République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année univ.: 2016/2017

Analyse Stochastique du Mouvement Brownien Fractionnaire Mixte

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastiques, Statistique des Processus et Applications

par

BOUANANI **H**afida1993 [1]

Sous la direction de

Pr.A.KANDOUCI

Soutenu le 22 mai 2017 devant le jury composé de

Mlle. HACHEMI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Mr. KANDOUCI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur
Mme. AIT OUALI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mr. MIMOUNE	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : fifibouanani@hotmail.fr

Remerciements

En Préambule de ce mémoire, je remercie Dieu qui ma donné le souffle pour la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, Professeur *A.KANDOUCI* pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier tous les membres de jury ;
Mlle. ***HACHEMI Nawel*** de m'avoir honorée en acceptant de présider le jury, **Mme.** ***AIT OUALI Nadia*** et **Mr.** ***MIMOUNE Laouni*** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques.

J'exprime mes remerciements à tous mes enseignants du département de Mathématiques qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, ainsi que le personnel de l'administration.

Je suis très reconnaissante aux responsables du laboratoire des Modèles Stochastiques, Statistique et Applications,
pour leur accueil chaleureux et de nous avoir donné la chance de travailler dans un environnements scientifique
endroit plein de discussions et échange de connaissances, et pour les conseils stimulants que j'ai eu l'honneur de recevoir de leur part.

J'adresse mes plus sincères remerciements à ma mère qui m'a toujours entouré et motivé à sans cesse devenir meilleure, ma grand mère, mes tantes, mon oncle, cousins et cousines maternels ; mes amis et amies qui n'ont cessé de m'encourager.

Tous ceux qui m'ont aidé ou soutenu de toute manière que ce soit.

Merci à vous tous

DÉDICACES

Je dédie ce travail :

A ma très chère mère Fatima
Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.
Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.
Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu m'a données depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.
Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserve et t'accorde la santé, longue vie et bonheur.

A la grande dame qui a tant sacrifié pour nous ; ma grand mère maternelle.

Une spéciale dédicace à mon cher oncle *Bouahfs* et sa famille, à mes chères tantes maternelles, à mes chères et adorables cousines maternelles et leurs familles, et à mes chères sœurs *Fatima* la douce et *Maroua* l'aimable ;
En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

A tous les membres de ma famille maternelle, petits et grands,
veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

Une dédicace spéciale à mon adorable amie *FEZZA Kheira* qui m'a encouragé le long de mon parcours universitaire.
A tous mes collègues de la promotion de Master A.S.S.P.A 2017.

A mes amis, mes amies et mes collègues : *T.khaoula*, *A.Khadidja*, *B.Salima*, *B.Amèl*, *B.Khalida*, *I.Soumia*, *H.Halima*, *Latifa*, *A.Mahdi*, *B.Taher* et je n'oublie pas mon collègue *K.Abdelmalek*.

Table des matières

Introduction

Le calcul stochastique est une branche à la croisée de probabilités et de l'analyse mathématiques qui s'occupe des phénomènes aléatoires dépendant du temps. Le cœur des outils probabilistes réside dans le calcul stochastique, qui n'est rien autre qu'un calcul différentiel, mais adapté aux trajectoires des processus stochastiques qui ne sont pas différentiables. Le calcul différentiel présente une théorie de l'intégration d'un processus stochastique (intégrant) par rapport à un autre (intégrateur), afin de résoudre des équations différentielles stochastiques qui servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Le processus le plus connu et largement utilisé qui effectue ce calcul est le mouvement Brownien, il est utilisé en mathématiques financières, en économie(par exemple en évolution des prix des actions et des taux d'intérêt obligataires), en mécanique quantique, en traitement du signal, en chimie, en météorologie, et même en musique.
La théorie de l'intégration et des équations différentielles stochastiques a été développée par : *N. Wiener*([45]), en 1923, *K.Iô* 1942, 1944, 1951 ([16, 17, 18]), *P.Lévy* ([34]), en 1948, *A.N. Kolmogorov* [27], en 1931, *Willy Feller*([44]), en 1936, ... La liste des articles et livres connexes est très longue et nous ne le mentionnons pas ici en entier. La théorie la plus connue du calcul stochastique est celle de*K.Itô*, le père de la théorie stochastique de l'intégration.
Pendant plusieurs décennies, le meilleur modèle utiliser pour mettre en œuvre de nombreuses idées est la semimartingales, le calcul stochastique pour les semimartingales et la théorie générale des processus stochastiques sont étroitement liés à la théorie de l'intégration stochastique et les équations différentielles stochastiques. Cependant dans les années récentes, il y a eu un intérêt considérable à étudier le mouvement Brownien fractionnaire en raison de ses propriétés simples et de certaines applications dans divers domaines scientifiques comme la télécommunication, la turbulence, la finance, ..., et afin de faire de meilleures applications du mouvement Brownien fractionnaire en finance, de nombreux auteurs ont proposé d'utiliser le mouvement Brownien fractionnaire mixte comme modèle stochastique. De plus, le mouvement Brownien fractionnaire mixte a été suggéré de remplacer le mouvement Brownien en tant que processus de conduite dans la modélisation de nombreux phénomènes réels. Le mouvement Brownien fractionnaire mixte a été introduit par

Patrick Cheridito ([35]) en 2001, défini comme une combinaison linéaire entre le mouvement Brownien et le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (0,1)$. Ce processus n'est pas une semimartingale si $H \in (0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}\cup]\frac{3}{4},1)$, et il n'est pas aussi un processus de *Markov*. Comme ce processus n'est pas une semimartingale, on ne peut pas appliquer la théorie de calcul stochastique classique développée par *K.Itô*. Pour définir une intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire, on est amené à la décomposer en deux parties : une semimartingale (le mouvement Brownien), et la partie non-semimartingale (mouvement Brownien fractionnaire). L'intégrale par rapport au mouvement Brownien est traité par le calcul stochastique classique et pour définir une intégrale par rapport au mouvement Brownien fractionnaire, différentes approches ont été proposées ; le calcul stochastique au sens de trajectoires qui est basé sur l'intégrale de *Lebesgue-Stieltjes* et l'intégrale de *L.C. Young* ([41]) et une autre approche donnée par *T. Lyons* ([41]) en 1998 ; Le calcul de *Malliavin*, il est encore connu par le calcul des variations stochastiques ([8, 29, 37]), et le calcul de Wick ([43]).

L'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire mixte a été considéré généralement dans le cas où le paramètre $H \in (\frac{1}{2},1)$. La Solvabilité de ces équations différentielles stochastiques a été prouvée en 2002 par *K.Kubilius* ([26]) pour des coefficients indépendants du temps et un drift nul, en 2008, par *Yuliya.M* ([46]) pour $H \in (\frac{3}{4},1)$ et des coefficients bornés et aussi en 2008, par *D.Nualart* et *J.Gurra* pour tout $H > \frac{1}{2}$. En 2011, *Yuliya S. Mishurae* et *M.SHEVCHENKO* ([47]) ont généralisé ces résultats, en prouvant la solvabilité de ces équations différentielles stochastiques pour tout $H > \frac{1}{2}$ avec la possibilité de la dépendance entre le mouvement Brownien et le mouvement Brownien fractionnaire.

Le travail réalisé dans ce mémoire a pour objectif d'étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire mixte.

J'ai partagé mon manuscrit en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, des notions de base sont mentionnées, un petit rappel sur le mouvement Brownien fractionnaire et ses propriétés est présenté, en se basant sur ([23, 21]). Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à deux processus qui sont des extensions du mouvement Brownien fractionnaire ; le mouvement Brownien fractionnaire mixte et le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé, on étudie leurs propriétés en faisant appel aux papiers de *Patrick Cheridito* ([35]), *Christoph Thäle* ([5]) et *Herry Pribawanto* ([14]), et on termine le chapitre par l'étude de la représentation de ces deux processus dans l'espace de bruit blanc. Le troisième chapitre est dédié à l'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire mixte, en commençant par un petit rappel sur le calcul stochastique , puis on étudie des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire mixte sous différentes conditions sur les coefficients et on termine le chapitre par une synthèse sur les résultats de *Yuliya S. Mishurae* et *Georgiy M.SHEVCHENKO* ([47]). Enfin, quelques exemples d'applications du mouvement Brownien fractionnaire mixte en finance feront l'objet du quatrième chapitre.

Chapitre 1

Mouvement Brownien Fractionnaire

1.1 Des notions de base

1.1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une famille de variables aléatoires indexées par un ensemble de temps $\mathbb{T}$, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ξ) appelé espace d'états du processus $X : (t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$.*
En général $\mathbb{T} = [0, T] = [0, \infty] = \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$.
Pour chaque ω la fonction $t \longmapsto X_t(\omega)$ s'appelle la trajectoire du processus.

Définition 1.1.2. *Etant donné un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$, les lois finie-dimensionnelles de X sont les lois de tous les vecteurs $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des lois fini-dimensionnelles caractérise la loi $\mathbb{P}_X$ du processus X*

Définition 1.1.3. *Soit X et Y deux processus stochastiques*
- *On dira que Y est une version(modification) de X si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.*
- *Deux processus sont dit indistinguables si $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}) = 1$*

Dans la suite, quand nous écrirons $X \stackrel{\mathfrak{L}}{=} Y$ égalité en loi de deux processus nous signifierons l'égalité de toutes les loi fini-dimensionnelles de X et de Y.

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{\mathfrak{L}}{=} (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$$

pour tous $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$

Remarque 1.1.1. *Si X et Y sont indistinguables, alors X est une modification de Y mais la réciproque est fausse.*

Définition 1.1.4. *Un processus est dit :*

- *à accroissements indépendants si pour tous* $0 < t_1 < \ldots < t_n$*, les variables aléatoires* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
- *à accroissements stationnaires si la loi des accroissements* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* $h > 0$.

Définition 1.1.5. *On dit qu'un processus* $(X_t)_{t \geq 0}$ *est à variation finie sur* $[0, T]$ *si :*

$$\sup_{(t_i)} \sum_i \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty.$$

Et à variation quadratique finie sur $[0, T]$ *si :*

$$\sup_{(t_i)} \sum_i \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right|^2 < \infty.$$

La borne supérieure est prise sur la famille de subdivisions $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ *de* $[0, T]$.

Définition 1.1.6. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité. Une filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *sur cet espace est une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.7. *Une filtration est dite :*

- *Complète si les ensembles* $\mathbb{P}-$*négligeables de* $\mathcal{F}_\infty$ *sont dans* $\mathcal{F}_0$ *et si l'espace de probabilité est complet ;*
- *Continue à droite si* $\mathcal{F}_{t_+} = \mathcal{F}_t, \quad \forall t > 0$ *où* $\forall t > 0, \mathcal{F}_{t_+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$;
- *Satisfait les conditions habituelles, si elle est continue à droite et complète.*

On note $\bar{\mathbb{F}} = (\bar{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ la plus petite filtration qui contient $\mathbb{F}$ est satisfait les conditions habituelles.

Remarque 1.1.2. *On considère que toutes filtration utilisée dans la suite, est une filtration qui satisfait les conditions habituelles.*

Définition 1.1.8. *Un processus est dit mesurable si l'application*

$$(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

définie sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *muni de la tribu* $\mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *est mesurable.*
Un processus est dit adapté si pour tout $t \geq 0, X_t$ *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable. Le processus* X *est dit progressif si, pour tout* $t \geq 0$ *l'application*

$$(t, \omega) \longrightarrow X_t(\omega)$$

est mesurable sur $[0, T] \times \Omega$ *muni de la tribu* $\mathbb{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_t$*, où* $\mathbb{B}([0, T])$ *est la tribu de Borel.*

Définition 1.1.9. *X_t et Y_t deux processus définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont dit indépendants si les sous tribus $\mathcal{F}_X = \sigma\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ et $\mathcal{F}_Y = \sigma\{Y_t, t \in \mathbb{T}\}$ engendrées par les X_t, respectivement les Y_t, sont indépendantes relativement à $\mathbb{P}$.*

Définition 1.1.10. *Un processus X est une $\mathbb{F}$-martingale si :*

1. *X_t est un processus $\mathbb{F}$-mesurable.*
2. *$\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$, pour tout $t \geq 0$.*
3. *Pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s \quad \mathbb{P} - p.s.$*

Définition 1.1.11. *On note $\mathbb{H}^2$ l'espace des martingales continues bornées et de carré intégrable ; On définit un produit scalaire sur $\mathbb{H}^2$ par $(M, N) = \mathbb{E}(< M, N >_\infty)$. L'espace L^2 est l'espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(H, K) = \mathbb{E}(\int_0^\infty H_s K_s d < M, M > s), \qquad H_t, K_t \text{ deux processus progressifs }, M \in \mathbb{H}^2.$$

1.1.2 Régularité des trajectoires

Définition 1.1.12. *Un processus stochastique X est continu (respectivement continu à droite, continu à gauche) si $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire*

$$t \longmapsto X_t$$

est continue (respectivement continue à droite, continue à gauche).

Définition 1.1.13. *On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^d$ est dite $\gamma-$Höldérienne s'il existe $C < +\infty$ tel que :*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq C \| x - y \|^\gamma$$

où $\| \, . \, \|$ désigne la norme ambiante de $\mathbb{R}^p$ ou de $\mathbb{R}^d$.

Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un processus stochastique ait une modification continue avec des trajectoires Höldériennes.

Théorème 1.1. *[23](**Kolmogorov**) Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$, si un processus stochastique X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$satisfait*

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^\alpha) \leq \gamma \, |t - s|^\beta$$

alors il existe une version continue $\tilde{X}$ de X.
En fait, les trajectoires de $\tilde{X}$ sont Höldériennes pour tout $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$.

1.1.3 Autosimilarité

Définition 1.1.14. *Un processus X est autosimilaire si pour tout $\alpha > 0, \exists \beta > 0$*

$$X_{\alpha t} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \beta X_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

au sens de l'égalité des lois fini-dimensionnelles.

Remarque 1.1.3. *Pour $\beta = \alpha^H$, on dit que X est autosimilaire d'indice $0 < H < 1$, et on écrit : $\forall \alpha > 0$*

$$X_{\alpha t} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \alpha^H X_t, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

H est le coefficient d'autosimilarité où bien le paramètre de Hurst.

Remarque 1.1.4. *Un processus autosimilaire ne peut pas être en plus stationnaire car on aurait*

$$X_t \stackrel{\mathfrak{L}}{=} X_{\alpha t} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} \alpha^H X_t$$

On a en particulier $\mathbb{E}(X_t) = \alpha^H \mathbb{E}(X_t)$, ce qui donne une contradiction quand on fait tendre $\alpha^H \longrightarrow +\infty, (H > 0)$.

Proposition 1.1.1. *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus autosimilaire à accroissements stationnaires tel que $\mathbb{P}(X_1 \neq 0) > 0$. On suppose que $\mathbb{E}(|X_1|^\gamma) < \infty$ alors*

$$\begin{cases} 0 < H < \frac{1}{\gamma}, & si\ 0 < \gamma < 1 \\ 0 < H \leq 1, & si\ \gamma \geq 1 \end{cases}$$

Cette propriété montre qu'un changement d'échelle dans le temps est équivalent (en loi) à un changement d'échelle en espace i.e. il s'agit d'une égalité en loi et pas en trajectoire.

1.1.4 Espace de distributions

Définition 1.1.15. *Une fonction test φ est une fonction indéfiniment dérivable, nulle hors d'un intervalle borné (on dit aussi que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support borné). L'ensemble des fonctions test est noté $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Définition 1.1.16. *Soit (E, τ) un espace topologique et soit A un sous ensemble de E. On dit que x est un point adhérent à A s'il existe une suite de points de A qui converge vers x dans l'espace (E, τ) .*
On appelle Adhérence de A noté $\bar{A}$, l'ensemble des points de E qui sont adhérents à A.
Une partie K de E est dite dense dans E si $\bar{A} = E$.

Définition 1.1.17. *On appelle espace de Schwartz noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions régulières f telles que cette fonction et toutes ses dérivées convergent vers 0 plus vite que tout polynôme.*

Proposition 1.1.2. *[33] Les compacts de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont les fermés bornés.*

Proposition 1.1.3. *[33] L'espace de Schwartz est invariant par dérivation et par multiplication par un polynôme.*

Cette proposition veut dire que si f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $f^\alpha, \partial^\beta f$ sont aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemme 1.1.1. *[33]* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

Définition 1.1.18. *Le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est l'espace des distributions tempérées.*

Proposition 1.1.4. *[33] Une distribution à support compact est tempérée.*

1.1.5 Processus gaussien

Soit X une variable aléatoire gaussienne, d'espérance m et de variance σ^2.

Définition 1.1.19. *Un espace gaussien est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formé de variables gaussiennes.*

Par exemple si $X = (X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$, alors l'espace vectoriel engendré par $\{X_1, \ldots, X_d\}$ est un espace gaussien.
La proposition suivante indique que l'espace gaussien est un espace fermé.

Proposition 1.1.5. *[23] Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus gaussien 1.1.20, si X_t converge en probabilité vers X, alors X est aussi une variable aléatoire gaussienne.*

Définition 1.1.20. *On dit qu'un processus stochastique X est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1 X_{t_1} + \ldots + a_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne[1] (Pour tout $n \in \mathbb{N}; t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.)*
Toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus gaussien sont connues dés qu'on se donne la fonction moyenne $m = \mathbb{E}(X_t)$ et l'opérateur de covariance $r = Cov(X_t, X_s)$.

Théorème 1.2. *[21] Soit r une fonction symétrique de type positif sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, il existe alors un processus gaussien dont la fonction de covariance est Σ.*

Proposition 1.1.6. *[21] Un processus gaussien est stationnaire ssi $\mathbb{E}(X_t)$ est une constante.*

Exemples de processus gaussiens :

- ***Processus d'Ornstien-Uhlenbek :*** est le processus gaussien centré définit par : $U_t = e^{-\frac{1}{2}} B(e^t)$, où B un mouvement Brownien

1. Noté $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ et de densité $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$

– ***Bruit Blanc gaussien :*** Soient $(\mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré et $U = \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) < +\infty\}$; Le bruit blanc est un processus gaussien $(X_A)_{A\in\mathfrak{A}}$ indexé par l'ensemble des mesurables $\mathfrak{A}$.

Remarque 1.1.5. *Les processus gaussiens les plus célèbres sont le mouvement Brownien et le mouvement Brownien fractionnaire.*

1.1.6 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une grosse particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les petites molécules du fluide d'environnement. Il en résulte un mouvement très irrégulier de la grosse particule, qui a été décrite pour la première fois en 1827. la première étude mathématique rigoureuse est fait par *Nobert Wienner* en 1923 qui exhibe également une démonstration de l'existence du Brownien.

Définition 1.1.6.1. *Un mouvement Brownien standard réel (MB) est un processus gaussien centré, noté $B = (B_t)_{t\geq 0}$ à trajectoires continues de fonction de covariance :*

$$Cov(B_t, B_s) = \min(t, s) = t \wedge s.$$

On l'appelle aussi processus de Wienner.

Propriétés 1.1.1. *Le mouvement Brownien standard B a les propriétés suivantes :*
- $B_0 = 0$.
- *Pour tout $t \geq 0, B_t$ suit la loi normale centrée de variance t.*
- *Pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.*
- *Propriétés de symétrie :* *Le processus $(-B_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement Brownien.*
- *Stationnarité :* *Les accroissements du mouvement Brownien sont stationnaires i.e. $\forall s \leq t, B_t - B_s$ est une variable gaussienne centrée de variance $t - s$.*
- *Autosimilarité :* *Pour tout $a > 0$, $\{a^{\frac{1}{2}} B_{at}\}$ est un mouvement Brownien.*

1.1.6.1 Variation quadratique du mouvement Brownien

Proposition 1.1.7. *A1 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien, pour $t \geq 0$, pour toute suite de subdivision $\triangle_n$ de $[0, 1]$, tel que $\lim_{n\to\infty} |\triangle_n[0, 1]| = 0$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}}\right)^2 = t \qquad p.s.$$

1.1.6.2 Propriétés des trajectoires du Mouvement Brownien

Il est naturel d'étudier les propriétés des trajectoires Browniennes en tant que fonction du temps.

Théorème 1.3. *[22] Il existe une version de B telle que, pour tout $\gamma < \frac{1}{2}$, les trajectoires sont Höldériennes d'exposant γ sur tout intervalle compact.*

Corollaire 1.1. *Presque sûrement les trajectoires du MB sont Höldériennes dans* $[0, \frac{1}{2}[$.

Proposition 1.1.8. *[22] Presque sûrement, les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas différentiables .*

1.1.6.3 Propriété de *Markov*

La propriété de *Markov* du MB est utilisée sous la forme suivante : pour tout s, le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ définie par : $W_t = B_{t+s} - B_t$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Lemme 1.1.2. *Si X est un processus Markovien gaussien centré, alors pour tout $s < t < u$*

$$\mathbb{E}(X_t X_s)\mathbb{E}(X_t X_u) = \mathbb{E}(X_t X_t)\mathbb{E}(X_u X_s) \tag{1.1}$$

Preuve :

Si X est un processus *Markovien*, alors : $\forall s < t < u$

$$\mathbb{E}(X_u/X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_u/X_t) = \mathbb{E}(X_u) + \frac{Cov(X_t, X_u)}{Var(X_t)}(X_t - \mathbb{E}(X_t))$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_u/X_t) = \dfrac{Cov(X_t, X_u)}{Cov(X_t, X_t)}, \\ \\ \mathbb{E}(X_u/X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_u) + \theta_{uv}\theta_v^{-1}(v - \mathbb{E}(v)). \end{cases}$$

On pose $r_{tu} = Cov(X_t, X_u)$, où

$$v = \begin{pmatrix} X_t \\ X_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta_{uv} = \mathbb{E}(X_u v^t), \quad \theta_v = \mathbb{E}(v^t v).$$

On a

$$\theta_{uv} = (r_{ut} r_{us}) \quad \text{et} \quad \theta_v = \begin{pmatrix} r_{tt} & r_{ts} \\ r_{st} & r_{ss} \end{pmatrix}$$

$$\theta^{-1} v = \frac{1}{r_{tt} r_{ss} - r_{ts}^2} \begin{pmatrix} r_{ss} X_t - r_{ts} X_s \\ r_{tt} X_s - r_{st} X_t \end{pmatrix}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_u/X_t, X_s) &= \theta_{uv}\theta^{-1}v \\ &= \tfrac{1}{r_{tt}r_{ss}-r_{ts}^2}(r_{ut}r_{ss}X_t - r_{ut}r_{ts}X_s - r_{us}r_{st}X_t + r_{us}r_{tt}X_s)\end{aligned}.$$

Puisque, $\mathbb{E}(X_u/X_t, X_s) = \mathbb{E}(X_u/X_t)$, on a

$$\frac{r_{ut}}{r_{tt}}X_t = \frac{1}{r_{tt}r_{ss}-r_{ts}^2}(r_{ut}r_{ss}X_t - r_{ut}r_{ts}X_s - r_{us}r_{st}X_t + r_{us}r_{tt}X_s)$$

De plus,

$$X_t(r_{tt}r_{ut}r_{ss} - r_{tt}r_{ut}r_{ss} - r_{ut}r_{st}^2 + r_{tt}r_{us}r_{st}) + X_s(r_{tt}r_{ut}r_{st} - r_{tt}^2r_{us}) = 0$$

$$r_{ss}X_t(r_{tt}^2r_{us} - r_{ut}r_{st}) - r_{tt}X_s(r_{tt}r_{us} - r_{ut}r_{st}) = 0.$$

Ce qui donne

$$(r_{tt}r_{us} - r_{ut}r_{st})(r_{ss}X_t - r_{tt}X_s),$$

alors,

$$(r_{tt}r_{us} - r_{ut}r_{st}) = 0.$$

1.1.6.4 Le mouvement Brownien comme Martingale

La filtration naturelle du mouvement Brownien est $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t)$.

Proposition 1.1.9. *[23] Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien. Alors les processus suivants sont des $(\mathcal{F}_t^B)-$Martingales*
- $(B_t)_{t\geq 0}$
- $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$
- *Pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t})_{t\geq 0}$.

1.2 Mouvement Brownien Fractionnaire

Définition 1.2.0.2. *Le mouvement Brownien fractionnaire standard d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ est un processus gaussien continu centré noté B_t^H et est le seul prcossus vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Autosimilarité :*
   Pour tout $a > 0$, $B_{at}^H \overset{\mathfrak{L}}{=} a^H B_t^H$
2. *Accroissements stationnaires :*
   $\forall h > 0, (B_{t+h}^H - B_t^H)_{t\geq 0}$ *a la même loi que* $(B_t^H)_{t\geq 0}$

Autrement dit
Pour $0 < H \leq 1$, Le mouvement Brownien fractionnaire d'indice H, $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est le processus gaussien centré de fonction de covariance :

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

Remarque 1.2.0.1. *Le mouvement Brownien fractionnaire "non-standard" a la fonction de covariance suivante :*

$$Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{V^{(H)}}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

avec

$$V^{(H)} = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}$$

où $\Gamma(.)$ est La fonction gamma définie par : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.
Nous n'aurons jamais considéré un tel cas.

Remarque 1.2.1. *Soit $(B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire, pour $H = \frac{1}{2}$ on obtient le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$.*

Propriétés 1.2.1.
- *Le mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien de variance t^{2H} ;*
- *Le mouvement Brownien fractionnaire (B_t^H) de paramètre de Hurst $H\in(0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$ n'est pas un processus de Markov.*

1.3 Propriétés du Mouvement Brownien fractionnaire

1.3.1 La propriété de Hölder et la différentiabilité

Proposition 1.3.1. *pour $H \in (0,1)$, le mouvement Brownien fractionnaire (B^H) est γ-Höldérien pour tout $\gamma < H$.*

Preuve :

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}\right|\right)$$

Par l'application de la linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_s^{2H}\right|\right) &= \mathbb{E}\left(\left|B_t^{2H}\right|\right) - 2\mathbb{E}\left(\left|B_t^H B_s^H\right|\right) + \mathbb{E}\left(\left|B_s^{2H}\right|\right) \\
&= \left|t^{2H}\right| + \left|s^{2H}\right| - \left|t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}\right| \\
&= |t-s|^{2H}.
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}\left(\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right) = |t-s|^{2H}$$

On prend $\alpha = 2$, $d = 1$, d'où $\varepsilon = 2H$
d'après le théorème du *Kolmogorov*(1.1), B_t^H a une modification(version) $\tilde{B_t^H}$, dont les trajectoires sont Hölder-continue, de paramètre $\alpha < H$.

Proposition 1.3.2. *Pour tous $H \in (0,1)$, le mouvement Brownien fractionnaire B^H n'est pas différentiable. De plus pour tout $t_0 \in [0, \infty[$*

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to t_0}\left|\frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t-t_0}\right| = \infty\right) = 1.$$

Preuve :
Désignons que $\mathfrak{B}_{t,t_0} = \frac{B_t^H - B_{t_0}^H}{t-t_0}$.
Utilisons la propriété d'autosimilarité, on a :

$$\mathfrak{B}_{t,t_0} \stackrel{\mathfrak{L}}{=} (t-t_0)^{H-1} B_1^H$$

On définit $\mathfrak{U}(t,\omega) = \left\{\sup_{0\leq s\leq t}\left|\frac{B_s^H}{s}\right| > d\right\}$. Puis, pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui décroit vers 0,
on a : $\mathfrak{U}(t_{n+1},\omega) \subseteq \mathfrak{U}(t_n,\omega)$.
Ainsi

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty}\mathfrak{U}(t_n)) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\mathfrak{U}(t_n))$$

et

$$\mathbb{P}(\mathfrak{U}(t_n) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{B_s^{t_n}}{t_n}\right| > d\right) = \mathbb{P}(|B_1^H| > t_n^{1-H}d) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Propriétés 1.3.1. *Le mouvement Brwonien fractionnaire a aussi ces immédiates propriétés :*

1. $B_0^H = 0 \quad \mathbb{P}$*-p.s ;*
2. *Pour tous $t \geq 0, \mathbb{E}((B_t^H)^2) = t^{2H}$;*
3. *La variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire est équivalente p.s à n^{1-2H}.*

1.3.2 Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale

Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale continue s'il s'écrit sous la forme :

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \tag{1.2}$$

où M est une martingale (nulle en t = 0) et A est un processus à variation finie. Le mouvement Brownien fractionnaire n'est pas une semimartingale pour $H \neq \frac{1}{2}$,

en effet :
Soit $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique.
Considérons la subdivision $\pi = 0 = t_0 < \ldots < t_n = T$. Posons

$$S_p(X,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|^p$$

la p-variation de X dans l'intervalle $[0,T]$ est définie comme suit :

$$V_p(X,[0,T]) = \sup_{\pi} S_p(X,\pi)$$

où π est une subdivision finie de $[0,T]$.
L'indice de la p-variation d'un processus est défini par :

$$I(X,[0,T]) = \inf\{p > 0, V_p(X,[0,T]) < \infty\}$$

On affirme que

$$I(B^H,[0,T]) = \frac{1}{H}$$

En effet, considérons pour $p > 0$

$$Y_{n,p} = n^{pH-1} \sum_{i=1}^{n} \left|B^H_{\frac{i}{n}} - B^H_{\frac{i-1}{n}}\right|^P$$

Comme B^H a la propriété d'autosimilarité, la suite $(Y_{n,p})_{n\in\mathbb{N}}$ a la même distribution que

$$\tilde{Y}_{n,p} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left|B^H_i - B^H_{i-1}\right|^P$$

Par le théorème d'ergodicité $\tilde{Y}_{n,p}$ converges p.s vers $\mathbb{E}(|B^H_1|^P)$ dans L^1 quand n tend vers l'infinie ; Donc il converge aussi en probabilité vers $\mathbb{E}(|B^H_1|^P)$. il s'ensuit que :

$$V_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} \left|B^H_{\frac{i}{n}} - B^H_{\frac{i-1}{n}}\right|^P \xrightarrow[\mathbb{P}]{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{if} \quad pH > 1 \\ \infty, & \text{if} \quad pH < 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Donc on peut conclure que $I(B^H,[0,T]) = \frac{1}{H}$. Pour toute semimartingale X I(X, [0, T]) doit être dans $[0,1] \cup \{2\}$; Le mouvement Brownien fractionnaire ne peut pas être une semimartingale sauf si $H = \frac{1}{2}$.

