

Table des matières

1	Généralités sur le calcul stochastique	7
1.1	Processus stochastique	7
1.1.1	Filtration	7
1.1.2	Temps d'arrêt	8
1.1.3	Mouvement Brownien	9
1.1.4	Martingales	10
1.2	L'intégrale Stochastique	11
1.2.1	Processus d'Ito :	12
1.2.2	Formule d'Itô :	12
1.3	Équations différentielles stochastiques(EDS)	14
1.3.1	Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte	15
1.3.2	Propriété de Markov et propriété de flot des EDS	16
2	Optimisation et contrôle stochastique appliqué en finance	18
2.1	Forme standard d'un problème de contrôle stochastique	18
2.2	Critère de minimisation	21
2.2.1	Principe de la programmation dynamique	22
2.2.2	Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman	25
2.2.3	Théorème de vérification	27
2.3	Critère de maximisation	30
3	Application à l'investissement et consommation optimales	37
3.1	Modèle du marché financier	37
3.2	Stratégies financières	38
3.3	Autofinancement	38

3.4	Processus de contrôle	42
3.5	Fonction de coût	42
3.6	Problème d'investissement et consommation optimale	43

Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail. Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, MS :M Laouni , pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire. Je remercie sincèrement les membres du jury : mmmmmmmmmmmmmmm, d'avoir accepté la présidence du jury. Aussi je remercie vivement, mon professeur : Mmmmmmmmmmm d'avoir accepté l'examineur de ce travail. Je les remercie énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail. Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père, ma mère, mon frère et mes sœurs, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement. Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants université Dr Moulay Tahar -Saida Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donné. Merci à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

DEDICACES

Ce travail est dédié :

À ma chère mère ;

À mon père ;

À mes frères et mes soeurs

À tous mes proches de la famille Bouanani ;

À tous mes chers amis et mes collègues.

Introduction

Les problèmes d'optimisation stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance et reposent sur la méthode de la programmation dynamique. L'idée principale de cette méthode consiste à considérer une famille de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) appelée équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution, le théorème de vérification valide l'optimalité de ce candidat, solution d'HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal.

Bien que la théorie du contrôle optimal remonte aux années 60, Bellman fût le premier à s'intéresser à l'aspect stochastique en 1958.

Notre objectif dans ce travail consiste à étudier les problèmes d'optimisation stochastique et ses applications en finance et spécialement pour les problèmes financiers de consommation et d'investissement.

Pour mieux comprendre et résoudre les problèmes d'optimisation stochastique tels celui de finance, nous présentons notre travail en 3 chapitres.

Le premier est un bref rappel sur le calcul stochastique, nous discutons quelque processus stochastiques tel que le mouvement Brownien, processus et formule d'Itô les équations différentielles et leur solution , ..., etc.

Le deuxième consiste essentiellement en la formulation mathématique du problème de d'optimisation stochastique. Nous commençons par formuler de façon générale la structure

de notre problème. C'est le véritable point de départ de notre travail. Il s'agit d'exposer un ensemble de conditions et d'équations mathématiques que doit vérifier le contrôle, soit la solution optimale. En clair, il est simplement question d'optimiser (maximiser ou minimiser) une fonction de coût. En appliquant le principe de la programmation dynamique de Bellman qui conduit à des équations aux dérivées partielles appelées équations de Hamilton- Jacobi-Bellman (HJB) dont la résolution s'appuie sur un résultat dit le théorème de vérification.

Le chapitre est consacré à l'application du principe de la programmation dynamique de HJB en mathématiques financières, au problème d'investissement et de consommation dans un marché financier.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

1.1 Processus stochastique

Dans cette section, nous discutons des processus stochastique. Il s'agit de familles de variables aléatoires qui jouent un rôle important dans l'étude des phénomènes aléatoires. Nous passerons en revue quelques processus aux propriétés particulièrement intéressantes.

Définition 1.1.1 *On appelle processus stochastique une famille de variables aléatoires telle que $X = (X_t)_{t \in I}$. I un ensemble d'indices non vides.*

Remarque 1.1.1 – *Si $I \subseteq \mathbb{N}$, on dit que le processus est à temps discret.*

- *Si $I \subseteq \mathbb{R}$, On dit que le processus est à temps continu. C'est à ce type de processus que nous intéressons dans le cadre de notre travail.*
- *Dans la suite, nous noterons variable aléatoire par v.a.*

1.1.1 Filtration

Définition 1.1.2 *Soit un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . On appelle filtration une collection $(\mathcal{F}_t, t \in I)$ croissante de sous-tribus de \mathcal{F} . Donc, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ si $s \leq t$. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ sera appelé un espace de probabilité filtré. La filtration naturelle d'un processus $(X_t, t \in I)$ est $(\mathcal{F}_t^X, t \in I)$ telle que $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq t)$, un processus (X_t) est dit à trajectoires continues (ou simplement processus continu) si $\mathbb{P}(\omega \in \Omega, t \rightarrow X_t(\omega) \text{ est continue}) = 1$.*

Définition 1.1.3 : (*Processus adapté*)

Un processus $(X_t, t \in I)$ est dit adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in I)$, si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Définition 1.1.4 : (*Processus continue*)

Si l'intervalle de variation du temps \mathbb{T} est soit fini $\mathbb{T} = [0, T]$, est $0 < T < \infty$, soit infini, $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, on écrira souvent processus pour processus stochastique.

- pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $X(\omega) : t \in \mathbb{T} \rightarrow X_t(\omega)$ est appelé une trajectoire du processus dans le scénario ω .

Définition 1.1.5 : (*Processus càd-làg*)

Le processus stochastique X est dit càd-làg (resp.continu) si pour chaque $\omega \in \Omega$, la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche.

1.1.2 Temps d'arrêt

Définition 1.1.6 Un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une variables aléatoires $\theta : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $(\theta \leq t) = (\omega \in \Omega / \mathbb{T}(\omega) \leq t) \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$. Pour tout temps d'arrêt \mathbb{T} , on définit :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}} = \{A \in \mathcal{F} / A \cap \{\mathbb{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\}.$$

Proposition 1.1.1 [20] Soit σ et τ des temps d'arrêt et ξ une variable aléatoire on a :

- Pour tout $\beta \in \mathcal{F}_{\sigma}$, on a : $\beta \cap (\sigma \leq \tau) \in \mathcal{F}_t$. En particulier, si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathcal{F}_{\sigma} \subset \mathcal{F}_{\tau}$.
- Les événements suivants

$$(\sigma < \tau), (\sigma \leq \tau), (\sigma = \tau),$$

appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_{\sigma} \cap \mathcal{F}_{\tau}$.

- ξ est \mathcal{F}_t -mesurable si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\xi \mathbf{1}_{\tau \leq t}$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Etant donné un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et un temps d'arrêt θ , on définit la variable aléatoire X_t sur $\{T \in \mathbb{T}\}$ par :

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega).$$

On vérifie que si X est mesurable alors X_t est une variable aléatoire sur $(t \in \mathbb{T})$. On introduit alors le processus arrêté (en θ) X^θ défini par :

$$X_t^\theta = X_{\theta \wedge t}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

1.1.3 Mouvement Brownien

Un exemple particulièrement important de processus stochastique est le mouvement Brownien. Il servira de base pour la construction de la plupart des modèles d'actifs financiers et de taux d'intérêt.

Définition 1.1.7 On appelle mouvement Brownien un processus stochastique à valeurs réelles, $(X_t)_{t \geq 0}$, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- La continuité : La fonction $s \rightarrow X_s(\omega)$ \mathbb{P} p.s. est une fonction continue.
- L'indépendance des accroissements : Si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.
- La stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Un mouvement Brownien est dit standard si :

$$X_0 = 0 \text{ p.p.s.}, \quad \mathbb{E}(X_t) = 0, \quad \mathbb{E}(X_t^2) = t.$$

- Un mouvement Brownien d -dimensionnel est un processus continue tel que : $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}$, où les processus $(\omega_t^i)_t$, $i = 1, \dots, d$ sont des mouvement Brownien indépendants.

Proposition 1.1.2 Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

- La symétrie : $(-W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est aussi un mouvement Brownien.
- L'échelle : pour tout $\lambda > 0$, le processus $((1/\lambda)W_\lambda^2(t))_{t \in \mathbb{T}}$ est aussi un mouvement Brownien.
- L'invariance par translation : pour tout $s > 0$, le processus $(W_{t+s} - W_s)_{t \in \mathbb{T}}$ est un mouvement Brownien standard indépendant de \mathcal{F}_s .

1.1.4 Martingales

Les martingales représentent une classe particulière de processus stochastique. Elles jouent un rôle important en ingénierie financière.

Définition 1.1.8 *Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une martingale si $\forall s < t, \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$.*

Exemple :

- Un mouvement Brownien $(W_t^2) - t \geq 0$ est une martingale.
- Le processus $(W_t^2 - t)_t - t \geq 0$ est également une martingale.

Théorème 1.1.1 *(Théorème de représentation des martingale)[20]*

Soit (W_t) un mouvement Brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, et M_t une martingale (\mathcal{F}_t) -adapté.

Alors : il existe un processus adapté Z_s tel que :

$$M(t) = M(0) + \int_0^t Z(s) dW_s.$$

Variation quadratique

Soient M_1 et M_2 deux martingale (par rapport à la même filtration), et :

$$\pi_n : 0 < t_1 < \dots < t_n = t,$$

une partition de $[0, t]$ telle que : $\max_{1 \leq i \leq n} t_i - t_{i-1} \rightarrow 0$.

