4.1) de graphe fermé, conjointement avec l'hypothése

$$R(T^{'}-\lambda^{'}) = X^{'},$$

Que

$$v^{'} \in N(S)^{\perp} = R(S^{'}) = R[S^{'}(T^{'}-\lambda^{'})]$$

Nous pouvons donc écrire $v^{'} = S^{'}(T^{'}-\lambda^{'})u_0^{'}$, pour que $u^{'} = u_0^{'} \in R[(T-\lambda)S]^{\perp}$.
Nous terminons la preuve en montrant que

$$R[(T-\lambda)S]^{\perp} = N[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$$

Puisque le membre de droite est w^* fermé dans $X^{'}$ par hypothése, il suffit de prouver que

$${}^{\perp}N[S^{'}(T-\lambda)^{'}] \subset R[(T-\lambda)S]$$

Maintenant, $u \in{}^{\perp} N[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$ ssi $\langle u, n^{'} \rangle = 0$ pour tout $n^{'} \in N[S^{'}(T-\lambda)^{'}]$, montrant que $u \in{}^{\perp} N[T^{'}-\lambda^{'}] = R(T-\lambda)$. En écrit $u = (T-\lambda)v$, nous trouvons

$$\left\langle v, (T-\lambda)^{'}n^{'} \right\rangle = 0 \text{ pour tout } n^{'} \in N[S^{'}(T-\lambda)^{'}],$$

Dou

$$\left\langle u, z^{'} \right\rangle = 0, \quad \text{pour tout} \quad z^{'} \in N(S^{'}).$$

Un autre appel au de théoréme de l'image fermé $v \in{}^{\perp} R(S^{'})$, d'où l'inclusion désirée $u \in$

$R[(T-\lambda)S]$.

Nous concluons en soulignant que le résultat suivant sur les opérateurs spatiaux de Hilbert est une conséquence immédiate des précédentes. Dans un espace de Hilbert, l'adjoint d'un opérateur dense T sera noté par un astérique et nous écrireons la décomposition polaire comme $T = V\,|T|$,où $|T| = (T^*T)^{1/2}$. ■

corollaire 3.4.2. *Si $S^*(I + |T|)$ est opérateur fermé, alors $(TS)^* = S^*T^*$*

Démonstration. Du théoréme (3.4.2) nous obtient $(|T|\,S)^* = S^*\,|T|$. Puisque V est borné et partout défini, nous avons

$$(TS)^* = (V\,|T|\,S)^* = (|T|\,S)^*V^* = S^*\,|T|\,V^* = S^*T^* \quad .$$

■

3.5 Fermeture du produit et de la somme des opérateurs fermés

Utilsant la théorie des graphes des opérateurs et moyennant une métrique, g que l'on va préciser, [3] montre qu'on peut aboutir à la stabilité du produit et de la somme et obtenir la relation de l'adjoint pour des opérateurs fermés. On note par $C(H)$ la classe des opérateurs fermés, par $C_1(H)$ la classe des opérateurs fermés à domaines denses.

Définition 3.1. *Si $A, B \in C(H)$, Nous définissons*

$$g(A,B) = g(G(A), G(B)) = \left\| P_{G(A)} - P_{G(B)} \right\|_{B(H \oplus H)}$$

où $P_{G(A)}$ et $P_{G(B)}$ désignent respectivement la projection orthogonale dans $H \oplus H$ sur le graphe $G(A)$ de l'opérateur A et le graphe $G(B)$ de l'opérateur B.

$C(H)$ muni de la distance g est un espace métrique muni de l'application g appelée métrique de gap. La topologie induite par g sur $B(H)$ est équivalente à la topologie uniforme usuelle et $B(H)$ est ouvert dans $C(H)$.