1.3.3 La dépendance à long et à court terme

Définition 1.3.1. *Un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est dit à long terme si $r(n) = Cov(X_k, X_{k+n})$ satisfait :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(n)}{cn^{-\alpha}} = 1$$

pour $\alpha \in (0,1)$ et c une constante.

Le mouvement Brownien fractionnaire est l'un des processus les plus simples qui présente la dépendance à long terme.

Remarque 1.3.1. *Si un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est à dépendance à long terme, la dépendance entre X_k et X_{k+1} diminue doucement quand $n \to \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$.*

Proposition 1.3.3. *Le mouvement Brownien présente une dépendance à long terme si $H > \frac{1}{2}$, et une dépendance à court terme si $H < \frac{1}{2}$.*

Preuve :
On considère :

$$X_k = B_k^H - B_{k-1}^H, \qquad X_{k+n} = B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H.$$

Puisque le mouvement Brownien fractionnaire est centré, alors

$$\begin{aligned}
r(n) &= \mathbb{E}(X_k X_{k+n}) = \mathbb{E}((B_k^H - B_{k-1}^H)(B_{k+n}^H - B_{k+n-1}^H)) \\
&= \mathbb{E}(B_1^H(B_{n+1}^H - B_n^H)) = \mathbb{E}(B_1^H B_{n+1}^H) - \mathbb{E}(B_1^H B_n^H) \\
&= \frac{1}{2}\left[(n+2)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right] \\
&= \frac{1}{2}n^{2H}\left[(1+\frac{1}{n})^{2H} - 2 + (1-\frac{1}{n})^{2H}\right] \\
&= \frac{n^{2H}}{2}\left[(1+\frac{2H}{n}) + \frac{H(2H-1)}{n^2} - 2 + 1 - \frac{2H}{n} + \frac{H(2H-1)}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right] \\
&= H(2H-1)n^{2H-2} + o(n^{2H-2})
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que si $H > \frac{1}{2}$, on a

$$r(n) > 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_n r(n) = \infty$$

et pour $H < \frac{1}{2}$, on a

$$r(n) < 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_n r(n) < \infty.$$

Pour cela, on dit que le mouvement Brownien fractionnaire a une dépendance à long terme si et seulement si $H > \frac{1}{2}$ et à court terme ssi $H < \frac{1}{2}$.

1.3.4 La représentation du mouvement Brownien fractionnaire

Soit $B^H = (B^H_t)_{t\geq 0}$, $H \in (0,1)$ un mouvement Brownien fractionnaire. Il existe de nombreuses représentations d'un mouvement Brownien fractionnaire. Plus ou moins compliquées selon que l' on souhaite obtenir une représentation sur un compact de $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1.3.4.1 Représentation par Moyenne Mobile

Le mouvement Brownien fractionnaire B^H a eu une représentation dans les travaux de *Mandelbort et Van Ness*(1968) [23] dans $\mathbb{R}$, présentée comme suit :

$$B^H_t = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_u, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

où

$$C_1(H) = \left(\int_{\mathbb{R}} \left((1+s)^{H-\frac{1}{2}} - s^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds + \frac{1}{2H} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et on note $x_+ = \max(x, 0)$.

1.3.4.2 Représentation harmonizable

Soit $0 < H < 1$. Le mouvement Brownien fractionnaire a la représentation suivante :

$$B^H_t = \frac{1}{C(H)} \int_R \frac{e^{itx}-1}{ix} |x|^{-(H-\frac{1}{2})} d\tilde{B}_x, \qquad t \in \mathbb{R}$$

où $\tilde{B}_x$ est un mouvement Brownien à valeur complexe, et $C(H) = \left(\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(H\pi)} \right)^{\frac{1}{2}}$

1.3.4.3 Représentation de Levy-Hida

Il y a aussi une autre représentation du mouvement Brownien fractionnaire comme une intégrale de *Wiener* sur un intervalle finie $[0, T]$ de la forme ci-dessous : On a un processus de *Wiener* B_s et le noyau :

$$K_H(t,s) = d_H (t-s)^{H-\frac{1}{2}} + s^{H-\frac{1}{2}} F_1 \left(\frac{t}{s} \right)$$

avec d_H est une constante et

$$F_1 = d_H \left(\frac{1}{2} - H \right) \int_0^{z-1} \theta^{H-\frac{3}{2}} (1 - (\theta+1)^{H-\frac{1}{2}}) d\theta$$

si $H \in (0, \frac{1}{2})$

le noyau K_H est donné par :

$$K_H(t,s) = b_H\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2}s^{\frac{1}{2}-H}\right)\int_s^t (u-s)^{H-\frac{1}{2}}u^{H-\frac{3}{2}}du\right)$$

où

$$b_H = \left(\frac{2H}{1-2H\mathcal{B}(1-2H, H+\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

avec $\mathcal{B}$ est la fonction Bêta ($\mathcal{B}(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$)

si $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ **:**

Le noyau a la simple expression suivante :

$$K_H(t,s) = c_H s^{\frac{1}{2}-H}\int_s^t |u-s|^{H-\frac{3}{2}}u^{H-\frac{1}{2}}du, \qquad t > s,$$

où

$$c_H = \left(\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})}\right)^{\frac{1}{2}},$$

la représentation de *Levy-Hida* du mouvement Brownien fractionnaire est la suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dB_s, \qquad 0 < s < t < \infty.$$

1.4 Mouvement Brownien Multifractionnaire

1.4.1 Définition et Propriétés

Le mouvement Brownien multifractionnaire (en abrégé MBM) est un processus gaussien qu'est une extension du mouvement Brownien fractionnaire, et qui a été introduit depuis plus de quinze ans par *Benassi, Jaffar, Lèvy véhel*, *peltier* et *Roux*. [39]. Grossièrement parlant, il est obtenu en remplaçant le paramètre constant *de Hurst* du mouvement Brownien fractionnaire par une fonction $H(t)$ qui varie avec le temps. Ce qui lui permet d'être un bon candidat dans la modélisation de nombreux phénomènes irrégulier comme le trafic d'internet, traitement d'image, etc.

Définition 1.4.1. *Soit* $H(t) : [0,\infty] \longrightarrow (0,1)$ *une fonction continue* γ*-Höldérienne. Le MBM est un processus gaussien centré défini par :*

$$B_t^{H_t} = \frac{1}{\Gamma(H(t)+\frac{1}{2})}\int_{\mathbb{R}}\left((t-s)_+^{H(t)-\frac{1}{2}} - (-s)^{H(t)-\frac{1}{2}}\right)dB_s$$

Remarque 1.4.1. *Le MBM est une extension naturelle du mouvement Brownien fractionnaire mais perd certaines de ses propriétés :*

- *le MBM n'est pas autosimilaire ;*
- *les accroissements du MBM ne sont pas stationnaires.*

Comme les accroissements du MBM ne sont pas stationnaires, on ne s'intéresse pas aux propriétés globaux des trajectoires mais aux propriétés locales.

Proposition 1.4.1. *[39] Presque sûrement, l'exposant de Hölder en t_0 du MBM est H_{t_0}.*

1.4.2 Représentation du mouvement Brownien multi-fractionnaire

1. **Représentation à Moyenne Mobile**[9](*Palteier, Lèvy-Vehel*(1995))

$$B_t^{H_t} = \frac{1}{\Gamma(H_t + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{0} \left((t-s)^{H_t - \frac{1}{2}} - (-s)^{H_t - \frac{1}{2}} \right) dB_s + \int_0^t (t-s)^{H_t - \frac{1}{2}} dB_s, \quad s \in \mathbb{R}$$

   avec $(B_s)_{s\in\mathbb{R}}$ est un mouvement Brownien bilatéral(Le mouvement Brownien défini sur $(-\infty, +\infty)$).

2. **Représentation harmonizable :** *Benassi, Jaffar et Roux*1998 ont défini la représentation harmonisable du mouvement Brownien multifractionnaire, en utilisant celle du mouvement Brownien fractionnaire, comme suit :

$$B_t^{H_t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_t - \frac{1}{2}}} dB_\xi$$

où B_ξ est un mouvement Brownien fractionnaire à valeur complexe.

Chapitre 2

Mouvement Brownien Fractionnaire Mixte et Généralisé

Ce chapitre présente une très importante extension du mouvement Brownien fractionnaire : Le mouvement Brownien fractionnaire mixte ainsi qu'une autre généralisation plus vaste du mouvement Brownien fractionnaire, après avoir défini ces deux processus et étudier leurs propriétés, une représentation du mouvement Brownien fractionnaire mixte dans l'espace du bruit blanc aurait être construite et aussi celle du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé. Nous montrons que ces deux processus sont différentiables au sens de distribution. De plus, on aurait fournit les S-transformés de ces deux processus. Cela nous conduit à notre objectif qu'est l'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire mixte (respectivement le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé).

2.1 Mouvement Brownien Fractionnaire Mixte

Le mouvement Brownien fractionnaire mixte de paramètre H est un processus stochastique qui a été introduit par *Cheridito* [35], pour modéliser un phénomène financier par le processus stochastique $(X_t^H(a,b))_{t\in[0,1]}$ donné par :

$$X_t^H(a,b) = X_0^H(a,b)e^{\nu t+\sigma M_t^H(a,b)}.$$

Les auteurs ont prit ν, σ, deux constantes, et $a > 0, b = 1$.

Définition 2.1.1. *Un mouvement Brownien fractionnaire mixte de paramètres a, b et H est un processus $M^H = \{M_t^H(a,b), \forall t \geq 0\} = \{M_t^H, \forall t \geq 0\}$ définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad M_t^H = aB_t + bB_t^H,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H indépendant de B.

Propriétés 2.1.1. *[32] Le mouvement Brownien fractionnaire mixte satisfait les propriétés suivantes :*

1. *M^H est un processus gaussien centré ;*
2. $\forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathbb{E}((M_t^H(a,b))^2) = a^2 t + b^2 t^{2H};$
3. *sa fonction de covariance est donnée par*
$$Cov(M_t^H(a,b), M_s^H(a,b)) = a^2 \min(t,s) + \frac{b^2}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \qquad \forall t,s \geq 0.$$
4. *Les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire mixte sont stationnaires.*
5. *Pour tout $\alpha > 0$, $\left(M_{\alpha t}^H(a,b)\right)_{t\geq 0} = \left(M_t^H(a\alpha^{\frac{1}{2}}, b\alpha)\right)_{t\geq 0}$, cette propriété est appelée autosimilarité mixte.*
6. *Pour tous $H \in (0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \quad (M_t^H(a,b))_{t\geq 0}$ n'est pas un processus de Markov.*

2.1.1 Corrélation entre les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire mixte

Notation 2.1.1. *Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On note $\rho(X,Y)$ le coefficient de corrélation défini par :*
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

Lemme 2.1.1. *[32]* $\forall s \in \mathbb{R}_+, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+, 0 \leq h \leq t-s$
$$\rho(M_{t+h}^H - M_t^H, M_{s+h}^H - M_s^H) = \frac{b^2}{2(a^{2h+b^2h^{2H}})}\left[(t-s+h)^{2H} - 2(t-s)^{2H} + (t-s-h)^{2H}\right].$$

Corollaire 2.1.1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, les accroissements de $(M_t^H(a,b))_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont corrélés positivement si $\frac{1}{2} < H < 1$, corrélés négativement si $0 < H < \frac{1}{2}$, et non corrélés si $H = \frac{1}{2}$.*

Preuve :

Si $H > \frac{1}{2}$, à partir de la convexité de la fonction $x \longmapsto x^{2H}$, on dérive
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}, \quad (x+h)^{2H} - 2x^{2H} + (x-h)^{2H} > 0$$
Si $H < \frac{1}{2}$, à partir de la concavité de la fonction $x \longmapsto x^{2H}$, on dérive
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall h \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}, \quad (x+h)^{2H} - 2x^{2H} + (x-h)^{2H} < 0$$
Par conséquent, en utilisant le lemme (2.1.1),
$$\begin{cases} \text{Si } H > \frac{1}{2}, & \rho(M_{t+h}^H - M_t^H, M_{s+h}^H - M_s^H) > 0 \\ \\ \text{Si } H < \frac{1}{2}, & \rho(M_{t+h}^H - M_t^H, M_{s+h}^H - M_s^H) < 0 \\ \\ \text{Si } H = \frac{1}{2}, & \rho(M_{t+h}^H - M_t^H, M_{s+h}^H - M_s^H) = 0. \end{cases}$$

Remarque 2.1.1. *Du lemme (2.1.1) et du corollaire (2.1.1)*

i) *Si* $H > \frac{1}{2}$ *(respectivement* $H < \frac{1}{2}$*), si* $a \neq 0, b_1$*, et* b_2 *sont deux constantes réelles tels que* $|b_1| \leq |b_2|(resp, |b_1| \geq |b_2|)$*, puisque*

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall h \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq h \leq t - s$$

$$(M^H_{t+h}(a, b_1) - M^H_t(a, b_1), M^H_{s+h}(a, b_1) - M^H_s(a, b_1)) \leq (M^H_{t+h}(a, b_2) - M^H_t(a, b_2), M^H_{s+h}(a, b_2) - M^H_s(a, b_2)).$$

Alors Si $H > \frac{1}{2}$ *(* $H < \frac{1}{2}$*)*

1. *Plus le |b|est petit(grand), les accroissements sont moins corrélés.*
2. *Plus le |b|est grand (petit), les accroissements sont plus corrélés.*

ii) *Si* $H > \frac{1}{2}$ *(*$H < \frac{1}{2}$*), si* $b \neq 0, a_1$*, et* a_2 *sont deux constantes réelles tels que* $|a_1| \leq |a_2|(resp, |a_1| \geq |a_2|)$*, puisque*

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall h \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq h \leq t - s$$

$$(M^H_{t+h}(a_2, b) - M^H_t(a_2, b), M^H_{s+h}(a_2, b) - M^H_s(a_2, b)) \leq (M^H_{t+h}(a_1, b) - M^H_t(a_1, b), M^H_{s+h}(a_1, b) - M^H_s(a_1, b)).$$

Alors Si $H > \frac{1}{2}$ *(resp,* $H < \frac{1}{2}$*)*

1. *Plus le |a|est petit(grand), les accroissements du* M^H_t *sont plus corrélés.*
2. *Plus le |a|est grand (petit), les accroissements du* M^H_t *sont moins corrélés.*

En pratique. *Pour modéliser certains phénomène, on peut choisir* H, a, b *pour que le* $M^H_t(a, b)$ *serait un bon modèle.*

2.1.2 La dépendance à long et à court terme

Lemme 2.1.2. *Pour tous* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire mixte sont à dépendance à long terme ssi* $H > \frac{1}{2}$

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} r(n) &= \mathbb{E}\left((M^H_{n+1} - M^H_n)M^H_1\right) = \frac{b^2}{2}\left[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right] \\ &= b^2 H(H-1)n^{2H-2}\epsilon(n). \end{aligned}$$

où $\lim_{n \to +\infty} \epsilon(n) = 0.$

On remarque que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} r(n) = +\infty$ si et seulement si $2H - 2 > -1$, c-à-d ssi $H > \frac{1}{2}$

2.1.3 Continuité Höldérienne et différentiabilité

Lemme 2.1.3. *Pour tous $T > 0$ et $\gamma < \frac{1}{2} \wedge H$, le mouvement Brownien fractionnaire mixte a une modification avec des trajectoires qui sont $\gamma-$Hölder continu dans $[0, T]$.*

Preuve :

Selon le théorème de *Kolmogorov* (1.1), il suffit de montrer que

$$\forall \alpha > 0, \exists C_\alpha, \forall (s,t) \in [0,T]^2, \qquad \mathbb{E}\left(\left|M_t^H - M_s^H\right|^\alpha\right) \leq C_\alpha |t-s|^{\alpha(\frac{1}{2}\wedge H)}.$$

En utilisant la stationnarité (2.1.1) et l'autosimilarité mixte (2.1.1) des accroissements du M_t^H, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|M_t^H - M_s^H\right|^\alpha\right) &\leq \mathbb{E}\left(\left|M_{t-s}^H\right|^\alpha\right)\\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|M_1^H(a(t-s)^{\frac{1}{2}-H}), b(t-s)H\right|^\alpha\right).\end{aligned}$$

Si $H \leq \frac{1}{2}$, il y en a deux constantes positives C_1 et C_2, dépend de α tel que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|M_t^H - M_s^H\right|^\alpha\right) &\leq (t-s)^{\alpha H}\mathbb{E}\left(\left|M_1^H(a(t-s)^{\frac{1}{2}}, b)\right|^\alpha\right)\\ &\leq (t-s)^{\alpha H}\left[C_1|a|^\alpha (t-s)^{\alpha((\frac{1}{2})-H)}\mathbb{E}(|B_1|^\alpha) + C_2|b|^\alpha \mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha)\right]\\ &\leq C_\alpha (t-s)^{\alpha H},\end{aligned}$$

où

$$C_\alpha = C_1|a|^\alpha T^{\alpha((\frac{1}{2})-H)}\mathbb{E}(|B_1|^\alpha) + C_2|b|^\alpha\mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha)$$

Si $H > \frac{1}{2}$, il y en a deux constantes positives C_1' et C_2', dépendant de α telles que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|M_t^H - M_s^H\right|^\alpha\right) &\leq (t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\mathbb{E}\left(\left|M_1^H(a, b(t-s)^{H-\frac{1}{2}})\right|^\alpha\right)\\ &\leq (t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\left[C_1'|a|^\alpha\mathbb{E}(|B_1|\alpha) + C_2'|b|^\alpha(t-s)^{\alpha(H-(\frac{1}{2}))}\mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha)\right]\\ &\leq C_\alpha(t-s)^{\frac{\alpha}{2}};\end{aligned}$$

où

$$C_\alpha = C_1'|a|^\alpha\mathbb{E}(|B_1|\alpha) + C_2'|b|^\alpha T^{\alpha(H-(\frac{1}{2}))}\mathbb{E}(|B_1^H|^\alpha).$$

D'après les résultats de *Mounir Zili*[32] les notions suivantes ont été introduites par *Kolwankar* et *Gangal*, et ensuite étudiées par *Ben Adda* [25] et *Cresson* [10].

Définition 2.1.2. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle $\alpha-$dérivée fractionnaire locale de f en $t_0 \in [a, b]$ $d_\sigma^\alpha f(t_0)$ donnée par :*

$$d_\sigma^\alpha f(t_0) = \Gamma(1+\alpha)\lim_{t\to t_0^\sigma}\frac{\sigma(f(t) - f(t_0))}{|t-t_0|^\alpha}$$

pour $\sigma = +(resp, \sigma = -)$, où Γ est la fonction d'Euler.

Définition 2.1.3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et soit $\alpha \in]0,1[$. La fonction f est $\alpha-$différentiable en $t_0 \in [a,b]$ ssi $d_+^\alpha f(t_0)$ et $d_-^\alpha f(t_0)$ existent et sont égales. Dans ce cas, on note la $\alpha-$dérivée de f en t_0 par $d^\alpha f(t_0)$.*

Théorème 2.1. *Pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2} \wedge H[$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire mixte sont presque sûrement $\alpha-$différentiable à chaque $t_0 \geq 0$, et*

$$\forall t_0 \geq 0, \qquad \mathbb{P}(d^\alpha M_{t_0}^H = 0) = 1$$

Preuve :

On fait la preuve pour $\sigma = +$.(La preuve pour $\sigma = -$ est identique.)
En utilisant la stationnarité et l'autosimilarité mixte des accroissements du mouvement Brownien fractionnaire mixte.

$$\begin{aligned} \frac{M_t^H - M_{t_0}^H}{(t-t_0)^\alpha} &\stackrel{\mathfrak{L}}{=} (t-t_0)^{-\alpha} M_1^H \left(a(t-t_0)^{\frac{1}{2}}, b(t-t_0)^H\right) \\ &\stackrel{\mathfrak{L}}{=} a(t-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha} B_1 + b(t-t_0)^{H-\alpha} B_1^H. \end{aligned}$$

En conséquent, si $0 < \alpha < \frac{1}{2} \wedge H$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(d_+^\alpha M_{t_0}^H = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{t \to t_0} \frac{M_t^H - M_{t_0}^H}{(t-t_0)^\alpha} = 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{t \to t_0} a(t-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha} B_1 + b(t-t_0)^{H-\alpha} B_1^H = 0\right) = 1. \end{aligned}$$

Théorème 2.2. *Pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2} \wedge H, 1[$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire mixte ne sont pas $\alpha-$différentiables presque sûrement.*

Preuve :

Pour $d > 0$, on définit l'événement

$$A(t) = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{M_s^H(a,b)}{s^\alpha} \right| > d \right\}$$

Pour toute suite $t_n \searrow 0$, on a

$$A(t_{n+1}) \subset A(t_n)$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\lim_{t \to +\infty} A(t_n)) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(A(t_n))$$

et en utilisant l'autosimilarité mixte de M^H,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A(t_n)) &\geq \mathbb{P}\left(\left|\tfrac{M_{t_n}^H(a,b)}{t_n^\alpha}\right| > d\right) \\ &= \mathbb{P}\left(|a t_n^{\frac{1}{2}-\alpha} B_1 + b t_n^{H-\alpha} B_1^H| > d\right). \end{aligned}$$

i) Si $H < \frac{1}{2}$, dans ce cas $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(|at_n^{\frac{1}{2}-H}B_1 + bB_1^H| > t_n^{\alpha-H}d\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|at_n^{\frac{1}{2}-H}B_1 + bB_1^H| > t_n^{\alpha-H}d\right) = \mathbb{P}\left(|B_1^H| \geq 0\right) = 1.$$

ii) Si $H = \frac{1}{2}$, dans ce cas $\alpha > H$ et $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(|aB_1 + bB_1^H| > t_n^{\alpha-H}d\right)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|aB_1 + bB_1^H| > t_n^{\alpha-H}d\right) = \mathbb{P}\left(|aB_1^H| + bB_1^H \geq 0\right) = 1.$$

iii) Si $H > \frac{1}{2}$, dans ce cas $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\mathbb{P}(A(t_n)) \geq \mathbb{P}\left(|aB_1 + bt_n^{H-\frac{1}{2}}B_1^H > t^{\alpha-\frac{1}{2}}| > d\right)$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|aB_1 + bt_n^{H-\frac{1}{2}}B_1^H > t^{\alpha-\frac{1}{2}}| > d\right) = \mathbb{P}\left(|aB_1| \geq 0\right) = 1.$$

On conclut que pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2} \wedge H, 1[$, pour tout $t_0 \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to t_0} \left|\frac{M_t^H - M_{t_0}}{(t-t_0)^\alpha}\right| = +\infty\right) = 1.$$

2.1.4 Le mouvement Brownien fractionnaire mixte est-il une semimartingale ?

La notion classique de semimartingale se trouve au bout d'une chaîne de généralisation du mouvement Brownien, dont chacune a étendu la classe des processus stochastiques qui peut jouer le rôle d'intégrateur dans l'intégration stochastique au sens d'*Itô*[38]. Il a été établit qu'un processus stochastique X_t $\mathbb{F}$-adapté est appelé $\mathbb{F}$-semimartingale s'il a la décomposition (1.2). plus tard, on a constaté que si la filtration $\mathbb{F}$ satisfait les conditions habituelles, un processus X $\mathbb{F}$-adapté, continu à droite p.s a la forme (1.2) ssi X satisfait la condition suivante :

$$I_X(\beta(\mathbb{F})) \quad \text{est bornée dans } L^0 \tag{2.1}$$

où

$$\beta(\mathbb{F}) = \left\{\sum_{j=0}^{n-1} f_j \mathbf{1}_{(t_j,t_{j-1})}\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0, \ldots, t_n \leq 1, \forall j, f_j \quad \text{est } \mathbb{F} - \text{mesurable et } |f_j| \leq 1 \quad p.s.\right\}$$

et

$$I_X(\vartheta) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j (X_{t_{j+1}} - X_{t_j}) \qquad pour \qquad \vartheta = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]} \in \beta(\mathbb{F})$$

Cheridito [35] a proposé de travailler avec une caractérisation légère que la définition de la semimartingale. En réalité, il a définit une formule plus faible de la semimartingale.

Définition 2.1.4. *Un processus X_t est une $\mathbb{F}$-semimartingale faible s'il est $\mathbb{F}$-adapté et satisfait (2.1).*
On dit que X est une semimartingale faible s'il est $\mathcal{F}$-semimartingale faible. Et on dit que X est une semimartingale s'il est $\bar{\mathbb{F}}$-semimartingale faible.

Exemple
Il est facile de vérifier que le processus déterministe

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & \text{pour } \quad t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

est une semimartingale faible. Mais il n'est pas une semimartingale car il n'est pas continu à droite p.s.

Lemme 2.1.4. *[35] Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. Alors tout processus stochastique $\mathbb{F}-$semimartingale faible $(X_t)_{t\geq 0}$ continu à droite est aussi une $\bar{\mathbb{F}}$-semimartingale faible. En particulier, si X est continu à droite p.s alors, il est une $\bar{\mathbb{F}}$-semimartingale.*

Cependant, il s'ensuit du lemme (2.1.4) précédant que pour chaque filtration $\mathbb{F}$, une $\mathbb{F}$-semimartingale faible continue à droite est aussi une $\bar{\mathbb{F}}-$semimartingale.
Il est facile de déterminer si le mouvement Brownien fractionnaire mixte, est $\mathbb{F}-$semimartingale quand $H = \frac{1}{2}$. Il est clair que

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} M^{\frac{1}{2},\alpha}$$

est un mouvement Brownien. En particulier, une $\bar{\mathbb{F}}^{M^{\frac{1}{2},\alpha}}-$semimartingale. Par conséquent, $M^{\frac{1}{2},\alpha}$ est une semimartingale.
Pour les autres cas, on a les résultats principaux dans le théorème suivant

Théorème 2.3. *[35] M^H n'est pas une semimartingale faible si $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, il est équivalent à $\sqrt{1+\alpha^2} B_t$ si $H = \frac{1}{2}$ et équivalent au mouvement Brownien si $H \in (\frac{3}{4}, 1]$.*

A fin de prouver ce théorème, *Cheridito*[35] a utilisé des différentes méthodes. Pour $H \in (0, \frac{1}{2})$ la preuve est basée sur le fait que la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire n'est pas finie. Donc le mouvement Brownien fractionnaire mixte aura une variation quadratique infinie pour $H < \frac{1}{2}$.
Pour $H > \frac{1}{2}$, on a le contraire. En effet, la variation quadratique du processus

est égale à celle du mouvement Brownien. Cependant, dans ce cas particulier, le mouvement Brownien fractionnaire mixte n'est pas une semimartingale faible pour $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, mais il est équivalent au mouvement Brownien pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$.

Croquis de la preuve

En abrégeant la preuve seulement pour le cas $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, en utilisant le théorème de *Stricker*[3].

On présente tout d'abord le théorème de *Stricker*. On travaille sur un espace de probabilité complet, où les processus sont indexés sur $[0, 1]$ et soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus stochastique tel qu'il existe un espace gaussien qui contient toutes les versions des variables aléatoires $\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s), s, t \in [0, 1]$. Rappelons qu'on a caractériseé une semimartingale par le fait que l'ensemble $I_X(\beta)$ est bornée dans L^0.

Théorème 2.4. *[3]**Stricker 1983**. $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus gaussien avec sa filtration naturelle. Si $I_X(\beta)$ est borné dans L^0, alors il est borné dans L^2.*

Définition 2.1.5. *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est une quasi-martingale si*

$$X_t \in L^1, \quad \forall t \in [0, 1]$$

et

$$\sup_{\tau} \sum_{j=0}^{n-1} \left\| \mathbb{E}(X_{t_{j+1}} - X_{t_j}/\mathcal{F}^X_{t_j}) \right\|_1 < \infty$$

où τ est l'ensemble de toutes les partitions finies de $[0, 1]$.

Remarque 2.1.2. *Dès lorsque, $I_X(\beta)$ est borné dans L^2, alors $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est une quasi-martingale.*

Théorème 2.5. *Si $(M^H_t)_{t\in[0,1]}$ n'est pas une quasi-martingale, il n'est pas une semimartingale faible.*

Preuve :

Supposons que M^H est une semimartingale faible. Le théorème de *Stricker* (2.4) implique que $I_{M^H}(\beta(\mathcal{F}^{M^H}))$ est borné dans L^2. Par suite, il est aussi borné dans L^1. Pour toutes les partitions $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = 1$

$$\sum_{j=0}^{n-1} sign\left(\mathbb{E}\left[M^H_{t_{j-1}} - M^H_{t_j}/\mathcal{F}_{t_j}\right]\right) \mathbf{1}_{(t_j, t_{j-+1}]} \in \beta(\mathbb{F}^{M^H}),$$

et

$$\left\| I_{M^H}\left(\sum_{j=0}^{n-1} sgn\left(\mathbb{E}\left[M^H_{t_{j-1}} - M^H_{t_j}/\mathcal{F}_{t_j}\right]\right)\mathbf{1}_{(t_j,t_{j-+1}]}\right)\right\|_1$$

$$\geq \mathbb{E}\left[I_{M^H}\left(\sum_{j=0}^{n-1} sign\left(\mathbb{E}\left[M^H_{t_{j-1}} - M^H_{t_j}/\mathcal{F}_{t_j}\right]\right)\mathbf{1}_{(t_j,t_{j-+1}]}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left\|\mathbb{E}\left[M^H_{t_{j-1}} - M^H_{t_j}/\mathcal{F}_{t_j}\right]\right\|_1.$$

Il s'en suit que M^H est une quasi-martingale. Par conséquent, si M^H n'est pas une quasi-martingale, il ne peut pas être une semimartingale faible.
Il reste maintenant, de prouver que M^H n'est pas une quasi-martingale. On le prouve pour $H \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, en calculant

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left\|\mathbb{E}\left(\Delta^n_{j+1}M^H/\mathcal{F}^{M^H_{\frac{j}{n}}}_{t_j}\right)\right\|_1$$

et montrons que cette quantité tend vers l'infinie quand $n \to \infty$. Cela prouve que $(M^{\frac{3}{4}}_t)_{t\in[0,1]}$ n'est pas une quasi-martingale.
Cheridito [35] a obtenu une résultat remarquable, il a montrer que le mouvement Brownien fractionnaire mixte est une semimartingale pour $H \in]\frac{3}{4}, 1)$, i.e. la somme de deux processus gaussien indépendants centrés, le premier est le mouvement Brownien, et le deuxième est le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H est une semimartingale si $H \in]\frac{3}{4}, 1)$. Ce qu'il nous fais penser à des exemples où la somme de deux processus gaussien centrées indépendants $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale sachant que au moins l'un des deux processus n'est pas une semimartingale.

