

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique



N°Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année Univ: 2016/2017



LE MODÈLE TRINOMIAL POUR L'ÉVALUATION DES PRODUITS DÉRIVÉS

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse stochastique, Statistiques des processus et
Applications

par

Touati Badreddine¹

Sous la direction de

Mlle F.Benziadi

Soutenue le 21 Mai 2017 devant le jury composé de :

Mlle : S.Rahmani	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mlle : F.Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mr : M.Laouni	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mme : N.Ait ouali	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice

1. e-mail : badredin308@gmail.com

REMERCIEMENTS

Avant tout je remercie, le dieu qui ma donner la puissance et la volonté, la patience pour accomplire ce travail.

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, d'un grand nombre de personnes, je souhaite ici les en remercier.

Je tien d'abord à remercier très chaleureusement mon encadreur de mémoire de fin d'études Mlle **Fatima Benziadi**, pour ses précieux conseils et son orientation tout au long de mes recherches.

Tous les membres de jury d'avoir participé à la commission des examinateurs en vue d'une évaluation prompte et à sa juste valeur.

Je remercie mes chers parents qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.

Les conseils que j'apprent, la patience, la confiance qui je m'accompagner dans la réalisation de mon travail de recherche.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études. À ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je tien à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes parents.

Tous mes oncles et tantes, tous mes cousins et cousines

Tous mes enseignants de département de mathématiques

Tous mes camarades de promotion 2016 /2017

Table des matières

Introduction générale	7
1 Le marché des produits dérivés	9
1.1 Présentation des produits dérivés	10
1.1.1 Les contrats à terme de type Forward	10
1.1.2 Les contrats à terme de type Future	11
1.1.3 Les Swaps	12
1.1.4 Les options	14
2 Rappels sur le modèle binomial	19
2.1 Description du modèle	20
2.1.1 Méthodologie	20
2.2 Stratégie de gestion d'un portefeuille	21
2.2.1 Stratégie autofinancée	22
2.2.2 Stratégie admissible et arbitrage	23
2.2.3 Probabilité risque-neutre	23
2.3 Modèle binomial à une période	23
2.3.1 Modélisation probabiliste du marché	23
2.3.2 probabilité risque neutre	25
2.4 Modèle binomial à N périodes	30
3 Le modèle trinomial	31
3.1 Description du modèle	31
3.1.1 Les hypothèses du marché	32

3.1.2	Ensemble des paramètres de l'arbre Trinomial	33
3.2	Évaluation	33
3.2.1	Valeur d'une option européenne à l'aide du modèle trinomial	34
4	Exemples et simulation	37
4.1	Exemple	37
4.1.1	Simulation	40
4.2	Exemple	42
4.2.1	Simulation	45
4.3	Exemple	47
4.3.1	Simulation	50

Introduction générale

La finance recouvre un domaine d'activité, celui du financement qui consiste à fournir l'argent nécessaire à la réalisation d'une opération économique. Ce domaine concerne aussi bien les individus, les ménages que les entreprises publiques ou privées, mais aussi les États.

L'un des sujets les plus importants dans la finance est la théorie des prix des options qui jouent un rôle important dans les marchés financiers.

Au début des années 1970, Fisher Black et Myron Scholes ont dérivé une formule fermée pour calculer les prix des options européennes sur un stock non-dividende, le travail de Black et Scholes a posé un chemin pour la recherche ultérieure en mathématiques financières, en développant plusieurs modèles de tarification et les procédures pour les options standards. Ces modèles sont, à ce jour encore populaires et largement utilisés.

En 1979, Cox Ross et Rubinstein ont également proposé un modèle pour la valorisation des options mais dans lequel le prix de l'actif sous-jacent est un processus à temps discret tel que la valeur d'une option est calculée par application de la probabilité risque-neutre pour laquelle les prix actualisés sont des martingales.

En 1986, une extension du modèle binomial a été développée par Phelim Boyle. Il a présenté une méthode numérique pour évaluer une option à l'aide d'un arbre trinomial. Il s'agit d'un modèle ouvert, qui ne génère pas une seule réponse, mais plutôt un certain nombre d'évolutions possibles du prix de l'option pendant la durée de vie de l'option. Ces possibilités sont ensuite placées dans un arbre de tarification, similaire au modèle binomial. La différence est cependant que le modèle trinomial prend en compte trois mouvements de prix possibles, c'est à dire que le prix peut

augmenter, le prix peut diminuer ou rester constant. Cette dernière possibilité est le facteur dans lequel le modèle trinomial se distingue du modèle binomial.

Le but de ce travail est d'illustrer les formules d'évaluation des produits dérivés en appliquant ce dernier modèle. Pour bien comprendre cette application de ce célèbre modèle, on partage cet mémoire en trois chapitres :

Le premier chapitre, est un *chapitre introductif* qui présente les différents types de produits dérivés qui sont existents sur les marchés financiers.

En chapitre 2, on donne une brève description du modèle binomial, en expliquant les étapes d'évaluation des options.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du modèle trinomial, qui constitue le coeur de cet mémoire.

Enfin, on présente quelques exemples d'application en essayant de faire des simulations.