Alors on pose :

$$\langle M_1, M_2 \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M_1(t_i) - M_1(t_{i-1}))(M_2(t_i) - M_2(t_{i-1}))$$

$\langle M_1, M_2 \rangle_t$ s'appelle la covariation quadratique de M_1 et M_2 . On définit ainsi la variation quadratique d'une martingale (M_t) par :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M(t_i) - M(t_{i-1}))^2.$$

Dans le cas d'un mouvement Brownien standard (W_t) , $\langle W \rangle_t = t$, p.s.

1.2 L'intégrale Stochastique

Il s'agit d'une intégrale de la forme :

$$\int_0^T X(t) dW(t).$$

Où $(W_t)_{t \geq 0}$ est mouvement Brownien, et $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique répondant à certains critères d'intégrabilité. En ingénierie financière, $(W_t)_{t \geq 0}$ pourrait par exemple représenter l'évolution du prix d'un actif dans le temps et $(X_t)_{t \geq 0}$ la stratégie de transaction sur cet actif d'un investisseur.

L'équation est alors le gain réalisé à l'horizon T . La manipulation de cette forme d'intégrale est facilitée par l'utilisation de la formule d'Ito, faisant référence à son auteur, le mathématicien Kiyoshi Itô.

Propriétés de L'intégrale Stochastique

L'intégrale stochastique possède les propriétés suivantes voir, [20] :

1. $\int_0^T (aH_1(s) + bH_2(s) dW(s)) = a \int_0^T H_1(s) dW(s) + b \int_0^T H_2(s) dW(s)$,
2. $\mathbb{E} \left(\int_0^T H(s) dW(s) \right) = 0$,
3. $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T H(s) dW(s) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T H(s)^2 ds \right)$ (isométrie d'Itô),
4. $\mathbb{E} \left(\int_0^T H_1(s) dW(s) \right) \left(\int_0^T H_2(s) dW(s) \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^T H_1(s)H_2(s)ds \right)$,
5. $\mathbb{E} \left(\int_0^t H(s) dW(s) | \mathcal{F}_u \right) = \int_0^u H(s) dW(s)$ (propriété martingale).

1.2.1 Processus d'Ito :

En finance, on utilise souvent des processus d'Itô comme semimartingales continues pour modéliser la dynamique des prix d'actifs risqués.

Définition 1.2.1 Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus stochastique définie sur un espace probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô si :

$$\forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s, \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Avec :

1. X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable,
2. $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ des processus adaptés à \mathcal{F}_t ,
3. $\int_0^t |K_s| ds < +\infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$,
4. $\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$

1.2.2 Formule d'Itô :

Théorème 1.2.1 [15] Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

et f une fonction deux fois continûment différentiable sur \mathbb{R} , on a

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d \langle X_s \rangle_s,$$

où

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

et

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s.$$

De même si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , on a

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s.$$

Exemple Prenons :

$$dX_t = X_t dW_t, \quad \text{et} \quad f(x) = \ln x.$$

On a donc :

$$f'_t(X_t) = 0, \quad f'_x(X_t) = \frac{1}{X_t}, \quad \text{et} \quad f''_{xx}(X_t) = -\frac{1}{X_t^2}.$$

La formule d'Itô s'applique :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left[0 + 0 + \frac{1}{2} X_t^2 \left(-\frac{1}{X_t^2} \right) \right] dt + X_t \frac{1}{X_t} dW(t) \\ &= -\frac{1}{2} dt + dW(t). \end{aligned}$$

En intégrant, on obtient

$$X_t = X_0 \exp\left(-\frac{1}{2}t + W(t)\right).$$

On reconnaît là un mouvement Brownien géométrique.

Remarque 1.2.1 La formule d'Itô s'encore également dans le cas multidimensionnel :

Soit (X_t^1, \dots, X_t^n) n processus d'Itô de la forme :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j.$$

Alors, pour tout fonction $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , on a :

$$\begin{aligned} f(t, X_t^1, \dots, X_t^n) &= f(0, X_0^1, \dots, X_0^n) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) \\ &+ \sum \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) dX_s^i \\ &+ \frac{1}{2} \sum \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s^1, \dots, X_s^n) d \langle X^i, X^j \rangle_s . \end{aligned}$$

Où :

$$dX_s^i = K_s^i ds + \sum_{j=1}^d H_s^{i,j} dW_s^j,$$

$$d \langle X^i, X^j \rangle_s = \sum_{m=1}^d H_s^{i,m} H_s^{j,m} ds.$$

1.3 Équations différentielles stochastiques(EDS)

Définition 1.3.1 Une équation différentielle stochastique(EDS) est une équation de la forme :

$$\begin{cases} dX(t) = K(t, X(t)) dt + H(t, X(t)) dW(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où

- $X_0 \in \mathbb{R}^n$,
- (W_t) est un mouvement Brownien,
- $K(t, X(t))$ et $H(t, X(t))$ sont des fonctions boréliennes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Définition 1.3.2 Une solution forte de l'équation différentielle stochastique (1.1) est un processus $X = (X(t), t \in [0, T])$ continu qui est (\mathcal{F}_t) -adapté et tel que :

- $\int_0^T (|K(s, X(s))|^2 + |H(s, X(s))|^2) ds < \infty$,
- X vérifie l'EDS (1.1).

1.3.1 Condition d'existence et d'unicité d'une solution forte

On rappelle que $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires \mathcal{F} -mesurables X à valeurs dans \mathbb{R}^n telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < \infty$ ($p \in [1, \infty)$).

Théorème 1.3.1 [21]

Si les fonctions $K(t, X(\cdot))$ et $H(t, X(\cdot))$ sont lipchitziennes, c'est-à-dire qu'il existe $L > 0$ tel que :

$$\begin{cases} |K(t, x(\cdot)) - K(t, y(\cdot))| \leq L|x(\cdot) - y(\cdot)| \\ |H(t, x(\cdot)) - H(t, y(\cdot))| \leq L|x(\cdot) - y(\cdot)| \end{cases}$$

et si de plus :

$$|K(t, X(\cdot))| + |H(t, X(\cdot))| \in L^2(0, T, \mathbb{R}).$$

Alors, pour tout $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($p \geq 1$), il existe une et une seule solution forte X de (1.1) qui vérifie :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X(s)|^p) \leq K_T(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p)) \\ \mathbb{E}(|X(t) - X(s)|^p) \leq K_T(1 + \mathbb{E}(|X_0|^p))|t - s|^{\frac{p}{2}}, \quad \forall t \in [0, T], K_T > 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, si $X_0 \in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est une autre variable aléatoire correspondant à X , solution de l'équation, alors pour tout $T > 0$, il existe $A_T > 0$ tel que :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} |X(s) - X_0|^p) \leq A_T(1 + \mathbb{E}(|X_0 - X_0|^p)).$$

Exemple : L'équation de Black-Scholes

$$\begin{cases} dX(t) = KX(t)dt + HX(t) dW(t) \\ X(0) = 1. \end{cases}$$

Ici $K(t, X(t)) = KX(t)$ et $H(t, X(t)) = HX(t)$ sont manifestement lipchitziennes et vérifient, donc l'équation de Black-Scholes avec la condition initiale $X(0) = 1$ ci-dessus,

admet une et une solution $X_t = \exp^{(H-\frac{1}{2}K^2)t+KW_t}$. $K \in \mathbb{R}$ est appelé le coefficient de dérivé (il traduit la tendance générale du processus) et $H > 0$ est le coefficient de diffusion (il traduit la variabilité ou volatilité du processus).

Remarque 1.3.1 *A côté des solutions fortes, on définit les solutions faibles. La différence entre les deux étant que dans le cas des solutions faible, l'espace de probabilité filtré qui n'est pas fixé à priori, fait partie de la solution.*

1.3.2 Propriété de Markov et propriété de flot des EDS

Sur la propriété de Markov :

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est Markovien si son comportement futur ne dépend du passé que par l'intermédiaire de son état présent.

Définition 1.3.3 *Les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est Markovien par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ pour laquelle il est adapté, si : pour toute fonction f mesurable et bornée, pour tout, $s \leq t$:*

$$\mathbb{E}(f(X_t)/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(f(X_t)/H(X_s)) = \mathbb{E}(f(X_t)/X_s).$$

Examinons le cas du mouvement Brownien :

Comme toutes les fonctions mesurables bornées peuvent être approchées par une suite de fonctions régulières dans C_b^∞ .

Supposons un moment que la fonction générique f dans la définition ci-dessus est de classe C_b^∞ . Alors par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} f(W_t) &= f(W_s) + \int_s^t f'(W_u)dW_u + \frac{1}{2} \int_s^t f''(W_u)du \\ \mathbb{E}[f(W_t)/\mathcal{F}_s] &= f(W_s) + \frac{1}{2} \int_s^t \mathbb{E}[f''(W_u)/\mathcal{F}_s]du \\ &= f(W_s) + \frac{1}{2}(t-s)f''(W_s) + \frac{1}{4} \int_s^t \mathbb{E}[f'''(W_u)/\mathcal{F}_s]du \\ &= \dots \text{d'ou on peut justifier l'existence d'une fonction } \Psi(f)(\cdot) \text{ mesurable} \\ &= \Psi(f)(W_s). \end{aligned}$$

Flot d'une EDS :

Soit l'EDS de forme différentielle

$$dX_t = K(t, X_t) + H(t, X_t)dW_t, \quad (1.2)$$

sur $(\Omega, \mathbb{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et (W_t) un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien standard.