Exemple :
Soit le pont Brownien $(\eta_u(t), t \leq u)$ sur $[0, u]$, le processus du mouvement Brownien $(B_t, t \leq u)$ conditionné par $B_u = 0$. Rappelons que $\eta_u(t)$ peut s'écrire sous la forme $\eta_u(t) = B_t - \frac{t}{u}B_u$, tel que $\eta_u(t)$ est indépendant de B_u et sa décomposition canonique est donnée par

$$\eta_u(t) = \beta_t - \int_0^t ds\frac{\eta_u(s)}{u-s}, \quad t \leq u$$

où β_t est le mouvement Brownien dans la filtration $\{\mathcal{P}^u_t, t \leq u\}$ de $\eta_u(t)$. De plus, on a la proposition suivante

Proposition 2.1.1. *[31] Soit $f \in L^2([0, u])$, alors*

1. Le processus

$$\int_0^t f(s)\eta_u(s) = \int_0^t f(s)d\beta_s - \int_0^t dsf(s)\frac{\eta_u(s)}{u-s}$$

est bien définit pour $t \leq u$ avec

$$\int_0^u f(s)d\eta_u(t) = \lim_{t\to u}\int_0^t f(s)d\eta_u(s) \ p.s \ dans \quad L^2$$

2. *$(\int_0^t f(s)\eta_u(s))$ est une semimartingale par rapport $\{\mathcal{P}_t^u, t \leq u\}$ si et seulement si*

$$\int_0^t ds|f(s)|\frac{1}{\sqrt{u-s}} < \infty$$

Maintenant, soient $u \in]0,1]$ et $\alpha \in]\frac{1}{2},1]$ et soit la fonction

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{u-s}}|\log(u-s)|^{-\alpha}\mathbb{1}_{\frac{u}{2}<s<u}$$

satisfait

$$\int_0^u ds\psi^2(s) < \infty \quad \text{mais} \quad \int_0^u ds\psi(s)\frac{1}{\sqrt{u-s}} = \infty$$

Pour que nous atteint notre objectif, on décompose le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ comme suit

$$B_t = \eta_u(t) + \frac{t}{u}B_u, \quad t \leq u$$

On considère $g \in L^2([0,u])$ tel que

$$\int_0^t ds|g(s)|\frac{1}{\sqrt{u-s}} = \infty, \text{ et } g(s) \neq 0, \text{ pour tout } s$$

Alors, on prend

$$X_t = \int_0^t g(s)d\eta_u(s), \quad \text{et} \quad Y_t = \frac{B_u}{u}\int_0^t g(s)ds$$

Donc, comme X et Y sont indépendants et $X_t + Y_t = \int_0^t g(s)dB_s$, alors $X_t + Y_t$ est une martingale.

Plus généralement, soit $u \in]0,1[$, en utilisant la même idée ; Premièrement on décompose $(B_t)_{t\geq 0}$ en $\eta_u(t) + \frac{t}{u}B_u$.
Puis $\hat{B}_t = B_{t+u} - B_u, t \leq 1-u$ en $\hat{\eta}_{1-u}(t) + \frac{t}{1-u}\hat{B}_{1-u}$.
Après, pour $f \in L^2([0,1])$, on écrit

$$\begin{aligned}\int_0^t f(s)dB_s &= \int_0^t f(s)\mathbb{1}_{(s\leq u)}dB_s + \mathbb{1}_{(u<t)}\int_u^t f(s)dB_s \\ &= \int_0^t f(s)\mathbb{1}_{(s\leq u)}d\eta_u(s) + \frac{B_u}{u}\int_0^t f(s)\mathbb{1}_{(s\leq u)}ds \\ &+\mathbb{1}_{(u<t)}\int_u^t f(s)d\hat{\eta}_{1-u}(s-u) + \mathbb{1}_{(u<t)}\frac{B_1-B_s}{1-u}\int_u^t f(s)ds.\end{aligned}$$

Maintenant, on choisit g telle que

$$\int_0^t |g(s)|\frac{ds}{\sqrt{u-s}} = \infty, \quad \int_u^1 |g(s)|\frac{ds}{\sqrt{1-s}} = \infty, \quad \text{et pour tout} \quad s < 1.$$

Alors
$$X_t = \int_0^t g(s)\mathbb{1}_{(s\leq u)} d\eta_u(s) + \mathbb{1}_{(u<t)} \frac{B_1 - B_s}{1-u} \int_u^t g(s)ds$$
et
$$Y_t = \mathbb{1}_{(u<t)} \int_u^t g(s)d\hat{\eta}_{1-u}(s-u) + \frac{B_u}{u} \int_0^t g(s)\mathbb{1}_{(s\leq u)} ds$$
sont deux processus gaussiens indépendants tel que $X_t + Y_t = \int_0^t g(s)dB_s$ est une martingale.
on peut vérifier que ni Y ni X est une semimartingale en utilisant la proposition (2.1.1).

2.2 Mouvement Brownien Fractionnaire Mixte Généralisé

Récemment, le mouvement Brownien fractionnaire mixte a été encore généralisé par *Thäle*[5] au mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, n \in \mathbb{N}$ des nombres réels non nuls.

Définition 2.2.1. *Un mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé de paramètres $H = (H_1, \ldots, H_n)$, et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un processus stochastique $Z^H = (Z_t^H)_{t\geq 0} = (Z_t^{H,\alpha})_{t\geq 0}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par*
$$Z_t^H = Z_t^{H,\alpha} = \sum_{k=1}^n \alpha_k B_t^{H_k}$$
où $(B_t^{H_k})_{t\geq 0}$ sont des mouvements Browniens fractionnaires de paramètre $H_k, k = 1, \ldots, n$ indépendants.

On collecte quelques propriétés du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé

2.2.1 Propriétés élémentaires

Il est clair que le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé Z_t est un processus gaussien, puisque toutes combinaisons linéaire des processus gaussien est encore un processus gaussien. De plus Z_t est un processus centré c-à-d
$$\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k B_t^{H_k}\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{E}(B_t^{H_k}) = 0.$$
Il s'ensuit que
$$\mathbb{E}(Z_t^2) = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k B_t^{H_k}\right)^2\right] = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \mathbb{E}\left((B_t^{H_k})^2\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 t^{2H_k}.$$

La covariance du processus Z_t^H a la forme suivante : Pour tous $s, t \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} Cov(Z_t^H, Z_s^H) &= \mathbb{E}(Z_t^H Z_s^H) = \mathbb{E}\left(\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k B_t^{H_j} B_s^{H_k}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 (t^{2H_k} + s^{2H_k} - |t-s|^{2H_k}). \end{aligned}$$

Le processus Z_t^H a des accroissements stationnaires. Pour vérifier ce résultat, il suffit de montrer qu'il sont non-corrélés, puisque les accroissements sont gaussiens on obtient pour tous t_1, t_2, t_3, t_4 ;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(Z_{t_2} - Z_{t_1})(Z_{t_4} - Z_{t_3})\right] &= \mathbb{E}(Z_{t_2} Z_{t_4}) - \mathbb{E}(Z_{t_2} Z_{t_3}) - \mathbb{E}(Z_{t_1} Z_{t_4}) + \mathbb{E}(Z_{t_1} Z_{t_3}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t_2^{2H_k} + t_4^{2H_k} - |t_2 - t_4|^{2H_k}) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t_2^{2H_k} + t_3^{2H_k} - |t_2 - t_3|^{2H_k}) \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t_1^{2H_k} + t_4^{2H_k} - |t_1 - t_4|^{2H_k}) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (t_1^{2H_k} + t_3^{2H_k} - |t_1 - t_3|^{2H_k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On introduit la famille des opérateurs d'échelle $S_{(c_1, c_2, \ldots, c_N, H_1, \ldots, H_N)}$, pour tous $c_1, \ldots, c_N \geq 0$, qui agissent comme suit :

$$\sum_{k=1}^{N} f_k(t) \longmapsto S_{(c_1, c_2, \ldots, c_N, H_1, \ldots, H_N)}\left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{-H_k} f_k(c_k t).$$

Particulièrement, pour le processus Z_t, on obtient

$$\left(S_{(c_1, c_2, \ldots, c_N, H_1, \ldots, H_N)} Z\right)_t = \sum_{k=1}^{N} a_k c_k^{-H_k} B_{c_k t}^{H_k} = \sum_{k=1}^{N} a_k B_t^{H_k},$$

en utilisant l'autosimilarité du mouvement Brownien fractionnaire $B_t^{H_k}$. Cela montre que Z_t est invariant par la famille des transformations $(c_1, c_2, \ldots, c_N, H_1, \ldots, H_N)$, qui est une sorte d'une généralisation d'autosimilarité du processus Z_t.
Concernant la propriété de *Markov* pour Z_t, Évidemment si $H_1 = \ldots = H_N = \frac{1}{2}$, Z_t est un processus de *Markov*, par ailleurs si $0 < H_1, \ldots, H_k < 1, H_k \neq \frac{1}{2}$ pour tout

$k = 1, \dots N$, nous montrons que la fonction de covariance ne satisfait pas l'équation (1.1). On prend $s = \frac{1}{2}, t = 1, u = \frac{3}{2}$, on obtient d'abord

$$Cov(Z_{\frac{1}{2}}, Z_{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2H_k} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2H_k} - 1\right)$$

$$Cov(Z_1, Z_1) = \sum_{k=1}^{N} a_k^2,$$

$$Cov(Z_{\frac{1}{2}}, Z_1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k^2,$$

$$Cov(Z_1, Z_{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2H_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2H_k}\right)$$

l'équation (1.1) pour le processus Z_t est équivalente à

$$\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2H_k} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2H_k} - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{2H_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2H_k}\right)$$

Et donc

$$3 + 3^{2H_k} - 3.2^{2H_k} = 0,$$

simultanément pour $k = 1, \dots, N$. Mais la dernière équation a une seule solution $H_k = \frac{1}{2}$, pour tout $k = 1, \dots, N$. C'est ce qui a été traitée ci-dessus.
Le théorème suivant résume les propriétés précédentes.

Théorème 2.6. *[5] Le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé $(Z_t)_{t\geq 0}$ a les propriétés suivantes*

1. *Z_t est un processus gaussien centré de covariance*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1} N a_k^2 (t^{2H_k} + s^{2H_k} - |t-s|^{2H_k}), \text{ pour tout } t, s \in [0, +\infty)$$

2. *Z a des accroissements stationnaires.*
3. *Z est $S_{c_1,\dots,c_n;H_1,\dots,H_n}$-invariant.*
4. *Z n'est pas un processus de Markov, sauf si $H_1 = \dots = H_N = \frac{1}{2}$*

2.2.2 La dépendance à court et à long terme

Proposition 2.2.1. *[5] Z a une dépendance à long terme si et seulement s'il existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tel que $H_k > \frac{1}{2}$.*

2.2.3 La continuité Höldérienne et différentiabilité

Proposition 2.2.2. *[5] Le processus Z_t est γ-Hölder continu, avec $\gamma < \min_{1\leq K\leq N} H_k$ P.s. Donc il a une modification continue.*

Proposition 2.2.3. *[5] Le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé n'est pas différentiable presque sûrement.*

2.3 Le mouvement Brownien fractionnaire mixte dans l'espace de bruit blanc

Soit $(\Omega, \mathbf{B}, \mu)$ l'espace de bruit blanc i.e. Ω est l'espace de distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, où $\mathbf{B}$ est la $\sigma-$algèbre de *Borel* sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i.e. la $\sigma-$algèbre générée par des ensembles cylindriques dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et μ est l'unique mesure de probabilité déterminée par le Théorème de *Bochner-Minlos*[24] telle que

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \exp(i < \omega, f >) d\mu(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}|f|_0^2\right) \tag{2.2}$$

Pour toute fonction lisse et rapidement décroissante $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ici $< \omega, f >$ Désigne la forme bilinéaire du paire dual entre $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et $|.|_0$ est la norme usuelle dans $L^2(\mathbb{R})$. Le produit scalaire correspondant dans $L^2(\mathbb{R})$ est noté $(.,.)_0$. De (2.2) on déduit que $< ., f >$ est une variable gaussienne centrée de variance $|f|_0$ à cause de l'isométrie

$$\mathbb{E}_\mu\left(< ., f >^2\right) = |f|_0^2, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Nous pouvons étendre $< ., g >$ à $g \in L^2(\mathbb{R})$. Donc on a pour $f, g \in L^2(R)$

$$\mathbb{E}_\mu\left(< ., f >< ., g >\right) = (f, g)_0\,. \tag{2.3}$$

Il s'ensuit par le théorème de *Kolmogorov* (1.1) que la version continue de $< ., \mathbb{1}_{[0,t)} >$ existe et est un mouvement Brownien B_t dans l'espace de bruit blanc car chaque $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être approximée par une combinaison de fonctions étagées, on a

$$< ., f >= \int_{\mathbb{R}} f(t) dB_t, \tag{2.4}$$

où $\int_{\mathbb{R}} f(t)dB_t$ est l'intégrale classique de *Wiener* d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Comme le mouvement Brownien fractionnaire mixte est une combinaison linéaire du mouvement Brownien avec le mouvement Brownien fractionnaire indépendant du mouvement Brownien, sa réalisation dans l'espace de bruit blanc peuvent être facilement dériver. *Mandelbort et Van Ness*(1968) [23] ont prouvé que pour tout $H \in (0,1)\backslash\{\frac{1}{2}\}$ un mouvement Brownien fractionnaire est donné par sa version continue telle qu'il est mentionné dans (1.4).

Pour obtenir la représentation du mouvement Brownien fractionnaire en terme d'une fonction indicatrice, on utilise les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires.
Premièrement, pour $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, on utilise les intégrales fractionnaires définies pour tout $\alpha \in (0, 1)$ par :

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty f(t)(t-x)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x+t) t^{\alpha-1} dt$$

et

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-t) t^{\alpha-1} dt,$$

si l'intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Maintenant, pour $H \in (0, \frac{1}{2})$ on utilise les dérivées fractionnaires, qui sont pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et $\varepsilon > 0$ donnée par

$$\left(D_\pm^\alpha f\right)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x) - f(x \mp t)}{t^{\alpha+1}} dt,$$

si la limite existe.
Donc par (2.4) et par (1.1) on a le théorème suivant

Théorème 2.7. *[14] Pour $H \in (0, 1)$, l'opérateur $N_\pm^H$ est défini comme suit*

$$N_\pm^H = \begin{cases} K_H D_\pm^{-(H-\frac{1}{2})}, & si\ H \in (0, \frac{1}{2}) \\ f, & si\ H = \frac{1}{2} \\ K_H I_\pm^{H-\frac{1}{2}} f, & si\ H \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Ensuite le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H dans l'espace de bruit blanc est défini comme étant la version continue de $\langle\ ., N_-^H \mathbb{1}_{[0,t)} \rangle$.

La proposition suivante donne quelques propriétés de l'opérateur $N_\pm^H$

Proposition 2.3.1. *[4] Soient $H \in (0, 1)$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors*

1. $\left(f, N_-^H \mathbb{1}_{[0,1)}\right)_0 = \int_0^t \left(N_+^H f\right)(s) ds$
2. $N_+^H f$ *est continu*
3. $\left(f, N_-^H \mathbb{1}_{[0,T)}\right)_0$ *est différentiable et* $\frac{d}{dt}\left(f, N_-^H \mathbb{1}_{[0,T)}\right)_0 = N_+^H f(t)$.

Par conséquent, la représentation du mouvement Brownien fractionnaire mixte est bien définie.

Définition 2.3.1. *Pour tous $H \in (0, 1), a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, le mouvement Brownien fractionnaire mixte de paramètres H, a et b dans l'espace de bruit blanc est donné par la version continue de $\langle\ ., a\mathbb{1}_{[0,t)} + bN_-^H \mathbb{1}_{[0,T)} \rangle$.*

2.3.1 Le Bruit Blanc Fractionnaire Mixte

Comme on a vus dans la section (2.1.3), les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire mixte ne sont pas presque sûrement différentiables. Cependant, nous allons montrer que le mouvement Brownien fractionnaire mixte M^H est différentiable comme une application de $\mathbb{R}$ dans l'espace des fonctions stochastiques généralisé, appelé distribution de *Hida*[19]. la dérivée au sens de distribution du mouvement Brownien fractionnaire mixte est appelé le bruit blanc fractionnaire mixte.
Selon le théorème de décomposition de *Wiener-Itô* [4], toute fonction $\varphi \in (L^2) = (\mathcal{S}'(\mathbb{R}), \mathbf{B}, \mu)$ peut être décomposé d'une façon unique comme suit

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle :\cdot:^{\otimes n}, f_n \rangle, \quad f_n \in \hat{L}_c^2(\mathbb{R}^n), \tag{2.5}$$

où $\hat{L}_c^2(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des L^2-fonctions symétriques à valeurs complexes sur $\mathbb{R}^n$, et $\otimes n$ est n fois le produit tensorielle. la décomposition précédente est appelé l'expansion de *Wiener-Itô* de φ. De plus, la L^2-norme $\| \varphi \|_0$ de φ est donnée par

$$\| \varphi \|_0^2 = \mathbb{E}_\mu(\varphi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_0^n. \tag{2.6}$$

On considère le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique $A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ et on définit son second opérateur de quantification $T(A)$ en terme de l'expansion de *Wiener-Itô*. Notons $D(T(A))$ le domaine de $T(A)$ qui est l'espace des fonction φ de la forme (2.5) tel que $f_n \in D(A^{\otimes n})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n! |A^{\otimes n} f_n| < \infty$. Alors, on définit

$$T(A)\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} < :\cdot:^{\otimes n}, A^{\otimes n} f_n >, \quad \varphi \in D(T(A)).$$

Les deux opérateurs A et $T(A)$ ont leurs images denses dans $L^2(\mathbb{R})$ et (L^2) respectivement. De plus, ils sont inversibles et leurs opérateurs inverses sont bornés.
Pour $p \in \mathbb{N}_0$ et $\varphi \in D(T(A)^p)$, on définit une norme plus généralisée comme suit

$$\| \varphi \|_p = \| T(A)^p \varphi \|_0$$

et on définit

$$(S)_p = \left\{ \varphi \in (L^2) : T(A)^p \text{existe et} \quad T(A)^p \varphi \in (L^2) \right\}$$

on muni $(S)_p$ d'une norme $\| \, . \, \|_p$. Si on définit

$$(S)_p = \text{ limite projective de} \{ (S)_p : p \in \mathbb{N}_0 \}$$

Alors (S) est l'espace nucléaire, il est appelé l'espace des fonction test *Hida*. Le dual topologique $(S)^*$ de (S) est appelé l'espace de distributions de *Hida*. On peut montrer que

$$(S)^* = \bigcup_{p \geq 0} (S)_p^*$$

et la norme sur le dual topologique $(S)_p^*$ de $(S)_p$ est donnée par

$$\parallel \varphi \parallel_{-p}=\parallel T(A)^{-p}\varphi \parallel_0, \quad p \in \mathbb{N}_0$$

Donc on arrive au triplet de Gelfand $(S) \subset (L^2) \subset (S)^*$.
Le pair dual de $\varphi \in (S)^*$ et $\eta \in (S)$ est donné par $\langle\langle \varphi, \eta \rangle\rangle$. Si $\varphi \in (L^2)$ alors

$$\langle\langle \varphi, \eta \rangle\rangle = \mathbb{E}_\mu(\varphi, \eta). \tag{2.7}$$

Définition 2.3.2.

1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une application $X : I \to (S)^*$ est appelé la distribution de processus stochastique.*
2. *Un processus stochastique X est dit différentiable au sens de disribution si la limite*
$$\lim_{h\to 0} \frac{X_{t+h} - X_t}{h}$$
existe dans $(S)^*$.

Notons que la convergence dans $(S)^*$ veut dire la convergence dans la topologie de la limite inductive.
Maintenant, on est dans la position de montrer le que mouvement Brownien fractionnaire mixte M^H est un processus stochastique différentiable au sens de distribution. Premièrement, rappelons que l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ peut être reconstruite comme la limie inductive comme suit. Définissons la famille des normes sur $L^2(\mathbb{R})$ par

$$\parallel f \parallel_{-p}^2=\parallel A^{-p} f \parallel_0^2= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)^{-2p}(f, \xi_k)_0^2, \quad p \in \mathbb{N}$$

En effet ξ_k est une fonction propre de A avec les valeurs propres $2k+2$. Donc $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la limite inductive de $\mathcal{S}_{-p}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, qui est définie comme la fermeture de $L^2(\mathbb{R})$ par rapport $\parallel . \parallel_{-p}$. Notons que la convergence dans la topologie de la limite inductive coïncide avec les deux convergences dans la topologie forte et faible$-^*$ de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Lemme 2.3.1. *[14] Pour tout $H \in (0,1)$, $N_-^H \mathbb{1}_{[0,t)} : \mathbb{R} \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est différentiable et*

$$\frac{d}{dt} N_-^H \mathbb{1}_{[0,t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(N_+^H \xi_k\right)(t)\xi_k.$$

Le théorème suivant nous permet de calculer la dérivée de B_t^H ;

Théorème 2.8. *[4] Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $F : I \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une fonction différentiable. Alors $\langle ., F(t)\rangle$ est un processus stochastique différentiable au sens de distribution et on a*

$$\frac{d}{dt}\langle ., F(t)\rangle = \left\langle \ ., \frac{d}{dt}F(t) \right\rangle.$$

D'après le théorème précédant et le lemme (2.3.1), on voit que B^H est différentiablle pour $H \in (0,1)$ et

$$\frac{d}{dt}B_t^H = \left\langle ., \sum_{k=0}^{\infty}(N_+^H \xi_k)(t)\xi_k \right\rangle .$$

Maintenant, pour $t \in \mathbb{R}$ on définit la distribution

$$\langle \delta_t \circ N_+^H, f \rangle = \left(N_+^H f\right)(t),$$

où δ_t est la fonction de *Dirac* en t. Alors,

$$\begin{aligned} \| \sum_{k=0}^{\infty} \left(N_+^H \xi_k\right)(t)\xi_k - \delta_t \circ N_+^H \|_{-1}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}(2n+2)^{-2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(N_+^H \xi_k\right)(t)(\xi_k, \xi_n)_0 - \langle \delta_t \circ N_+^H, \xi_n \rangle\right)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}B_t^H = \langle \, ., \delta_t \circ N_+^H \rangle$$

Définition 2.3.3. *Soit $H \in (0,1)$. La dérivée de M_t^H dans $(S)^*$*

$$W_t^H = \langle ., a\delta_t + b\delta_t \circ N_+^H \rangle$$

est appelé le Bruit Blanc Fractionnaire Mixte.

L'un des outils fondamentaux dans l'analyse de bruit blanc est la S-transformé.

Définition 2.3.4. *Pour $\phi \in (S)^*$ la S-transformée est identifiée par*

$$(S\phi)(\eta) = \langle\langle \phi, \exp\left(\langle ., \eta \rangle\right)\rangle\rangle, \quad \eta \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

La S-transformée est bien définie grâce à l'exponentielle de *Wick* pour $< ., \eta >$

$$\exp\left(\langle ., \eta \rangle\right) = \exp\left(\langle \, ., \eta \rangle - \frac{1}{2}|\eta|_0^2\right)$$

de l'intégrale de *Wiener* des fonctions lisses et qui se décroit rapidement sont les fonction test de *Hida*. Aussi, la S-transformée donne une méthode pratique pour caractériser les éléments dans $(S)^*$.

Définition 2.3.5. *L'application $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ est dite U-fonctionnelle si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

i) *Pour tout $\eta, \varsigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'application $\lambda \mapsto F(\eta + \lambda\varsigma)$ est analytique sur $\mathbb{C}$.*

ii) *$\exists K_1, K_2 > 0$ tel que $|F(z\eta)| \leq K_1 \exp(K_2|z|^2 \parallel \eta \parallel^2)$ pour tout $z \in \mathbb{C}, \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et une certaine norme continue $\parallel . \parallel$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Théorème 2.9. *[14] La S-transformée définit une bijection entre l'espace des distributions de Hida $(S)^*$ et l'espace du U-fonctionnelle.*

Le corollaire suivant est un résultat important du théorème précédent concernant l'intégration de *Bochner* des distributions de même type et qui dépend d'un paramètre supplémentaire.

Corollaire 2.3.1.1. *[14] Soient (Ω, F, m) un espace mesuré et $\lambda \to \phi_\lambda$ une application de Ω dans $(S)^*$. Si la S-transformée de ϕ_λ réalise les deux conditions suivantes :*

1. *L'application $\lambda \to (S\phi_\lambda)(\eta)$ est mesurable pour tout $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*
2. *$\exists C_1(\lambda) \in L^1(\Omega, m), C_2 \in L^\infty(\lambda)$, et une norme $\| \, . \, \|$ continue dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$|(S\phi_\lambda)(z\eta)| \leq C_1(\lambda) \exp\left(C_2(\lambda)|z|^2 \| \eta \|^2\right), \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ et } \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

alors ϕ_λ est l'intégrale de Bochner par rapport à une certaine norme Hilbertienne définissant la topologie de $(S)^*$. Par conséquent

$$\int_\Omega \phi_\lambda dm(\lambda) \in (S)^*$$

de plus

$$S\left(\int_\Omega \phi_\lambda dm(\lambda)\right)(\eta) = \int_\Omega (S\phi_\lambda)(\eta) dm(\lambda)$$

2.3.2 Le Bruit Blanc Fractionnaire Mixte Généralisé

La représentation suivante du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé est bien définie

Définition 2.3.6. *Pour $H = (H_1, \ldots, H_n)$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), H_k \in (0,1), \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ un mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé de paramètre H et α dans l'espace de bruit blanc est donné par la version continue de $\left\langle ., \sum_{k=1}^{n} \alpha_k N_-^{H_k} \mathbb{1}_{[0,1)} \right\rangle$.*

Comme on a déjà vu que le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé Z^H n'est pas différentiable presque sûrement, donc maintenant on va montrer que le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé est un processus stochastique différentiable au sens de distribution.

Définition 2.3.7. *Soient $H = (H_1, \ldots, H_n), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et $H_k \in (0,1), \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. La dérivée de mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé $Z_t^{H,\alpha}$ dans $(S)^*$ donnée par*

$$W_t^{H,\alpha} = \left\langle ., \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_t \circ N_+^{H_k} \right\rangle$$

est appelé le bruit blanc fractionnaire mixte généralisé.

Par définition si $X : I \to (S)^*$ est un processus stochastique différentiable au sens de distribution, donc $S\left(\frac{d}{dt} X_t\right)(\eta) = \frac{d}{dt}(SX_t(\eta))$, maintenant on peut obtenir l'expression explicite de la S-transformée du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé et le bruit blanc fractionnaire mixte généralisé.

Proposition 2.3.2. *[14] Soit $H \in (0,1)$, alors pour tout $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

1. $\left(SZ_t^{H,\alpha}\right)(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\eta, N_-^{H_k} \mathbb{1}_{[0,t)}\right)_0$
2. $\left(SW_t^{H,\alpha}\right)(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(N_-^{H_k} \eta\right)(t)$

Preuve :

1. Par (2.6) et par la polarisation de (2.7), on trouve

$$\begin{aligned}\left(SZ_t^{H,\alpha}\right)(\eta) &= \left\langle\left\langle Z_t^{H,\alpha}, \exp\left(\langle ., \eta\rangle\right)\right\rangle\right\rangle = \mathbb{E}_\mu \left(\left\langle ., \sum_{k=1}^{n} \alpha_k N_-^{H_k} \mathbb{1}_{[0,t)}\right\rangle \exp\left(\langle ., \eta\rangle\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\eta, N_-^{H_k} \mathbb{1}_{[0,t)}\right)_0 .\end{aligned}$$

2. Comme le bruit blanc fractionnaire mixte généralisé $W_t^{H,\alpha}$ est la dérivée du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé et d'après la proposition (2.3.1), il résulte $\left(SW_t^{H,\alpha}\right)(\eta) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(N_-^{H_k} \eta\right)(t)$.

Chapitre 3

Analyse Stochastique du Mouvement Brownien Fractionnaire mixte

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des équations différentielles stochastiques mixte i.e.des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire mixte de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s + \int_0^t c(s, X_s)dB_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

où B est le mouvement Brownien et B^H est le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. L'intégrale par rapport à B est l'intégrale d'*Itô* [38] et l'intégrale par rapport à B^H est l'intégrale de *Lebesgue-Stieltjes* généralisé ou l'intégrale de *Young*.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et complet. Notant que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien et $(B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

3.1 Calcul Stochastique par rapport au Mouvement Brownien fractionnaire

Une des idées fondamentales du calcul stochastique est la suivante : Si X est une semimartingale et si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors $f(X)$ est une semimartingale et on peut écrire la formule d'*Itô*.
Il est bien connu que le mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$ d'indice de *Hurst* $0 < H < 1$, est une semimartingale si et seulement si $H = \frac{1}{2}$. Situation dans laquelle il s'agit du mouvement Brownien standard.
Les questions naturelles sont alors : lorsque $H \neq \frac{1}{2}$, est-il possible de construire des intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien fractionnaire ? Peut-on écrire une formule *d'Itô* ?