Chapitre 1

Le marché des produits dérivés

Les marchés de produits dérivés ou encore dérivés sont ainsi nommés parce que les actifs négociés portent eux même sur d'autres actifs. Ces marchés comprennent essentiellement trois groupes d'intruments financiers : les contrats à terme, les options et les swaps (contrat d'échange). Qu'ils soient négociés sur des marchés organisés ou sur des marchés de gré à gré appelés aussi OTC (Over The Counter).

Historiquement, les options se négociaient en France sur le MONEP (marché des options négociables de Paris), un marché créé en 1987. Avec la vague de fusions et de restructurations sur les places financières européennes il a depuis été intégré au sein du "Liffe" (London International Financial Futures and options Exchange) qui regroupe de nombreux marchés de produits dérivés.



Les marchés dérivés ne sont plus véritablement des lieux physiques (transactions téléphoniques ou informatiques).

1.1 Présentation des produits dérivés

Définition 1.1.1. *Un produit dérivé est un actif financier dépendant d'autres variables plus fondamentales (appelées sous-jacent ou support) comme une action, un taux de change ou une matière première.*

Il convient de distinguer trois types de produits dérivés : les contrats à terme de type forward et de type futures, les swaps et les options.

1.1.1 Les contrats à terme de type Forward

Historiquement, les premiers produits dérivés ont été des transactions à terme de gré à gré (appelées en anglais : forward) sur des marchandises, c'est-à-dire l'engagement ferme de réaliser dans l'avenir une transaction, achat ou vente à une date, un prix et pour une quantité données. Tous les trois fixés au départ, sur l'actif sous-jacent, généralement une matière première standardisée comme le blé en Europe, ou en Asie le riz. L'huile d'olive semble avoir été dans l'antiquité la première marchandise traitée à terme.

Définition 1.1.2. *Le contrat à terme de type Forward constitue un engagement d'acheter ou de vendre une certaine quantité de supports à une date d'échéance future et à un prix spécifié au moment où le contrat est passé. Si à la date d'échéance, le prix de l'actif support au contrat est supérieur au prix spécifié, l'acheteur du contrat réalise un profit ; dans le cas contraire il réalise une perte.*

Les caractéristiques du Forward

- Le risque du contrat est symétrique : l'acheteur du contrat réalise un gain ou une perte selon le sens du mouvement du prix de l'actif support, qui représente exactement la perte ou le gain du vendeur.
- La valeur du contrat à terme Forward est versée par le débiteur seulement à l'échéance ; aucun paiement entre les deux parties n'intervient avant cette date.
- Les Forwards ne sont pas évalués au marché financier tous les jours.
- Ce type de transactions est courant pour les marchandises et les devises étrangères.

- Il s'agit d'une forme de couverture populaire, car le contrat peut être adapté aux besoins de chaque investisseur.

Exemple 1.1.1. *Supposons qu'une entreprise veut acheter 100 actions qu'elle doit payer dans trois mois et que le prix s'établit actuellement à 50 dollars l'action. L'entreprise craint cependant que ce prix va augmenter au cours des trois prochains mois. En achetant un contrat à terme de type forward, elle obtient le droit de se procurer 100 actions au prix actuel de 50 dollars. De cette façon, même si les prix augmentent, elle réalise un gain et vice versa.*

1.1.2 Les contrats à terme de type Future

Le développement des transactions de gré à gré a amené dans le souci d'assurer la sécurité des règlements/livraisons la création des marchés à terme organisés. On négocie des engagements de livraison standardisés à des échéances également standardisées. Bien que les contrats à terme de type Futures ayant pour actif support des matières premières existent depuis 1860, les contrats à terme d'instruments financiers ne sont apparus que beaucoup plus récemment en 1979 pour les contrats à terme de devises.

Définition 1.1.3. *Le contrat à terme de type Future est semblable au contrat Forward. Il s'agit de contrat en vertu desquels deux parties acceptent d'effectuer une transaction sur un actif financier ou un produit quelconque, à un prix donné et à une date ultérieure. Essentiellement, une des deux parties accepte d'acheter l'actif que veut bien lui vendre la seconde. Les deux parties doivent honorer leurs engagements, et aucune ne peut réclamer de frais.*

Les caractéristiques du Future

Comme le Forward, le Futures présente un profil de gains symétrique. Mais à l'inverse du contrat Forward, le risque de crédit c'est-à-dire le risque de défaut d'un des deux contractants, peut être complètement éliminé dans le contrat Futures grâce à deux mécanismes spécifiques : le dépôt de garantie d'une part, l'existence d'une chambre de compensation et la standardisation des contrats d'autre part.

Le dépôt de garantie

Pour s'assurer que chaque partie - qu'il soit l'acheteur ou le vendeur - respecte ses engagements, il est exigé un dépôt de garantie : c'est la marge initiale qui n'est pas nécessairement exigée dans les contrats de type Forward. Son montant dépend de la volatilité du prix du contrat et donc du risque encouru.