On note $(X_\theta^{t,x})_{t \leq \theta \leq T}$ la solution de (1.2) qui part du point x à l'instant t :

$$X_\theta^{t,x} = x + \int_t^\theta K(s, X_s^{t,x}) ds + \int_t^\theta H(s, X_s^{t,x}) dW_s, \quad \theta \in [t, T]. \quad (1.3)$$

On suppose que : H' :

- Il existe deux constantes $L > 0$ $A > 0$ tel que $\forall t \in [0, T]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|K(t, x)|^2 + \|H(t, x)\|^2 \leq A(1 + |x|^2),$$

$$|K(t, x) - K(t, y)| + \|H(t, x) - H(t, y)\| \leq L|x - y|.$$

- Les coefficients $K(t, x), H(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^r)$ sont des fonctions continues. En plus de l'hypothèse (H') du Théorème de Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDS (1.2) (H') impose la continuité en temps des coefficient. Sous ces hypothèses, pour tout couple (t, x) dans $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, l'équation (1.3) admet une unique solution $(X_\theta^{x,t})_{\theta \in [t, T]}$.

Chapitre 2

Optimisation et contrôle stochastique appliqué en finance

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à la finance et reposent sur la méthode de la programmation dynamique. L'idée principale de cette méthode consiste à considérer une famille de contrôles à différents états initiaux et d'établir des relations entre les fonctions valeurs associées. L'équation de la programmation dynamique conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire appelée équation d'Hamilton -Jacobi-Bellman (HJB). Lorsque cette EDP peut être résolue par l'obtention explicite ou théorique d'une solution régulière, le théorème de vérification valide l'optimalité de ce candidat, solution d'HJB, et permet aussi de caractériser un contrôle optimal.

2.1 Forme standard d'un problème de contrôle stochastique

Le concept d'équation différentielle stochastique généralise celui d'équation différentielle ordinaire aux processus stochastiques. La formalisation théorique de ce problème à elle seule a posé problème aux mathématiciens, et il a fallu attendre les années 40 et les travaux du mathématicien Japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement Brownien, ainsi on peut donner un sens à l'expression $\int_s^t f(u, W)dB_u$,

où $f(u, \cdot)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularités suffisantes.

On rappelle dans cette section quelques résultats sur les équations différentielles stochastiques (EDS) à coefficient aléatoires par rapport à un mouvement Brownien.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles, et soit $(W_t)_t$ un \mathcal{F}_t -mouvement Brownien à valeurs dans \mathbb{R}^d . On se donne un sous ensemble U de \mathbb{R}^k , on note par \mathcal{A}_0 l'ensemble de tous les processus progressivement mesurables $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans U . Les éléments de \mathcal{A}_0 sont appelés les processus de contrôles. Soit

$$A : (t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow A(t, x, u) \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$B : (t, x, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow B(t, x, u) \in \mathbb{R}^{n \times d},$$

deux fonctions satisfaisant la condition uniforme de Lipchitz

$$|A(t, x, u) - A(t, y, u)| + |B(t, x, u) - B(t, y, u)| \leq K|x - y|. \quad (2.1)$$

Pour une certaine constante finie K indépendante de (t, x, y, u) . Pour tout processus de contrôle $\nu \in \mathcal{A}$, on considère alors l'EDS :

$$dX_t = A(t, X_t, \nu_t)dt + B(t, X_t, \nu_t)dB_t. \quad (2.2)$$

Si l'équation (2.2) admet une solution unique X , pour des données initiales, alors on dit que X est un processus contrôlé par le processus de contrôle ν .

Soit $T > 0$ un horizon du temps donné. On note par \mathcal{A} le sous ensemble de tous les processus de contrôles $\nu \in \mathcal{A}_0$ satisfaisant la condition

$$\mathbb{E} \int_0^T |A(t, X_t, \nu_t)| + |B(t, X_t, \nu_t)|^2 dt < \infty. \quad (2.3)$$

Les éléments de \mathcal{A} sont appelés les processus de contrôles. Cette condition assure l'existence d'un processus contrôlé pour des données initiales, sous la condition uniforme de Lipchitz sur A et B . C'est une conséquence d'un théorème d'existence plus général des EDS à coefficients aléatoires.

Théorème 2.1.1 [3] *Supposons que $\nu \in \mathcal{A}$. Alors sous la conditions (2.1) et pour toute variable aléatoire $\varsigma \in L^2(\Omega)$, \mathcal{F}_0 - mesurable, il existe un unique processus X \mathbb{F} - adapté vérifiant (2.2) avec la condition initiale $X_0 = \varsigma$.*

De plus, on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^2) < \infty. \quad (2.4)$$

Soient $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. On suppose que f et g sont à croissance quadratique en x , i.e. il existe une constante positive C indépendante de (t, u) telle que :

$$|f(t, x, u)| + |g(x)| \leq C(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On peut alors définir la fonction de coût J sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$ par :

$$J(t, x, \nu) = \mathbb{E} \int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \nu_s) ds + g(X_T^{t,x}).$$

Où X est la solution de EDS (2.2) avec le contrôle ν et la condition initiale $X_t = x$.

Observons que les conditions de croissances quadratiques de f et g assurent que $J(t, x, \nu)$ est bien définie pour tout contrôle $\nu \in \mathcal{A}$, comme une conséquence du Théorème (2.1.1). L'objectif étant de maximiser où minimiser cette fonction de coût, on introduit la fonction valeur :

$$V(t, x) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}} J(t, x, \nu), \quad \text{pour } (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n, \quad \text{Cas minimisation,}$$

et

$$V(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}} J(t, x, \nu), \quad \text{pour } (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n, \quad \text{Cas maximisation.}$$

Soit $(t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^n$, on dit que $\nu^* \in \mathcal{A}$ est un contrôle optimal si

$$V(t, x) = J(t, x, \nu^*).$$

2.2 Critère de minimisation

Dans ce cas, on considère la fonctions valeur définit par :

$$V(t, x) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, \nu)$$

et la fonction de coût donnée par :

$$J(t, x, \nu) = \mathbb{E} \left[\int_t^T f(s, X_s^{t, x}, \nu_s) ds + g(X_T^{t, x}) \right].$$

où f et g sont des fonctions mesurables, continues, convexes. On suppose que :

- g est borné inférieurement,
- g est à croissance quadratique, pour une constante C indépendante de x on a :

$$|g(x)| \leq C(1 + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}(t, x)$ est le sous ensemble des contrôles ν de \mathcal{A} tel que :

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T |f(s, X_s^{t, x}, \nu_s)| ds \right] < +\infty.$$

Exemple : En dimension 1, soit l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = v_t dW_t, \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des contrôles est donnée par :

$$\mathcal{A} = [-1, 1].$$

La fonctionnelle à minimiser est donnée par :

$$J(v) = \mathbb{E} \left[X_1^2 + \int_0^1 (X_t^2 - \frac{1}{2} v_t^2) dt \right].$$

Par la formule d'Itô, on a :

$$X_t^2 = \int_0^t v_s^2 ds + 2 \int_0^t X_s^v v_s dW_s.$$

Pour $t = 1$, on aura :

$$X_1^2 = \int_0^1 v_s^2 ds + 2 \int_0^1 X_s^v v_s dW_s.$$

En remplaçant X_1^2 par sa valeur dans la fonction coût, on obtient :

$$J(v) = \mathbb{E} \int_0^1 (X_s^2 + \frac{1}{2} v_s^2) ds.$$

Par analogie avec la définition du coût, on aura :

$$\begin{aligned} f(t, X_t, v_t) &= X_t^2 + \frac{1}{2} v_t^2, \\ g(X_1^v) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} J(v) &= \mathbb{E} [\int_0^1 v_s^2 ds + \frac{1}{2} v_t^2 dt] \\ &= \mathbb{E} \int_0^1 (\frac{3}{2} - t) v_t^2 dt. \end{aligned}$$

On remarque que J est une fonction convexe de v , donc elle atteint son minimum en $u_t = 0$.

Par conséquent, le contrôle optimal qui minimise J sur \mathcal{A} est $u = 0$ avec une trajectoire optimal $X_t^u = 0$.

2.2.1 Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique PPD est un principe fondamental pour la théorie du contrôle stochastique.

Dans le contexte de contrôle de processus de diffusion décrit au paragraphe précédent, et même plus généralement pour des contrôles de processus de diffusion, il s'énonce ainsi le théorème suivant :

On note $\theta \in \mathcal{T}_{t,T}$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[t, T]$.

Théorème 2.2.1 [11] Soit $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$. Pour tout temps d'arrêt $\theta \in \mathcal{T}_{t, T}$.

Alors on a :

1. Pour tout $\nu \in \mathcal{A}$ et $\theta \in \mathcal{T}_{t, T}$:

$$V(t, x) \leq \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t, x}, \nu_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t, x}, \theta) \right].$$

2. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\nu \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{T}_{t, T}$:

$$V(t, x) + \delta \geq \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t, x}, \nu_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t, x}, \theta) \right].$$

C'est une version plus forte que la version traditionnelle du principe de la programmation dynamique :

$$V(t, x) = \inf_{\nu \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t, x}, \nu_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t, x}, \theta) \right]. \quad (2.5)$$

Pour tout temps d'arrêt $\theta \in \mathcal{T}_{t, T}$.

L'idée intuitive de ce principe est qu'un contrôle optimal $\hat{\alpha}$ sur $[t, T]$ peut être recollé en deux contrôles optimaux, l'un sur $[t, \theta]$ et l'autre sur $[\theta, T]$, et ceci quel que soit le temps d'arrêt θ . La preuve rigoureuse de ce résultat dans ce contexte stochastique est très technique. Nous donnons ici une preuve formelle de ce principe.