Des différentes méthodes ont été utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un mouvement Brownien fractionnaire. Citons les contributions suivantes :

- Le calcul de *Malliavin*, il est encore connu par le calcul des variations stochastiques. Ce calcul est un outil puissant qui peut être utilisé pour définir l'intégrale stochastique. (Voir [8], [29], [37]).
- Le calcul de Wick[43]
- L'intégrale stochastique trajectorielle par rapport à un mouvement Brownien fractionnaire définie par *Zähl*r ([30]).
- L'analyse des trajectoires rugueuse ([41]).

3.1.1 Intégrale de *Wiener*

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions étagées. On peut définir l'intégrale de *Wiener* étagée par rapport au mouvement Brownien fractionnaire comme suit :

Définition 3.1.1. *Pour un mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$, on définit l'intégrale de Wiener par rapport au mouvement Brownien fractionnaire pour $f \in \mathcal{E}$ par*

$$\mathcal{I}^H = \int_{\mathbb{T}} f(u)dB_u^H = \sum_{k=1}^{n} f_k(B_{u_{k+1}}^H - B_{u_k}^H), \quad \mathbb{T} = [0,T]$$

où

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbb{1}_{(u_k,u_{k+1}]}, \; u \in [0,T].$$

On élargit l'application $\mathcal{I}^H$ dans un espace des intégrants qui est un espace muni d'un produit scalaire, cet espace est noté $\tilde{\mathcal{H}}$, où $\tilde{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{E}}$.

Définition 3.1.2. *L'intégrale de Wiener par rapport au mouvement Brownien fractionnaire est l'application isométrique $\mathcal{I}^H$ définie comme*

$$\mathcal{I}^H \quad : \tilde{\mathbb{H}} \to \overline{S_{p\mathbb{T}}(B^H)}$$

$$f \to \mathcal{I}^H(f) = X$$

Donc, on peut définir $S_{p\mathbb{T}}(B^H) = \{X, \mathcal{I}^H(f_n) \stackrel{L^2}{\to} X, f_n(x) \subset \mathcal{E}\}$. On associe X avec une suite de fonctions étagées $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ équivalente, telle que $\mathcal{I}^H(f_n) \stackrel{L^2}{\to} X$. De plus, on peut écrire $\int_{\mathbb{T}} f_X(t)dB_t^H$, où f_X est un élément de la classe équivalente.

Rappelons que notre question principale est : quelle est la classe des intégrants dans la définition de l'intégrale de *Wiener*, qui est isométrique à l'espace $S_{p\mathbb{T}}(B^H)$?. Le théorème suivant est à la base

Théorème 3.1. *[23] Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ une classe des intégrants et $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{H}}$ la classe des fonctions étagées et $\mathcal{I}^H(f)$ l'intégrale de $f \in \mathcal{E}$ par rapport au mouvement Brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t\geq 0}$, $H \in (0,1)$. Sous les hypothèses suivantes :*

- *$\tilde{\mathcal{H}}$ est un espace muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$, $f, g \in \tilde{\mathcal{H}}$,*
- *pour $f, g \in \mathcal{E}$, $\langle f, g\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \mathbb{E}(\mathcal{I}^H(f)\mathcal{I}^H(g))$,*
- *l'ensemble $\mathcal{E}$ est dense dans $\tilde{\mathcal{H}}$.*

On a les assertions suivantes :

1. *il y a une isométrie entre l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$ et le sous-espace linéaire de $\overline{S_{p\mathbb{T}}(B^H)}$ qui est une extension de l'application*
$$f \to \mathcal{I}^H(f).$$
2. *$\tilde{\mathcal{H}}$ est isométrique à $\overline{S_{p\mathbb{T}}(B^H)}$ si et seulement si $\tilde{\mathcal{H}}$ est complet.*

3.1.2 Intégrale de *Young*

Puisque, pour $H \in (0,1)$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire $(B_t)_{t\geq 0}$ ne sont pas absolument continues, on ne peut pas utiliser la théorie d'intégration de *Riemann-Stieltjes* pour donner un sens à l'intégrale $\int_0^t f(s)dB_s^H$, pour toute fonction f continue. Cependant, d'après *L.C. Young*[41], si f est assez régulière au sens de Hölder, alors $\int_0^t f(s)dB_s^H$ peut être construite comme la limite de la somme de *Riemann*. Dans la suite, on notera par $C^\alpha(I)$ l'espace des fonctions $\alpha-$Hölder continues définies sur l'intervalle I. Le résultat fondamental de *L.C. Young*[41], est le suivant :

Théorème 3.2. *[41] Soient $f \in C^\beta([0,T])$ et $g \in C^\gamma([0,T])$. Si $\gamma + \beta > 1$, alors pour toute subdivision (t_i^n) de $[0,T]$, dont la maille a tends vers 0, La somme de Riemann*
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i^n)(g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n))$$
converge quand $n \to \infty$, vers une limite indépendante de la subdivision (t_i^n). Cette limite est notée $\int_0^T fdg$ et est appelée l'intégrale de Young de f par rapport à g.

La proposition suivante nous permet d'utiliser le calcul fractionnaire pour étudier l'intégrale de *Young*.

Proposition 3.1.1. *[30] Soient $f \in C^\lambda([a,b])$ et $g \in C^\beta([a,b])$, avec $\lambda + \beta > 1$: soit $1 - \beta < \alpha < \lambda$. Alors, l'intégrale de Young existe et il peut s'exprimer comme*
$$\int_a^b fdg = (-1)^\alpha \int_a^b d_+^\alpha f(a) d_-^{1-\alpha} g_-(b)dt$$
où $g_-(b) = g(t) - g(b)$.

3.1.3 L'intégrale de *Skorohod*

L'intégrale stochastique de *Skorohod* a été introduite pour la première fois par *A.Skorohod* en 1975. Cette intégrale peut être considérée comme une extension de l'intégrale d'*Itô* à des intégrants qui ne sont pas forcément $\mathbb{F}-$adaptés. L'intégrale de *Skorohod* est aussi liée avec la dérivée de *Malliavin*.
Soient $u = u(t, \omega)$, $t \in [0, T], \omega \in \Omega$, un processus stochastique mesurable tel que pour tout $t \in [0, T]$, u_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable et on a :

$$\mathbb{E}[u^2(t)] < \infty.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on peut appliquer l'expansion du chaos de *Wiener-Itô* à la variable aléatoire $u(t) = u(t, \omega), \omega \in \Omega$, et ainsi, il existe des fonctions symétriques $f_{n,t} = f_{n,t}(t_1, \ldots, t_n), (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n$, dans $\tilde{L}^2([0, T]^n), n = 1, 2, \ldots$, telles que

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_{n,t}),$$

où

$$I_n(f) = \int_{[0,T]^n} f(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \ldots dB_{t_n},$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien et $f \in \tilde{L}^2([0, T]^n)$, et la convergence a lieu dans $L^2(\mathbb{P})$. De plus, on a l'isométrie

$$\|u\|_L^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)}. \tag{3.2}$$

Notons que les fonction $f_{n,t}, n = 1, 2, \ldots$, dépendent du paramètre $t \in [0, T]$ donc on peut écrire

$$f_n(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}) = f_n(t_1, \ldots, t_n, t) = f_{n,t}(f_n(t_1, \ldots, t_n))$$

et on peut considérer la fonction f_n comme une fonction de $n+1$ variables. Puisque cette fonction est symétrique par rapport à ses n premières variables, sa symétrie $\tilde{f}_n$ est donnée par

$$\tilde{f}_n(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \frac{1}{n+1}[f_n(t_1, \ldots, t_{n+1}) + f_n(t_2, \ldots, t_{n+1}, t_1) + \ldots + f_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_{n+1}, t_n)] \tag{3.3}$$

Définition 3.1.3. *Soit $u(t), t \in [0, T]$ un processus stochastique mesurable, tel que pour tous $t \in [0, T]$, la variable aléatoire $u(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable et $\mathbb{E}(u^2(t)) < \infty$. Soit son expansion du chaos de Wiener-Itô*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_{n,t}) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(., t)).$$

Alors, on définit l'intégrale de Skorohod de u par

$$\delta(u) = \int_0^t u(t)\delta B_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

lorsque la somme converge dans $L^2(\mathbb{P})$. Ici, $\tilde{f}_n, n = 1, 2, \ldots$, est la fonction symétrique (3.3), dérivé de $f_n, n = 1, 2, \ldots$. On dit que u est l'intégrale de Skorohod.

L'intégrale de *Skorohod* pour le mouvement Brownien fractionnaire

L'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire a été définie principalement pour des intégrants déterministes ou linéaires, mais pour d'autres cas, il a été plus compliqué d'établir une telle intégrale, puisque, la régularité des trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire varie avec le paramètre de *Hurst*. Dans le cas général et particulièrement lorsque $H > \frac{1}{2}$, les trajectoires du mouvement Brownien fractionnaire sont essentiellement $\alpha-$Hölder continues pour $\alpha < H$, par conséquent, une approche d'intégrale stochastique trajectorielle est également efficace de la même manière que celle présentée par *Young*. Dans le cas général, quand $H < \frac{1}{2}$, les trajectoires du mouvement Brownien deviennent plus rugueuses et donc l'approche trajectorielle pour l'intégrale stochastique n'est pas cohérente et par conséquent inutile. Pour cette raison d'autre définitions d'intégrale stochastique ont été introduites. Le plus remarquable est l'intégration de type divergence(ou l'intégrale de *Skorohod*), qui est basé sur l'idée du calcul de *Malliavin*, pour ce cas, on présente brièvement la dérivée de *Malliavin* par rapport à un processus *Gaussien*, en particulier, par rapport au mouvement Brownien fractionnaire.
Soit B^H un mouvement Brownien fractionnaire et $(G_t)_{t\geq 0}$ un processus *Gaussien* centré de la forme :

$$G_t = \int_0^t K(t,s)dB_s^H \tag{3.4}$$

où le noyau K satisfait $\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t K^2(t,s)ds < \infty$.

Définition 3.1.4. *Soit f une fonction telle que toutes ses dérivées sont bornées ($f \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$), La dérivée de Malliavin $D = D(G)$ de F est un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{H})$, définie par*

$$DF = \sum_{i=1}^{n\partial_i} f(G(\varphi_1), \ldots, G(\varphi_n))\varphi_i, \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}$$

où $F = f(G(\varphi_1), \ldots, G(\varphi_n))$

La formule d'*Itô* pour un mouvement Brownien fractionnaire

On montre la formule d'*Itô* pour une intégrale de *Skorohod* indéfinie.

Théorème 3.3. *[8] Soit F une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in [0,T]$, la formule suivante est retenue*

$$f(B_t^H) = f(0) + \int_0^t f'(B_s^H)dB_s + H\int_0^t f''(B_s^H)s^{2H-1}ds.$$

3.2 Équations différentielles stochastiques avec un drift nul

L'unicité de la solvabilité de (3.1), a été prouvée dans les papiers de *K.Kubilius* [26], pour des coefficients indépendants du temps et avec un drift nul. Dans ce cas, l'équation différentielle stochastique devient de la forme suivante :

$$X_t = \xi + \int_0^t f(X_s)dB_s + \int_0^t g(X_s)dB_s^H, \quad t \in [0,t], \tag{3.5}$$

où B est le mouvement Brownien et B^H est le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ avec B et B^H sont éventuellement dépendants. L'intégrale par rapport à B est l'intégrale d'*Itô* [38] et l'intégrale par rapport à B^H est l'intégrale de *Lebesgue-Stieltjes* généralisée ou l'intégrale de *Young*. Comme B_t^H, $0 < H < 1$, n'est pas une semimartingale, donc on ne peut pas utiliser la théorie des semimartingales pour définir l'intégrale par rapport au mouvement Brownien fractionnaire. Il y a plusieurs façons pour définir une intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire. On utilisera l'intégrale de *Riemann-Stieletjes* généralisée. Dans notre approche, la notion de p-variation joue un rôle central. La p-variation d'une fonction f à valeurs réelles sur $[a,b]$ est donnée par

$$V_p(f,[a,b]) = \sup_x \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|^p.$$

La borne supérieure est prise sur la famille de subdivisions $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$. Si $V_p(f,[a,b]) < \infty$, on dit que f est à p-variation bornée sur $[a,b]$. Désignant par $CW_p([a,b])$ la classe des fonctions continues et à p-variation finie sur $[a,b]$.

Il est connu que le mouvement Brownien fractionnaire B^H, $0 < H < 1$, est à p-variation finie pour $p > \frac{1}{H}$ (1.3).

Pour $0 < \alpha \leq 1$, soit $C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que

$$\sup_x |g'(x)| + \sup_{x \neq y} \frac{|g'(x) - g'(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

3.2.1 Existence et Unicité

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant

Théorème 3.4. *Soient* $T > 0, 0 < \alpha < 1, q > 2$ *et* $\frac{1}{H} < p < 2$ *tel que* $\frac{\alpha}{q} + \frac{1}{p} > 1$. *Soient* f *une fonction Lipschtzienne,* $g \in C^{1+\alpha(\mathbb{R})}$, *et* $\mathbb{E}(\xi) < \infty$. *Alors, il existe une unique solution adaptée de l'équation (3.5), avec presque par tout les trajectoires sont dans l'espace* $CW_q([0,T])$.

Pour prouver l'existence de la solution, on utilise une approximation spéciale. Dans l'analyse stochastique est appelé l'approximation du type *Milstien*.
Soit $x^n = \{t_k^n : 0 \leq k \leq m(n)\}, n \geq 1$, une subdivision de l'intervalle $[0,T]$, i.e.$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{m(n)}^n = T$, et soit $\max_k(t_k^n - t_{k-1}^n) \to 0$, quand $n \to \infty$. Pour tout $n \geq 1$, l'approximation est définie comme suit

$$\begin{aligned} Y^n(t) &= \xi + \int_0^t f(Y^n(\tau_s^n))dB_s + \int_0^t g(Y^n(\tau_s^n))dB_s^H \\ &+ \int_0^t \int_{\tau_s^n}^s g'(Y^n(\tau_s^n))f(Y^n(\tau_s^n))dB_s dB_s^H \\ &+ \int_0^t \int_{\tau_s^n}^s g'(Y^n(\tau_s^n))g(Y^n(\tau_s^n))dB_u^H dB_s^H, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\tau_s^n = \tau_{k-1}^n$ et $Y^n(\tau_s^n) = Y^n(t_{k-1}^n)$ si $s \in (t_{k-1}^n, t_k^n]$, $1 \leq k \leq m(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, le processus Y^n est continu par définition et ses trajectoires appartiennent à $CW_q([0,T]), q > 2$.

De plus, pour simplifier les notations, on écrit $hk(Z_s)$ au lieu d'écrire $h(Z_s)k(Z_s)$, où Z est un processus.
Premièrement, on fait la preuve pour la version faible du théorème (3.4), en supposant que f et g sont bornées.

Théorème 3.5. *Soient* $0 < \alpha < 1, q > 2$, *et* $\frac{1}{H} < p < 2$, *tell que* $\frac{\alpha}{q} + \frac{1}{p} > 1$. *Soient* f *et* g *deux fonctions bornées,* f *est une fonction Lipschitzienne,* $g \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$. *Alors, il existe une solution adaptée de (3.5), avec des trajectoires presque partout appartiennent à* $CW_q([0,T])$.

La preuve du théorème (3.5), est basée sur les lemmes suivants

Lemme 3.2.1. *[26] Si les conditions du théorème (3.5), sont satisfaites, alors, pour tout* $T > 0$ *fini et tout* $n \geq 1, r \geq 1$, *on a*

$$\mathbb{E}(V_q^{2r}(Y^n,[0,T])) \leq 2^{2r-1}\left[\mathbb{E}(R^{2r}) + \frac{C(r,q)}{(1-\alpha)^{2r}}T^r|f|_\infty^{2r}\right]\exp\left\{2^{2r-1}C(r,q)L^{2r}\frac{T^r}{(1-\alpha)^{2r}}\right\},$$

où $(1-\alpha)^{2r}$ *est une constante dépendant de* r *et* q, L *est la constante de Lipschtz* *de f, et*

$$\begin{aligned}
R = \quad & \{2C_{p,\frac{q}{\alpha}}[(|f|_\infty|g'|_\alpha + |f|_\alpha|g'|_\infty)V_p(B,[0,T]) \\
& +(|g|_\infty|g'|_\alpha + |g|_\alpha|g'|_\infty)V_p(B^H,[0,T]) + |g|_\alpha]V_p(B^H,[0,T])\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
& +2C_{p,\frac{q}{\alpha}}(1-\alpha)^{-1}[|g|_\infty + 2|g'|_\infty|f|_\infty V_p(B,[0,T]) \\
& +2|g'|_\infty|g|_\infty V_p(B^H,[0,T])]V_p(B^H,[0,T]).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Lemme 3.2.2. *[26] Soient $0<\alpha\leq 1$, $p\geq 1$, $g\in C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$, et $x,y\in W_q((a,b])$, $a<b$. Alors*

$$V_{\frac{p}{x}}(g(x)-g(y),[a,b]) \leq |g'|_\infty V_{\frac{p}{\alpha}}(x-y,[a,b]) + |g'|_\alpha|x-y|_{\infty,[a,b]}V_p^\alpha(y,[a,b])$$

Notons

$$\Gamma(X,\sigma,t) = C_{p,\frac{q}{\alpha}}\max\{|g'|_\infty,|g'|_\alpha\}[1+V_q^\alpha(X,[\sigma,t])V_p^\alpha(B^H,[\sigma,t])]. \tag{3.8}$$

En définissant pour tout $k\geq 1$ un temps d'arrêt

$$\sigma_k^n = \inf\left\{t>\sigma_{k-1}^n : \Gamma(Y^n,\sigma_k^n,t) > \frac{1}{10}+\frac{1}{n+7}\right\}\wedge T,$$

où $\sigma_0^n = 0$.

Lemme 3.2.3. *[26] Soit $T>0$ et soit $x_n=\{t_i^n = i2^{-n}\wedge T : i=0,\ldots,m(n)\}$, $n\geq 1, m(n)=\min\{i\geq 1 : i2^{-n}\geq T\}$, une suite de subdivisions de $[0,T]$, supposons que les fonctions f et g satisfont les conditions du théorème (3.5), Alors pour tout $j\geq 1$, il existe une constante $C(j)$ indépendante de n tel que*

$$\mathbb{R}(V_q^2(Y^n-Y^{n+1}),[0,\sigma_j^n]) \leq C(j)2^{-2\beta n}$$

pour tout $n\geq 1$, où $\beta = \min\{\frac{\alpha}{q},\frac{(1-\alpha)}{q},\frac{(1-\frac{\alpha p}{q})}{p}\}$.

Lemme 3.2.4. *[26] Soient Y^n un processus et (σ_k^n) un temps d'arrêt défini dans le lemme (3.2.3). Alors, il existe un temps d'arrêt σ_k tel que $\mathbb{P}(\sigma_1>0)=1$, $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(\sigma_k<T)=0$, et un processus Y continu avec des trajectoires dans $CW_q([0,T])$ tell que pour tout k*

$$V_{q,\infty}(Y^n-Y,[0,\sigma_k]) \to 0, n\to\infty.$$

3.2.2 Preuve des théorèmes

Preuve du théorème (3.5) :

Du lemme (3.2.4), il s'ensuit qu'il existe un processus stochastique Y avec des trajectoires presque partout dans $CW_q([0,T])$, tel que $V_{q,\infty}(Y^n-Y,[0,\sigma_k])\to 0$ pour tout

k quand $n \to \infty$, où le temps d'arrêt σ_k est défini dans le lemme (3.2.4). Puisque Y^{n,σ_k} est $\mathbb{F}-$adapté, alors Y^{σ_k} est $\mathbb{F}-$adapté. On va montrer que pour tout k,

$$Y_t = \xi + \int_0^t f(Y_s)dB_s + \int_0^t g(Y_s)dB_s^H, \quad t \in [0, \sigma_k]. \tag{3.9}$$

Soit $k \geq 1$. du lemme (3.2.1), et la convergence de Y^n vers Y sur $[0, \sigma_k]$, et du lemme de *Fatou*, il résulte que la variable aléatoire $V_p(Y, [0, \sigma_k])$ est intégrable. Ainsi, la variable aléatoire

$$V_{q,\infty}(Y - \xi - \int_0 f(Y_s)dB_s + \int_0 g(Y_s)dB_s^H, [0, \sigma_k])$$

est intégrable et

$\mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y - \xi - \int_0 f(Y_s)dB_s + \int_0 g(Y_s)dB_s^H, [0, \sigma_k]))$

$$\leq \mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y - Y^n, [0, \sigma_k])) + \mathbb{E}(V_{q,\infty} \int_0 [f(Y_s) - f(Y_s^n)]dB_s, [0, \sigma_k])$$

$$+\mathbb{E}(V_{q,\infty}(\int_0 [f(Y_s^n) - f(Y^n(\tau_s^n))]dB_s, [0, \sigma_k]))$$

$$+\mathbb{E}(V_{q,\infty}(\int_0 [g(Y_s) - g(Y_s^n)]dB_s^H, [0, \sigma_k]))$$

$$+\mathbb{E}(V_{q,\infty}(\int_0 [g(Y_s^n) - g(Y^n(\tau_s^n)) - \int_{\tau_s^n}^s g'f(Y^n(\tau_s^n))dB_u$$

$$- \int_{\tau_s^n}^s g'g(Y^n(\tau_s^n))dB_u^H]dB_u^H, [0, \sigma_k]) = \sum_{j=1}^{5} J_j.$$

où

$$\begin{aligned} J_j &= |g(Y^{n+1}_{t^{n+1}_{2j-1}}) - g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}}) - g'f(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B - g'g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B^H| \\ &\leq |g(Y^{n+1}_{t^{n+1}_{2j-1}}) - g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}} + f(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B + g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B^H)| + |g'(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}}) \\ &+\theta[f(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B + g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\delta B^H]) - g'(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})| \times |f(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B + g(Y^{n+1}_{t^n_{j-1}})\Delta B^H|, \end{aligned}$$

où $\Delta B = B_{t^{n+1}_{2j-1}} - B_{t^n_{j-1}}$, $\Delta B^H = B^H_{t^{n+1}_{2j-1}} - B_{t^n_{j-1}}$ et θ est une variable aléatoire tel que $0 \leq \theta \leq 1$.
Notons que $V_{q,\infty}(Y^n - Y, [0, \sigma_k]) \leq \liminf_{m\to\infty} V_{q,\infty}(Y^n - Y^{n+m}, [0, \sigma_k])$, et en utilisant le lemme de *Fatou*, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y^n - Y, [0,\sigma_k])) &\leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y^n - Y^{n+m}, [0,\sigma_k])) \\
&\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y^{n+j} - Y^{n+j-1}, [0,\sigma_k^{n+j-1}])) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (n+j-1+8)^{-\frac{2}{\alpha}} = \sum_{j=n}^{\infty} (j+8)^{\frac{-2}{\alpha}}, \text{(en utilisant le lemme(3.2.2))}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\lim_{n} \mathbb{E}(V_{q,\infty}(Y^n - Y, [0,\sigma_k])) = 0.$$

Alors, Y est une solution de (3.5), sur $[0,\sigma_k]$.
Par ailleurs,

$$\mathbb{P}\left(V_{q,\infty}(Y - \xi - \int_0 f(Y_s)dB_s + \int_0 g(Y_s)dB_s^H, [0,T]) > 0\right) \leq \mathbb{P}(\sigma_k < T)$$

et $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\sigma_k < T) = 0$, par le lemme (3.2.4), alors Y est une solution de l'équation (3.5) sur $[0,T]$.

Preuve du théorème (3.4) :

<u>L'unicité de la solution</u>

Supposons que X et Y sont deux solutions de (3.5). Définissons

$$v_k = \inf\{t > \sigma_{k-1} : \Gamma(X, v_{k-1}, t) > \frac{1}{4}\} \wedge T, v_0 = 0, \quad k \geq 1,$$

où Γ est définie par (3.8), et

$$\gamma_n = \inf\{t > 0 : V_{q,\infty}(X,[0,t]) > n, V_{q,\infty}(Y,[0,t]) > n\}.$$

Fixons $n \geq 1$. Par le lemme (3.2.2),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_q^2(X-Y, [v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n])) &\leq 2\mathbb{E}\left(V_q^2\left(\int_{v_{k-1}\wedge\gamma_n} [f(X_s) - f(Y_s)]dB_s, [v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n]\right)\right) \\
&+2\mathbb{E}\left(V_q^2\left(\int_{v_{k-1}\wedge\gamma_n} [g(X_s) - g(Y_s)]dB_s^H, [v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n]\right)\right) \\
&\leq 2b_2 k_{q,2}\mathbb{E}\left(\int_{v_{k-1}\wedge\gamma_n}^{v_k\wedge\gamma_n} |f(X_s) - f(Y_s)|^2 ds\right) \\
&+2\mathbb{E}(\Gamma^2(Y, v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n)V_{q,\infty}^2(X-Y, [v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n])) \qquad (3.10) \\
&\leq 2b_2 L^2 k_{q,2}\mathbb{E}(\int_{v_{k-1}\wedge\gamma_n}^{v_k\wedge\gamma_n} |X_s - Y_s|^2 ds) \\
&+\tfrac{1}{8}\mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X-Y, [v_{k-1}\wedge\gamma_n, v_k\wedge\gamma_n])).
\end{aligned}$$

b_2 est une constante de l'inégalité de *Burkholder-Davis-Gundy* [20].
Par induction, nous devons prouver que $X = Y$ sur $[0, v_k \wedge \gamma_n]$ pour tout $k \geq 1$. Soit $k = 1$. Alors

$$\mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X - Y, [0, v_1 \wedge \gamma_n])) \leq 4\mathbb{E}(V_q^2(X - Y, [0, v_1 \wedge \gamma_n]))$$

et par l'inégalité (3.10)

$$\mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X - Y, [0, v_1 \wedge \gamma_n])) \leq 4b_2 L^2 k_{q,2} \int_0^T \mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X - Y, [0, s \wedge v_1 \wedge \gamma_n]))ds$$

Par le lemme de Gronwall [20], on trouve $V_q(X - Y, [0, v_1 \wedge \gamma_n]) = 0$. Puisque

$$|X - Y|_{[0,v_1 \wedge \gamma_n],\infty} \leq V_q(X - Y, [0, v_1 \wedge \gamma_n])$$

alors $X = Y$ sur $[0, v_1 \wedge \gamma_n]$.
Maintenant, en supposant $X = Y$ sur $[0, v_{k-1} \wedge \gamma_n]$. Alors par l'inégalité (3.10)

$$\mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X - Y, [v_{k-1} \wedge \gamma_n, v_k \wedge \gamma_n]))$$

$$\leq 4b_2 L^2 k_{q,2} \mathbb{E}(\int_{v_{k-1}\wedge\gamma_n}^{v_k \wedge \gamma_n} V_{q,\infty}^2(X - Y, [v_{k-1} \wedge \gamma_n, s])ds$$

$$\leq 4b_2 L^2 k_{q,2} \int_0^T \mathbb{E}(V_{q,\infty}^2(X - Y, [v_{k-1} \wedge \gamma_n, v_k \wedge \gamma_n]))ds.$$

Ainsi, par le lemme de Gronwall [20], on obtient $X = Y$ sur $[0, v_k \wedge \gamma_n]$ et on obtient l'assertion requise.
Puisque

$$\mathbb{P}(V_{q,\infty}(X - Y, [0, T]) > 0) \leq \mathbb{P}(v_k < T) + \mathbb{P}(\gamma_n < T) = \mathbb{P}(\Gamma(X, 0, T) > \frac{k}{4})$$
$$+\mathbb{P}\{V_{q,\infty}(X, [0, T]) > n$$

et comme $V_{q,\infty}(Y, [0, T]) > n\} \to 0$ quand $k \to \infty$ et $n \to \infty$, alors $X = Y$ sur $[0, T]$.

<u>L'existence de la solution :</u> on définit la suite$(f_n)_{n\geq 0}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq n, \\ f(x)(2 - \frac{|x|}{n}), & \text{si } n < |x| \leq 2n, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2n. \end{cases}$$

et $g_n(x) = g(x)\phi_n(x)$, où $\phi_n(x) = \phi(\frac{x}{n})$, ϕ est une fonction positive et infiniment différentiable telle que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors, les fonctions f_n et g_n sont bornées, f_n est *Lipschitzienne*, $g_n \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R})$. D'après le théorème (3.5), il existe une solution X^n de l'équation

$$X_t^n = \xi + \int_0^t f_n(X_s^n)dB_s + \int_0^t g_n(X_s^n)dB_s^H, \quad 0 \leq t \leq T \quad .$$

D'après les hypothèses du théorème (3.4), la fonction f est *Lipschitzienne* et $g \in C^{1+\alpha}$. Ainsi, il existe une constante L telle que

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \leq L(1+|x|) \quad \text{et} \quad |g_n(x)| \leq |g(x)| \leq L(1+|x|),$$

pour tout x.