La chambre de compensation et la standardisation des contrats

L'existence de marchés organisés constitue le deuxième mécanisme permettant de réduire le risque de défaut. Si l'organisation du marché se bornait à mettre en présence acheteurs et vendeurs, tous les opérateurs courraient, en plus du risque normal lié à la qualité de leurs anticipations, un autre risque lié à la défaillance de leurs contreparties. C'est pour éviter les conséquences de telles défaillances que sur tous les marchés de Futures, les opérateurs ne passent aucun contrat directement entre eux. Toute opération s'effectue par l'intermédiaire d'une chambre de compensation, qui enregistre immédiatement tout contrat dès qu'il est négocié entre un acheteur et un vendeur. De fait, la chambre de compensation s'intercale automatiquement comme contrepartie de l'acheteur d'une part et du vendeur d'autre part et rompt le lien qui les unit. Tous les contrats sont alors conclus avec la chambre de compensation : un contrat entre l'acheteur et la chambre de compensation qui a le rôle du vendeur, et l'autre entre le vendeur et la chambre de compensation jouant alors celui de l'acheteur. En effet les ordres ne sont pas transmis directement à la chambre de compensation. Ils doivent automatiquement transiter par l'intermédiaire d'adhérents, qui sont seuls habilités à négocier sur le marché.

1.1.3 Les Swaps

Les premières opérations de swaps sont apparues vers la fin des années 1970, après une décennie riche en événements sur le plan économique et financier, qui ont à la fois suscité les besoins de couverture auxquels les swaps répondaient, et fourni les conditions de leurs réalisations. Les Swaps étant des produits complexes, aux caractéristiques très spécifiques, de ce fait une présentation simplifiée nous aidera à

en comprendre le principe, les types et les caractéristiques.

Définition 1.1.4. *Un Swap (de l'anglais "to swap" signifiant "échanger") est une opération d'échange de flux d'intérêts et/ ou de devises, portant sur un montant et une durée définis à l'avance.*

Les caractéristiques du Swap

La réalisation d'un Swap correspond donc à la signature d'un contrat par lequel deux contreparties vont accepter de s'échanger des flux sur une période donnée. les obligations de l'une des parties étant contractuellement dépendant de la réalisation des obligations de l'autre contrepartie. Le caractère conditionnel de cet échange permet de faire figurer cette transaction dans le hors-bilan et non pas dans les comptes de bilan de chaque contreparties. À chaque date de règlement de Swap, le solde entre flux financiers est calculé, et le règlement est effectué par la partie qui doit de l'argent selon ce calcul. Dans la majorité des cas, les deux parties ne traitent pas directement. Une banque ou une maison de courtage sert d'intermédiaire ou joue le rôle de courtier.

On distingue deux principaux types de Swaps :

1. **Les Swaps de taux d'intérêt** : c'est un échange de conditions d'intérêts, portant sur des montants correspondant à des flux d'intérêts, calculés sur un capital identique mais à des taux d'intérêts différents, l'un est fixe et l'autre variable. Ce type de swap sert le plus souvent à transformer un emprunt à taux fixe en emprunt à taux variable, ou vice versa. C'est ce qu'on appelle le "swap à la vanille".
2. **Les Swaps de devises** : un Swap de devises est un contrat permettant d'échanger des flux fixes libellés dans deux devises différentes. En réalité cependant, ce swap nécessite deux transactions distinctes. En un premier temps, une quantité de devises A est vendue pour un montant convenu en devises B au moment présent. Le prix payé à ce moment est ce qu'on appelle "prix au comptant". Dans un deuxième temps, le swap prévoit l'achat d'une quantité de devises B contre un montant en devises A à une date ultérieure. Le prix payé, négocié au moment de la création du swap, correspond au "prix à terme". La plupart des

swaps de devises contiennent des paiements d'intérêt périodiques négociés, qui s'ajoutent aux échanges initial et ultérieur de capital.

1.1.4 Les options

Les marchés d'options se sont formidablement développés à partir de 1973 avec la création du premier marché d'options négociables à Chicago (CBOE), et leur multiplication dans le monde entier, et notamment en France à partir de 1987. Les premières options créées avaient pour sous-jacent les actions. Elles se sont par la suite étendues à une multitude d'autres actifs, et notamment mais pas uniquement, financiers : indices boursiers, contrats à terme, taux d'intérêt, taux de change, l'or et diverses marchandises. Comme les contrats à terme, les options offrent un fort effet de levier dans la mesure où le capital investi est bien moindre que celui de l'actif sous-jacent, ou support, permettant ainsi un effet multiplicateur sur le taux de rentabilité de l'actif sous-jacent.

Définition 1.1.5. *À l'inverse des contrats Forward, Futures ou Swap, l'option est un produit dérivé asymétrique qui confère à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif financier, à un prix précisé à l'avance (prix d'exercice) et à une certaine échéance. Une définition complète d'une option doit clairement spécifier dans quelles conditions elle peut être exercée. Les options de type européen ne peuvent être exercées qu'à une date déterminée, la date d'échéance. Les options de type américain peuvent être exercées à n'importe quel moment jusqu'à la date d'échéance.*

Les principaux contrats négociés sur les marchés financiers : sont les calls (option d'achat) et les puts (option de vente) :

1. Un **call** donne à l'acheteur le droit, et non l'obligation, d'acheter un nombre déterminé d'unités d'actif support à un prix déterminé (appelé prix d'exercice) avant ou à la date déterminée (appelée date d'échéance).
2. Un **put** donne à l'acheteur le droit, et non l'obligation, de vendre un nombre déterminé d'unités d'actif support à un prix déterminé avant ou à une date précisée.