3.5.1 Produit et somme des opérateurs fermés

Pour la commodité de notre travail, rappelons quelques propriétés classiques, mais essentielles, de la somme du produit des opérateurs non bornés. Dans ce qui suit, On suppose que les opérateurs $(A+B)^*$, $(A^*+B^*)^*$, $\overline{A+B}$, $\overline{A^*+B^*}$, $(AB)^*$, B^*A^*, $(B^*A^*)^*$, $\overline{AB}$...... *Existent et aient une sens si* A, B *sont des opérateurs fermés à domaines denses.*

Lemme 3.5.1. *Soit* $A, B \in C(H)$, *alors*

(i) $A \subset B$ *implique* $B^* \subset A^*$

(ii) $G(A^*+B^*) \subset [V(G(A+B))]^{\perp}$

(iii) $A^*+B^* \subset \overline{A^*+B^*} \subset (A+B)^*$

(iv) $A+B \subset \overline{A+B} \subset (A^*+B^*)^*$

(v) *Si* $A \in B(H), A+B, BA \in C(H)$ *et* $(A+B)^* = A^*+B^*$

(vi) $B^*A^* \subset (AB)^*$. *Si , en outre* $A \in B(H)$, *alors* $(AB)^* = B^*A^*$

(vii) $AB \subset \overline{AB} \subset (B^*A^*)^*$

(viii) $(I+AB) \subset \overline{(I+AB)} \subset (I+B^*A^*)^*$

Commençons par donner le résultat classique suivant :

Proposition 3.5.1. *Soit* $A \in C(H)$. *Si* $g(A,0) < 1$, *alors pour tout* B *dans* $C(H)$, $A+B \in C(H)$ *et* $BA \in C(H)$. *De plus ,*

$$(A+B)^* = A^*+B^*$$

et $(AB)^* = B^*A^*$.

Démonstration. $g(A,0) < 1$, implique que $A \in B(H)$, ainsi $G(A+B) = D(B)$ et $D(AB) = D(B)$ et $D(BA) = A^{-1}(D(B))$ et $(A+B, BA) \in C(H)$.
On obtient aussi les relations $(A+B)^* = A^*+B^*$et $(AB)^* = B^*A^*$ en vertu du lemme (3.5.1), propriétés (v) et (vi). ■

Nous commençons à présenter le lemme suivant qui concerne le graphe de la somme des opérateurs et celui de leurs adjoints :

Lemme 3.5.2. *Soit* $A, B \in C(H)$.

(i) *Si* $G(A)+G(-B) \in C_2(H)$, *alors* $G(A^*)+G(-B^*) \in C_2(H)$

(ii) *Si* $G(A)+V(G(B)) \in C_2(H)$, *alors* $G(A^*)+V(G(B^*)) \in C_2(H)$

Un premier resultat concernant la stabilité de la somme et du produit est donné dans [3]

Théorème 3.5.1. *$A, B \in C(H)$ sont tel que $G(A) + V(G(B)) \in C_2(H)$ alors*

(i) $R(I + BA) \in C_1(H)$ *et* $R(I + AB) \in C_1(H)$

(ii) $R(I + A^*B^*) \in C_1(H)$ *et* $R(I + B^*A^*) \in C_1(H)$

(iii) Si de plus $N(I + BA) \in C_1(H)$ *(respectivement* $N(I + AB) \in C_1(H)$*) alors BA est fermé et ainsi $BA \in C(H)$ si $D(BA)$ est dense dans H (respectivement AB est fermé et ainsi $AB \in C(H)$ si $D(AB)$ est dense dans H).*

(iv) $(B^*A^*)^* = \overline{BA}$ *si* $\overline{N(I + A^*B^*)} = N(I + A^*B^*)$ *(respectivement* $(A^*B^*)^* = \overline{AB}$ *si* $\overline{N(I + B^*A^*)} = N(I + B^*A^*)$*).*

Démonstration. – i) Soit $(u, 0) \in [G(A)+V(G(B))]\cap(H\oplus\{0\})$. Alors $(u, 0) = (x-Bs, s+Ax)$ ou $x \in D(A)$ et $s \in D(B)$ et $s + Ax = 0$.

Par conséquence $(-Ax, Bs) \in G(B)$ pour que $Ax \in D(B)$ et $(x, -Bs) \in G(BA)$ et donc $(x, x - Bs) = (x, u) \in G(I + BA)$.

qui prouve que $u \in R(I + BA)$.

Inversement, soit $u = (I + BA)v \in R(I + BA)$ ou $v \in D(BA)$. Alors, $(v, u) \in G(I + BA)$, pour que $(r, u - v) \in G(BA)$.