De plus, l'estimation suivante détient,

Lemme 3.2.5. *[26] Soit $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$, on définit pour tout $k \geq 1$ le temps d'arrêt*

$$\begin{cases} \theta_k = \inf\{t > \theta_{k-1} : V_p(B^H, [\theta_{k-1}, t]) > (4C_{p,q} \max\{2|g'|_\infty + 6k, L\})^{-1}\} \wedge (\theta_{k-1} + (16k_{q,1}^2 b_1^2 L^2)^{-1}) \wedge T, \\ \theta_0 = 0, \end{cases}$$

où $k = L \sup_x \phi'(x)$, la fonction ϕ est définie par (3.11). Alors, pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}(V_q(X^n, [0, \theta_k])) \leq 2^k(1 + \mathbb{E}(|\xi|)).$$

On définit pour tout $n \geq 1$, un temps d'arrêt $\mu^n = \inf\{t > 0 : |X_t^n| > n\}$. Fixons m et n, soit $m > n$. On va montrer que les solutions X^n et X^m coïncident dans l'intervalle $[0, \mu^n \wedge \theta_j]$, pour tout $j \geq 1$.

Premièrement, on note que $f_n(X_t^n) = f_m(X_t^n)$ et $g_n(X_t^n) = g_m(X_t^n)$, si $t \leq \mu^n \wedge \mu^m$. Ainsi,

$$\int_0^t [f_n(X_s^n) - f_m(X_s^n)]dB_s = 0, \quad \int_0^t [g_n(X_s^n) - g_m(X_s^n)]dB_s^H = 0$$

et

$$X_t^n - X_t^m = \int_0^t [f_n(X_s^n) - f_m(X_s^m)]dB_s + \int_0^t g_n(X_s^n) - g_m(X_s^m)dB_s^H$$

si $t \leq \mu^n \wedge \mu^m$.

Définissons pour tout $k \geq 1$ un temps d'arrêt

$$\upsilon_k^n = \inf\{t > \sigma_{k-1}^n : \Gamma(X^n, \upsilon_{k-1}^n, t) > \frac{1}{4}\} \wedge T, \quad \upsilon_0^n = 0.$$

Puis, répétons la preuve de l'unicité de la solution de l'équation (3.5), on aura $X^n = X^m$ sur $[0, \upsilon_k^n \wedge \mu^n \wedge \mu^m \wedge \theta_j]$, pour tout $k, j \geq 1$.

Par l'inégalité

$$\mathbb{P}(V_{q,\infty}(X^n - X^m, [0, \mu^n \wedge \mu^m \wedge \theta_j]) > 0)$$

$$\leq \mathbb{P}(\upsilon_k^n \wedge \mu^n \wedge \mu^m \wedge \theta_j) \leq \mathbb{P}(\Gamma(X^n, 0, \theta_j) > \frac{k}{4})$$

$$\leq 4k^{-1} C_{p,\frac{q}{\alpha}} \max\{|g'|_\infty, |g'|_\alpha\}[\mathbb{E}(V_p(B^H, [0,T])) + \mathbb{E}(V_q^\alpha(X^n, [0, \theta_j]))V_p(B^H, [0,T])].$$

On se servant de l'inégalité suivante :

$$V_r(B^H, [s,t]) \leq L^{H,\frac{1}{r}}(t-s)^{\frac{1}{r}}$$

et du lemme (3.2.5), on obtient $X^n = X^m$ sur $[0, \mu^n \wedge \mu^m \wedge \theta_j]$ pour tout $j \geq 1$.

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(V_{q,\infty}(X^n - X^m, [0, \theta_j]) > 0) \leq \mathbb{P}(\mu^n < \theta_j) + \mathbb{P}(\mu^n < \theta_j)$$

$$\leq \mathbb{P}(V_q(X^n, [0, \theta_j]) + |\xi| > n) + \mathbb{P}(V_q(X^m, [0, \theta_j]) + |\xi| > m)$$

et du lemme (3.2.5), on aura

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mathbb{P}(V_{q,\infty}(X^n - X^m, [0, \theta_j]) > 0) = 0.$$

Donc il existe un processus stochastique $\tilde{X}^{(j)}$ avec des trajectoires dans $CW_q([0,T])$ tell que pour tout $j \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_{q,\infty}(X^n - \tilde{X}^j, [0, \theta_j]) > \varepsilon) = 0.$$

Puisque, $X^n = X^m$ sur $[0, \mu^n \wedge \mu^m \wedge \theta_j]$, aussi $\mu^n \wedge \theta_j \leq \mu^m \wedge \theta_j$ si $m > n$.

$n = n_1 < n_2 < \ldots$, pour tout $j \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(V_{q,\infty}(X^{n_k} - \tilde{X}^{(j)}, [0, \theta_j]) > \varepsilon) = 0.$$

et $X_t^{n_1} = X_t^{n_2} = \ldots = \tilde{X}_t^{(j)}$ si $t \leq \mu^{n_1} \wedge \theta_j$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}\left(V_{q,\infty}\left((\tilde{X})^j - \xi - \int_0 f(\tilde{X}_s^{(j)})dB_s - \int_0 g(\tilde{X}_s^{(j)})dB_s^H, [0,\theta_j]\right) > 0\right)$$
$$\leq \mathbb{P}(\mu^{n_1} < \theta_j) \leq \mathbb{P}(V_q(X^{n_1}, [0,\theta_j]) + |\xi| > n_1) \to 0$$

quand $n_1 = n \to \infty$. Il s'ensuit que $\tilde{X}^{(j)}$ est une solution de (3.5), sur $[0,\theta_j]$ pour tout $j \geq 1$. Soit $i > j$. Alors $\tilde{X}^j = \tilde{X}^i$ sur $[0,\theta_j]$. Le processus $X_t = \tilde{X}^1 \mathbb{1}_{\{0\leq t\leq \theta_t\}} + \sum_{k\geq 2} \tilde{X}^k \mathbb{1}_{\{\theta_{k-1}\leq t\leq \theta_k\}}$ sera donc, la solution de l'équation différentielle stochastique (3.5).

3.3 Équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire et un mouvement Brownien

3.3.1 L'existence et L'unicité de la solution d'une équation dirigée par le mouvement Brownien fractionnaire semi-linéaire

On considère une équation différentielle stochastique de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \sigma_1 \int_0^t X_s dB_s + \sigma_2 \int_0^t X_s dB_s^H, \quad t \in [0,T] \tag{3.12}$$

où X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0-$mesurable, σ_1 et σ_2 deux nombres réels.Ici, on n'impose aucune condition sur la dépendance entre le mouvement Brownien et le mouvement Brownien fractionnaire, définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, t \in [0,T])$.

Théorème 3.6. *[47] Supposons que b est une fonction lipschitzienne et a croissance linéaire en x i.e.* $\exists L > 0, x, y \in \mathbb{R}$:

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq L|x-y|, b(t,x) \leq L(1+|x|),$$

et est continue sur la variable t. *i.e.* $b \in C([0,T],\mathbb{R})$.
Alors, il existe une solution $\{X_t, t\in[0,T]\}$ *unique de l'équation(3.12), et les trajectoires de* X *sont dans l'espace* $C^{\frac{1}{2}-}([0,T])$ *p.s.*

3.3.2 L'existence et L'unicité de la solution pour un mouvement Brownien fractionnaire du paramètre $H \in (\frac{3}{4}, 1)$

On considère l'équation différentielle stochastique mixte de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s + \int_0^t c(s,X_s)dB_s^H + \varepsilon \int_0^t c(s,X_s)dV_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.13}$$

où $a,b,c : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables, $\varepsilon > 0$, et V_t est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, $(V_t)_{t\geq 0}$ est indépendant de B et B^H est indépendant de B et de V. De plus, X_0 indépendante de B, V et de B_t^H. L'intégrale $\varepsilon \int_0^t c(s, X_s)dV_s$ va jouer le rôle du terme de stabilisation. Il nous permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution de (3.13), adaptée à $\mathcal{F}'_t$ où

$$\mathcal{F}'_t = \sigma\{X_0, B_s, (\varepsilon V_s + B_s^H)/s \in [0,t]\}.$$

Théorème 3.7. *[46] Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

(i) $\forall s \in [0, T]$:

$$|a(s,0)| + |b(s,0)| + |c(s,0)| \leq L,$$

et $L > 0$:

$$|a(s,x)| + |b(s,x)| + |c(s,x)| \leq L(1 + |x|),$$

(ii) *Il existe une fonction croissante* $l : [0, T] \to \mathbb{R}$, *telle que* $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(s,x) - a(s,y)| + |b(s,x) - b(s,y)| + |c(s,x) - c(s,y)| \leq l(s)|x - y|,$$

(iii) *La valeur initiale* X_0 *est de carré intégrable.*

Alors, l'équation (3.13) a une solution $(X_t)_{t\geq 0}$ $\mathcal{F}'_t-$*adaptée et unique sur* $[0, T]$.

3.3.3 L'existence et L'unicité de la solution en tant que Résultat Limite pour les équations avec le terme de Stabilisation :

Maintenant, on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans l'équation (3.13). Soit $\varepsilon = \frac{1}{N}, N \geq 1$, et on considère pour tout $t \in [0, T]$, la suite des équations avec le terme de stabilisation

$$X_t^N = X_0 + \int_0^t a(s, X_s^N)ds + \int_0^t b(s, X_s^N)dB_s + \int_0^t c(s, X_s^N)dB_s^H + \frac{1}{N}\int_0^t c(s, X_s^N)dV_s. \tag{3.14}$$

Supposons que X_0 et les coefficients a, b, c satisfont les conditions (i), (ii) et (iii), du théorème précédent. Alors, d'après le théorème (3.7), l'équation (3.14) admet une unique solution, dite $\{X_t^N, t \in [0, T]\}$. Évidemment, les solutions sont adaptées aux différentes filtrations $\mathcal{F}_t^N = \sigma\{X_0, B_s, (N^{-1}V_s + B_s^H)/s \in [0, T]\}$. Notre objectif est d'établir les conditions pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation différentielle mixte en tant que limite :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s + \int_0^t c(s, X_s)dB_s^H, \quad t \in [0, T], \tag{3.15}$$

Supposons que les coefficients de l'équation (3.15) vérifient la condition (iii) et :

il existe des constantes $C, L, M > 0$, $\gamma \in (1 - H, 1)$ et $k \in (\frac{3}{2} - H, 1)$, telles que :

(iv) tous les coefficients sont bornés

$$|a(s,x)| + |b(s,x)| + |c(s,x)| \leq L, \ \forall s \in [0,T], \ \forall x \in \mathbb{R},$$

(v) tous les coefficients sont de *Lipschitz* en x :

$$|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|+|c(t,x)-c(t,y)| \leq L|x-y|, \ \forall t \in [0,T], \ \forall x,y \in \mathbb{R},$$

(vi) la dérivée de la fonction c en point x existe et est Hölder continue en tout t : $\forall s \in [0,T], \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$|c(s,x) - c(t,x)| + |\partial_x c(s,x) - \partial_x c(t,x)| \leq L|s-t|^\gamma,$$

(vii) la dérivée de c est Hölder continue en tout point x :

$$|\partial_x c(s,x) - \partial_x c(t,y)| \leq L|x-y|^k,$$

$\forall t \in [0,T]$ et $\forall y \in \mathbb{R}$.

On considère W^β l'espace fonctionnel de type de *Besov*[1] :

$$W^\beta_{[0,T]} = \{Y = Y_t(\omega)/(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, \| \ Y \ \|_\beta < \infty\}$$

avec

$$\| \ Y \ \|_\beta = \sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbb{E}(Y_t)^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{|Y_t - Y_s|}{(t-s)^{1+\beta}} ds \right)^2 \right)$$

où $\beta < (\frac{1}{2} \wedge \gamma \wedge \frac{k}{2}) \wedge (k - \frac{1}{2})$

Théorème 3.8. *L'équation différentielle stochastique mixte (3.15) a une solution sur $[0,T]$ et cette solution est unique.*

Preuve :

pour prouver ce théorème, on a besoin du théorème suivant

Théorème 3.9. *[46] La solution de l'équation (3.14) appartient à l'espace fonctionnel de type de Besov $W^\beta_{[0,T]}$, pour tout $N > 1$.*

Puisque l'espace $W^\beta_{[0,T]}$ est un espace complet, et d'après le théorème (3.9), on peut définir

$$X_{\tau_R \wedge T} = \lim_{N\to\infty} X^N_{\tau_R \wedge T}.$$

1. L'espace de *Besov* $\mathbb{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est constitué des distributions tempérées f sur $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles $\|f\|_{\mathbb{B}^s_{p,q}} = \{\sum_{j=0}^{+\infty} \|2^{sj}\varphi_j f\|^q_{L^p}\}^{\frac{1}{p}} < \infty$, tels que $1 \leq p,q \geq \infty$

où la limite est dans l'espace $W^{\beta}_{[0,T]}$ (en particulier, la limite existe dans l'espace $L^2([0,T]\times\Omega)$). D'après l'estimation similaire suivante
pour $t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$

$$\left\| \sup_{t_1\leq t\leq t_2} |X_t| \right\|_2 \leq (h+1)c_1 + \exp(2)C_{H,\gamma}\theta^{-\frac{\gamma}{2H}}\frac{(t_2-t_1)^H}{1-\theta} = L,$$

où c_1 est une constante, $0<\theta<\left(\frac{3}{2(\exp(2)-1)}\right)^H$, $0<\gamma<2H$, $C_{H,\gamma} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\gamma}{2}} HB_\gamma}{\gamma(H-\frac{\gamma}{2})}$
et d'après le théorème (3.9), on prouve que $X_{\tau_R\wedge t}$ est une solution unique de l'équation (3.15) sur l'intervalle $[0,\tau_R]$, on se rappelle que τ_R est pour tout $R>1$, un temps d'arrêt donné par

$$\tau_R = \inf\{t : C'_t(\omega) \geq R\} \wedge T, \tag{3.16}$$

où

$$C'_t(\omega) = c(\Lambda_{1-\beta}(B^H)) \vee \xi^b_{t,\delta} \vee \xi^c_{t,\delta}$$

$\delta^b = \left(\int_0^t\int_0^t \frac{|\int_x^y b_u dB_u|^{\frac{2}{\delta}}}{|x-y|^{\frac{1}{\delta}}} dxdy\right)^{\frac{\delta}{2}}$. Donc de (3.16), on a $\tau_{R_1}\leq\tau_{R_2}$ pour tout $R_1\leq R_2$. Alors, $X_{\tau_{R_1}}$ et $X_{\tau_{R_2}}$ coïncident dans l'intervalle $[0,\tau_R]$. D'où en passent à la limite lorsque $R\to\infty$, on obtient l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.15) dans $[0,T]$.

3.4 Équation Différentielle stochastique dirigée par un Mouvement Brownien Fractionnaire et un Mouvement Brownien

D. Nualart et *J. Guerra*[7] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution pour une équation différentielle stochastique dépend du temps, dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire multidimensionnel de paramètre $H\in(\frac{1}{2},1)$ et un mouvement Brownien multidimensionnel. dans cette partie, on va étudier l'équation différentielle stochastique d-dimensionnelle de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s + \int_0^t c(s,X_s)dB^H_s, \tag{3.17}$$

où $B_t = \{(B^1_t,\ldots,B^m_t), t\in[0,T]\}$ est un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^m$,
$B^H_t = \{(B^{1,H}_t,\ldots,B^{l,H}_t), t\in[0,T]\}$ est un mouvement Brownien fractionnaire sur $\mathbb{R}^d$ avec $H>\frac{1}{2}$. Supposons que B et B^H sont indépendants. L'intégrale $\int_0^t b(s,X_s)dB_s$ est traitée comme l'intégrale stochastique d'*Itô* [38], et l'intégrale $\int_0^t c(s,X_s)dB^H_s$ comme l'intégrale de *Riemann-Stieltjes* au sens de *Zähle*[30].

Fixant l'intervalle du temps $[0,T]$, et un espace de probabilité complet $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Soit X_0 une variable aléatoire d-dimensionnel indépendante de (B,B^H). Pour tout $t\in[0,T]$, en désigne par $\mathcal{F}_t$ la $\sigma-$algèbre engendrée par les variables aléatoires

$\{X_0, B_s^H, B_s, s \in [0,T]\}$ et les ensembles $\mathbb{P}-$négligeables.
On considère une filtration $\{\mathcal{G}_t, t \in [0,T]\}$ plus grande telle que

1. $\{\mathcal{G}_t\}$ est continue à droite et $\mathcal{G}_0$ contient les partie, $\mathbb{P}-$négligeables.
2. X_0 et B^H sont $\mathcal{G}_0$ mesurable, et B est un $\mathcal{G}_t-$ mouvement Brownien.

Notons que $\hat{\mathcal{F}}_t \subset \mathcal{G}_t$, où $\hat{\mathcal{F}}_t$ est la $\sigma-$algèbre engendrée par les variables $\{X_0, B_s^H, B_s, s \in [0,T]\}$ et les parties $\mathbb{P}-$négligeables, Les coefficients $a : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d, b_i : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d, i = 1, \ldots, m, c_j : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d, j = 1, \ldots, l$ sont des fonctions mesurables. On aurait besoin aux hypothèses suivantes sur les coefficients :

(H_a) La fonction $a(t,x)$ est continue. De plus, elle a une continuité *Lipschitzienne* par rapport à x, et a une croissance linéaire aussi par rapport à x, uniformément en t, i.e. qu'il existe deux constante L_1 et L_2, telle que

$$|a(t,x) - a(t,y)| \leq L_1|x-y|,$$

$$|a(t,x)| \leq L_2(1+|x|),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0,T]$.

(H_b) La fonction $b(t,x)$ est continue. De plus, elle a une continuité *Lipschitzienne* par rapport à x, et a une croissance linéaire aussi par rapport à x, uniformément en t, i.e. qu' il existe deux constante L_3 et L_4, telle que

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq L_3|x-y|,$$

$$|b(t,x)| \leq L_4(1+|x|),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0,T]$.

(H_c) La fonction $c(s,x)$ est continue et est continuement différentiable en x. De plus, il existe des constantes L_5, L_6 et $L_7, 0 < \beta, \delta \leq 1$ telles que

$$|\partial_{x_i} c(t,x)| \leq L_5,$$

$$|\partial_{x_i} c(t,x) - \partial_{x_i} c(t,y)| \leq L_6|x-y|^\delta$$

$$|c(t,x) - c(s,x)||\partial_{x_i} c(t,x) - \partial_{x_i} c(s,x)| \leq L_7|t-s|^\beta,$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0,T]$.

Définition 3.4.1. *Soit $\mathbb{W}_{\mathcal{G}}$ l'espace des processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ d-dimensionnels $\mathcal{G}_t$-adaptés, tels que*

$$\int_0^t \mathbb{E}^B(\| X_s \|_\alpha^2 \, ds) < \infty.$$

où $\| f(t) \|_\alpha^2 = |f| + \int_0^t \frac{|f(t)-f(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}} ds$, $W_0^{\alpha,\infty}$ l'espace des fonctions mesurables $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$, telles que

$$\| f \|_{\alpha,\infty} = \sup_{t\in[0,T]} \| f \|_\alpha < \infty. \tag{3.18}$$

Une solution forte de l'équation (3.17), est un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ qui satisfait (3.17)p.s ($\mathbb{E}^B$ est l'espérance conditionnelle sachant $\hat{\mathcal{F}}_0$, i.e sachant X_0 et B^H). Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant

Théorème 3.10. *Supposons que les coefficients $a, b_i, i = 1, \dots, m$ et $c_j, j = 1, \dots, l$ vérifient les hypothèse $(H_a), (H_b)$ et (H_c). Si $\alpha \in [1-H, \min\{\frac{1}{2}, \beta, \frac{\delta}{2}\}]$, alors il existe une unique solution forte de l'équation (3.17).*

3.4.1 Unicité trajectorielle

Définition 3.4.2. *Une solution faible de l'équation différentielle stochastique (3.17), est le triplet $\{(X, B^H, B), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \{\mathcal{G}_t, t \in [0, T]\}\}$, où*

1. *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{G}_t\}$ est une filtration continue à droite telle que $\mathcal{G}_0$ contient toutes les parties $\mathbb{P}$-négligeables.*
2. *B est un $\mathcal{G}_t$-mouvement Brownien m-dimensionnel.*
3. *B^H est un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre H qui est $\mathcal{G}_0$-mesurable.*
4. *X est un processus $\mathcal{G}_t$-adapté, de trajectoires dans $W_0^{\alpha,\infty}$ p.s., et $\int_0^t \mathbb{E}^B(\| X_s \|_\alpha^2 \, ds) < \infty$. p.s.*
5. *(X, B^H, B) satisfait l'équation (3.17).*

Lemme 3.4.1. *[7] Soit $0 < \eta < \frac{1}{2}$. Si f est une fonction continue telle que $\| f \|_\eta \leq N$ et $\alpha < \eta\delta$, alors $\triangle(f)$ est bornée par une constante C dépend de T, N, α, δ, et η, où*

$$\triangle(f) = \int_0^s \frac{|f(s) - f(r)|^\delta}{(s-r)^{\alpha+1}} dr$$

Théorème 3.11. *(**Unicité trajectorielle**) Soit $1 - H < \alpha < \min\{\beta, \frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}\}$. Alors, la propriété d'unicité trajectorielle est satisfaite pour (3.17).*

Preuve :
Soient X et Y deux solutions faibles de l'équation (3.17) définies sur le même espace de probabilité , adaptées à la même filtration et ayant la même valeur initiale.
Pour tout $\eta < \frac{1}{2}$, les trajectoires de X et de Y sont η-Hölderiennes continues.
On choisit η tel que $\alpha < \eta < \frac{1}{2}$. Considérons l'ensemble $\Omega_N \subset \Omega$, défini par

$$\Omega_N = \{\omega \in \Omega : \|X\|_\eta \leq N, \text{ et } \|Y\|_\eta \leq N\},$$

avec $N \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\Omega_N \nearrow \Omega$. De l'équation (3.17), on a la différence entre les deux solutions satisfait

$$\mathbb{E}^B\left[\|X_t - Y_t\|_\alpha^2 \mathbb{1}_{\Omega_N}\right] \leq 4\mathbb{E}^B(\|F_t^a(X) - F_t^a(Y)\|_\alpha^2 \mathbb{1}_{\Omega_N}) + 4\mathbb{E}^B(\|G_t^{\sigma B}(X) - G_t^{\sigma B}(Y)\|_\alpha^2)$$
$$+ 4\mathbb{E}^B(\|G_t^c(X) - G_t^c(Y)\|_\alpha^2 \mathbb{1}_{\Omega_N}), \tag{3.19}$$

où $F^a(f)$, $G^b_t(f) = \int_0^t b(s,f(s))dB_s$ et $G^c(f) = \int_0^t c(s,f(s))dB^H_s$ sont des processus intégraux.
On divise l'ensemble Ω en Ω_N et $\Omega\backslash\Omega_N$ dans la deuxième somme de (3.19) et en utilisant les estimations suivantes :

1. Si $1-H<\alpha<\min(\frac{1}{2},\beta)$ et $f,h\in W_0^{\alpha,\infty}$, alors pour tout $s\in[0,T]$,
$$\|G^c_t(f)-G^c_t(h)\|_\alpha \leq C\Lambda_\alpha(B^H)\times\int_0^t((t-s)^{-2\alpha}+s^{-\alpha})(1+\triangle(f(s))+\triangle(h(s)))\|f(s)-h(s)\|_\alpha ds$$
.

2. Soit $f,h\in\mathbb{W}_{\mathcal{G}}$. Alors pour tout $t\in[0,T]$,
$$\mathbb{E}^B[\|G^b_t(f)\|^2_\alpha] \leq C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\alpha}\left[1+\mathbb{E}^B[\|f(s)\|^2_\alpha]\right]ds,$$

afin d'obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^B\left[\|X_t-Y_t\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right] &\leq C\int_0^t\varphi(s,t)\mathbb{E}^B\left[\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right]ds\\ &+C\int_0^t\varphi(s,t)\left(\mathbb{E}^B\left[\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right]+\mathbb{E}^B\left[\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega\backslash\Omega_N}\right]\right)ds\\ &+C(\Lambda_\alpha(B^H))^2\int_0^t\varphi(s,t)\mathbb{E}^B\left[(1+(\triangle(X_s))^2+(\triangle(Y_s))^2)\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right]ds\end{aligned}\tag{3.20}$$

où $\varphi(s,t)=(t-s)^{-\frac{1}{2}-\alpha}+s^{-\alpha}$.
Si $\omega\in\Omega_N$, alors par le lemme (3.4.1), on a

$$1+(\triangle(X_s))^2+(\triangle(Y_s))^2\leq C_N.\tag{3.21}$$

La suite
$$V_N(t)=\int_0^t\varphi(s,t)\mathbb{E}^B\left[\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right]ds.$$
En multipliant l'équation (3.20) par $\varphi(s,t)$ et en intégrant, et par le théorème de la convergence bornée on a p.s

$$\begin{aligned}V_N(t) &\leq C_N\left[(\Lambda_\alpha(B^H))^2+1\right]\int_0^t\varphi(s,t)V_N(s)ds\\ &+C\int_0^t\varphi(s,t)\int_0^s\varphi(r,s)\mathbb{E}^B\left[\|X_r-Y_r\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega\backslash\Omega_N}\right]drds.\end{aligned}\tag{3.22}$$

On a presque sûrement :

$$V_N(t)\to\int_0^t\varphi(s,t)\mathbb{E}^B\left[\|X_s-Y_s\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega_N}\right]ds<\infty$$

et
$$\int_0^t\varphi(s,t)\int_0^s\varphi(r,s)\mathbb{E}^B\left[\|X_r-Y_r\|^2_\alpha\mathbb{1}_{\Omega\backslash\Omega_N}\right]drds\to 0$$

quand N tend vers l'infini. Alors, il existe une variable aléatoire $N^* \in \mathbb{N}$ telle que

$$C\int_0^t \varphi(s,t)\int_0^s \varphi(r,s)\mathbb{E}^B\left[\|X_r - Y_r\|_\alpha^2 \mathbb{1}_{\Omega\setminus\Omega_N}\right] drds \leq \frac{1}{2}V_N(t), \tag{3.23}$$

pour tout $N \geq N^*$. En remplaçant (3.23) dans (3.22), il résulte

$$V_N(t) \leq C\left[\Lambda_\alpha(B^H)^2 + 1\right]\int_0^t \varphi(s,t)V_N(s)ds,$$

pour tout $N \geq N^*$. En appliquant maintenant, le lemme de *Gronwall*[20], on en déduit que $V_N(t) = 0$ pour tout $N \geq N^*$ p.s. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0,T]) = 1,$$

et l'unicité trajectorielle est détenue.

3.4.2 L'existence

On introduit l'approximation d'*Euler* pour l'équation (3.17), fixons la suite de subdivision, $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = T$ de $[0,T]$, telle que $\sup\limits_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$ quand $n \to \infty$, définissons $X^0(t) = X_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X^n(t) = \ & X_0 + \int_0^t a(k_n(s), X^n(k_n(s)))ds + \int_0^t b(k_n(s), X^n(k_n(s)))dB_s \\ & + \int_0^t c(k_n(s), X^n(k_n(s)))dB_s^H, \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $k_n(t) = t_i^n$, si $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$.

Proposition 3.4.1. *[7] Pour tout entier $N \geq 1$, il existe une variable aléatoire $R_N > 0$, dépend de X_0 et B^H, telle que, p.s.*

$$\mathbb{E}^B\left[|X_t^n - X_s^n|^{2N}\right] \leq R_N|t-s|^N,$$

pour tous $s,t \in [0,T]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.12. *[7] Supposons que les coefficients a, b et c vérifient les hypothèses $(H_a), (H_b)$ et (H_c). Si $\alpha \in [1-H, \min\{\frac{1}{2}, \beta, \frac{\delta}{2}\}]$, alors il existe une unique solution forte de l'équation (3.17).*

Preuve du théorème (3.10)

L'unicité est une conséquence de l'unicité trajectorielle prouvée dans le théorème (3.11). Pour l'existence d'une solution forte, on peut utiliser le résultat classique de *Yamada* et *Watanabe*[40], qui affirme que l'unicité trajectorielle et l'existence d'une solution faible impliquent l'existence d'une solution forte. la différence principale avec la preuve classique est que ici, on a deux sources aléatoires indépendantes du mouvement Brownien, la condition initiale et le mouvement Brownien fractionnaire B^H. Il est suffisant de remplacer $\mathbb{R}^m$ par l'espace produit $\mathbb{R}^m \otimes C([0,T])^m$, menu de la mesure du produit $\mu \otimes \upsilon$, où μ est la loi de X_0 et υ la loi du B^H dans l'espace des fonctions continues.

3.5 Équation différentielle stochastique dirigée par un mouvement Brownien fractionnaire et un mouvement Brownien pouvant être dépendant

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement Brownien fractionnaire mixte de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s + \int_0^t c(s, X_s)dB_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (3.25)$$

où B est le mouvement Brownien et B^H est le mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ avec B et B^H sont éventuellement dépendants. L'intégrale par rapport à B est l'intégrale d'*Itô* [38] et l'intégrale par rapport à B^H est l'intégrale de *Lebesgue-Stieltjes* généralisée ou l'intégrale de *Young*.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et complet. Notons que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien et $(B_t^H)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien fractionnaire adapté à $\mathcal{F}_t$ et que B et B^H peuvent être dépendants.

3.5.1 Définition de base et Hypothèses

On considère f, g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Rappelons que pour $\alpha \in (0, 1)$, les dérivées fractionnaires de f et g sont définies comme suit

$$d_+^\alpha f(a) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x-\alpha)^\alpha} + \alpha \int_a^x \frac{f(x) - f(u)}{(x-u)^{1+\alpha}} du \right) \mathbb{1}_{(a,b)}(x),$$

$$d_-^{1-\alpha} g(b) = \frac{e^{i\Pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{g(x)}{(b-x)^{1-\alpha}} + (1-\alpha) \int_x^b \frac{g(x) - g(u)}{(u-x)^{2-\alpha}} du \right) \mathbb{1}_{(a,b)}(x).$$

Supposons que $d_+^\alpha f(a) \in L^p([a, b])$, $d_-^{1-\alpha} g(b) \in L^q([a, b])$, pour certains $p \in (1, \frac{1}{\alpha})$, et $q = \frac{p}{(p-1)}$.