Dans tout les cas de figure, le vendeur de contrat d'option est subordonné à la décision de l'acheteur du contrat, et l'acheteur exerce son option uniquement si tel est son intérêt. Le droit qu'à l'acheteur du contrat place le vendeur en état de subordination, cet état est rémunéré par le versement d'une prime (premium) par le premier au second, dès la passation du contrat. Le prix d'une option appelée généralement premium, fluctue en permanence, en fonction de la valeur de l'actif sous jacent et d'autres paramètres.

Les déterminants de la valeur d'une option

Avant son échéance, une option est cotée sur le marché et son prix est librement négocié. Donc, il paraît nécessaire de savoir quels sont les principaux facteurs qui influencent la valeur d'une option :

1. **Valeur intrinsèque** : la valeur intrinsèque d'une option est la valeur qu'en retirerait son détenteur s'il l'exerçait immédiatement. Cette valeur est soit nulle et le détenteur n'a pas intérêt à le faire, soit positive. Elle évolue avec la valeur du titre support.
2. **Valeur temps** : Un autre facteur important à prendre en compte est la durée dont dispose une option avant son expiration. Ce facteur est important car, plus l'option dispose de temps avant son expiration, plus elle a le temps de se retrouver dans une position profitable. On appelle cela la valeur temps de l'option, et elle diminue au fur et à mesure que l'option approche de la date d'expiration.
3. **Volatilité** : Le dernier facteur à prendre en compte est la volatilité du prix du titre sous-jacent sur lequel l'option se calque. Pourquoi cela est-il important ? Cela est important parce que, comme avec la valeur temps, plus le titre sous-jacent est caractérisé par des prix volatiles, plus il a de chances d'aller dans un sens qui est profitable à l'acheteur de l'option. C'est pour cette raison que les vendeurs d'options tiendront compte de la volatilité des prix dans les primes qu'ils cotent.

Les caractéristiques d'une option

1. Date d'échéance du contrat T .
2. Actif sous jacent dont le cours est noté $(S_t)_{t \in [0, T]}$.
3. Prix d'exercice (strike) K auquel on peut acheter ou vendre une unité (en général plusieurs) de sous jacent.
4. On explique la valeur d'une option d'achat (call) comme suit :
 - Si $S_T > K$, le détenteur de l'option a intérêt à l'exercer, en effet, il peut acheter une action au prix K et la revendre immédiatement. Le bénéfice est $S_T - K$.
 - Si $S_T = K$, on fait ce que l'on veut. Le bénéfice est 0.
 - Si $S_T < K$, le détenteur de l'option a intérêt à ne pas l'exercer. Le bénéfice est 0.
 - Au final, le flux de trésorerie en T (appelé le **payoff**) est :

$$\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Pour une option de vente (put) on a :

$$\text{payoff} = \max(K - S_T, 0) = (K - S_T)^+$$

L'utilité des option sur les marchés financiers

- **Couverture** : un acteur qui détient ou prévoit d'acquérir l'instrument sous-jacent peut prendre position sur un produit dérivé afin de se protéger contre les fluctuations du prix du sous-jacent. Cette stratégie permet de limiter les pertes encourues en cas de fluctuation défavorable du prix, mais en contrepartie implique généralement de renoncer à une partie des gains potentiels liés à la détention du sous-jacent, un peu sur le même principe qu'une assurance.
- **Spéculation** : un acteur qui anticipe une variation du prix du sous-jacent peut prendre position sur un instrument dérivé. Les produits dérivés permettent en effet généralement de prendre position sur un montant notionnel important, mais avec une mise de fonds initiale relativement faible. C'est ce qu'on appelle l'effet de levier. Dans ce cas, les perspectives de gain sont importantes si la stratégie s'avère gagnante, mais les pertes peuvent l'être tout autant.
- **Arbitrage** : un acteur détecte une incohérence entre la valeur de marché d'un instrument dérivé et celle de sous-jacent. Il prend alors position en sens inverse

simultanément sur le marché au comptant du sous-jacent et sur l'instrument dérivé. Ce type de stratégie permet des gains minimes sur chaque transaction, mais sans risque. Elle doit être mise en oeuvre de manière systématique pour générer des profits importants.

Chapitre 2

Rappels sur le modèle binomial

En finance, le modèle binomial (ou modèle CRR du nom de ses auteurs) fournit une méthode numérique pour l'évaluation des options. Il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein (1979). Le modèle est un modèle discret pour la dynamique du sous-jacent. L'évaluation de l'option est calculée par application de la probabilité risque-neutre pour laquelle les prix actualisés sont des martingales ce qui permet à nous de souligner les stratégies de gestion d'un portefeuille. ce modèle sert souvent d'approximation au modèle en temps continu.