Preuve formelle du PPD :

1. Etant donné un contrôle $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$, on a par unicité du flot de l' EDS gouvernant X , la structure markovien : $X_s^{t, x} = X_s^{\theta, X_\theta^{t, x}}$, $s \geq \theta$, où θ est un temps d'arrêt à valeurs dans $[t, T]$. Par la loi des espérances conditionnelles itérées, on a alors :

$$J(t, x, \alpha) = \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t, x}, \alpha_s) ds + J(\theta, X_\theta^{t, x}, \alpha) \right],$$

d'où puisque $J(t, x, \alpha) \geq V$ et comme θ est quel conque dans $\mathbb{T}_{t,T}$:

$$\begin{aligned} J(t, x, \alpha) &\geq \sup_{\theta \in \mathbb{T}_{t,T}} \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right] \\ &\geq \sup_{\theta \in \mathbb{T}_{t,T}} \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right]. \end{aligned}$$

En passant à l'infimum sur α dans le terme de gauche, on obtient l'inégalité :

$$V(t, x) \geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} \sup_{\theta \in \mathbb{T}_{t,T}} \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right]. \quad (2.6)$$

2. On considère pour tout $\epsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{T}_{t,T}$ un contrôle ϵ -optimale α^ϵ de $V(\theta, X_\theta^{t,x})$:

$$J(\theta, X_\theta^{t,x}) \leq V(\theta, X_\theta^{t,x}) + \epsilon.$$

Etant donné $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$, on définit le processus :

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \alpha_s, & s \in [0, \theta] \\ \alpha_s^\epsilon, & s \in [\theta, T]. \end{cases}$$

Le point délicat est de vérifier que $\tilde{\alpha}$ est progressivement mesurable et alors bien dans $\mathcal{A}(t, x)$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} V(t, x) &\leq J(t, x, \tilde{\alpha}) = \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + J(\theta, X_\theta^{t,x}, \alpha^\epsilon) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right] + \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$, $\theta \in \mathbb{T}_{t,T}$ et $\epsilon > 0$, on a l'inégalité :

$$V(t, x) \leq \sup_{\theta \in \mathbb{T}_{t,T}} \inf_{\alpha \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E} \left[\int_t^\theta f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + V(\theta, X_\theta^{t,x}) \right]. \quad (2.7)$$

En combinant les deux inégalités (2.7) et (2.6), on obtient le résultat voulu.

2.2.2 Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

L'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman HJB est la version infinitésimale du principe de la programmation dynamique : elle décrit le comportement local de la fonction valeur $V(t, x)$ lorsqu'on fait tendre le temps d'arrêt θ dans (2.5) vers t . Dans cette section, nous dérivons formellement l'équation d'HJB en supposant que la fonction valeur V est suffisamment régulière. Considérons le temps $\theta = t + h$ et un contrôle constant $\alpha_s = a$, avec a arbitraire dans \mathcal{A} , on a, d'après la relation de la programmation dynamique,

$$V(t, x) \leq \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^{t,x}, a) ds + V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) \right].$$

En supposant que V est suffisamment régulière, on a par la formule d'Itô entre t et $t+h$:

$$\begin{aligned} V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = V(t, x) &+ \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \mathcal{L}^a V(t, x) \right) (s, X_s^{t,x}) ds \\ &+ \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x} + \mathcal{L}^a V(t, x) \right) (s, X_s^{t,x}) dW_s. \end{aligned}$$

où \mathcal{L}^a est l'opérateur associé à la diffusion (2.2) pour le contrôle constant a et est défini par :

$$\mathcal{L}^a V(t, x) = A(x, a) D_x V + \frac{1}{2} \text{tr}(B(x, a) B'(x, a) D_x^2 V(t, x)).$$

En substituant dans (2.1), on obtient alors :

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \mathcal{L}^a V(t, x) \right) (s, X_s^{t,x}) + f(s, X_s^{t,x}, a) ds \right].$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on a :

$$0 \leq \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} (t, x) + \mathcal{L}^a V(t, x) + f(t, x, a).$$

Ceci étant valable pour tout $a \in \mathcal{A}$, on obtient alors l'inégalité :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sup_{a \in \mathcal{A}} -\mathcal{L}^a V(t, x)(t, x) - f(t, x, a) \leq 0.$$

D'autre part, supposons que α^* est un contrôle optimal. Alors on a :

$$V(t, x) = \mathbb{E} \left[\int_t^{t+h} f(s, X_s^*, \alpha^*) ds + V(t+h, X_{t+h}^*) \right],$$

où X^* est l'état du système solution de (2.2) partant de x en t avec le contrôle α^* . Par un argument similaire et avec des conditions de régularités sur V , on obtient :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) - \mathcal{L}^{\alpha^*} V(t, x) - f(t, x, \alpha^*) = 0,$$

ce qui, combiné avec (1.15), suggère que V doit satisfaire :

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sup_{a \in \mathcal{A}} [-\mathcal{L}^a V(t, x) - f(t, x, a)] = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

si le supremum ci-dessus en a est fini. On réécrit souvent cette EDP sous la forme :

$$-\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.8)$$

où pour $(t, x, p, M) \in [0; T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n$ (\mathcal{S}_n est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétrique) :

$$H(t, x, p, M) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \left[-A(x, a) \cdot p - \frac{1}{2} \text{tr}(BB'(x, a)M) - f(t, x, a) \right].$$

Cette fonction H est appelée le Hamiltonien du problème de contrôle considéré et l'équation (2.8) est appelée équation de la programmation dynamique ou équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale

$$V(T, x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.3 Théorème de vérification

L'étape la plus importante dans la programmation dynamique consiste à montrer, étant donnée une solution régulière à l'équation d'HJB, sous des conditions suffisantes, coïncide avec la fonction valeur. Ce résultat est appelé théorème de vérification et permet aussi d'obtenir un contrôle optimal. Il repose essentiellement sur la formule d'Itô ([21]).

Théorème 2.2.2 [11] *Soit $w \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ à croissance quadratique, i.e, il existe une constante C telle que :*

$$|w(t, x)| \leq C(1 + |x|^2), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

1. *Supposons que :*

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + \sup_{a \in \mathcal{A}} [-\mathcal{L}^a w(t, x) - f(t, x, a)] \leq 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

$$w(T, x) \leq g(x). \quad (2.10)$$

Alors $w \leq V$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

2. *De plus supposons que $w(T, \cdot) = g$, et pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, il existe $\hat{\alpha}(t, x)$ mesurable à valeurs dans \mathcal{A} tel que :*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + \sup_{a \in \mathcal{A}} [-\mathcal{L}^a w(t, x) - f(t, x, a)] &= -\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t, x)} w(t, x) - f(t, x, \hat{\alpha}(t, x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

l'EDS :

$$dX_s = A(X_s, \hat{\alpha}(s, X_s)) ds + B(X_s, \hat{\alpha}(s, X_s)) dW_s$$

admette une solution, notée $\hat{X}_s^{t, x}$, étant donnée une condition initiale $X_t = x$, et $(\hat{\alpha}(s, \hat{X}_s^{t, x}), t \leq s \leq T) \in \mathcal{A}(t, x)$.

Alors :

$$w = V \quad \text{sur } [0, T] \times \mathbb{R}^n,$$

et $\hat{\alpha}$ est un contrôle optimal.

Démonstration :

1. Puisque $w \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, on a pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}(t, x)$, $s \in [t, T]$, et pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t, +\infty[$, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} w(s \wedge \tau, X_{s \wedge \tau}^{t,x}) &= w(t, x) + \int_t^{s \wedge \tau} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) \right| du \\ &+ \int_t^{s \wedge \tau} D_x w(u, X_u^{t,x}) B(X_u^{t,x}, \alpha_u) dW_u. \end{aligned}$$

On choisit :

$$\tau = \tau_n = \inf \left\{ s \geq t : \int_t^s |D_x w(u, X_u^{t,x})' B(X_u^{t,x}, \alpha_u)|^2 du \geq n \right\}$$

en notant que $\tau_n \nearrow +\infty$ quand n tend vers l'infini.

Le processus arrêté

$$\left\{ \int_t^{s \wedge \tau_n} D_x w(u, X_u^{t,x})' B(X_u^{t,x}, \alpha_u) dW_u, t \leq s \leq T \right\}$$

est donc une martingale et on a en prenant l'espérance :

$$\mathbb{E} \left[w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}) \right] = w(t, x) + \mathbb{E} \left[\int_t^{s \wedge \tau_n} \frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) du \right].$$

Puisque w satisfait (2.9), on a :

$$\frac{\partial w}{\partial t}(u, X_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\alpha_u} w(u, X_u^{t,x}) + f(X_u^{t,x}, \alpha_u) \geq 0, \forall \alpha \in \mathcal{A}(t, x),$$

d où :

$$\mathbb{E} \left[w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x}) \right] \geq w(t, x) - \mathbb{E} \left[\int_t^{s \wedge \tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right], \forall \alpha \in \mathcal{A}(t, x).$$

On a :

$$\left| \int_t^{s \wedge \tau_n} f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right| \leq \int_t^T \left| f(X_u^{t,x}, \alpha_u) \right| du, \quad (2.11)$$

et le terme de droite est intégrable d'après la condition d'intégrabilité sur $\mathcal{A}(t, x)$.