Sous cette hypothèse, l'intégrale de *Lebesgue-Stieljtes* généralisée est définie par

$$\int_a^b f(x)dg(x) = e^{i\Pi\alpha} \int_a^b (d_+^\alpha f)(a)(d_-^{1-\alpha})g(b)dx.$$

Il a été montré dans ([47]), que pour $f, d_+^\alpha f(a) \in L^1([a, b])$, on peut définir l'intégrale par rapport au mouvement Brownien fractionnaire selon la formule suivante :

$$\int_a^b f_s dB_s^H = e^{i\Pi\alpha} \int_a^b (d_+^\alpha f)(a)(d_-^{1-\alpha} B^H)(b)dx. \quad (3.26)$$

Pour $\alpha \in (1 - H, \frac{1}{2})$, on considère les deux normes suivantes :

$$\parallel f \parallel_{2,\alpha,[a,b]}^2 = \int_a^b \left(|f(s)| + \int_a^s |f(s) - f(z)|(s-z)^{-1-\alpha} dz \right)^2 (s^{-\alpha} + (t-s)^{-\alpha-\frac{1}{2}})ds,$$

$$\parallel f \parallel_{\infty,\alpha,[a,b]} = \sup_{s\in[a,b]} \left(|f(s)| + \int_a^s |f(s) - f(z)|(s-z)^{-1-\alpha} dz \right).$$

Il est clair que $\parallel f \parallel^2_{2,\alpha,[a,b]} \leq C_{\alpha,a,b} \parallel f \parallel_{\infty,\alpha,[a,b]}$.
l'inégalité classique de *Garsia-Rodemich-Rumsey* ([13]), affirme que pour une fonction $f \in C([0,T])$, et pour tout $p > 0, \frac{1}{p} < 0$

$$\sup_{0\leq v<u\leq T} \frac{|f(u)-f(v)|}{(u-v)^{\theta-\frac{1}{p}}} \leq C_{\alpha,p,\theta} \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{\theta p+1}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En modifiant dans cette inégalité, pour $\eta \in (0, \frac{1}{2})$, $p = \frac{2}{\eta}, \theta = \frac{(1-\eta)}{2}$, on trouve que pour tous $t > 0, u, v \in [0,T]$

$$|B_u - B_v| \leq K_t^{B,\eta} |u-v|^{\frac{1}{2}-\eta}, \quad K_t^{B,\eta} = C_\eta \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|B_x - B_x|^{\frac{2}{\eta}}}{|x-y|^{\frac{1}{\eta}}} dxdy \right)^{\frac{\eta}{2}} \tag{3.27}$$

C_η est une constante.
De même, on trouve pour tout $\eta \in (0, H)$

$$|B_u^H - B_v^H| \leq K_t^{B,\eta} |u-v|^{H-\eta}, \quad K_t^{B,\eta} = C_{H,\eta} \left(\int_0^t \int_0^t \frac{|B_x^H - B_y^H|^{\frac{2}{\eta}}}{|x-y|^{\frac{2H}{\eta}}} dxdy \right)^{\frac{\eta}{2}} \tag{3.28}$$

Par conséquent, il est facile de déduire que pour tous $\alpha \in (1-H, \frac{1}{2}), \varepsilon < \alpha + H - 1$

$$\sup_{0\leq u<v\leq t} |(d_-^{1-\alpha} B^H)(v)| \leq C_{\alpha,H,k} K_t^{B,\varepsilon}.$$

Ainsi, grace à la formule (3.26), l'estimation de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien fractionnaire est donnée par :

$$\left| \int_u^v f(s) dB_s^H \right| \leq C_\alpha K_t^{B,\varepsilon} \int_u^v (|f(s)|(s-u)^{-\alpha} + \int_u^s |f(s) - f(z)|(s-z)^{-\alpha-1} dz) ds \tag{3.29}$$

pour tous $\alpha \in (1-H, \frac{1}{2}), t > 0, u \leq v \leq t.$

Hypothèse

Supposons que pour certain $K > 0$, $\beta \in (1-H, 1)$ et pour tous $t, s \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$|a(s,x)| + |c(s,x)| \leq K(1+|x|), \quad |b(t,x)| + |\partial_x(t,x)| \leq K,$$
$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| + |\partial_x(t,x) - \partial_x(t,y)| \leq K|x-y|,$$
$$|a(s,x)-a(t,x)|+|b(s,x)-b(t,x)|+|c(s,x)-c(t,x)|+|\partial_x(s,x)-\partial_x(t,x)| \leq K|s-t|^\beta.$$

Dans la suite, ces hypothèse restent toujours valables.

3.5.2 Propriétés auxiliaires de l'approximation d'*Euler*

On prend une partition uniforme de l'intervalle $[0,T]$: $\{v_k = k\delta, k=0,\dots,n\}$, $\delta = \frac{T}{n}$. On considère l'approximation d'*Euler* de l'équation (3.25), définie par

$$\begin{cases} X_0^\delta = X_0, \\ X_{v_{k+1}}^\delta = X_{v_k}^\delta + a(v_k, X_{v_k}^\delta)(v_{k+1}-v_k) + b(v_k, X_{v_k}^\delta)(B_{v_{k+1}} - B_{v_k}) + c(v_k, X_{v_k}^\delta)(B_{v_{k+1}}^H - B_{v_k}^H). \end{cases}$$

Soit $t_u^\delta = \max\{v_n : v_n \le u\}$ et on définit l'interpolation continue par

$$X_u^\delta = X_0^\delta + \int_0^u a(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)ds + \int_0^u b(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)dB_{t_s}^\delta + \int_0^u c(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)dB_{t_s^\delta}^H. \tag{3.30}$$

Les estimations (3.27) et (3.28), avec nos principales hypothèses, impliquent que

$$|X_s^\delta - X_{t_s^\delta}^\delta| \le CK_s^\eta (s - t_s^\delta)^{\frac{1}{2}-\eta}(1 + |X_{t_s^\delta}^\delta|), \tag{3.31}$$

avec $K_s^\eta = K_s^{B,\eta} + K_s^{B^H\eta}$.

Pour $N \ge 1$, définissons un temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t : K_t^\eta \ge N\} \wedge T$ et un processus arrêté $X_t^{\delta,N} = X_{t\wedge\tau_n}^\delta$

Lemme 3.5.1. *[47] Pour tous $\alpha \in (1-H, \frac{1}{2}\wedge\beta)$, $p > 0, N \ge 1$*

$$\sup_\delta \mathbb{E}(\| X^{\delta,N} \|_{\infty,T}^p) < \infty$$

La propriété fondamentale de la suite des approximations d'*Euler*

Pour $m, n \ge 1$, on considère deux partitions définies par $\{v_i = i\delta, 0 \le i \le n\}$ et $\{\theta_j = j\mu, 0 \le j \le nm\}$, où $\delta = \frac{T}{n}$ et $\mu = \frac{\delta}{m}$.

Soient $t_u^\delta = \max\{v_n : v_n \le u\}$ et $t_u^\mu = \max\{\theta_k : \theta_k \le u\}$. L'interpolation continue de l'approximation d'*Euler* correspondante peut être écrite sous forme d'intégrale :

$$\begin{aligned} X_u^\delta &= X_0^\delta + \int_0^u a(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)ds + \int_0^u b(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)dB_s + \int_0^u c(t_s^\delta, X_{t_s^\delta}^\delta)dB_s^H, \\ X_u^\mu &= X_0^\mu + \int_0^u a(t_s^\mu, X_{t_s^\mu}^\mu)ds + \int_0^u b(t_s^\mu, X_{t_s^\mu}^\mu)dB_s + \int_0^u c(t_s^\mu, X_{t_s^\mu}^\mu)dB_s^H. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Comme précédemment, on définit un temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t : K_t^\eta \ge N\} \wedge T$ et $X_t^{\delta,N} = X_{t\wedge\tau_N}^\delta$, $X_t^{\mu,N} = X_{t\wedge\tau_N}^\mu$. Pour $R \ge 1$, $\mathbf{B}_t^{R,\delta,\mu} = \{\| X^\delta \|_{\infty,t} + \| X^\mu \|_{\infty,t} \le R\}$.

Théorème 3.13. *[47] Soit $\alpha \in (1-H, K)$, où $K = \frac{1}{2}\wedge\beta$. Alors pour tous $0 < \eta < K - \alpha$ et $N, R \ge 1$, l'estimation suivante est satisfaite :*

$$\mathbb{E}(\| X^{\delta,N} - X^{\mu,N} \|_{2,T}^2 \mathbb{1}_{\mathbf{B}_T^{R,\delta,\mu}}) \le M_{R,N}\delta^{2(K-\alpha-\varepsilon)},$$

où la constante $M_{R,N}$ est indépendante de δ, μ.
De plus, une estimation similaire est valide pour $\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{\delta,N} - X_t^{\mu,N}|^2 \mathbb{1}_{\mathbf{B}_T^{R,\delta,\mu}})$.

3.5.3 Existence et Unicité

Théorème 3.14. *L'équation (3.25) a une solution telle que pour tous $\alpha \in (1-H, K)$*

$$\| X \|^2_{\infty,\alpha,[0,T]} < \infty \quad p.s. \tag{3.33}$$

Cette solution est unique dans la classe des processus satisfaisant (3.33), pour certain $\alpha > 1 - H$.

Preuve :
Pour simplifier les notations, notons $Z_{t,s} = Z_t - Z_s$, $r = \frac{1}{2} - \eta$, $h(t,s) = (t-s)^{-1-\alpha}$, $g(t,s) = s^{-\alpha}(t-s)^{-\frac{1}{2}-\alpha}$. Soit C une constante générique, qui est indépendante des variables, et peut-être dépend des paramètres fixés.

Existence :
Soit $\delta_k = \frac{T}{2^k}$. On note $X^k = X^{\delta_k}$, $X^{k,N} = X^{\delta^k,N}$, $t_s^k = t_s^{\delta^k}$, et la norme
$\| . \| = \| . \|_{2,T}$ · $\| . \|_\infty = \| . \|_{\infty,T}$.

Il est facile de voir que pour tout $N \geq 1$, la suite $\{X_t^{k,N}, k \geq 1\}$ est fondamentale pour la norme $(\mathbb{E}(\| . \|^2))^{\frac{1}{2}}$. De plus, notons $A^{R,N,k,l} = \{\| X^{k,N} \|_\infty + \| X^{l,N} \|_\infty \leq R\}$, en prend $p > 1$, et $q = \frac{p}{(p-1)}$ et on écrit

$$\mathbb{E}(\| X^{k,N} - X^{l,N} \|^2) \leq \mathbb{E}(\| X^{k,N} - X^{l,N} \|^2 \mathbb{1}_{(A^{R,N,k,l})}) + \mathbb{E}((\| X^{k,N} \| + \| X^{l,N} \|)^2 \mathbb{1}_{(\Omega \backslash A^{R,N,k,l})})$$

$$\leq \mathbb{E}(\| X^{k,N} - X^{l,N} \|^2 \mathbb{1}_{(A^{R,N,k,l})}) + (\mathbb{E}[(\| X^{k,N} \|_\infty + \| X^{l,N} \|_\infty)^{2p}])^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}(\Omega \backslash A^{R,N,k,l})^{\frac{1}{q}}.$$

D'après le théorème (3.13), le premier terme disparaît quand $k, l \to \infty$, donc on peut écrire

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}} \mathbb{E}(\| X^{k,N} - X^{l,N} \|^2) \leq \sup_{k,l} (\mathbb{E}[(\| X^{k,N} \|_\infty + \| X^{l,N} \|_\infty)^{2p}])^{\frac{1}{p}} \mathbb{P}(\Omega \backslash A^{R,N,k,l})^{\frac{1}{q}}.$$

Le lemme (3.5.1), implique que $\sup_{k,l} (\mathbb{E}[(\| X^{k,N} \|_\infty + \| X^{l,N} \|_\infty)^{2p}]) < \infty$ et aussi, par l'inégalité de *Markov*, $\sup_{k,l} \mathbb{P}(\Omega \backslash A^{R,N,k,l}) \to 0$, quand $R \to \infty$. Par conséquent, en laissant $R \to \infty$, on obtient

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}} \mathbb{E}(\| X^{k,N} - X^{l,N} \|^2) = 0.$$

De même, pour la deuxième assertion du théorème (3.13), on obtient

$$\overline{\lim_{k,l\to\infty}} \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X^{k,N} - X^{l,N}|^2) = 0.$$

Ainsi, pour tout $N \geq 1$, il existe un processus X_N tel que $\mathbb{E}[\| X^{k,N} - X^N \|^2] \to 0$ et $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X^{k,N} - X^N|^2] \to 0$, quand $k \to \infty$; la limite est approuvée car pour chacuns de ces deux faits implique la convergence dans $L^2([0,T] \times \Omega)$. En utilisant l'argument habituel, on peut montrer qu'il existe une sous-suite $\{k_j, j \geq 1\}$, telle que pour tout $N \geq 1$, $\| X^{k_j,N} - X^N \| + \sup_{t\in[0,T]} |X^{k_j,N} - X^N| \to 0$ p.s., lorsque $j \to \infty$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite elle-même converge p.s. vers 0 :

$$\| X^{k,N} - X^N \| + \sup_{t\in[0,T]} |X^{k,N} - X^N| \to 0 \quad p.s. \quad \text{quand } k \to \infty. \tag{3.34}$$

Notons que pour tous $N \geq 1$, $p > 0$, $\mathbb{E}(\| X^N \|_\infty^p) < \infty$. En effet, on a déjà la convergence uniforme, donc elle est suffisante pour montrer que l'intégrale est bornée par la définition de la norme $\| \, . \, \|_\infty$. Par le lemme de *Fatou*([20]),

$$\int_0^t |X_{t,z}^N|(t-z)^{-1-\alpha}dz \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_0^t |X_{t,z}^{k,N}|(t-z)^{-1-\alpha}dz \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| X^{k,N} \|_\infty,$$

donc $\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |X_{t,z}^N|(t-z)^{-1-\alpha}dz \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \| X^{k,N} \|_\infty$, et en appliquant de nouveau le lemme de *Fatou*, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t |X_{t,z}^N|(t-z)^{-1-\alpha}dz\right)^p\right] \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbb{E}[\| X^{k,N} \|_\infty^p] < \infty.$$

De plus, pour $N' \leq N''$, et $t \leq \tau_{N'}$, $X_t^{N'} = X_t^{N"}$ p.s. En effet, pour tout t, $X_t^{k,N'} \to X_t^{N''}$ et $X_t^{k,N'} \to X_t^{N''}$ p.s. quand $k \to \infty$,
mais pour $t \leq \tau_{N'}$, $X_t^{k_j,N'} = X_t^{k_j,N''}$, donc $X^{N'} = X^{N''}$ p.s.

Par conséquent, il existe un processus X tel que pour tout N et tout t, $X_t^N = X_{t\wedge\tau_N}$. On va prouver que le processus X résout l'équation (3.25). Cela se fera en montrant que chacun des intégrales dans (3.30), converge vers l'intégrale qui lui correspond dans (3.25). On considère la différence entre ces intégrales :

$$\mathcal{I}_a^N(t) = \int_0^{t(N)} a_\triangle(s)ds, \quad \mathcal{I}_b^N(t) = \int_0^{t(N)} b_\triangle(s)dB_s, \quad \mathcal{I}_c^N(t) = \int_0^{t(N)} c_\triangle(s)dB_s^H$$

ici $d_\triangle(s) = d(s, X_s) - d(t_s^k, X_{t_s^k}^k), \quad d \in \{a, b, c\}$.

$$|d_\triangle| \leq C((s-t_s^k)^\beta + CK_t^n(s-t_k^\delta)^r(1+ \| X_{t_s^k}^{k,N} \|_\infty)+ \| X_s^{k,N} - X_s \|) \tag{3.35}$$

et on a donc l'estimation,

$$|\mathcal{I}_a^N(t)| \leq \int_0^t |a_\triangle(s(N))|ds \leq C(\delta_k^\beta + N\delta_k^r)(1- \| X^{k,N} \|_\infty)+ \| X^{k,N} - X^N \| .$$

Grâce au lemme (3.5.1), la norme $\| X^{k,N} \|_\infty$ est uniformément bornée en k en probabilité. Ainsi, $\mathcal{I}_a^N(t) \to 0$ p.s, quand $k \to 0$. De plus,

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{I}_b^N(t)\right] \leq \int_0^t \mathbb{E}[b_\triangle(s)^2]ds \leq C(\delta_k^\beta + \delta_k^r\mathbb{E}[(1+ \| X^{k,N} \|_\infty)^2] + \mathbb{E}[\| X^{k,N} - X^N \|^2]),$$

qui tend vers 0 quand $k \to \infty$. Donc, on peut extraire une sous-suite $\{k_j, j \geq 1\}$ telle que pour tout $N \geq 1$, $\mathcal{I}_a^N(t) \to 0$ p.s., $j \to \infty$. Encore, sans perte de généralités supposons que la suite converge elle-même vers 0. Enfin,

$$|\mathcal{I}_c^N(t)| \leq CN \int_0^t \left(\int_0^t |c_\triangle(s)| s^{-\alpha} ds + \int_0^t |c_\triangle(s) - c_\triangle(z)| h(s,z) dz \right) ds = CN(I_c' + I"_c).$$

D'une façon similaire à $\mathcal{I}_a^N(t)$, $I_c' \to 0, k \to \infty$. En utilisant l'estimation

$$\int_0^t \int_0^{t_s^\delta} (|X_s^N - X_z^N - X_s^{k,N} - X_z^{k,N}| + |X_s^N - X_s^{k,N}|(s-z)^\beta$$

$$+ |X_s^N - X_s^{k,N}|(|X_{s,z}^N| + |X_{s,z}^{k,N}|) + (s - t_s^k)^\beta + (z - t^\delta)^\beta + |X_{s,t_s^k}^{k,N}|$$

$$+ |X_{z,t_z^k}^{k,N}|) h(s,z) dz ds + \int_0^t \int_{t_s^\delta}^s ((s-z)^\beta + |X_{s,z}^{k,N}|) h(s,z) dz ds$$

$$\leq CN(\| X^{k,N} - X^N \| (1 + \| X^N \|_\infty + \| X^{k,N} \|_\infty) + \delta_k^\beta$$

$$+ (1 + \| X^{k,N} \|_\infty) \int_0^t \int_0^{t_s^\delta} ((s - t_s^\delta)^r + (z - t_s^\delta)^r) h(s,z) dz ds$$

$$+ \delta_k^{\beta - \alpha} + \delta_k^{r-\alpha}(1 + \| X^{k,N} \|_\infty))$$

$$\leq CN \big(\|X^{k,N} - X^N\| (1 + \|X^N\|_\infty + \|X^{k,N}\|_\infty) + \delta_k^{\beta-\alpha} + \delta_k^{r-\alpha}(1 + \|X^{k,N}\|_\infty) \big).$$

la dernière expression tend vers 0 quand $k \to \infty$, puisque $\| X^N \|_\infty$ est presque sûrement finie et $\| X^{k,N} \|_\infty$ est uniformément bornée au point k en probabilité.

Par conséquent, $|\mathcal{I}_a^N(t)| + |\mathcal{I}_b^N(t)| + |\mathcal{I}_c^N(t)| \to 0, k \to \infty$. Puisque $X_t^N - X_t^{k,N} =$

$\mathcal{I}_a^N(t) + \mathcal{I}_b^N(t) + \mathcal{I}_c^N(t)$ et X^k résout (3.30), avec $\delta = \delta^k$, on obtient que X est une solution de (3.25), à chaque instant τ_N. Mais (*puisque* K_T^η est finie p.s.) $\tau_N \to T$ p.s., lorsque $N \to \infty$, ce qui implique que X est une solution de (3.25).

Unicité :

soient X^1, X^2 deux solution de (3.25). Définissons un temps d'arrêt

$$\sigma_N = \inf\{t : K_t^\eta + \| X^1 \|_\infty + \| X^2 \|_\infty \geq N\}$$

et on désigne par $X_t^{1,N} = X_{t \wedge \sigma_N^1}$, $X_t^{2,N} = X_{t \wedge \sigma_N^2}$, $\triangle_s = \{X_t^{1,N} - X_t^{2,N}\}_{2,s}^2$.

D'après l'estimation faite dans la preuve du théorème (3.13), on peut montrer que

$$\mathbb{E}(\triangle_t) \leq C_N \int_0^t \mathbb{E}(\triangle_s) g(t,s) ds,$$

donc, en utilisant le lemme généralisé de *Gronwall*[20], on a $\mathbb{E}(\triangle_t) = 0$ pour tout t. Cela implique $X_t^1 = X_t^2$ p.s. pour tout $t < \tau_N$. Si $N \to \infty$, on obtient $X_t^1 = X_t^2$ p.s. pour tout t.

Remarque 3.5.1. *Il est possible de généraliser ces résultats (du chapitre (3)) pour le cas multidimensionnel. De plus, on peut prendre au lieu d'un mouvement Brownien fractionnaire, tout processus qui est γ-Höldérienne avec $\gamma > \frac{1}{2}$.*

Chapitre 4

Applications

4.1 Absence d'arbitrage et sujets connexes

Soient $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien et $\{B_t^H, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, les deux sont définis sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$.

Considérons une version du modèle *Black Merton Scholes* ([47]) i.e. un $(\mathbf{B}, \mathbf{S})-$marché avec une obligation $\mathbf{B}$ et un stock $\mathbf{S}$, où

$$\mathbf{B}_t = e^{rt}, \qquad \mathbf{S}_t = e^{aB_t + bB_t^H + ct}, \quad r, a, b, c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.1}$$

Pour une stratégie donnée (ou un portefeuille) $\pi = \{\beta_t, \gamma_t, t \geq 0\}$ le capitale $\{X_t, t \geq 0\}$, correspondant à ce portefeuille est égal à

$$X_t = \beta_t \mathbf{B}_t + \gamma_t \mathbf{S}_t. \tag{4.2}$$

On formule les hypothèses suivantes sur la stratégie π :

1. π est une stratégie d'autofinancement i.e.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta_s d\mathbf{B}_s + \int_0^t \gamma_s d\mathbf{S}_s; \tag{4.3}$$

2. π est une stratégie de type de *Markov* i.e

$$\beta_t = \beta(\mathbf{S}_t, t), \text{et} \qquad \gamma_t = \gamma(\mathbf{S}_t, t) \tag{4.4}$$

Il faut être précis avec la condition (4.2), Pour qu'il reflète le concept économique réel de "l'autofinancement". Cela implique que la signification de la deuxième intégrale dans (4.3), doit être clairement définie. On donne maintenant, l'expression de l'intégrale stochastique dans le sens trajectorielle comme étant une limite avec probabilité 1 i.e.

$$\int_0^t \gamma_s d\mathbf{S}_s = \lim_{\max|s_{k+1}-s_k| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{s_k}(\mathbf{S}_{s_{k+1}} - \mathbf{S}_{s_k}).$$

Ici, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{s_k}(\mathbf{S}_{s_{k+1}} - \mathbf{S}_{s_k})$ est une formule évidente pour le capitale, gagné sur la variation de prix de $\mathbf{S}$ avec une stratégie d'achat et de retenue par pièce $\{\tilde{\gamma}_t, t \in \mathbb{R}_+\} = \{\gamma_{s_k}, s_k \leq t < s_{k+1}, t \geq 0\}$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^t \gamma_s d\mathbf{S}_s$, comme le capitale gagné sur $\mathbf{S}$ avec la stratégie continue $\{\gamma_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, est adéquate à la définition des conditions d'autofinancement.
On dit que la stratégie π a une opportunité d'arbitrage s'il existe $T > 0$, tels que

$$X_0 = 0, \quad X_T > 0(\mathbb{P} - p.s.), \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0.$$

Dans le modèle mixte (4.1), avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, *Kuznetsov*[28] a établi l'absence d'arbitrage sous la condition de la dépendance du B_t et B_t^H. Comme on a mentionné dans la sous-section (2.1.4), *Cheridito*([35]) a montré que, pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, le modèle mixte avec l'indépendance entre B_t et B_t^H est équivalent à un mouvement Brownien, d'où il est sans arbitrage. Zähle [48] a prouvé l'absence d'arbitrage dans le modèle mixte général avec un processus de *Wiener* indépendant et un processus de variation quadratique nulle.

Le résultat principal de cette section est que le marché mixte est avec absence d'arbitrage sans aucune condition sur la dépendance de B_t et B_t^H, si nous nous limitons aux stratégies d'autofinancement de type de *Markov* avec β et γ lisses.

4.1.1 Les conditions d'autofinancement et leurs conséquences

Notons que dans le cas de la stratégie de type de *Markov* (4.4), le processus du capital X_t peut être écrit en fonction du prix du stock $\mathbf{S}$ à l'instant t

$$X_t = \Phi(x, t) \tag{4.5}$$

où

$$\Phi(x, t) = e^{rt}.\beta(x, t) + x.\gamma(x, t). \tag{4.6}$$

Dans cette section, on prouve que l'hypothèse d'autofinancement restreint fortement la classe des fonctions ϕ possibles dans (4.6).
Dans le cas où $\gamma_t = \gamma(\mathbf{S}_t, t)$ avec $\gamma(.,.)$ est lisse, l'intégrale $\int_0^t \gamma_s d\mathbf{S}_s$ existe et il peut être présentée sous la forme

$$\int_0^t \gamma_s d\mathbf{S}_s = \int_0^t a\gamma_s \mathbf{S}_s dB_s + \int_0^t b\gamma_s \mathbf{S}_s dB_s^H + \int_0^t \left(c + \frac{a^2}{2}\right) \gamma_s \mathbf{S}_s ds, \tag{4.7}$$

où l'intégrale par rapport à B est l'intégrale d'*Itô* [38] et l'intégrale par rapport à B^H est l'intégrale de *Lebesgue-Stieltjes* généralisée, et la troisième intégrale est l'intégrale de *Riemann*. L'intégrale (4.7) donne la formule d'*Itô* pour un exposant

du processus mixte.
L'intégrale d'*Itô* (4.7), apparaît en raison du choix du point d'extrémité gauche s_k dans l'expression sous le signe de sommation dans (4.6). Un tel choix est crucial pour la condition (4.3), pour avoir le sens économique de l'autofinancement. la deuxième intégrale $\int_0^t b\gamma_s \mathbf{S}_s dB_s^H$ ne dépend pas du choix des points intérieurs des intervalles.

Théorème 4.1. *Soit un* $(\mathbf{B}, \mathbf{S})$*-marché donné par (4.1), avec* $a \neq 0$*. Supposons aussi que pour tout* $t > 0$ *le support de la distribution de* $\mathbf{S}_t$ *coïncide avec*

$$supp(\mathbf{S}_t) = [0, \infty). \tag{4.8}$$

alors dans la classe des stratégies de type de Markov (4.4), avec

$$\{\beta(x,t), \gamma(x,t)\} \subset C^2([0,+\infty)) \times C^1([0,+\infty))$$

la condition d'autofinancement (4.3), est équivalente à la suivante :

(i) *Il existe une fonction* $\phi(x,t) \in C^2([0,+\infty)) \times C^1([0,+\infty))$*, qui satisfait l'équation*

$$\phi'_t(x,t) + \frac{a^2}{2} x^2 \phi''_{xx}(x,t) + rx\phi'_x(x,t) - r\phi(x,t) = 0, \tag{4.9}$$

et la stratégie (β, γ) *peut être exprimée en termes de* ϕ *:*

$$\begin{cases} \beta(x,t) = e^{-rt}(\phi(x,t) - x\phi'_x(x,t)); \\ \gamma(x,t) = \phi'(x,t). \end{cases} \tag{4.10}$$

Remarque 4.1.1. *La condition (4.8) est vérifiée, par exemple, dans le cas où sont conjointement gaussiens, et par conséquent* $\log(\mathbf{S}_t) = aB_t + bB_t^H + ct, \quad t \geq 0$ *est un processus gaussien.*

Remarque 4.1.2. *Sous la condition (i), on trouve l'identité* $\Phi(x,t) = \phi(x,t)$*.*

Preuve du théorème (4.1) :

Premièrement, la formule d'*Itô* se tient pour un processus continu à variation quadratique généralisée. Deuxièmes, si le processus Z a une variation quadratique, alors, il a la même variation quadratique généralisée.