2.1 Description du modèle

2.1.1 Méthodologie

La méthode binomiale utilise un "cadre à temps discret" pour retracer l'évolution de l'actif sous-jacent, via un arbre, pour un nombre donné de "pas" qui correspond au temps entre la date d'évaluation et celle de l'expiration de l'option. Chaque nœud de l'arbre (intersection de deux branches de l'arbre) est un prix possible du sous-jacent à un moment précis dans le temps. Cette évolution des prix constitue la base de l'évaluation des options. Le processus d'évaluation est itératif. On part du nœud final de chaque branche et ensuite on "remonte" jusqu'au premier nœud (date d'évaluation), où le résultat du calcul est la valeur de l'option. Cette méthode utilise donc le processus suivant :

1. Création de l'arbre.
2. Calcul de la valeur de l'option au nœud final de chaque branche.
3. Calcul progressif de la valeur de l'option à partir du nœud précédent, la valeur du premier nœud étant la valeur de l'option.

Étape 1 :

La création de l'arbre de prix s'effectue en partant de la date à laquelle on veut valoriser l'option et ce jusqu'à la date d'expiration de l'option. À chaque étape, on accepte que le sous-jacent augmente (up) ou diminue (down) en fonction d'un facteur spécifique (u ou d) et ce pour toutes les étapes ($u \geq 1$ et $0 < d \leq 1$). Par conséquent, si S est le prix actuel, alors le prix de la période suivante sera $S_{up} = S \cdot u$ ou $S_{down} = S \cdot d$. Les facteurs utilisés pour évaluer l'augmentation ou la diminution du sous-jacent sont calculés en prenant en compte la volatilité σ du sous-jacent, la durée de chaque étape mesurée en année t (selon la convention du nombre de jours du sous-jacent), on obtient :

$$u = (1 + u) = \exp(\sigma\sqrt{t}) \quad , \quad d = (1 - d) = \exp(-\sigma\sqrt{t}) = \frac{1}{u}$$

La méthode utilisée ici pour la création de l'arbre est la méthode de Cox, Ross et Rubinstein (CCR). Il existe cependant d'autres méthodes, comme par exemple celle des "probabilités égales". La méthode CCR assure le fait que l'arbre est recombinaison, c'est à- dire que si les mouvements du sous-jacent sont d'abord une augmentation puis une diminution, le prix sera le même que si les mouvement suivi avaient été d'abord une diminution puis une augmentation. Dans ce cas là, les deux branches fusionnent et se recombinaison. Cette propriété réduit donc le nombre de nœuds de l'arbre et par conséquent accélère le calcul du prix de l'option. Cette propriété permet également de calculer la valeur de l'actif sous-jacent à chaque nœud directement par des formules, sans passer par la création d'un arbre.

Etape 2 :

À chaque dernier nœud d'une branche de l'arbre, la valeur de l'option est sa valeur intrinsèque :

1. $\max[(S_T - K), 0]$, pour un call.
2. $\max[(K - S_T), 0]$, pour un put.

Où K est le strike et S est le spot du sous-jacent.

Etape 3 :

Une fois que l'on a réalisé l'étape précédente, la valeur de l'option pour chaque nœud est trouvée en utilisant la valeur du nœud précédent, en remontant vers le premier nœud de l'arbre (qui est la valeur de l'option à la date à laquelle on veut la valoriser).

2.2 Stratégie de gestion d'un portefeuille

On suppose qu'il existe sur le marché financier un actif financier risqué, sa valeur est S_n aux différents instants n de cotation, avec $0 \leq n \leq N$. L'instant 0 correspond à la date courante et N correspond à la date T (date de futur) et un actif financier sans risque se comporte comme une somme d'argent placée à la caisse d'épargne et rapporte un revenu connu, de valeur R_0 à $t = 0$.

Les acteurs de marché peuvent acheter des actifs sans risque ou risqués et ils peuvent aussi emprunté une certaine quantité d'actifs sans risque. Le taux d'intérêt de l'argent placé "sans risque" ou emprunté est supposé constant et égal à r et le pas de temps entre deux instants est supposé constant et noté τ . En effet, il faut d'actualiser la valeur des actifs en fonction du taux sans risque r , pour pouvoir comparer leur valeurs à des instants différents. Par exemple, disposer à l'instant t d'une somme d'argent égale à 1 est équivalent à disposer à l'instant $t + \tau$ d'une somme égale à $1/e^{-r\tau}$. On en déduit donc qu'un actif sans risque de valeur R_0 à l'instant 0 vaut $R_n = R_0/(e^{-rn\tau})$ à un instant n .

Définition 2.2.1. *Une stratégie de gestion est définie par une suite aléatoire Φ :*

$$\Phi = [(\phi_0^c, \phi_0), \dots, ((\phi_n^c, \phi_n), \dots, ((\phi_N^c, \phi_N))]$$

qui donne à chaque instant n la quantité d'actif risqué ϕ_n et d'actif sans risqué ϕ_n^c dans le portefeuille.

Définition 2.2.2. *Un portefeuille (en finance) désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Ce peut aussi désigner des valeurs mobilières détenues à titre d'investissements, de dépôt, de provision ou de garantie.*

On suppose que le portefeuille se comporte deux quantités d'actif risqué et non-risqué. Donc, la valeur ξ_n du portefeuille est donné à chaque instant par :

$$\xi_n(\phi_n^c, \phi_n) = \phi_n^c R_n + \phi_n S_n$$

où $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$, $(\phi_n^c)_{0 \leq n \leq N}$ et $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ sont des suites aléatoires, alors que $(R_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une suite déterministe.