Comme w est à croissance quadratique, on a :

$$|w(s \wedge \tau_n, X_{s \wedge \tau_n}^{t,x})| \leq C(1 + \sup_{s \in [t, T]} |X_s^{t,x}|^2),$$

et le terme de droite est intégrable d'après (2.4). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini dans (2.11) :

$$\mathbb{E} \left[w(s, X_s^{t,x}) \right] \geq w(t, x) - \mathbb{E} \left[\int_t^s f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t, x).$$

Comme w est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, en faisant tendre s vers T , on a par le théorème de convergence dominée et en utilisant aussi (2.10) :

$$\mathbb{E} \left[g(X_T^{t,x}) \right] \geq w(t, x) - \mathbb{E} \left[\int_t^T f(X_u^{t,x}, \alpha_u) du \right], \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(t, x),$$

et donc :

$$w(t, x) \leq V(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

2. On applique la formule d'Itô à $w(u, \hat{X}_u^{t,x})$ entre $t \in [0, T]$ et $s \in [t, T]$ (après avoir localisé avec τ_n) :

$$\mathbb{E} \left[w(s, \hat{X}_s^{t,x}) \right] = w(t, x) + \mathbb{E} \left[\int_t^s \frac{\partial w}{\partial t}(u, \hat{X}_u^{t,x}) + \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x})} w(u, \hat{X}_u^{t,x}) du \right].$$

Or par définition de $\hat{\alpha}(t, x)$, on a :

$$-\frac{\partial w}{\partial t} - \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)} w(t, x) - f(t, x, \hat{\alpha}(t, x)) = 0.$$

d'où :

$$\mathbb{E} \left[w(s, \hat{X}_s^{t,x}) \right] = w(t, x) - \mathbb{E} \left[\int_t^s f(\hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x})) du \right].$$

En faisant tendre s vers T , on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T f(\hat{X}_u^{t,x}, \hat{\alpha}(u, \hat{X}_u^{t,x})) du + g(\hat{X}_T^{t,x}) \right] \\ &= J(t, x, \hat{\alpha}). \end{aligned}$$

Donc :

$$w(t, x) = J(t, x, \hat{\alpha}) \geq V(t, x)$$

et finalement

$$w = V.$$

Avec $\hat{\alpha}$ comme contrôle optimal.

2.3 Critère de maximisation

Dans ce cas, on considère la fonction valeur définie par :

$$V(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t,x)} J(t, x, \nu)$$

où :

$$J(t, x, \nu) = \mathbb{E} \left[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \nu_s) ds + g(X_T^{t,x}) \right],$$

et f et g sont des fonctions mesurables. On peut se ramener à un problème de minimisation en considérant la fonction valeur $-V$.

Avec une équation d'Hamilton Jacobi Bellman donnée par :

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, \\ V(T, x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ceci revient alors à considérer l'Hamiltonien :

$$H(t, x, p, M) = \inf_{a \in \mathcal{A}} \left[-A(x, a) \cdot p - \frac{1}{2} \text{tr}(B(x, a)B'(x, a)M) - f(t, x, a) \right].$$

Théorème de vérification [16]

Dans cette section on va montrer le théorème de vérification proposé dans qui s'appliquera au problème

$$\max_{\nu \in \mathcal{A}} J(x, \nu).$$

On considère le problème du contrôle stochastique pour le processus d'Itô scalaire sur l'intervalle $[0, T]$

$$\begin{cases} dX_t^\nu = A(t, X_t^\nu, \nu_t)dt + B(t, X_t^\nu, \nu_t) dW_t, \\ X_0^\nu = x > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

On suppose que le processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ prend ses valeurs dans un ensemble $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}$, que les coefficients

$$A : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times K \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad B : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times K \rightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions non aléatoires et que pour tout $t \in [0, T]$ les fonctions $A(t, \cdot, \cdot)$ et $B(t, \cdot, \cdot)$ sont continus sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathcal{K}$, telles que pour tout $K \in \mathcal{K}$ l'équation (2.12) avec $\nu \equiv K$ a une solution unique forte positive presque sûrement sur l'intervalle $[0, T]$.

Rappelons que $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. De plus, soient

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}_+^* \times K \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

On suppose que les fonctions f et g sont continus. Dans cette section nous allons modifier la définition le contrôle pour l'équation de la façon suivante.

Définition 2.3.1 *On dira qu'un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{0 \leq t \leq T}$ s'il est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$ et l'équation (2.12) a une solution unique forte $(X_t^\nu)_{0 \leq t \leq T}$ positive presque sûrement sur l'intervalle $[0, T]$ telle que*

$$\int_0^T (|A(t, X_t^\nu, \nu_t)| + |B(t, X_t^\nu, \nu_t)|^2) dt < \infty \quad p.s \quad (2.13)$$

et

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T (f(s, X_s^\nu, \nu_s))_- dt + (f(X_T^\nu))_- \right] \leq \infty$$

où $(a)_- = -\min(0, a)$. On désigne par \mathcal{A} l'ensemble de tous les processus du contrôle.

Définissons maintenant les fonctions objectifs, en posant

$$J(t, x, \nu) = \mathbb{E}_{t,x} \left[\int_t^T f(s, X_s^\nu, \nu_s) ds + g(X_T^\nu) \right], 0 \leq t \leq T,$$

où $\mathbb{E}_{t,x}$ est l'espérance conditionnelle sachant que $X_t^\nu = x$.

f et g deux fonctions continues. Notre but est résoudre les problèmes d'optimisation suivants

$$V(t, x) = J^*(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}} J(t, x, \nu), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.14)$$

Pour cela, introduisons l'Hamiltonien défini par

$$H(t, x, D_x V, D_x^2 V) = \sup_{\vartheta \in \mathcal{A}} H_0(t, x, D_x V, D_x^2 V, \vartheta) \quad (2.15)$$

avec

$$H_0(t, x, D_x V, D_x^2 V, \vartheta) = A(t, x, \vartheta) D_x V + \frac{1}{2} |B(t, x, \vartheta)|^2 D_x^2 V + f(t, x, \vartheta).$$

pour trouver une solution du problème (2.14), il faut étudier l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} V_t(t, x) + H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = 0, & t \in [0, t], \\ V(T, x) = g(x), & x > 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ici V_t désigne la dérivée partielle de V par rapport à t . On va utiliser les mêmes notations pour toutes les dérivées partielles.

On suppose que :

H_1 : Il existe une fonction $V : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les conditions suivantes :

– Il existe une fonction $V_t(\cdot, \cdot)$ telle que pour tout $0 \leq t_1, t_2 \leq T$ et pour tout $x > 0$

$$V(t_2, x) - V(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} V_t(u, x) du.$$

De plus, $V_t(u, \cdot)$ est continu sur \mathbb{R}_+^* .

– pour tout $N \geq 1$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^T \sup_{x, y \in K_N, |x-y| < \epsilon} |V_t(u, x) - V_t(u, y)| dt = 0.$$

Où $K_N = [N^{-1}, N]$.

– La fonction V est deux fois dérivable par rapport à x et les dérivées partielles $D_x V(\cdot, \cdot)$ et $D_x^2 V(\cdot, \cdot)$ sont continus sur $[0, T] \times (0, \infty)$.

– Il existe un ensemble $\Gamma \subseteq [0, T]$ avec $\Lambda(\Gamma) = T$ ($\Lambda(\cdot)$ est la mesure de Lebesgue) et pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$ la fonction $V(t, x)$ est une solution du problème (2.14).

H_2 : Il existe une fonction mesurable $\vartheta^* : [0 : T] \times (0, \infty) \rightarrow K$ telle que

$$H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta^*(t, x))$$

pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$.

H_3 : Il existe quels que $\delta > 1$ pour tout $0 \leq t \leq T$, est $x > 0$:

$$\mathbb{E}_{t,x} \sup_{t \leq s \leq T} (V(s, X_s^*))^\delta < \infty.$$

H_4 : Il existe une solution unique forte presque sûrement positive de l'équation d'Itô suivante

$$dX_t^* = A^*(t, X_t^*)dt + B^*(t, X_t^*)dw_t, \quad X_0^* = x,$$

où

$$A^*(t, x) = A(t, x, \vartheta^*(t, x))$$

et

$$B^*(t, x) = B(t, x, \vartheta^*(t, x)).$$

De plus, le processus du contrôle optimal $\nu^* = (\nu_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ avec $\nu_t^* = \vartheta^*(t, X_t^*)$ appartient à l'ensemble \mathcal{A} et pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$

$$\mathbb{E}_{t,x} \sup_{t \leq s \leq T} |V(s, X_s^*)| < \infty. \quad (2.17)$$

Maintenant, on montre que le processus ν^* résout les problèmes (2.14).

Théorème 2.3.1 [16] *On suppose que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et que les hypothèses H_1, H_4 sont satisfaites. De plus, on suppose que*

$$V_* = \inf_{0 \leq t \leq T} \inf_{x > 0} V(t, x) > -\infty. \quad (2.18)$$

Alors pour tout $t \in \Gamma$ et pour tout $x > 0$

$$V(t, x) = J^*(t, x) = J^*(t, x, \nu^*),$$

où la stratégie ν^* est définie dans les hypothèses H_3, H_4 .