On considère le processus $\mathbf{S}_t$ et on prouve qu'il a une variation quadratique. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(\Delta \mathbf{S}_{t_k})^2 &= \sum_{k=0}^{n}\left(e^{aB_{t_{k+1}}+bB^H_{t_{k+1}}+ct_{k+1}} - e^{aB_{t_k}+bB^H_{t_k}+ct_k}\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{2aB_{t_{k+1}}}\left(e^{bB^H_{t_{k+1}}+ct_{k+1}} - e^{bB^H_{t_k}+ct_k}\right)^2 \\
&+\sum_{k=0}^{n}\left(e^{aB_{t_{k+1}}} - e^{aB_{t_k}}\right)^2 e^{2bB^H_{t_k}+2ct_k} \\
&+2\sum_{k=0}^{n} e^{aB_{t_{k+1}}}e^{bB^H_{t_k}+ct_k}\left(e^{aB_{t_{k+1}}} - e^{aB_{t_k}}\right)\left(e^{bB^H_{t_{k+1}}+ct_{k+1}} - e^{bB^H_{t_k}+ct_k}\right) \\
&= I_1^n + I_2^n + I_3^n.
\end{aligned}$$

Évidemment, $I_2^n \to \int_0^t \mathbf{S}_u^2 a^2 du$ p.s. dans $L^2(\mathbb{P})$. De plus

$$\left|\left(e^{bB^H_{t_{k+1}}+ct_{k+1}} - e^{bB^H_{t_k}+ct_k}\right)\right| \leq e^{bB^H_{t_k}+ct_k}\left|\Delta B^H_{t_k} + \Delta t_k\right|$$

et les trajectoires de B^H appartiennent à la classe $C^{H-}[0,T]$ avec $H > \frac{1}{2}$. Sachant que si une fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ appartienne à la classe $C^\gamma[0,T]$ pour toute $\gamma < \beta$, alors on dit qu'elle appartienne à $C^{H-}[0,T]$.
Donc, $I_1^n \to 0$ p.s. et la même chose pour I_3^n.
Cela signifie que la variation quadratique de $\mathbf{S}$ a la forme

$$[\mathbf{S}]_t = \int_0^t a^2\mathbf{S}_u^2 du. \tag{4.11}$$

En appliquant la formule d'*Itô* à $\mathbf{B}_t\beta(\mathbf{S_t},t)$ et $\mathbf{S}_t\gamma(\mathbf{S_t},t)$ de (4.2), on obtient les égalités

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_t\beta(\mathbf{S_t},t) - \beta(1,0) &= \textstyle\int_0^t d(\mathbf{B}_u\beta(\mathbf{S_u},u)) \\
&= \textstyle\int_0^t \beta(\mathbf{S_u},u)dB_u + \int_0^t B_u\beta'_u(\mathbf{S_u},u)du + \int_0^t B_u\beta'_x(\mathbf{S_u},u)d\mathbf{S}_u \\
&+\textstyle\frac{1}{2}\int_0^t B_u\beta''_{xx}(\mathbf{S_u},u)d[\mathbf{S}]_u,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_t\gamma(\mathbf{S_t},t) - \gamma(1,0) &= \textstyle\int_0^t d(\mathbf{S}_u\gamma(\mathbf{S_u},u)) \\
&= \textstyle\int_0^t \gamma(\mathbf{S_u},u)d\mathbf{S}_u + \int_0^t \mathbf{S}_u\gamma'_t(\mathbf{S_u},u)du + \int_0^t \mathbf{S}_u\gamma'_x(\mathbf{S_u},u)d\mathbf{S}_u \\
&+\textstyle\frac{1}{2}\int_0^t \left(2\gamma'_x(\mathbf{S_u},u) + \mathbf{S}_u\gamma''_{xx}(\mathbf{S_u},u)\right)d[\mathbf{S}]_u.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Combinant les équations (4.12) et (4.13), on obtient

$$X_t - X_0 - \int_0^t \beta(\mathbf{S}_u, u) d\mathbf{B}_u - \int_0^t \gamma(\mathbf{S}_u, u) d\mathbf{S}_u =$$

$$= \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_t'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_t'(\mathbf{S}_u, u)\right) du + \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right) d\mathbf{S}_u$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_{xx}''(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_{xx}''(\mathbf{S}_u, u)\right) d[\mathbf{S}]_u. \tag{4.14}$$

En comparant les équations (4.14) et (4.3), on conclut que la condition d'autofinancement de la stratégie $\pi = \{\beta_t, \gamma_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est équivalente à l'équation suivante :

$$\int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_t'(\mathbf{S}_u, u) \mathbf{S}_u \gamma_t'(\mathbf{S}_u, u)\right) du + \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right) d\mathbf{S}_u$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \left(B_u \beta_{xx}''(\mathbf{S}_u, u) + 2\gamma_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_{xx}''(\mathbf{S}_u, u)\right) d[\mathbf{S}]_u = 0, \quad t > 0. \tag{4.15}$$

De la même formule d'*Itô* et de la définition du processus $\mathbf{S}$, on obtient

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_0 + \int_0^t \mathbf{S}_u d(aB_u + bB_u^H + cu) + \int_0^t \frac{1}{2} a^2 \mathbf{S}_u du,$$

où l'intégrale $\int_0^t \mathbf{S}_u dB_u$ existe comme intégrale d'*Itô*, et l'intégrale $\int_0^t \mathbf{S}_u dB_u^H$ existe comme limite des sommes de *Riemann Stieltjes*, car $\mathbf{S} \in C^{\frac{1}{2}-}[0, T]$, $B^H \in C^{H-}[0, T]$, et $\frac{1}{2} + H > 1$.

Remplaçant l'équation (4.11) dans l'équation (4.15), on obtient donc que l'équation (4.15), peut s'écrire comme suit :

$$\int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_u'(\mathbf{S}_t, u) + \mathbf{S}_u \gamma_t'(\mathbf{S}_u, u)\right) du$$
$$+ \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right) S_u d(aB_u + bB_u^H + (c + \frac{a^2}{2})u)$$
$$+ \frac{a^2}{2} \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_{xx}''(\mathbf{S}_t, u) + 2\gamma_x'(\mathbf{S}_t, u) + \mathbf{S}_u \gamma_{xx}''(\mathbf{S}_t, u)\right) \mathbf{S}_u^2 du = 0. \tag{4.16}$$

En prenant la variation quadratique des deux côtés de (4.16), évidemment, la variation quadratique de toutes les intégrales de *Lebesgue* dans (4.16), disparait, et la variation quadratique de l'intégrale d'*Itô* égale à

$$\left[\int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right) \mathbf{S}_u d(aB_u)\right]_t = a^2 \int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right)^2 \mathbf{S}_u^2 du.$$

Maintenant, on établit que la variation quadratique du processus $\int_0^t \left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right) \mathbf{S}_u d(bB_u^H)$ p.s. est égale à 0. Pour cela, on note $f = b\left(\mathbf{B}_u \beta_x'(\mathbf{S}_u, u) + \mathbf{S}_u \gamma_x'(\mathbf{S}_u, u)\right)$. Évidemment, les trajectoires de ce processus appartiennent à la classe $C^{\frac{1}{2}-}[0,T]$. De plus, de l'estimation dans la proposition 2 ([11]), il s'ensuit que

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_u dB_u^H - f_{t_k}\Delta B_{t_k}^H\right| \leq C\|f\|_{C^{\frac{1}{2}-\delta}}| \ B^H|\_{C^{H-\delta}}(\Delta t_k)^{\frac{1}{2}+H-2\delta},$$

avec la constante C ne dépend pas de B^H et f, et telle que $\frac{1}{2}+H-2\delta > 1$, i.e. $\delta < \frac{\alpha}{2}$. Par suite

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_u dB_u^H\right)^2 &\leq 2\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1} f_u dB_u^H} -f_{t_k}\Delta B_{t_k}^H\right)^2 + 2\sum_{k=0}^{n}(f_{t_k})^2(\Delta B_{t_k}^H)^2 \\ &\leq 2C^2| \ f| \ _{C^{\frac{1}{2}-\delta}}^2| \ B^H|\_{C^{H-\delta}}{}^2\sum_{k=0}^{n}(\Delta t_k)^{1+2H-4\delta} \\ &+\sum_{k=0}^{n}(f_{t_k})^2(\Delta B_{t_k}^H)^2 \to 0 p.s.\end{aligned}$$

À partir de ces estimations et de l'équation (4.16), on obtient

$$a^2\int_0^t \left(\mathbf{B}_u\beta_x'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_x'(\mathbf{S}_u,u)\right)^2\mathbf{S}^2 du = 0. \tag{4.17}$$

Comme (4.17) est vérifiée pour tout $t>0$, on déduit facilement que

$$\mathbf{B}_u\beta_x'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_x'(\mathbf{S}_u,u) = 0, \tag{4.18}$$

pour tout $u>0$, et presque tout $\omega\in\Omega$.

Remplaçant (4.18) dans (4.16), on obtient une autre équation pour tout $t>0$:

$$\int_0^t \left(\mathbf{B}_u\beta_u'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_u'(\mathbf{S}_u,u)\right)du+\frac{a^2}{2}\int_0^t \left(\mathbf{B}_u\beta_{xx}''(\mathbf{S}_u,u)+2\gamma_x'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_{xx}''(\mathbf{S}_u,u)\right)\mathbf{S}_u^2 du = 0.$$

Cela signifie que l'égalité

$$\mathbf{B}_u\beta_t'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_t'(\mathbf{S}_u,u)+\frac{a^2}{2}\left(\mathbf{B}_u\beta_{xx}''(\mathbf{S}_u,u)+2\gamma_x'(\mathbf{S}_u,u)+\mathbf{S}_u\gamma_{xx}''(\mathbf{S}_u,u)\right)\mathbf{S}_u^2 = 0 \tag{4.19}$$

est vérifiée pour tout $u>0$ et presque tout $\omega\in\Omega$.
La condition (4.8) du théorème assure que les équations (4.18) et (4.19) peuvent être vérifies si et seulement si

$$\mathbf{B}_t\beta_x'(x,t)+x\gamma_x'(x,t) = 0; \tag{4.20}$$

et

$$\mathbf{B}_t\beta'_t(x,t) + x\gamma'_t(x,t) + \frac{a^2}{2}\left(\mathbf{B}_u\beta''_{xx}(x,u) + 2\gamma'_x(x,u) + x\gamma''_{xx}(x,u)\right)x^2 = 0 \qquad (4.21)$$

pour tous $t > 0, x > 0$.

Les dernières relations signifient que la stratégie $(\beta(\mathbf{S}_t,t),\gamma(\mathbf{S}_t,t))$ est autofinancée si et seulement si le paire $(\beta(x,t),\gamma(x,t))$ satisfait les équations (4.20), (4.21).

supposons maintenant que la condition (i) du théorème (4.1)est satisfaite. En remplaçant β et γ de (4.10) dans (4.20) et (4.21), donc les deux formule sont identique. Inversement, si (4.20) et (4.21) sont satisfaites, on fixe

$$\phi(x,t) = \mathbf{B}_t.\beta(x,t) + x\gamma(x,t).$$

Pour une telle fonction ϕ, on obtient de (4.20), que

$$\phi'_x(x,t) = \mathbf{B}_t\beta'_x(x,t) + \gamma(x,t) + x\gamma'_x(x,t) = \gamma(x,t),$$

$$\beta(x,t) = \mathbf{B}_t^{-1}(\phi(x,t) - x\gamma(x,t)) = e^{-rt}(\phi(x,t) - x\phi'_x(x,t)),$$

ce qui donne (4.10). En remplaçant β et γ de (4.10) en l'identité (4.21), on obtient que $\phi(x,t)$ satisfait l'équation (4.9).

Remarque 4.1.3. *Soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ un processus définit sur $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\},\mathbb{P})$ avec $Z_0 = 0$ et $[Z]\equiv 0$, où $[Z]$ la variation quadratique. Alors, il n'est pas difficile de voir que le théorème 4.1 est valide pour un $(\mathbf{B},\tilde{\mathbf{S}})-$marché avec*

$$\mathbf{B}_t = e^{rt}, \qquad \tilde{\mathbf{S}} = e^{aB_t + Z_t + ct},$$

seulement si la condition (4.8), est satisfaite pour le processus $\tilde{\mathbf{S}}$.

L'absence d'arbitrage

Théorème 4.2. *Soit un $(\mathbf{B},\mathbf{S})-$marché donné par (4.1), avec $a \neq 0$. Soit le support de la distribution de $\mathbf{S}_t$, coïncide avec*

$$supp(\mathbf{S}_t) = [0,+\infty) \qquad (4.22)$$

pour tout $t > 0$.
Alors, il n'y a pas de stratégies d'arbitrage dans la classe des stratégie d'autofinancement de type de Markov (4.4), avec

$$\{\beta(x,t),\gamma(x,t)\} \subset C^2((0,+\infty)) \times C^1((0,+\infty)).$$

Preuve :

Le théorème 4.1 affirme que pour toute stratégie dans la classe décrite dans le théorème (4.2), le processus du capital X_t est donné par

$$X_t = \phi(\mathbf{S}_t, t),$$

où ϕ satisfait l'équation

$$\phi'_t(x,t) + \frac{a^2}{2}x^2\phi''_{xx}(x,t) + rx\phi'_x(x,t) - r\phi(x,t) = 0. \tag{4.23}$$

Supposons qu'il existe une stratégie d'arbitrage. Donc, il existe $T > 0$ tel que

$$X_0 = 0, \qquad X_T \geq 0(\mathbb{P} - p.s). \tag{4.24}$$

Ainsi, les conditions (4.22), (4.24) sont équivalents aux assertions suivantes

$$\phi(1,0) = 0, \quad \phi(x,T) \geq 0 \qquad \forall x > 0. \tag{4.25}$$

On va prouver que $\phi \equiv 0$ est la seule fonction qui satisfait (4.23) et (4.25), simultanément. Par conséquent, cela signifierait qu'il n'y a pas de stratégies d'arbitrage dans la classe donnée.
En utilisant l'approche standard dans la résolution de l'équation (4.23), supposons que la fonction ϕ satisfait l'équation (4.23), avec des conditions aux limites (4.25). On considère une nouvelle fonction $\eta(z,t)$, définie par

$$\eta(z,t) = \theta(az, T-t), \qquad z \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T],$$

où

$$\theta(z,t) = e^{-(\alpha z + \beta t)}\phi(e^z, t), \quad \alpha = \frac{1}{2} - \frac{r}{a^2}, \quad \beta = -\frac{a^2}{8} + \frac{r^2}{2a^2},$$

satisfait une équation de la *Chaleur*

$$\eta'_t(z,t) = \frac{1}{2}\eta''_{zz}(z,t), \tag{4.26}$$

avec des conditions supplémentaires

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \eta(z,0) \geq 0, \quad \eta(0,T) = 0. \tag{4.27}$$

Ici, un changement inverse est donné par

$$\phi(x,t) = x^{(\frac{1}{2} - \frac{r}{a^2})}.e^{-\frac{a^2}{8} + \frac{r^2}{2a^2}}.\eta\left(\frac{\ln(x)}{a}, T-t\right).$$

La solution continue de l'équation (4.26) est bien connue et a la forme

$$\eta(z,t) = \int_{\mathbb{R}} \eta(\xi,0)(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{(z-\xi)^2}{2t})\xi,$$

qui, avec les conditions aux limites (4.27), donnent $\eta \equiv 0$, et donc, $\phi \equiv 0$.

La convergence des intégrales de *Lebesgue Stieltjes* vers une intégrale par rapport au mouvement Brownien fractionnaire

Théorème 4.3. *[46] Le processus $(B_t^{H,\beta})_{t\geq 0}$ satisfait l'équation*

$$\mathbb{E}\left(B_t^H - B_t^{H,\beta}\right)^2 \leq c(H)\begin{cases} t^{2H}, & t<\beta; \\ \beta^{2\alpha}t(1+\ln\frac{t}{\beta}), & t\geq\beta \end{cases}$$

et pour $2 < m < \frac{1}{1-H}$

$$\mathbb{E}\left(B_t^H - B_t^{H,\beta}\right)^m \leq c(H,m)\begin{cases} t^{mH}, & t<\beta; \\ \beta^{m\alpha}t^{\frac{m}{2}} + \beta^{m(H-1)+1}t^{m-1}, & t\geq\beta \end{cases}$$

où

$$B_t^{H,\beta} = \int_0^t s^\alpha dY_s^\beta, \quad H\in(\frac{1}{2},1) \tag{4.28}$$

avec

$$Y_t^\beta = C_H^{(8)}\alpha\int_0^t\left(\int_0^{(\beta-s)_+}(s-u)^{\alpha-1}u^{-\alpha}dB_u\right)ds,$$

où $C_H^{(8)}$ est une constante, et $\beta\in(0,1)$

Théorème 4.4. *[47]*

1. *Pour tout $0<\alpha<\lambda$*

$$\lim_{|\pi|\to 0}\sup_\pi |\ (d_+^\alpha f_\pi)(a) - (d_+^\alpha f)(a)|\ _{L^1[a,b]} = 0$$

avec $f_\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\mathbb{1}_{[x_k,x_{k+1})}$.

2. *Soient $f\in C^\lambda([a,b])$, $g\in C^\mu[a,b]$, avec $\lambda+\mu>1$, alors $(R-S)\int_a^b fdg$ existe*

$$\int_a^b fdg = (R-S)\int_a^b fdg$$

Dans cette section, on utilise le théorème (4.3), (4.4) et on prouve le théorème qui affirme la convergence de l'intégrale par rapport au $B_t^{H,\beta}$ en probabilité, et par l'équation (4.28), vers un intégrale par rapport au mouvement Brownien fractionnaire.

Théorème 4.5. *Pour presque tout $\omega\in\Omega$, et pour $\varepsilon>0$, on a donc pour tout processus f tel que*

$$f(.,\omega)\in C^{2(1-H)+\varepsilon}[0,T], \tag{4.29}$$

$$\int_0^T f(u)dB_u^{H,\beta} \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^T f(u)dB_u^H \quad p.s \quad quand \quad \beta\to 0+,$$

où $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ désigne la convergence en probabilité.

Preuve :

Pour tout $N > 0$, on introduit le processus étagé de la forme

$$f_N(u) = \sum_{k=1}^{N} f(u_{k-1})\mathbb{1}_{[u_{k-1},u_k)}, \quad u \in [0,T), \quad f_N(T) = f(u_N),$$

où

$$u_k = \frac{kT}{N}, \quad 0 \le k \le N.$$

On a donc, l'inégalité évidente suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T f(u)dB_u^{H,\beta} - \int_0^T f(u)dB_u^H\right| &\le \left|\int_0^T (f(u) - f_N(u))dB_u^{H,\beta}\right| + \left|\int_0^T f_N(u)d(dB_u^{H,\beta} - B_u^H)\right| \\ &+ \left|(f_N(u) - f(u))dB_u^H\right| = I_1(N,\beta) + I_2(N,\beta) + I_3(N). \end{aligned}$$

On établit que pour la sous-suite N_β tell que $N_\beta = \left[\frac{T}{\beta^{\frac{1}{2}}}\right]$ les convergences suivantes sont satisfaites

$$I_1(N_\beta,\beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad I_2(N_\beta,\beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad I_1(N_\beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad quand \quad \beta \to 0+.$$

La condition (4.29) est équivalente à la relation suivante :

il existe une variable aléatoire finie $k = k(\omega)$ tell que $\mathbb{P}-p.s.$ $\forall 0 \le x < y \le T,$ on a

$$|f(x) - f(y)| \le k|x-y|^\lambda \tag{4.30}$$

avec $\lambda = 2(1-H) + \varepsilon$.

Étudions $I_1(N_\beta,\beta)$. On utilise (4.27), (4.29) et (4.30), pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1(N_\beta,\beta) &= \left|\int_0^T (f(u) - f_{N_\beta}(u))dB_u^{H,\beta}\right| \\ &= C\left|\sum_{k=1}^{N}\int_{u_{k-1}}^{u_k}(f(u) - f(u_{k-1}))\left(u^{H-\frac{1}{2}}\int_0^{(u-\beta)_+}(u-y)^{\alpha-1}y^{\frac{1}{2}-H}d\tilde{B}_y\right)du\right| \\ &= Ck\sum_{k=1}^{N}(u_{k-1}-u_k)^\lambda\int_{u_{k-1}}^{u_k}u^{H-\frac{1}{2}}\left|\int_0^{(u-\alpha)_+}(u-y)^{\alpha-1}y^{\frac{1}{2}-H}d\tilde{B}_y\right|du \\ &= Ck\zeta_1(N,\beta), \end{aligned}$$

où $\tilde{B}$ est un processus de *Wiener* sous-jacent. Dés maintenant, C est une constante, dont la valeur n'est pas intéressante pour nous. Sans perte de généralité, on suppose que $\beta < \frac{1}{2}$. Estimons l'espérance mathématique de $\zeta_1(N_\beta, \beta)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\zeta_1(N_\beta,\beta)) &\le \beta^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=1}^{N} \int_{u_{k-1}}^{u_k} u^{H-\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left(\left|\int_0^{(u-\beta)_+} (u-y)^{\alpha-1} y^{\frac{1}{2}-H} d\tilde{B}_y\right|\right) du \\
&\le \beta^{\frac{\lambda}{2}} \sum_{k=1}^{N} \int_{u_{k-1}}^{u_k} u^{\alpha} \left(\int_0^{(u-\beta)_+} (u-y)^{2H-3} y^{1-2H} dy\right)^{\frac{1}{2}} du \\
&\le \beta^{\frac{\lambda}{2}} \left(\int_0^{(1-\frac{\beta}{T})} (u-y)^{2H-3} y^{1-2H} dy\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{N} \int_{u_{k-1}}^{u_k} u^{H-1} du \\
&\le C\beta^{\frac{\lambda}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-y)^{2H-3} y^{1-2H} dy + 2^{2\alpha} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\beta}{T}} (1-y)^{2H-3} dy\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\le C\beta^{\frac{\lambda}{2}} (1+\beta^{2\alpha-1})^{\frac{1}{2}}, \tag{4.31}$$

En remplaçant $\lambda = 2(H-1)+\varepsilon$ dans (4.31), on obtient

$$\mathbb{E}(\zeta_1(N_\beta,\beta)) \le C\alpha^{1-H+\frac{\varepsilon}{2}} (1+\beta^{2\alpha-1})^{\frac{1}{2}} = o(\beta^{\frac{\varepsilon}{2}}) \to 0, \quad \beta \to 0+.$$

Par conséquent, $I_1(N_\beta,\beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad$ quand $\beta \to 0+$.

Considérons $I_2(N_\beta,\beta)$.

$$\begin{aligned}
I_2(N_\beta,\beta) &= \left|\sum_{k=1}^{N} f(u_{k-1}) \left((B_{u_k}^{H,\beta} - B_{u_k}^H) - (B_{u_{k-1}}^{H,\beta} - B_{u_{k-1}}^H)\right)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{N} |(f(u_k) - f(u_{k-1}))| . \left|B_{u_k}^{H,\beta} - B_{u_k}^H\right| + \left|f(T)(B_T^{H,\beta} - B_T^H)\right| \\
&\le k \sum_{k=1}^{N} (u_k - u_{k-1})^{\lambda} \left|B_{u_k}^{H,\beta} - B_{u_k}^H\right| + \left|f(T)(B_T^{H,\beta} - B_T^H)\right|.
\end{aligned}$$

le terme $\left|f(T)(B_T^{H,\beta} - B_T^H)\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ car $B_T^{H,\beta} \xrightarrow{\mathbb{P}} B_T^H \quad p.s.$

Désignons par $\zeta_2(N_\beta,\beta) = \sum_{k=1}^{N} (u_k - u_{k-1})^{\lambda} \left|B_{u_k}^{H,\beta} - B_{u_k}^H\right|$. D'après le théorème (4.3), l'espérance mathématique de $|B_t^{H,\beta} - B_t^H|$ peut être estimée de la manière suivante :

$$\mathbb{E}\left(|B_t^{H,\beta} - B_t^H|\right) \le C \begin{cases} t^H & t < \beta \\ \beta^{\alpha} \sqrt{t(1+\ln\frac{t}{\beta})} & t \ge \beta \end{cases}$$

$$\le C \max\left(\beta^H, \beta^{\alpha} \sqrt{T(1+\ln\frac{T}{\beta})}\right) = o(\beta^{\alpha-\rho}), \quad \beta \to 0+, \tag{4.32}$$

pour tout $\rho >$ fixé. Pour $N = [\frac{T}{\beta^{\frac{1}{2}}}]$, $\rho = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\lambda = 2(1-H)+\varepsilon$, on obtient de (4.32),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\zeta_2(N_\beta,\beta)) &\leq \beta^{\frac{\lambda}{2}}\mathbb{E}(|B_{u_k}H,\beta - B_{u_k}H|)\\ &\leq \beta^{\frac{\lambda}{2}}([N_\beta]+1)o(\beta^{\alpha-\rho}) = o(\beta^{\frac{2(1-H)+\varepsilon-1}{2}+(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}) = o(1) \to 0, \quad \beta \to 0+.\end{aligned}$$

Par conséquent, $I_2(N_\beta,\beta) \xrightarrow{\mathbb{P}}$ quand $\beta \to 0+$.
D'après le théorème (4.4), il résulte

$$I_3(N_\beta) = \left|\int_0^T f_{N_\beta}(u)dB_u^H - \int_0^T f(u)dB_u^H\right| \to 0, \quad p.s.,$$

et par conséquent en probabilité, quand $\beta \to 0$.

4.2 Approche actuarielle d'un mouvement Brownien fractionnaire mixte avec un environnement de sauts pour l'option de change

Cette section vise à étudier la stratégie de l'approche actuarielle de la prime d'assurance équitable pour l'option de change de prix, lorsque la valeur de l'option en devises étrangères suit le mouvement Brownien fractionnaire mixte avec des sauts et l'option européenne d'achat et de vente sont présentés en devise. Il a une certaine importance de référence pour éviter les risques de change.

L'option de change est un contrat donnant à son acquéreur le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre un montant donné de devises à une date (ou pendant une période) déterminée et à un cours fixé par avance appelé prix d'exercice, moyennant le paiement d'une prime. Le droit d'acheter une quantité de devises contre une autre est un call (option d'achat). Le droit de vendre est un put (option de vente). Une option à l'américaine peut être exercée à tout moment entre la date d'achat de l'option et la date d'échéance. Une option à l'européenne ne peut être exercée (ou abandonnée) qu'à la date d'échéance.

L'approche actuarielle du prix des options a été présentée dans ([2]). Dans cette étude, on évalue l'approche actuarielle pour l'option de change, dont le prix est régi par un processus de saut et un mouvement Brownien fractionnaire mixte. Dans ce modèle, on propose l'approche actuarielle pour une option de change en un problème d'équivalence à une prime d'assurance équitable. Aucune hypothèse économique n'est considéré dans l'approche actuarielle, et elle n'est valide que pour les marchés complets, sans arbitrage ni en équilibre, mais aussi fiables dans des marchés incomplets, d'arbitrage et de non-équilibre.
Pour obtenir un modèle de mouvement Brownien fractionnaire mixte avec des sauts pour les options de change, Il faut accorder une grande attention aux conditions suivantes :

(i) Aucun frais de transaction ni aucune taxe ne devrait être déterminé et tous les titres sont parfaitement divisibles.

(ii) la sécurité du commerce est continue ;

(iii) Le taux d'intérêt domestique r_d et Taux d'intérêt étranger r_f à court terme sont définis et stables dans le temps ;

(iv) Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage sans risque.