2.2.1 Stratégie autofinancée

Définition 2.2.3. *Un portefeuille est **autofinancée** lorsque sa valeur ne varie entre deux instant de cotation successifs que par un réajustement de sa composition, sans apport ni soustraction d'argent.*

2.2.2 Stratégie admissible et arbitrage

Définition 2.2.4. Une stratégie est dite **admissible** si elle est autofinancée et si elle garantit que la valeur du portefeuille soit positive ou nulle à tout instant.

Définition 2.2.5. Une stratégie **d'arbitrage** est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle dans tous les cas.

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée absence d'opportunités d'arbitrage. Elle est justifiée théoriquement par l'unicité des prix caractérisant un marché en concurrence pure et parfaite. Pratiquement, il existe des arbitrages qui disparaissent très rapidement du fait de l'existence d'arbitragistes, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter.

2.2.3 Probabilité risque-neutre

Une des conséquences des hypothèses de non-arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale ou « probabilité risque-neutre » telle que le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité.

2.3 Modèle binomial à une période

L'objectif du modèle est de trouver la valeur de l'actif financier à la date $t = 0$ (son prix) telle qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans le marché financier.

2.3.1 Modélisation probabiliste du marché

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de trois choses :

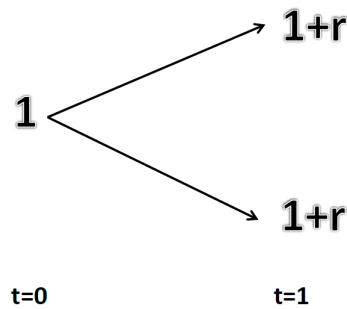
1. Ω est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d , c'est-à-dire $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$.

2. \mathbb{P} est la probabilité historique sur Ω . $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilité réelle p de monter et $1 - p$ de descendre.
3. $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de deux tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instant $t = 0$ et $t = 1$ et que :

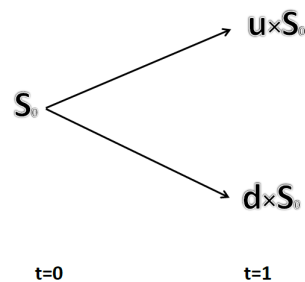
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}$$

On considère un marché à deux dates, notées 0 et 1, et trois actifs dans l'économie :

- i) **L'actif sans risque** : qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)$ en $t = 1$, qui représente l'argent placé à la banque au taux r , il est sans risque dans le sens où l'on connaît en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$



- ii) **L'actif risqué** : il vaut S_0 en $t = 0$ et à l'instant 1 il peut avoir deux valeurs différentes : soit il est monté $S_1^u = u.S_0$, soit il est descendu $S_1^d = d.S_0$ avec $d < u$.



- iii) Une option d'achat (call) de type européen, dont le sous-jacent est l'action. Elle vaut :

$$\begin{aligned} C_u &= \max(0, u.S_0 - K) \\ P_u &= \max(0, d.S_0 - K) \end{aligned}$$

Le prix de l'actif à l'instant $t = 1$:

$$S_1 = \begin{cases} S_0.u, & \text{avec probabilité } p; \\ S_0.d, & \text{avec probabilité } 1-p. \end{cases}$$

Ainsi,
$$\mathbb{E}(S_1) = p.u.S_0 + q.d.S_0 = (up + dq)S_0$$

Considérons maintenant le processus actualisés du prix $\tilde{S}_n = \frac{1}{(1+r)^n} S_n$. Peut on trouver les probabilités de hausse et de baisse telles que $(\tilde{S}_n)_n$ soit une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$?

2.3.2 probabilité risque neutre

On s'intéresse à la suite actualisée des prix définie par le modèle binomial. Si r est le taux d'intérêt "sans risque", la suite actualisée des prix est définie par :

$$\tilde{S}_n = S_n \frac{1}{(1+r)^n}, \quad \forall n, 0 \leq n \leq N$$

On cherche si la suite des prix actualisés $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie ainsi est une martingale sous la probabilité \mathbb{P} dont est munie l'espace Ω des évènements possibles. On rappelle que :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^1} \left(pu + \frac{1-p}{u} \right) \tilde{S}_n$$

Et donc en général :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) \neq \tilde{S}_n$$

Alors, l'équation ci-dessus montre que la suite (\tilde{S}_n) n'est pas une martingale. On définit alors une nouvelle mesure de probabilité π tel que (\tilde{S}_n) devienne une martingale sous cette nouvelle probabilité, c'est à dire :

$$\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = \tilde{S}_n$$

On va démontrer que : $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = \tilde{S}_n$

Donc on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) &= \mathbb{E}_\pi\left(S_{n+1} \frac{1}{(1+r)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)} (\pi u + (1-\pi)d) S_n \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}_\pi(S_{n+1}) \\ &= \frac{1}{(1+r)} (\pi u + (1-\pi)d) \tilde{S}_n \end{aligned}$$

donc pour que $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = \tilde{S}_n$, il est resté de montrer que :

$$(\pi u + (1-\pi)d) = (1+r)$$

avec $1+r = R$.