Démonstration

Soient $\nu \in \mathcal{A}$ et X^ν le processus richesse avec la condition $X_t^\nu = x$ pour un moment fixé $t \in \Gamma$. Ensuite, définissons les temps d'arrêt suivants

$$\tau_n = \inf\{s \geq t : \int_t^s |B(u, X_u^\nu, \nu_u)|^2 D_x^2(u, X_u^\nu) du \geq n\} \wedge T.$$

Notons que la condition (3.8) implique que $\tau_n \rightarrow T$ quand $n \rightarrow \infty$ p.s par continuité de $V(t, x)$ et $(X_t^\nu)_{0 \leq t \leq T}$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) = V(T, X_T^\nu) = g(X_T^\nu) \quad p.s.$$

Ensuite, d'après la formule d'Itô on a

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^{\tau_n} f(s, X_s^\nu, \nu_s) ds + V(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) - \\ &- \int_t^{\tau_n} (V_t(s, X_s^\nu) + H_1(s, X_s^\nu, \nu_s)) ds - M_n. \end{aligned}$$

où

$$M_n = \int_t^{\tau_n} B(u, X_u^\nu, \nu_u) V_x(u, X_u^\nu) dW_u,$$

et

$$H_1(s, x, \vartheta) = H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta).$$

La définition du temps d'arrêt τ_n entraîne que $\mathbb{E}_{t,x} M_n = 0$. Par conséquent, on déduit l'inégalité suivante

$$V(t, x) \geq \mathbb{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} f_s ds + \mathbb{E}_{t,x} V_n, \quad (2.19)$$

où $f_s = f(s, X_s^\nu, \nu_s)$ et $V_n = V(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu)$. Considérons d'abord, le premier terme dans cette inégalité. On a

$$\int_t^{\tau_n} f_s ds = \int_t^{\tau_n} (f_s)_+ ds - \int_t^{\tau_n} (f_s)_- ds,$$

où $(a)_+ = \max(0, a)$. La condition et le théorème de convergence monotone impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} f_s ds = \mathbb{E}_{t,x} \int_t^T f_s ds.$$

De plus, par la condition (2.18) la suite $((V_n)_-)_{n \geq 1}$ est bornée, donc uniformément intégrable. Donc, par le Lemme de Fatou on obtient

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} V_n \geq \mathbb{E}_{t,x} \lim_{n \rightarrow \infty} V(\tau_n, X_{\tau_n}^\nu) = \mathbb{E}_{t,x} g(X_T^\nu).$$

par conséquent, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans (2.19) on trouve

$V(t, x) \geq J^*(t, x)$. De la même façon, en remplaçant ν dans (2.19) par ν^* nous obtenons

l'égalité suivante

$$V(t, x) = \mathbb{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} f(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + \mathbb{E}_{t,x} V(\tau_n, X_{\tau_n}^*).$$

Ensuite, par l'hypothèse (2.17) et le théorème de convergence dominée, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} V(\tau_n, X_{\tau_n}^*) = \mathbb{E}_{t,x} \lim_{n \rightarrow \infty} V(\tau_n, X_{\tau_n}^*) = \mathbb{E}_{t,x} g(X_T^*).$$

Cela veut dire que :

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} \int_t^{\tau_n} f(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{t,x} V(\tau_n, X_{\tau_n}^*) \\ &= \mathbb{E}_{t,x} \left(\int_t^T f(s, X_s^*, \nu_s^*) ds + g(X_T^*) \right) \\ &= J(t, x, \nu^*). \end{aligned}$$

Donc, avec l'inégalité $V(t, x) \geq J^*(t, x)$ nous obtenons $V(t, x) = J^*(t, x)$ qui implique le Théorème (2.3.1). Dans la chapitre suivante nous allons voir comment appliquer le théorème de vérification au problème d'investissement et le consommation optimales, dans la résolution d'un problème d'optimisation concernant l'investissement et la consommation optimales en temps continu.

Chapitre 3

Application à l'investissement et consommation optimales

3.1 Modèle du marché financier

Dans ce chapitre nous allons considérer un marché financier en temps continu de type Blache-Scholes avec un actif sans risqué de processus de prix $(B(t))_{t \geq 0}$ et actif risqué de processus de prix $(S(t))_{t \geq 0}$ vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} dB(t) = r_t B(t) dt, & B(0) = 1, \\ dS(t) = S(t)(\mu_t dt + \sigma_t dW_t), & S(0) > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un processus de mouvement Brownien et μ_t, r_t, σ_t sont les coefficients de marché financier tels que : $r_t \in \mathbb{R}$ le taux d'intérêt, μ_t est le taux de rendement, et σ_t la volatilité.

On suppose que les coefficients r_t, μ_t, σ_t sont des fonctions non aléatoire, continues à droite et admet une limite à gauche (cà-dlàg).

De plus, nous supposons que :

$$\inf_{0 \leq t \leq T} \sigma_t > 0.$$

Dans tout ce qui suit, On note par $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ avec $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u, 0 \leq u \leq t)$ la filtration engendrée par le mouvement Brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ (augmentée par les ensembles négligeables).

Soit un investisseur ou un agent qui investit à tout date t dans ces actifs, avec une quantité $\psi_t \in \mathbb{R}$ investie dans l'actifs sans risque et φ_t la quantité investie dans l'actifs risqué à l'instant t .

3.2 Stratégies financières

Définition 3.2.1 Une stratégie financière est un processus stochastique $(H_t = (\psi_t, \varphi_t)_{t \in [0, T]})$ progressivement mesurable, à valeurs dans \mathbb{R}^2 et tel que les intégrales

$$\int_0^T \psi_t dB_t \quad \text{et} \quad \int_0^T \varphi_t dS_t$$

aient un sens. On associe à toute stratégie financière un portefeuille financier contenant à $t \in [0, T]$ ψ_t unités d'actif sans risque et φ_t unités d'actif risqué. La valeur à $t \in [0, T]$ du portefeuille associé à une stratégie H est donnée par

$$X_t = \psi_t B_t + \varphi_t S_t.$$

Le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est appelé processus de richesse.

3.3 Autofinancement

Définition 3.3.1 La stratégie $(H_t)_{t \in [0, T]}$ où $H_t = (\psi_t, \varphi_t)$ est dite autofinancée si la valeur du portefeuille associé vérifie l'EDS suivante :

$$dX_t = \psi_t dB_t + \varphi_t dS_t. \tag{3.2}$$

Remarque : Sur un intervalle de temps $[t, t + dt]$, l'EDS (3.2) implique que

$$X_{t+dt} - X_t = \int_t^{t+dt} \psi_u dB_u + \int_t^{t+dt} \varphi_u dS_u :$$

les changements de valeur du portefeuille proviennent uniquement des changements de valeur des actifs. Il n'y a ni retrait ni injection de cash entre 0 et T . Une stratégie autofinancée est donc une stratégie où la seule marge de manoeuvre est de pouvoir réagencer les actifs en permanence.

Maintenant, on désigne par $(C_t)_{0 \leq t \leq T}$ la vitesse de la consommation de l'agent sur l'intervalle du temps $[0, T]$, c'est-à-dire que c'est un processus non négatif progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t^W)_{0 \leq t \leq T}$ et presque sûrement intégrable sur l'intervalle $[0, T]$

$$\int_0^T C_t dt < \infty \quad p.s.$$

L'intégrale $\int_0^t C_s ds$ de ce processus représente le montant consommé sur l'intervalle $[0, T]$.

Autofinancement avec consommation

Définition 3.3.2 Une stratégie financière $(H_t = (\psi_t, \varphi_t)_{t \in [0, T]})$ avec une consommation $(C_t)_{0 \leq t \leq T}$ est dite autofinancée (avec consommation) si le processus richesse correspondant vérifie l'équation stochastique suivante :

$$X_t = x + \int_0^t \psi_s dB_s + \int_0^t \varphi_s dS_s - \int_0^t C_s ds \quad (3.3)$$

où $X_0 = x > 0$ est la richesse initiale.

Nous allons travailler avec les quantités relatives par rapport au processus de richesse. On définit π_t et v_t par

$$\pi_t = \frac{\varphi_t S(t)}{X_t} \quad \text{et} \quad v_t = \frac{C_t}{X_t},$$

où $(\pi_t)_{t \geq 0}$ et $(v_t)_{t \geq 0}$ sont \mathcal{F}_t^W -progressivement mesurables et pour tout $T > 0$ fixé

$$\|\pi\|_T^2 = \int_0^T |\pi_t|^2 dt < \infty \quad p.s.$$

En tenant compte de ces définitions, nous réécrivons l'équation pour X_t comme

$$dX_t = X_t(r_t + y_t\theta_t - v_t)dt + X_t y_t dW_t, \quad t > 0, \quad X_0 = x > 0. \quad (3.4)$$

Où

$$y_t = \sigma_t \pi_t \quad \text{et} \quad \theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t).$$

On fait l'hypothèse que

$$\|y\|_T^2 = \int_0^T |y|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \|\theta\|_T^2 = \int_0^T |\theta|^2 dt < \infty.$$

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses et les définitions précédentes, l'équation différentielle stochastique (3.4) admet une unique solution forte définie par*

$$X_t = x \exp(R_t + (y, \theta)_t - V_t) \xi_t(y), \quad (3.5)$$

où

$$R_t = \int_0^t r_s ds, \quad (y, \theta)_t = \int_0^t y_s \theta_s ds \quad \text{et} \quad V_t = \int_0^t v_s ds.$$

Preuve : Appliquons la formule d'Itô à la fonction $f : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 définie par :

$$f(x) = \ln x.$$

Donc, si on pose :

$$K_s = X_s(r_s + y_s + \theta_s - V_s)$$

et

$$H_s = X_s y_s$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle_s &= \int_0^t H_s^2 ds \\ &= \int_0^t X_s^2 y_s^2 ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^t f'(X_s) dX_s &= \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s \\
&= \int_0^t \frac{1}{X_s} X_s (r_s + y_s \theta_s - v_s) ds + \int_0^t \frac{1}{X_s} X_s y_s dW_s \\
&= \int_0^t r_s + y_s \theta_s - v_s ds + \int_0^t y_s dW_s \\
&= R_t + (y, \theta)_t - V_t + \int_0^t y_s dW_s.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^t f''(X_s) d \langle X, X \rangle_s &= \int_0^t -\frac{1}{X_s^2} X_s^2 y_s^2 ds \\
&= -\int_0^t y_s^2 ds.
\end{aligned}$$

Et par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d \langle X, X \rangle_s \\
&= \ln X_0 + R_t + (y, \theta)_t - V_t + \int_0^t y_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t y_s^2 ds,
\end{aligned}$$

et comme

$$f(X_t) = \ln(X_t)$$

et on en utilisant l'exponentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 \exp[R_t + (y, \theta)_t - V_t] \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t y_s^2 ds\right) \\
&= x \exp\left(R_t + (y, \theta)_t - V_t\right) \times \xi(y).
\end{aligned}$$

3.4 Processus de contrôle

Décrivons maintenant l'ensemble des processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0}$ avec $\nu_t = (y_t, v_t)$.