Le taux de change au comptant dans le modèle mouvement Brownien fractionnaire mixte avec des sauts, est donné par :

$$0 < t \leq T, \quad S_0 = S > 0$$

$$dS_t = S_t(\mu - \lambda\mu_{J(t)})dt + \sigma S_t d\hat{B}_t + \sigma S_t d\hat{B}_t^H + S_t(e^{J(t)} - 1)dN_t. \tag{4.33}$$

Supposons que B_t^d et B_t^f présentent respectivement le prix domestique et le prix étranger de l'obligation sans risque. Ainsi, B_t^d et B_t^f satisfont aux équations suivantes :

$$dB_t^d = B_t^d r_d dt, \qquad B_t^d = 1B_t^d = e^{-r_d(T-t)}, \tag{4.34}$$

$$dB_t^f = B_t^f r_d dt, \qquad B_t^f = 1B_t^f = e^{-r_f(T-t)}, \tag{4.35}$$

où S_t signifie le taux de change au comptant à l'instant t d'une unité de la devise étranger mesurée dans la monnaie domestique. le drift μ et la volatilité sont supposées des constantes ; $\hat{B}_t$ et $\hat{B}_t^H$ sont respectivement un mouvement Brownien et mouvement Brownien fractionnaire ; N_t est processus de *Poisson* de paramètre λ, $(e^{J(t)} - 1)$ est la taille de saut à l'instant t qui est une suite indépendante, identiquement distribuée et $J(t)$ suit la loi Normale d'espérance $-\frac{\sigma_J^2}{2}$ et de variance σ_J^2. De plus, les trois variables aléatoires, le $\hat{B}_t^H$, N_t et $(e^{J(t)} - 1)$ sont supposé indépendants. En utilisant l'équation de *Girsanov* et le changement de variable suivant

$$B_t + B_t^H = \frac{\mu + \mu\lambda_{J(t)} + r_f - r_d}{\sigma} t + \hat{B}_t + \hat{B}_t^H. \tag{4.36}$$

L'équation (4.33), est transformée comme suit : $0 < t \leq T, \quad S_0 = S > 0$

$$dS_t = S_t(r_d - r_f)dt + \sigma S_t dB_t + \sigma S_t dB_t^H + S_t(e^{J(t)} - 1)dN_t. \tag{4.37}$$

Lemme 4.2.1. *[12] En appliquant la formule d'Itô, la solution de l'équation différentielle stochastique est donnée par*

$$S_t = S \exp\left[(r_d - r_f)t + \sigma B_t + \sigma B_t^H - \frac{1}{2}\sigma^2 t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i)\right] \tag{4.38}$$

et d'espérance

$$\mathbb{E}(S_t) = S \exp\left[\left((r_d - r_f) + \frac{1}{2}n\sigma_J^2\right) t\right]. \tag{4.39}$$

Définition 4.2.1. *L'espérance du taux de rendement $\theta(t)$ de S_t sur $t \in [0,T]$ est défini par $\int_0^T \theta(s)ds$ comme suit*

$$\frac{\mathbb{E}(S_t)}{S_0} = \exp\left(\int_0^T \theta(s)ds\right). \tag{4.40}$$

Définition 4.2.2. *Supposons que $C(K,T)$ et $P(K,T)$ présentent respectivement des option Européennes d'achat et de vente de devise, dont le taux de change au comptant est S_t, le prix d'exercice est K et le temps de maturité T. Ainsi, la valeur d'option Européenne par l'approche actuarielle peut être écrite comme suit*

$$C(K,T) = \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f - KB_0^d\right) I_A\right]. \tag{4.41}$$

$$P(K,T) = \mathbb{E}\left[\left(KB_0^d - \exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f\right) I_B\right]. \tag{4.42}$$

La condition essentielle pour l'exécution des options d'achat et de vente Européennes à la date d'échéance sont respectivement

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f > KB_0^d \\ &KB_0^d > \exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f \end{aligned} \tag{4.43}$$

Théorème 4.6. *Soit le taux de change au comptant S_t satisfait l'équation (4.33). Ainsi, la valeur de l'option d'achat et de vente de devise à l'instant t est respectivement comme suit*

$$\begin{aligned} C(K,T) &= \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f - KB_0^d\right) I_A\right]. \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(-(r_d - r_f)T - \frac{N_T\sigma_J^2}{2}T\right) S_T B_0^f - KB_0^d\right) I_A\right]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} C(K,T) = SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} &\left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right] \Phi(b_n) \\ &- KB_0^d \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \Phi(b_n'), \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
P(K,T) &= \mathbb{E}\left[\left(KB_0^d - \exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f\right) I_B\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(KB_0^d - \exp\left(-(r_d - r_f)T - \tfrac{N_t\sigma_J^2}{2}T\right) S_T B_0^f\right) I_B\right] \\
&= KB_0^d \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}\Phi(-b_n') - SB_0^f \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda T)^n}{n!}\exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i) - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2}T\right)\right]\Phi(-b_n), \quad (4.46)
\end{aligned}$$

ici

$$y_n = \frac{m - \sum_{i=1} nJ(t_i) + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\sigma}, \qquad m = \ln\frac{KB_0^d}{SB_0^f} + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}, \qquad (4.47)$$

$$b_n = \frac{\sigma T + \sigma T^{2H} - y_n}{\sqrt{T + T^{2H}}}, \qquad b_n' = \frac{-Y_n}{\sqrt{T + T^{2H}}} \qquad (4.48)$$

Preuve :

Du lemme (4.2.1), on a

$$S(T) = S\exp\left[-(r_d - r_f)T + \sigma B_T + \sigma B_T^H - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i)\right]. \qquad (4.49)$$

l'inégalité $\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f > KB_0^d$ est équivalente à l'équation suivante

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-(r_d - r_f)T - \tfrac{N_t\sigma_J^2}{2}T\right) \times \\
&\quad \times S\exp\left[-(r_d - r_f)T + \sigma B_T + \sigma B_T^H - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i)\right] \times B_0^f > KB_0^d. \qquad (4.50)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a $\sigma B_T + \sigma B_T^H - \frac{1}{2}\sigma^2 T - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T\sigma_J^2}{2}T > m$

$$\begin{aligned}
C_1(K,T) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f \mathbb{1}_{\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f > KB_0^d}\right] \\
&= \mathbb{E}\{\exp\left(-(r_d - r_f)T - \tfrac{N_t\sigma_J^2}{2}T\right) \\
&\quad \times S\exp\left[-(r_d - r_f)T + \sigma B_T + \sigma B_T^H - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i)\right] \times B_0^f \mathbb{1}_U\}
\end{aligned}$$

où

$$u = \sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T\sigma_J^2}{2}T > m$$

$$C_1(K,T) = SB_0^f \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}\right] \times \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T \sigma_J^2}{2} T\right) \times \mathbb{1}_u\right]$$

$$= SB_0^f \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}\right] \times \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T \sigma_J^2}{2} T\right) \times \mathbb{1}_u | N_t\right]\right]$$

$$= SB_0^f \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}\right] \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)$$

$$\times \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T \sigma_J^2}{2} T\right) \times \mathbb{1}_u | n\right]$$

$$= SB_0^f \exp\left[-\tfrac{1}{2}\sigma^2 T - \tfrac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right]$$

$$\times \mathbb{E}\left[\exp\left(\sigma B_T + \sigma B_T^H\right) \times \mathbb{1}_u\right]$$

$$= SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi(T + T^{2H})}} \int_{Y_n}^{+\infty} e^{\frac{(x - \sigma T - \sigma T^{2H})^2}{2(T + T^{2H})}} dx$$

$$= SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right] \mathbb{P}(Z > Y_n),$$

$$C_1(K,T) = SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right]$$

$$\times \mathbb{P}\left(\frac{Z - \sigma T - \sigma T^{2H}}{\sqrt{T + T^{2H}}} > \frac{Z - \sigma T - \sigma T^{2H}}{\sqrt{T + T^{2H}}}\right)$$

$$= SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right] \Phi(b_n).$$

De plus,

$$C_2(K,T) = \mathbb{E}\left[KB_0^d \mathbb{1}_{\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right)S_T B_0^f > KB_0^d}\right]$$

$$= KB_0^d \mathbb{P}\left[\sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{N_T \sigma_J^2}{2} T > m\right]$$

$$= KB_0^d \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\mathbb{P}\left[\sigma B_T + \sigma B_T^H + \sum_{i=1}^{N_t} J(t_i) - \frac{n\sigma_J^2}{2} T > m\right]$$

$$= KB_0^d \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \mathbb{P}\left[\frac{B_T + B_T^{2H}}{\sqrt{T+T^{2H}}} > \frac{Y_n}{\sqrt{T+T^{2H}}}\right]$$

$$= KB_0^d \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \Phi(-\frac{Y_n}{\sqrt{T+T^{2H}}})$$

$$= KB_0^d \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} \Phi(b_n'),$$

où

$$y_n = \frac{m - \sum_{i=1} nJ(t_i) + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\sigma}, \qquad m = \ln \frac{KB_0^d}{SB_0^f} + \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H},$$

$$b_n = \frac{\sigma T + \sigma T^{2H} - y_n}{\sqrt{T+T^{2H}}}, \qquad b_n' = \frac{-Y_n}{\sqrt{T+T^{2H}}}$$

et $\Phi(.)$ est la distribution normale cumulative. De l'équation (4.45), on obtient

$$C(K,T) = \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(-\int_0^T \theta(t)dt\right) S_T B_0^f - KB_0^d\right) I_A\right]$$

$$= C_1(K,T) - C_2(K,T)$$

$$= SB_0^f \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\left(\sum_{i=1}^{n} J(t_i - \lambda T - \frac{n\sigma_J^2}{2})T\right)\right] \Phi(b_n)$$

$$-KB_0^d \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \Phi(b_n').$$

La preuve de l'équation (4.46), est montrée par les mêmes démarches.

Commentaire sur l'application

Dans l'approche actuarielle, on n'a pas besoin de la connaissance économique des données financières dans lesquelles les résultats sont exacts sur tous les types de marchés. Il est important de noter que notre modèle dans cette étude est facile à utiliser contre le modèle *Black Scholes* car il n'est pas nécessaire d'enquêter sur une mesure martingale équivalente. En outre, nous avons supposé que le prix au comptant suit le mouvement Brownien fractionnaire mixte avec des sauts est une référence claire, ce qui est important pour éviter les risques de change.

4.3 Propriétés asymptotiques de l'estimation de la volatilité du modèle dirigé par un mouvement Brownien fractionnaire mixte

L'objectif de cette application n'est pas l'estimation de la volatilité mais nous souhaitons montrer le rôle important du mouvement Brownien fractionnaire mixte pour préciser un estimateur du paramètre de la volatilité pour un modèle dirigé par le mouvement Brownien fractionnaire mixte sachant que cet estimateur possède des propriétés asymptotiques souhaitables.

On va proposer un estimateur de volatilité pour un modèle de mouvement Brownien fractionnaire mixte pour $H \in (0, 1)$. L'estimateur de la volatilité est nécessairement la variation quadratique du processus correspondant.
On sait que si le processus d'intégration est un mouvement Brownien, alors on peut obtenir un théorème central limite pour sa variation quadratique qu'est un résultat bien établi. Le théorème central limite pour la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire est valable pour $H \in (0, \frac{3}{4})$. On sait aussi qu'il ne peut avoir le théorème central limite pour la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire avec $H \in (\frac{3}{4}, 1)$. Mais dans le cas de la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire, il est à noter que le théorème central limite est possible pour toutes les valeurs du paramètre $H \in (0, 1)$ pour un tel mouvement Brownien fractionnaire et le résultat est attendu comme nous l'avons vu dans l'article de *Cheridito*([35]) pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ pour modéliser un prix d'une action, alors l'estimateur de la volatilité a des bonnes propriétés asymptotiques pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$. Bien que le mouvement Brownien fractionnaire mixte ait des accroissements dépendants mais pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, c'est équivalent au mouvement Brownien et le théorème central limite est satisfait pour le mouvement Brownien fractionnaire mixte avec $H \in (\frac{3}{4}, 1)$. Dans la suite, on prend $\alpha = 1$ i.e. $M_t^H = B_t + \beta B_t^H$.

4.3.1 Modèle dirigé par un mouvement Brownien fractionnaire mixte avec $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ et l'estimateur de la volatilité

Considérons le modèle suivant :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma(B_t + B_t^H) - \frac{1}{2}\sigma^2(t + t^{2H}))$$

pour $H \in (0, 1)$, où $S_0 > 0, \mu \in (-\infty, +\infty)$ est le paramètre de drift et $\sigma > 0$ est appelé le paramètre de la volatilité. On est intéressé par un estimateur du paramètre de la volatilité de ce processus pour $H \in (0,1)$.

Tout d'abord, on considère $\mu = 0$ dans le modèle. Pour $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$, les valeurs observées du processus sont $S_{t_j}, j = 0, \ldots, N$ et $t_{j+1} - t_j = \frac{1}{N}$, $\forall j = 0, \ldots, N-1$. On note qu'il s'agit de données à haute fréquence car la taille de l'échantillon augmente et la différence de temps entre deux points de données consécutives diminue. On propose l'estimateur de la volatilité σ^2, basé sur l'ensemble des observations $\{S_{t_j, j=0,\ldots,N}\}$, comme suit :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2H}}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\ln \frac{S_{\frac{j+1}{N}}}{S_{\frac{j}{N}}}\right)^2. \tag{4.51}$$

Notons que le facteur de normalisation $\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2H}}\right)$ dépend du deux paramètres N et H où $H \in (0,1)$.
Quand $N \to \infty$ ce facteur de normalisation $\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2H}}\right) \to 1$, pour $H > \frac{1}{2}$ et pour $H < \frac{1}{2}$, le facteur de normalisation tend vers ∞ quand $N \to \infty$. Donc , pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$ le facteur de normalisation tend vers à 1 quand $N \to \infty$.

4.3.2 La convergence presque sûre et la normalité asymptotique pour l'estimateur de la volatilité

On considère $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, donc $M_t^H = B_t + B_t^H$ et sa fonction de covariance devient de la forme $Cov(M_s^H, M_t^H) = (t \wedge s) + \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions étagées à valeurs réelles et les espaces de *Hilbert* associer pour B_t^H et B_t^H sont $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ qui sont la fermeture de $\mathcal{E}$, avec un produit scalaire comme covariances correspondantes respectivement. Donc, on a $Cov(B_s, B_t) = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}_1} = t \wedge s$ et $Cov(B_s^H, B_t^H) = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle_{\mathcal{H}_2} = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})$.

Pour $\phi, \psi \in \mathcal{E}$, on définit le produit scalaire $\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2}$.

Pour $\phi = \sum_j a_j \mathbb{1}_{[0,t_j]}$, posons $M(\phi) = \sum_j a_j M_{t_j}^H$. De même pour $\psi = \sum_j b_j \mathbb{1}_{[0,t_j]}$, alors,

$$Cov(M(\phi), M(\psi)) = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{E}},$$

donc, pour $\phi \in \mathcal{H}$, il existe $\phi_n \in \mathcal{E}$ tell que $\phi_n \to \phi \in \mathcal{H}$, et par suite $M(\phi)$ est la limite de $M(\phi_n)$ dans L^2, i.e. $M(\phi)$ est dans $L^2(\Omega, \mathcal{F})$. Donc, on aura

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_2},$$

pour $\phi, \psi \in \mathcal{H}$, et $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{E}}$ avec cette extension du produit scalaire et de l'isométrie d'*Itô* on a $Cov(M(\phi), M(\psi)) = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$ où $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

Soit H_n, le n^{ime} polynôme de *Hermit*[1], satisfaisant

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = H_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \tag{4.52}$$

On prend $\phi \in \mathcal{H}$, telle que $\|\phi\|_{\mathcal{H}} = 1$. On considère les variables aléatoires $H_n(M(\phi))$, et prenons l'adhérence du sous-espace engendré par ces variables aléatoires comme un sous-espace de $L^2(\Omega, \mathcal{F})$.

l'intégrale de *Wiener* multiple I_n par rapport au processus gaussien isonormal $\{M(\phi), \phi \in \mathcal{H}\}$ est une application du produit tensoriel symétrique $\mathcal{H}^{\odot n}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F})$ (le chaos de *Wiener* d'ordre n, noté $\mathcal{W}_n$). Notons que $\mathcal{H}^{\odot n}$ a la norme $\frac{1}{\sqrt{n!}} \|.\|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$, $\mathcal{H}^{\otimes n}$ est le produit tensoriel de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^{\odot n}$ est le produit tensoriel symétrique de $\mathcal{H}$.

Pour $f \in \mathcal{H}^{\odot n}$, on a aussi $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$, $\tilde{f}$ est la symétrie de f.

Pour $\phi \in \mathcal{H}$, $I_n(\phi^{\otimes n}) = n! H_n(I_1(\phi)) = n! H_n(M(\phi))$ est une isométrie linéaire entre $\mathcal{H}^{\odot n}$ et $\mathcal{W}_n$(D'après la proposition 8.1.2 ([36])).

Maintenant, pour $f \in \mathcal{H}^{\odot n}$ et $g \in \mathcal{H}^{\odot m}$, on a :

$$\begin{cases} Cov(I_n(f), I_m(g)) = n! \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{\otimes n}, & , \text{ si } \quad m = n \\ Cov(I_n(f), I_m(g)) = 0, & \text{si} m \neq n. \end{cases} \tag{4.53}$$

Soit $\{e_i, i \geq 1\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$, $m, n \geq 1, r = 0, \ldots, n \wedge m$. $f \otimes_r g \in \mathcal{H}^{\otimes(m+n-2r)}$ est une contraction définie par

$$f \otimes_r g = \sum_{i1,\ldots,ir=1}^{\infty} \langle f, e_{i1} \otimes \ldots \otimes e_{ir} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes r}} \langle g, e_{i1} \otimes \ldots \otimes e_{ir} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes r}}. \tag{4.54}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la base orthonormée et $\langle f, e_{i1} \otimes \ldots \otimes e_{ir} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes r}} \in \mathcal{H}^{\odot(n-r)}$, $\langle g, e_{i1} \otimes \ldots \otimes e_{ir} \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes r}} \in \mathcal{H}^{\odot(m-r)}$. $f \otimes_r g$ n'est pas nécessairement symétrique. Soit $f \tilde{\otimes}_r g$ la symétrie de $f \otimes_r g$. Alors

$$I_n(f) I_m(g) = \sum_{r=0}^{m \wedge n} r! \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} I_{n+m-2r}(f \tilde{\otimes}_r g), \tag{4.55}$$

1. Les polynômes de *Hermite* sont définis par : $H_n(x) = (-1)^n \exp(\frac{x^2}{2}) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-\frac{x^2}{2})$

où

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x!}{y!(x-y)!}.$$

Aussi, pour $m = n = r$, on a

$$I_0(f \otimes_r g) = \langle f \otimes_r g \rangle_{\mathcal{H}^{\otimes r}}.$$

La propriété suivante est la propriétés d'hypercontractivité pour l'intégrale de *Wiener* multiple (Voir l'équation 8.4.18 ([36]).)

$$[\mathbb{E}(I_n(f))^r]^{\frac{1}{r}} \leq (r-1)^{\frac{n}{2}} \left[\mathbb{E}(I_n(f))^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad r \geq 2.$$

Soit F un fonctionnel du processus gaussien isonormal M tel que $\mathbb{E}(F(M)^2) < \infty$, alors, il existe une suite $f_n \in \mathcal{H}^{\odot n}$ et F peut être écrire sous la forme suivante $F = \sum_{n\geq 0} I_n = (f_n)$ avec $I_0(f_0) = \mathbb{E}(F)$, où les série convergent dans L^2(Par la proposition 8.4.6 ([36])).

Pour $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathcal{H}$, soit $F = g(M(\phi_1), \ldots, M(\phi_n))$ avec g lisse à support compact. Donc, la dérivée de *Malliavin* D est une variable aléatoire de $\mathcal{H}$ définie par :

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(M(\phi_1), \ldots, M(\phi_n))\phi_i.$$

DF est un élément de $L^2(\Omega, \mathcal{H})$. Si $\mathcal{H}$ est l'espace $L^2(\mathbb{R})$ pour une mesure non-atomique, donc DF peut être identifié avec un élément $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$. Notons $DF = (D_tF)_{t\in\mathbb{R}}$

$$D_tF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(M(\phi_1), \ldots, M(\phi_n))\phi_i(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $F = I_n(f), f \in \mathcal{H}^{\odot n}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors

$$D_tF = D_tI_n(f) = nI_{n-1}f(., t).$$

$I_{n-1}f(., t)$ est une intégrale stochastique prise par rapport aux $(n-1)$ premières variables $t_1, \ldots, t_{n-1}$ de $f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)$, t est supposée fixe.

Si $F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n), f_n \in \mathcal{H}^{\odot n}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D_tF = \sum_{n\geq 0} nI_{n-1}f_n(., t).$$

Pour prouver la normalité asymptotique, on va utiliser les deux théorèmes suivants

Théorème 4.7. *[42] Soit $I_n(f)$ une intégrale multiple d'ordre $n \geq 1$ par rapport à un processus isonormal M. Alors*

$$d(\mathcal{L}(I_n(f)), \mathcal{N}(0,1)) \leq c_n[\mathbb{E}(|DI_n(f)|^2_{\mathcal{H}} - n^2)]^{\frac{1}{2}}$$

où D est la dérivée de Malliavin par rapport à M, et $\mathcal{H}$ est l'espace canonique de Hilbert associé à M. Ici, d peut être l'une des distances comme la distance de Kolmogorov Smirnov ou la distance de la variation totale etc. et on trouvera une constante[2] c_n dépendante de d et l'ordre n. $\mathcal{L}(M)$ signifie la loi de M.

Théorème 4.8. *[42] Pour $n \geq 2$, soit $(F_k, k > 1), F_k = I_n(f_k)$ (avec $f_k \in \mathcal{H}^{\odot n}$ pour tout $k \geq 1$) une suite de variables aléatoires de carré intégrable dans la n^{ime} chaos de Wiener d'un processus isonormal tel que $[F_k^2]^2 \to 1$ quand $k \to \infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite $(F_k)_{k\geq 0}$ converge au sens de distribution vers la loi normale centrée réduite.*

(ii) *$[F_k^4] \to 3$, quand $k \to \infty$.*

(iii) *Pour tout $1 \leq l \leq n-1$, $\lim_{k\to\infty} |f_k \otimes_l f_k|_{\mathcal{H}^{\otimes 2(n-1)}} = 0$.*

(iv) *$|DF_k|^2_{\mathcal{H}} \to n$ dans L^2 quand $k \to \infty$, où D est la dérivée de Malliavin par rapport à M.*

4.3.3 Résultats asymptotiques

Théorème 4.9. *[12] L'estimateur $\hat{\sigma}^2$ converge vers σ^2 presque sûrement.*

Théorème 4.10. *[12] L'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est asymptotiquement distribué comme $\mathcal{N}(\sigma^2, \varsigma)$, où $\varsigma = var(\hat{\sigma}^2), N$ étant la taille de l'échantillon i.e. $\frac{\sqrt{N}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)}{\upsilon} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ quand $N \to \infty$, où*

$$\upsilon = \lim_{N\to\infty} \sqrt{N\varsigma}.$$

Commentaire sur l'application

On a montré que l'estimateur de la volatilité pour un modèle dirigé par un mouvement Brownien fractionnaire mixte converge presque sûrement, i.e. fortement cohérent et est asymptotiquement normalement distribué. Ainsi, on a montré le théorème central limite pour la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire mixte pour $H \in (0,1)$. Notons que contrairement à la variation quadratique du mouvement Brownien fractionnaire pur, où l'on obtient une normalité asymptotique pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$, ici pour le mouvement Brownien fractionnaire mixte, on obtient une

2. La constante c_n est égale à 1 dans le cas où d est la distance de *Kolmogorov* ainsi que dans le cas de la distance de *Wasserstein* et dans le cas de la distance de la variation totale, on a $c_n = 2$.

normalité asymptotique pour toutes les valeurs de H, précisément pour $H \in (0,1)$. Le résultat est attendu comme nous l'avons vu dans le document de *Cheridito* ([35]) selon lequel mouvement Brownien fractionnaire mixte est équivalent au mouvement Brownien pour $H \in (\frac{3}{4}, 1)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, j'ai réalisée une étude sur deux processus récemment définis : le mouvement Brownien fractionnaire mixte et le mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé. En premier lieu, on a définit ces deux processus et étudié leurs propriétés avec tous les détails, Par ailleurs, au cours de cette étude, on a rencontré plusieurs difficultés, comme la non-différentiabilité des trajectoires de ces deux processus, en particulier leurs dérivées ne sont pas définies, chose qui nous a fait montrer qu'il sont dérivables au sens de distribution, en outre une représentation du mouvement Brownien fractionnaire mixte dans l'espace de bruit blanc a été construite et aussi celle du mouvement Brownien fractionnaire mixte généralisé. une question fondamentale a été posée ; Le mouvement Brownien fractionnaire mixte est-il une semimartingale ? cette question a eu une réponse remarquable, car on a montré que notre processus n'est pas une semimartingale pour $H \in [0,1]\backslash[\frac{3}{4},1) \cup \{\frac{1}{2}\}$, c'est la raison pour laquelle nous avons définies différents type d'intégration stochastique. Ensuite, on a éffectué une étude sur les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement Brownien fractionnaire mixte sous des conditions sur les coefficients qui assurent l'existence et l'unicité de la solution, en utilisant des approximations et des estimations, bien que la théorie développée de l'intégration stochastique n'est applicable.

La valorisation de notre travail est montré en terme d'applications ; on a prouvé l'absence d'arbitrage en utilisant le modèle mixte i.e. le modèle présenté en fonction du mouvement Brownien fractionnaire mixte, puis on a étudie la stratégie de l'approche actuarielle de la prime d'assurance équitable pour l'option de change de prix, lorsque la valeur de l'option en devises étrangères suit le mouvement Brownien fractionné mixte avec des sauts, enfin on a défini un estimateur du paramètre de la volatilité pour un modèle dirigé par le mouvement Brownien fractionnaire avec des propriétés souhaitables, en conséquence l'application du mouvement Brownien fractionnaire mixte en finance est utile grâce à ses propriétés distinctives en particulier sa dépendance à long terme.
Enfin, nous souhaitons que les résultats obtenus dans ce travail pourraient contribuer à l'étude et à la résolution des problèmes dont les modèles sont définis par les processus suivants :

- Le mouvement Brownien fractionnaire mixte dans le cas vectoriel.
- La mixture du mouvement Brownien d-dimensionnel avec le processus de *Rosemblatt*.
- La mixture du mouvement Brownien d-dimensionnel avec le processus d' *Hermit*.
- Le processus gaussien mixte i.e. la combinaison linéaire d'un mouvement Brownien avec un processus gaussien centré et indépendant du Brownien.

Bibliographie

[1] Ananya Lahiri. Asymptotic properties of the volatility estimator of mixed fractional Brownian motion driven model. Chennai Mathematical Institute. arXiv :1611.08543v1. India(25 novembre 2016).

[2] Bladt, M, Rydberg, TH : An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. Insur. Math. Econ.22(1), 65-73 (1998).

[3] C. Stricker. Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. In Filtering and control of random processes (Paris, 1983).

[4] Christian Bender. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst parameter.Université de Konstanz Allemagne(6 août 2002).

[5] Christoph Thäle. Further Remarks on Mixed Fractional Brownian Motion. Applied Mathematical Sciences, Vol. 3, 2009, no. 38, 1885 - 1901. Université de Fribourg(2009).

[6] Chunhaoa Cai, Pavel Chigansky et Marina Kleptsyna. Mixed gaussian process : A filtrating approach. Institut de statistique Mathématiques (2016).

[7] D.Nualart, J.Gurra. Stochastic Differential Equations Driven by Fractional Brownian Motion and Standard Brownian Motion. University of Kansas(2013).

[8] Elisa Alòs, Olivier Mazet, David Nualart ; Stochastic calculus w.r.t fBm with Hurst parameter lesser than 1/2. Stochastic Process. Appl (2000).

[9] Erick Herbin. Régularité de processus aléatoires. Ecole Centrale Paris(19 mars 2009).

[10] F.Ben Adda and J.Cresson, About non-differentiable functions. Journal of Mathematical Analysis and Applications 263(2001), No. 2, 721-737.

[11] Feyel, D., de la Pradelle, A. : Fractional integrals and Brownian processes. Potential Analysis,10, 273-288 (1999).

[12] Fouad Shokrollahi and Adem Kiliçman. Actuarial approach in a mixed fractional Brownian motion with jumps environment for pricing currency option. Advanced in Difference Equations Springer. DOl 10.1186/s 13662-015-0590-8. 2015 (2015 :257).

[13] Grasia. A. M. Rodemich, E (1974). monotonicity of certain functionals under rearrangement. Ann. Inst. Fourier 24(2) :67-116.

[14] Herry Pribawanto S. A white noice approach to mixed fractional brownian motion. Université de Sanata Dharma Indonesia. SIGMA, VOL, 13,No.2, July 2010 :123-132. ISSN : 1410-5888.

[15] Herry Pribawanto S. Generalized Mixed Fractional Brownian Motion As Generalized White Noise Functional. Université de Sanata Dharma Indonesia(01 janvier 2011).

[16] Itô, K. : Differential equations determining Markov processes. Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai,244, 1352-1400 (1942).

[17] Itô, K. : Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo,20, 519-524 (1944).

[18] Itô, K. : Stochastic differential equations. Memoirs of the Amer. Math. Soc.4(1951).

[19] J. POTTHOFF. A Characterization of Hida Distributions. Université de Louisiana Stare(December 29, 1989).

[20] Jean-Christophe Breton. Calcul Sochastique. Université De Rennes 1(Septembre-Décembre 2014).

[21] Jean-Christophe Breton. Processus Gaussiens. Université de La Rochelle(Septembre-Décembre 2006).

[22] Jean-François LE GALL. Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique. Université Paris-Sud(30 septembre 2011).

[23] Joachim Y. Nahmani. Introduction to stochastic integration w.r.t fBm. Institue of Mathematics A (june 2009).

[24] Jordan Bell. The Bochner-Minlos theorem. Université de Toronto(May 13, 2014).

[25] K. Kolwankar and A. D. Gangal,Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, Proceedings of International Conference on Fractals in Engineering, Archanon, 1997.

[26] K.Kubilius. The exictence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type. Institute of Mathematics and Informatics, Akademijos 4, vilnius2600, Lithuania.98(2002) 289-315.

[27] Kolmogoroff, A.N. : Über die analytischen Methodenin der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Annalen,104, 415-458(1931).

[28] Kuznetsov, Yu.A. : The absence of arbitrage in a model with fractal Brownian motion. Russ. Math. Surv.,54, 847-848 (1999).

[29] Laure Coutin. An introduction to (stochastic) calculus with respect to fractional Brownian motion. In Séminaire de Probabilités XL,volume1899 of Lecture Notes in Math, pages 3-65.Springer, Berlin, 2007.

[30] M. Zähle. Integrationn with respect to fractal functions and stochastic calculus. I. Probab. Theory Related Fields,111(3) :333-374,1998.

[31] Marc Yor.A Gaussian martingale which is the sum of two independent Gaussian non-semimartingales. Electron. Commun. Probab. 20 (2015), no. 70, 1-5.

[32] MOUNIR Zili. On the mixed fractional brownian motion. Journal de Mathématiques appliquées et analyse stochastique(2006). Hindawi Publishing Corporation. Journal of applied Mathematics and Stochastique Analysis. Volume 2006, Articale ID 32435, Page 1-9.

[33] Moussa Ayman. Rappels de Cours-Distributions tempérées. Université Pierre et Marie Curie(2014-2015).

[34] P.Lévy. Processus stochastiques et mouvement Brownien. Gauthier-Villars, Paris (1948) Second edition (1965).

[35] Patrick Cheridito. Mixed fractional Brownian motion.Bernoulli, 7(6) :913-934, 2001.

[36] Peccati, G, Taqqu, M. (2011). Wiener Chaos : Moments, Cumulants and Diagram, 2011, Springer.

[37] Philippe Carmona, Laure Coutin, and Gérard Montseny. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist,39(1) :27-68,2003.

[38] Philip E. Protter. Stochastique Intégration and Differential Equations. Springer-Unversité de Cornell.Ithaca(August 2003).

[39] R. Peltier, J. Lèvy Vehel. Multifractional Brownian motion : de
nition and preliminary results. Rapport de recherche de l'INRIA no. 2645 1995.

[40] T. Yamada and S.Watanabe : On the uniqueness of solutions of stochasyic differential equation I and II. J.Math. Kyoto Univ. 11(1971), 155-167 and 553-563.

[41] Terry Lyons. Differential equations driven by rough signals. I. An extension of an inequality of L. C. Young.Math. Res. Lett.,1(4) :451-464,1994.

[42] Tudor, C. A. (2008), Analysis of variance for self-similar processes, 2008, Springer.

[43] Tyrone E. Duncan, Yaozhong Hu, and Bozenna Pasik-Duncan. Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory. SIAM J. Control Optim. 38(2) :582-612 (electronic), 2000.

[44] W.Feller. : Zur Theorie der Stochastischen Prozesse (Existenzund Eindeutigkeitssatze). Math. Ann.,113, 113-160 (1936).

[45] Wiener N. : Differential space. J. Math. Phys. 2, 131-134 (1923).

[46] Yuliya S. Mishura. Stochastic Calculus for FBM and Related Processes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg(2008).

[47] Yuliya S. Mishurae, Georgiy M.SHEVCHENKO. Existence and Uniqueness of the Solution of Stochastic Equation Involving Wiener Process and Fractional Brownian Motion with Hurst Index $H > \frac{1}{2}$. Kyiv Taras Shevchenko National University, Kyiv, Ukraine, 40 :3492-3508, 2011.

[48] Zähle, M. : Long range dependence, no arbitrage and the BlackScholes formula. Stochastics and Dynamics,2, 265-280 (2002).