Alors le calcul donne que :

$$\pi = \frac{R-d}{u-d}$$

Et on en déduit facilement que :

$$1-\pi = \frac{u-R}{u-d}$$

Remarque 2.3.1. *La mesure de probabilité π s'appelle mesure de martingale ou mesure corrigée du risque puisque, sous cette probabilité, le rendement espéré de l'actif risqué est égal au rendement de l'actif sans risque.*

Remarque 2.3.2. *La condition $d < 1+r < u$ est donc équivalente à l'existence de probabilité π .*

La probabilité de survenance de l'état up (π) et l'état down ($1-\pi$) sont les relations ci-dessus. Alors, dans ce cas et sous l'hypothèse d'AOA on peut vérifier que :

$$\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_1/\mathcal{F}_0) = \tilde{S}_0 = S_0$$

Ainsi, la valeur actuelle de l'action, qui correspond à l'espérance actualisée de sa valeur future s'écrit :

$$C = \frac{1}{(1+r)} (\pi c_u + (1-\pi) c_d)$$

C'est à dire

$$C = \frac{1}{(1+r)} (\pi \max(0, u.S_0 - k) + (1-\pi) \max(0, d.S_0 - k))$$

De la même manière, une option de vente (Put) dont le sous-jacent est S et dont le prix d'exercice est K vaut :

$$P = \frac{1}{(1+r)} (\pi p_u + (1-\pi) p_d)$$

C'est à dire

$$P = \frac{1}{(1+r)} (\pi \max(0, k - u.S_0) + (1-\pi) \max(0, k - d.S_0))$$

démonstration

on a :

p : la probabilité d'augmentation

$q=(1-P)$: la probabilité de baisse

u : le coefficient de hausse (up)

$d = \frac{1}{u}$: le coefficient de baisse (down)

$$\exp(s_1) = (up + dq) \times s_0$$

$$\exp(s_{n+1}) = (up + dq) \times s_n$$

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{(1+r)^n} s_n$$

$$s_n = (1+r)^n \tilde{s}_n$$

donc :

$$\tilde{s}_{n+1} = \exp\left[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} \times s_{n+1}\right]$$

$$\tilde{s}_{n+1} = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \exp[s_{n+1}]$$

$$\tilde{s}_{n+1} = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \times (up + dq) \times s_n$$

$$\tilde{s}_{n+1} = \frac{1}{(1+r)^n} \times \frac{1}{(1+r)^1} \times (up + \frac{1}{u}(1-p)) \times (1+r)^n \tilde{s}_n$$

$$\tilde{s}_{n+1} = \frac{1}{(1+r)^1} \times (up + \frac{1}{u}(1-p)) \tilde{s}_n$$

$$\tilde{s}_{n+1} \neq \tilde{s}_n$$

donc \tilde{s}_n n'est pas un MG ,on va changer la proba p par une autre proba π tq :

$$\exp_{\pi}(\tilde{s}_{n+1}) = \tilde{s}_n$$

$$\exp_{\pi}(\tilde{s}_{n+1}) = \exp_{\pi}[\frac{1}{(1+r)^{n+1}} s_{n+1}]$$

$$\exp_{\pi}(\tilde{s}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} \exp_{\pi}[s_{n+1}]$$

$$\exp_{\pi}(\tilde{s}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^{n+1}} (u\pi + d(1-\pi)) s_n$$

$$\exp_{\pi}(\tilde{s}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^1} (u\pi + d(1-\pi)) (1+r)^n \tilde{s}_n$$

on a :

$$\exp(\tilde{s}_{n+1}) \neq \tilde{s}_n \text{ cad :}$$

$$\exp(\tilde{s}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^1} \times (u\pi + d(1-\pi)) \tilde{s}_n$$

$$\text{Il faut que : } (u\pi + d(1-\pi)) = (1+r)$$

$$\text{on pose } R=(1+r)$$

$$(u\pi + d(1-\pi)) = R$$

$$(u\pi + d - d\pi) = R$$

$$u\pi - d\pi + d = R$$

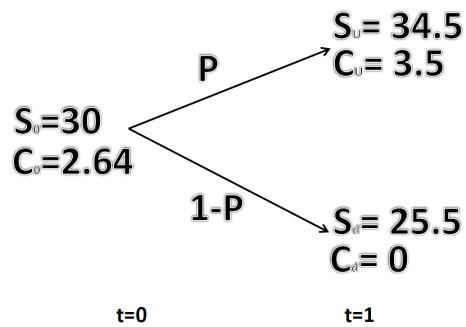
$$(u-d)\pi = R-d$$

$$\pi = \frac{R-d}{u-d}$$

$$1-\pi = 1 - \frac{R-d}{u-d}$$

$$1-\pi = \frac{u-R}{u-d}$$

Exemple 2.3.1. On cherche à évaluer un call européen d'échéance 4 trimestre, et de prix d'exercice est $K=31$ euro . Le cours de l'action est actuellement $S_0 = 20$ euro. pour simplifier, on suppose que, dans 3 mois, le cours de l'action peut augmenter de 15% au baisser de 15%. On suppose par ailleurs que le taux sans risque est de 10% annuel.