Si on pose $r = Av$ on a $(v, r) \in G(A)$ et $(r, u - v) \in G(B)$ ainsi $(u - v, -r) \in V(G(B))$.

Par conséquence,

$$(u, 0) = (v, r) + (u - v, -r) \in [G(A) + V(G(B))] \cap (H \oplus \{0\}).$$

Finalement,

$$[G(A) + V(G(B))] \cap (H \oplus \{0\}) = R(I + BA) \oplus \{0\} \in C_2(H)$$

et alors, $R(I + BA) \in C_1(H)$ parce que $G(A) + V(G(B)) \in C_2(H)$ et $H \oplus \{0\} \in C_2(H)$.

$R(I + AB) \in C_1(H)$ parce que $[G(A) + V(G(B))] \cap (\{0\} \oplus H) = \{0\} \oplus R(I + AB) \in C_2(H)$.

– iii) Puisque $R(I + BA), N(I + BA) \in C_1(H)$, Il suit que

$$\begin{aligned} (H \oplus \{0\}) + G(I + BA) &= H \oplus R(I + BA) \in C_2(H) \\ (H \oplus \{0\}) \cap G(I + BA) &= N(I + BA) \oplus \{0\} \in C_2(H) \end{aligned}$$

Nous avons $G(I + BA) \in C_2(H)$ et ainsi $BA \in C(H)$ si $D(BA)$ est dense dans H

– iv) Nous avons :

$$R((I + A^*B^*)^*) \subseteq [N\overline{(I + A^*B^*)}]^{\perp} = [N(I + A^*B^*)]^{\perp}$$

et

$$R((I + A^*B^*)^*) = \overline{R(I + BA)} = R(I + BA)$$

Soit $(u, v) \in G((I + A^*B^*)^*)$, par le lemme 3.5.1 il suffit de prendre $v \in R(I + BA)$, pour que $v = (I + BA)w$ oé $w \in D(I + BA)$ et $(w, v) \in G(I + BA)$.

Ainsi,

$(u - w) \in N((I + A^*B^*)^*) = [N(I + A^*B^*)]^{\perp} = \overline{R(I + BA)}$.

Donc $u = u - w + w \in D(I + BA)$.

D'où il résulte que $G((I + A^*B^*)^*) \subseteq G\overline{(I + BA)}$.

Enfin en utilisant les propriétés (v) et (viii) du lemme 3.5.1, nous avons

$$G((I + A^*B^*)^*) = G\overline{(I + BA)}$$

Et ainsi

$$(A^*B^*)^* = \overline{BA}.$$

Puisque $G(B) + V(G(A)) = V[G(A) + V(G(B)]$ et V est unitaire.

Alors nous pouvons intervertir A et B et obtenir

$$(B^*A^*)^* = \overline{AB} \quad \text{si} \quad N\overline{(I + B^*A^*)} = N(I + B^*A^*).$$

■

Théorème 3.5.2. *Soit $A, B \in C(H)$ tel que $G(A) + G(-B) \in C_2(H)$ alors :*

(i) $R(A + B) \in C_1(H)$

(ii) $R(A^* + B^*) \in C_1(H)$

(iii) $(A + B)^* = \overline{A^* + B^*}$ *si* $N((A + B)^*) = N\overline{(A^* + B^*)}$

(iv) $(A^* + B^*)^* = \overline{A + B}$ *si* $N((A^* + B^*)^*) = N\overline{(A + B)}$

Remarque 3.5.1. *L'hypothése $N((A + B)^*) = N\overline{(A^* + B^*)}$ est vérifiée automatiquement si l'une des affirmations suivantes est satisfaite :*

(i) $G(A) + G(-B) \in C_2(H)$ *et lorsque A, B sont des relations linéaires fermées sur H*

(ii) $A, B \in C(H)$ *si A, B et $(A + B)$ sont auto-adjoint*

corollaire 3.5.1. *Soient $A, B \in C(H)$ tels que $G(A) + G(-B) \in C_2(H)$.*

(i) Si $N(A+B) \in C_1(H)$ alors $A+B$ est fermé et ainsi $A+B \in C(H)$ si $D(A) \cap D(B)$ est dense dans H

(ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$ si $N(A^* + B^*) \in C_1(H)$ et $N((A+B)^*) = N\overline{(A^* + B^*)}$.