Définition 3.4.1 *Un processus du contrôle $\nu = (\nu_t)_{t \geq 0} = ((y_t, v_t))_{t \geq 0}$ est dit admissible s'il est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t^w)_{0 \leq t \leq T}$, à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\|y\|_T < \infty \text{ et } \int_0^T \nu_t dt < \infty \text{ p.s.}$$

De plus on suppose que l'équation (3.6) a une solution unique forte presque sûrement positive sur l'intervalle $[0, T]$. Nous désignons par \mathcal{A} l'ensemble de tous les processus du contrôle.

Pour souligner qu'un processus richesse correspond à un processus du contrôle ν nous allons écrire X^ν .

3.5 Fonction de coût

On suppose que l'investisseur veut optimiser l'utilité attendue de la consommation sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et de la richesse X_T^ν à la fin de l'investissement horizon. Donc, pour une richesse initial $x > 0$ et pour un processus du contrôle $(\nu_t)_{t \geq 0}$ dans \mathcal{A} , nous introduisons la fonction objectif

$$J(x, \nu) = \mathbb{E}_x \left(\int_0^T U(c_t) dt + h(X_T^\nu) \right).$$

où \mathbb{E}_x est l'espérance conditionnelle sachant que $X_0^\nu = x$, et U, h sont des fonctions d'utilités (U est appelée la fonction d'utilité et h la fonction d'héritage). Pour les deux fonctions d'utilités nous choisissons

$$U : z \mapsto U(z) = z^{\gamma_1} \quad \text{et} \quad h : z \mapsto h(z) = z^{\gamma_2}$$

avec

$$0 < \gamma_1 < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \gamma_2 < 1 \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

et pour cela, on obtient

$$J(x, \nu) = \mathbb{E}_x \int_0^T (c_t^{\gamma_1}) dt + (X_T^\nu)^{\gamma_2}. \quad (3.6)$$

Remarque :

Les fonctions U et h sont des fonctions continues, concaves et croissantes.

- La concavité : pour formaliser l'aversion pour le risque de l'individu.
- et la croissance : ce qui exprime l'amour de la richesse de l'individu.

3.6 Problème d'investissement et consommation optimale

Le but de l'investissement et de la consommation est de maximiser la fonction objectif, c'est-à-dire que on va résoudre à problème d'optimisation stochastique suivant :

$$\max_{\nu \in \mathcal{A}} J(x, \nu). \quad (3.7)$$

Pour résoudre ce problème, on va traité deux régimes avec des fonctions de coût (3.6) suivant les valeurs de γ_1 et γ_2 , la première est dans le cas où $\gamma_1 \neq \gamma_2$ et l'autre $\gamma_1 = \gamma_2$.

Problème 1 :

Cas où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ avec : $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Pour la solution de ce problème, on définit d'abord les fonctions suivantes :

$$A_1(t) = \gamma_1^{q_1} \int_t^T \exp^{\int_t^s \beta_1(u) du} ds$$

et

$$A_2(t) = \gamma_2^{q_2} \exp^{\int_t^T \beta_2(u) du}$$

où

$$q_i = (1 - \gamma_i)^{-1}$$

et

$$\beta_i(t) = (q_i - 1)(r_t + \frac{q_i}{2}|\theta_t|^2). \quad (3.8)$$

Ensuite, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$, nous définissons la fonction $g(t, x) > 0$ par

$$A_1(t)g^{-q_1}(t, x) + A_2(t)g^{-q_2}(t, x) = x.$$

De plus, posons

$$p(t, x) = q_1 A_1(t)g^{-q_1}(t, x) + q_2 A_2(t)g^{-q_2}(t, x).$$

Et la solution est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.6.1 [16] *Considérons le problème (3.7) pour $U(x) = x^{\gamma_1}$ et $h(x) = x^{\gamma_2}$ et on suppose que $\gamma_1 \in]0, 1[$ et $\gamma_2 \in]0, 1[$ avec $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Alors,*

– La valeur optimale de la fonction de coût $J(x, \nu)$ est donnée par :

$$\max_{\nu \in \mathcal{A}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = \frac{A_1(0)}{\gamma_1} g^{1-q_1}(0, x) + \frac{A_2(0)}{\gamma_2} g^{1-q_2}(0, x).$$

– Le contrôle optimale $\nu^* = (y^*, v^*)$ est à la forme suivante

$$y_t^* = \frac{p(t, X_t^*)}{X_t^*} \theta_t \quad \text{et} \quad v_t^* = (\gamma_1)^{q_1} \frac{g^{-q_1}(t, X_t^*)}{X_t^*}.$$

– Le processus richesse optimale $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie l'équation stochastique

$$dX_t^* = A^*(t, X_t^*) dt + (B^*(t, X_t^*))' dw_t$$

avec $X_0^* = x$,

$$A^*(t, x) = p(t, x)\theta_t$$

et

$$B^*(t, x) = r_t x + p(t, x)|\theta_t|^2 - \gamma_1^{q_1} g^{-q_1}(t, x).$$

Démonstration :

Pour montrer ce théorème on va utiliser le théorème (2.3.1) pour l'équation différentielle stochastique (3.4). Fixons d'abord $\vartheta = (y, v)$ avec $y \in \mathbb{R}$ et $v \in [0, \infty)$. Alors les coefficients dans le modèle sont définis comme

$$A(t, x, \vartheta) = x(r_t + y' \theta_t - v_t) \text{ et } B(t, x, \vartheta) = xy.$$

De plus, la fonction objectif est donnée par les fonctions suivantes

$$U(t, x, \vartheta) = v^{\gamma_1} x^{\gamma_1} \text{ et } h(x) = x^{\gamma_2}.$$

Pour vérifier les hypothèses H_1 , H_4 calculons l'Hamiltonien (2.15) dans notre cas. On a

$$H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = \sup_{\vartheta \in \mathbb{R} \times [0, \infty)} H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta),$$

où

$$H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta) = (r_t + y' \theta_t) x D_x V(t, x) + \frac{1}{2} x^2 |y|^2 D_x^2 V(t, x) + v^{\gamma_1} x^{\gamma_1} - x v D_x V(t, x).$$

On rappelle que :

$$q_i = (1 - \gamma_i)^{-1}.$$

Donc pour

$$D_x^2 V(t, x) \leq 0$$

on obtient

$$\begin{aligned}
H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) &= H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta_0) \\
&= r_t D_x V(t, x) + \frac{(D_x)^2 V(t, x) |\theta_t|^2}{2 |D_x^2 V(t, x)|} + \frac{1}{q_1} \left(\frac{\gamma_1}{D_x v(t, x)} \right)^{q_1 - 1},
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= \vartheta_0 \left((t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) \right) \\
&= \left(y_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)), v_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) \right) \\
&= (y_0, v_0)
\end{aligned}$$

avec

$$y_0 = \frac{D_x V(t, x)}{x |D_x^2 V(t, x)|} \theta_t,$$

et

$$v_0 = \left(\frac{\gamma_1}{D_x V(t, x)} \right)^{q_1} x^{-1}.$$

Maintenant il faut résoudre le problème (2.16) qui la forme suivante pour notre cas

$$\begin{cases} V_t(t, x) + r_t x D_x V(t, x) + \frac{D_x^2 V(t, x) |\theta_t|^2}{2 |D_x^2 V(t, x)|} + \frac{1}{q_1} \left(\frac{\gamma_1}{D_x V(t, x)} \right)^{q_1 - 1} = 0 \\ V(T, x) = x^{\gamma_2}. \end{cases}$$

On désigne par $\Gamma \subseteq [0, T]$ l'ensemble des points de continuité des fonctions $\beta_1(\cdot)$ et $\beta_2(\cdot)$ définies dans (3.8). En tenant compte du fait que tous les coefficients dans le modèle (3.1) sont càdlàg on obtient que la mesure de Lebesgue de $\Gamma \wedge (\Gamma) = T$. La solution de ce problème pour $t \in \Gamma$ et $x > 0$ est donnée par la fonction

$$V(t, x) = \frac{A_1(t)}{\gamma_1} g^{1-q_1}(t, x) + \frac{A_2(t)}{\gamma_2} g^{1-q_2}(t, x),$$

qui remplit la condition (2.18) avec $V_* = 0$. Par conséquent, on a

$$H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta^*(t, x)),$$

où $\vartheta^*(t, x) = (y^*(t, x), v^*(t, x))$ avec :

$$y^*(t, x) = \frac{p(t, x)}{x} \theta_t,$$

et

$$v^*(t, x) = \left(\frac{\gamma_1}{g(t, x)} \right)^{q_1} x^{-1}.$$

On a vérifié les hypothèses H_1 , H_4 pour ce cas. Donc le Théorème (2.3.1) implique le Théorème (3.6.1).

Problème 2 :

Cas où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ avec : $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Pour la solution de ce problème, on définit d'abord les fonctions suivantes :

$$A_1(t) = \gamma^q \int_t^T \exp^{\int_t^s \beta(u) du} ds$$

et

$$A_2(t) = \gamma^q \exp^{\int_t^T \beta(u) du}.$$

Où

$$q = (1 - \gamma)^{-1} \quad \text{et} \quad \beta(t) = (q - 1)(r_t + \frac{q}{2} |\theta_t|^2).$$

En suite, pour tout $0 \leq t \leq T$ et $x > 0$, nous définissons la fonction $g(t, x) > 0$ par :

$$A_1(t)g^{-q}(t, x) + A_2(t)g^{-q}(t, x) = x.$$

De plus, posons

$$p(t, x) = qA_1(t)g^{-q}(t, x) + qA_2(t)g^{-q}(t, x).$$

Et la solution est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.1 [16] *On considère le problème (3.7) et on suppose $U(x) = h(x) = x^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$. Alors,*

- *La valeur optimale de la fonction de coût $J(x, \nu)$ dans (3.7) est donnée par*

$$J^*(x) = \max_{\nu \in \mathcal{A}} J(x, \nu) = J(x, \nu^*) = x^\gamma (\|\tilde{g}_\gamma\|_{q,T}^q + \tilde{g}_\gamma^q(T))^{\frac{1}{q}},$$

- *Le processus du contrôle optimale $\nu^* = (y^*, v^*)$ pour $0 \leq t \leq T$ est défini par*

$$y_t^* = \frac{\theta_t}{1 - \gamma}$$

et

$$v_t^* = \frac{\tilde{g}_\gamma^q(t)}{\tilde{g}_\gamma^q(T) + \int_t^T \tilde{g}_\gamma^q(s) ds}.$$

Avec

$$\tilde{g}_\gamma(t) = \exp(\gamma R_t + \frac{q-1}{2} \|\theta\|_t^2).$$

- *Le processus richesse optimale $(X_t^*)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie l'équation stochastique*

$$dX_t^* = X_t^* \left(r_t - v_t^* + \frac{|\theta_t|^2}{1 - \gamma} \right) dt + \frac{X_t^*}{1 - \gamma} \theta_t' d\omega_t$$

avec $X_0^* = x$.

Démonstration :

Maintenant on considère le problème (3.7) pour $U(x) = h(x) = x^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$. On va utiliser le théorème (2.3.1) pour l'équation différentielle stochastique (3.4) Fixons d'abord $\vartheta = (y, v)$ avec $y \in \mathbb{R}^d$ est $v \in [0, \infty)$. Alors les coefficients dans modèle (2.12) sont définies comme :

$$A(t, x, \vartheta) = x(r_t + y' \theta_t - v) \quad \text{et} \quad B(t, x, \vartheta) = xy.$$

De plus, la fonction objectif est donnée par les fonctions suivantes

$$U(t, x, \vartheta) = x^\gamma v^\gamma \quad \text{et} \quad h(x) = x^\gamma.$$

Pour vérifier les hypothèses H_1, H_4 calculons l'Hamiltonien (2.15) dans notre cas on a :

$$H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = \sup_{\vartheta \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)} H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta),$$

où

$$H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), V) = (r_t + y' \theta_t) x D_x V(t, x) + \frac{1}{2} x^2 |y|^2 D_x^2 V(t, x) + v^\gamma x^\gamma - x v D_x V(t, x)$$

Donc pour :

$$D_x^2 V(t, x) \leq 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) &= H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta_0) \\ &= r_t x D_x V(t, x) + \frac{(D_x V(t, x))^2 |\theta_t|^2}{2 |D_x^2 V(t, x)|} + \frac{1}{q} \left(\frac{\gamma}{D_x V(t, x)} \right)^{q-1} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \vartheta_0 &= \vartheta_0 \left((t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) \right) \\ &= \left(y_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)), v_0(t, x, D_x V(t, x)) \right) \\ &= (y_0, v_0). \end{aligned}$$

avec

$$y_0 = \frac{D_x V(t, x)}{x |D_x^2 V(t, x)|} \theta_t \quad \text{et} \quad v_0 = \left(\frac{\gamma}{D_x V(t, x)} \right)^q x^{-1}.$$

Maintenant il faut résoudre le problème (2.16) qui a la forme suivante pour notre cas

$$\begin{cases} D_t V(t, x) + r_t x D_x V(t, x) + \frac{(D_x V(t, x))^2 |\theta_t|^2}{2|D_x^2 V(t, x)|} + \frac{1}{q} \left(\frac{\gamma}{D_x V(t, x)} \right)^{q-1} = 0, \\ V(T, x) = x^\gamma. \end{cases}$$

On désigne par $\Gamma \subseteq [0, T]$ l'ensemble des points de continuité des fonctions $\beta(\cdot)$ définies dans (3.8). En tenant compte de fait que tous les coefficients dans le modèle (3.1) sont càdlàg on obtient que la mesure de Lebesgue de $\Gamma \cap \Gamma = T$. La solution de ce problème pour $t \in \Gamma$ et $x > 0$ est donnée par la fonction

$$V(t, x) = \frac{A_1(t)}{\gamma} g^{1-q}(t, x) + \frac{A_1(t)}{\gamma} g^{1-q}(t, x),$$

qui remplit la condition (2.18) avec $V_* = 0$. Par conséquent, on a

$$H(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x)) = H_0(t, x, D_x V(t, x), D_x^2 V(t, x), \vartheta^*(t, x)),$$

où

$$\vartheta^*(t, x) = (y^*(t, x), v^*(t, x))$$

avec :

$$y^* = \frac{\theta_t}{1 - \gamma}$$

et

$$v_t^* = \frac{\tilde{g}_\gamma^q(t)}{\tilde{g}_\gamma^q(T) + \int_t^T \tilde{g}_\gamma^q(s) ds}.$$

On a vérifié les hypothèses H_1, H_2 pour ce cas. Donc le théorème (2.3.1) implique le corollaire (3.6.1)

Conclusion

Nous venons d'aborder dans le cadre de notre travail la notion d'optimisation stochastique en temps continu. Après avoir donné quelques notions de base sur le calcul stochastique, notamment le mouvement Brownien, processus et formule d'Itô les équations différentielles, nous avons donné une approche de résolution qui, en fait la programmation dynamique, cette méthode fait recours à la notion d'équations d'Hamilton Jacobi Bellman (HJB). Ces résultat trouve des applications diverses en économie, finance, assurance et beaucoup d'autres. On a illustré ces résultats pour les appliquer au modèle financier tels que la résolution d' un problème d'investissement et de consommation optimale a temps continue dans un marché financier de type de Black-scholes a coefficients non aléatoire (déterministe).

Comme travail au future on cherche à avoir les application de la programmation dynamique d'Hamilton Jacobi Bellman, pour la résolution des problèmes d'investissement et consommation optimale a temps continue dans un marché financier de Black-Scholes a coefficients aléatoire. Il convient de souligner qu'il existe dans la littérature d'autres approches de résolution telle que le principe du maximum de Pontriaguine, et celle par les équations de Riccati.

Bibliographie

- [1] Bellman R. Dynamic programming, *Princeton University Press*. 1957
- [2] Bensoussan A. et J.L, Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique, Dunod. *L Lions* 1978
- [3] Benchaabane Abbes, Contrôle Optimal Stochastique avec Saut Application à la Finance : Problème d'investissement à volatilité stochastique, Année 2013
- [4] Cox J. et C.F. Hauang " *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion*", journal of Economic Theory, 49,33-83.(1989)
- [5] Davis M. Chapman and Hall. Linear estimation and stochastic control, 1977
- [6] Demange G. et Rochet J-C. Méthodes Mathématiques de la finance, *Economica*, 2005
- [7] Fleming W. et R.Rishel. Deterministic and stochastic optimal control, *Springer Verlag*. 1975
- [8] Fleming W. et M.Soner. Controlled Markov processes, *Springer Verlag*. 1993
- [9] Friedman : Stochastic differential equations and applications. *Academic Press, New York, 1975*.
- [10] Huyên Pham, Optimisation et contrôle Stochastique appliqués à la finance, *Université paris*.2007.
- [11] Huyên Pham. Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance, volume 61 of Mathématiques Applications (Berlin) [Mathematics Applications]. *Springer, Berlin*, 2007.
- [12] Karatzas, I. and Shreve, S.E. Methods of Mathematical Finance. *Springer, Berlin*, 2005.

-
- [13] Kluppelberg C. and Pergamenshikov, S. M. Optimal consumption and investment with bounded Capital-at-Risk for power utility functions-Munich *University of Technology*. 2007.
- [14] Liptser, R.S., A.N. :Statistics of Random processes I. General Theory. *Springer*, New York 1977
- [15] M.J. Harrison et S.R. Pliska : A *stochastic calculus model of continuous trading : complete markets*. *Stochastic Processes and Their Applications*, 15 :313- 316,1983.
- [16] Hal, *Optimal consumption and investment With bounded downside risk for power utility functions*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00454072>, submitted on 11 Feb 2010.
- [17] Lions P.L. " *optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations*", Comm. P.D.E, 8, par I, 1101-1134, par II, 1229-1276. (1983)
- [18] Mireille Bossy, Introduction à la modélisation financière en temps continue, 16 novembre 2013
- [19] N. U. Ahmed, Dynamic systems and control with applications, World Sci. Publ. *Hackensack, NJ*, 2006.
- [20] Pandry Wilson Sob Tchuakem, optimisation Stochastique et Application financière, université du québec a montreal, octobre 2010.
- [21] Yong J. et X.Y. Zhou. Stochastic controls, Hamiltonien systems and HJB equation, *Springer Verlage*. 2008