Démonstration. (i) Puisque $R(A+B) \in C_1(H)$ et $N(A+B) \in C_1(H)$, alors

$$(H \oplus \{0\}) + G(A+B) = H \oplus R(A+B) \in C_2(H)$$

et

$$(H \oplus \{0\} \cap G(A+B) = N(A+B) \oplus \{0\} \in C_2(H)$$

Il vient que $G(A+B)$ est fermé dans $H \times H$. (ii) Est évident ■

En utilisant, la métrique de gap g on établit aussi :

Théorème 3.5.3. *Soient $A, B \in C(H)$ sont tels que $g(A, B^*) < 1$, alors $AB \in C(H), BA \in C(H)$ et $(AB)^* = B^*A^*$.*

Démonstration. par le théoréme (3.1.1) et la proposition (**??**), Il vient que $g(A, B^*) < 1, N(I + AB) = N(I + BA) = \{0\}$ et $AB \in C(H), BA \in C(H)$.

Maintenant, si $u \in H$ il existe $x \in D(A)$ et $y \in D(B)$ tel que

$$(0, u) = (x - By, y + Ax)$$

Ainsi , $By = x \in D(A)$ et $u = y + ABy = (I + AB)y$.

Paar conséquence ,

$$\begin{aligned} R(I + AB) &= R(I + BA) = H \\ N((I + AB)^*) &= N((I + BA)^*) = \{0\} \end{aligned}$$

En vertu du lemme (3.5.1 propriétés (iii) et (iv)), on déduit que $N(\overline{I + B^*A^*}) = N(\overline{I + A^*B^*}) = \{0\}$.

il découle que $(A^*B^*)^* = BA$ et $(B^*A^*)^* = AB$. ■

Maintenant, si l'on cosidére l'ecart entre les graphes des opérateurs fermés par la métrique g

Théorème 3.5.4. *Soient $A, B \in C(H)$ tel que $g(G(A), G(-B)^{\perp}) < 1$, alors*

(i) $(A+B)^* = \overline{A^* + B^*}$

(ii) $(A+B) \in C(H)$

Démonstration. La condition $g(G(A), G(-B)^{\perp}) < 1$ implique que

$$G(A) \oplus G(-B) = H \oplus H \in C_2(H).$$

Nous avons d'une part, G(A)$\cap G(-B) = \{0\}$ et donc $N(A+B) = \{0\}$.
D'autre part, si $a \in H$ il existe $x \in D(A)$ et $y \in D(B)$ tel que

$$(0, a) = (x+y, Ax - By)$$

Ainsi, $x = -y \in D(A) \cap D(B)$ et $a = (A+B)x$. Par conséquence,

$$\begin{aligned} R(A+B) &= H \\ N((A+B)^*) &= \{0\} \end{aligned}$$

En vertu de (ii) du lemme (3.5.1) nous avons aussi

$$N(\overline{A^* + B^*}) = \{0\}.$$

Il suit que $(A+B)^* = \overline{A^* + B^*}$. Le fait que 0 est en dehors du spectre de $A+B$ montre que $(A+B)^{-1} \in B(H)$, et ainsi $G(A+B) \in C_2(H)$. En effet, si $(x_n, (A+B)x_n)$ converge dans $H \oplus H$ de (x, y), alors $(x_n)_n \subset D(A) \cap D(B)$ converge de x dans H et $((A+B)x_n)_n$ converge de $y = (A+B)z$ dans H ou $z \in D(A) \cap D(B)$.
Par continuité de $(A+B)^{-1}$ on déduitque $x = z$ et $(x, y) = ((A+B)x) \in G(A+B)$. ■

corollaire 3.5.2. *Soit* $A, B \in C(H)$ *sone tel que* $g(G(A), G(-B)^{\perp}) < 1$, *alors* $(A^* + B^*) \in C(H)$ *et* $(A+B)^* = A^* + B^*$.

la preuve est simple, puisque c'est une conséquence immédiate de la relation :

$$g(G(A), G(-B)^{\perp}) = g(G(A^*), G(-B^*)^{\perp}).$$

Conclusion

A la fin de ce travail, je souhaite dire que j'ai appris de fait des recherches sur le domaine d'analyse fonctionnelle, plus précisement les opérateurs linéaires. J'ai entré aux les articles et le travail des anciens mathématiciens, d'autre part, j'ai appris utiliser La Tex pour définie les symbole de math et organisé le travail du mémoire en générale et prend des info sur la bibliographie et les référance.

Bibliographie

[1] Aiena. P. Local spectral theory.

[2] A. Azzouz Sur la somme et le produit de deux opérateurs fermés dans un espace de Hilbert et leurs adjoints. Thèse de Doctorat. Université d'Oran, 2011.

[3] A. Azzouz, B. Messirdi, G. Djellouli : New Results of closedeness of the sum and product of two linear operators. Bull. Math. Ana. and App. Vol(3) N°2, 2011, p 151-158,

[4] M.Berkani :On a class of quasi-Fredholm operators. 34,(1999), 244-249

[5] J. Van Casteren : Adjoints of products of operators in Banach Space .(1972),73-76

[6] J. Van Casteren, S. Goldberg : The conjugate of a produvt of operators.Studia. Math. 38 (1970),125-130

[7] P. R. Chernoff : A semibounded closed symmetric operator whose square has trivial domain. Proc. Amer. Math. Soc. 89 (2). 1983. p289-290.

[8] H.O. Cordes, J.P. Labrousse : The invariance of the index in the metric space of closed operators. J. Math. and Mech. 12/5. 1963. p693-720.

[9] J. Dixmier : L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, $4^{ème}$ série, 11 (1974), p101-106.

[10] Dunford : Nelson_Dunford,_Jacob_T._Schwartz, Linear operators. New York, 1963.

[11] S. Goldberg : Unbounded_Linear_Operators, New York 1966.

[12] Karl Gustafson, On projections of selfadjoint operators and operators product adjoint.(1969),739-741

[13] P. Hess, T. Kato : Perturbations of Closed Operators and Their Adjoints. Comment. Math. Helv., 45(1970), p524-529.

[14] S. Holland : On the adjoint of the product of operators. Bull. Amer.Math.Soc.4(1968),931-932.

[15] R. V. Kadison, J. R. Ringrose : *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Academic Press London, (1983), Vol. I.*

[16] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators. Springer (1980), 2nd Edition.*

[17] J.P. Labrousse : *Les opérateurs quasi-Fredholm : une généralisation des opérateurs semi-Fredholm. Rendiconti Del Circolo mathematica di Palermo, T. XXIX (1980), p161-258.*

[18] J.P. Labrousse, B. Mercier :*Equivalences compactes entre deux opérateurs fermés sur un espace de Hilbert. Math. Nach. 133.(1987), p91-105.*

[19] M.H. Mortad : *An application of the Putnam-Fuglede theorem to normal products of self-adjoint operators. Proc. Amer. Math. Soc. 131/10. 2003. p3135-3141.*

[20] B. Messirdi, M. H. Mortad : *On Different products of closed operators. Banach Journal of Mathematical Analysis. 2, N* (1) *(2008), p40-47.*

[21] B. Messirdi, M. H. Mortad, A. Azzouz and G. Djellouli : *A topological characterization of the product of two closed operators. Colloquim Mathematicum, 112,N(2)(2008), 269-278*

[22] M. Naimark : *On the square of a closed symmetric operator. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 26. 1940. p866-870.*

[23] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics : Analysis of operators. vol.4 Academic Press (1978).*

[24] W. Rudin : *Functional Analysis. 1991 (Second Edition). Real and Complex Analysis 1974. McGraw-Hill.*

[25] M. Schechter : *The conjugate of a product of closed operators. Journal of Functional Analysis, 6 (1970), 26-28*

[26] W. Stenger : *On the projection of a seladjoint operator, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 369-372.*

[27] M.H. Stone : *On Unbounded Operators in Hilbert Space, J. Ind.Math. Soc. 15, 155192 (1951).*