FIGURE 2.1 – variation du prix de l'action S_0 et la valeur d'une option C_0 à une période

Ici, $S_0 = 20$, $K = 31$, $r = 0,1$, $\Delta t = 1$, alors :

$$U = (1 + u) = 1 + 0.15 = 1.15$$

$$D = (1 - d) = 1 - 0.15 = 0.85$$

$$\pi = \frac{(1+r)^{\Delta t} - D}{U - D}$$

$$\pi = \frac{(1+0.1)^1 - 0.85}{1.15 - 0.85} = 0.83$$

$$S_u = S_t \times U \implies S_u = 30 \times 1.15 = 34.5$$

$$S_d = S_t \times D \implies S_d = 30 \times 0.85 = 25.5$$

$$C_u = \max(S_u - k, 0) \implies C_u = \max(34.5 - 31, 0) = 3.5$$

$$C_d = \max(S_d - k, 0) \implies C_d = \max(25.5 - 31, 0) = 0$$

$$C_0 = \frac{\pi C_u + (1 - \pi) \times C_d}{1 + r}$$

$$C_0 = \frac{0.83 \times 3.5 + (1 - 0.83) \times 0}{1 + 0.1} = 2.64$$

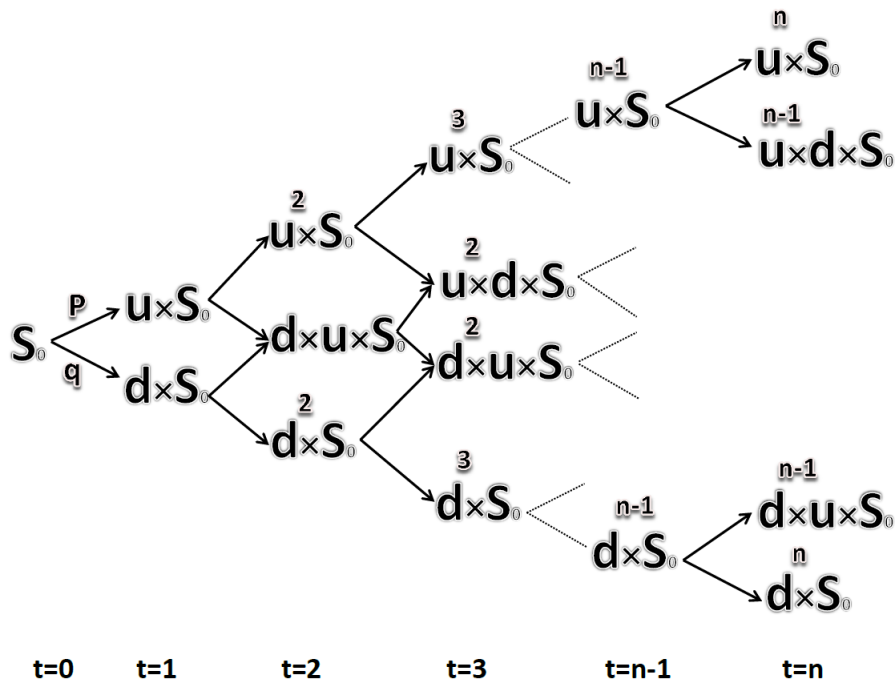
2.4 Modèle binomial à N périodes

On reprend la même modélisation que dans la section précédente mais dans un monde à n périodes. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en N périodes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Le marché est composé de 2 actifs,

1. un actif sans risque S_t^0 :

$$1 \longrightarrow (1+r) \longrightarrow (1+r)^2 \dots (1+r)^N$$

2. Un actif risqué S_t :



Alors pour N périodes :

1. Un call européen vaut :

$$C = (1+r)^{-n} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} \max(0; u^k d^{n-k} S_0 - K) \right]$$

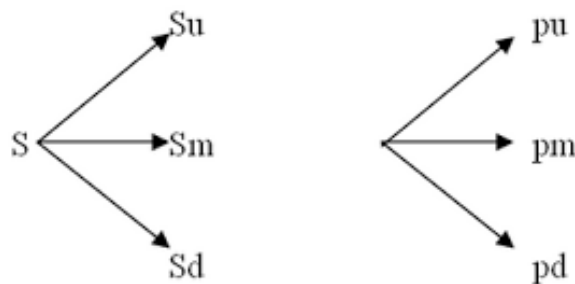
2. Un put européen vaut :

$$P = (1+r)^{-n} \left[\sum_{k=0}^n C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} \max(0; K - u^k d^{n-k} S_0) \right]$$

Chapitre 3

Le modèle trinomial

L'un des premiers modèles de calcul utilisé dans la communauté des mathématiques financières était le modèle de l'arbre binomial. Ce modèle a été populaire pendant un certain temps, mais au cours des 15 dernières années est devenu significativement obsolète et a peu d'utilité pratique. Cependant, c'est toujours l'un des premiers modèles que les plus avancés est le modèle d'arbre trinomial. Cela améliore le modèle binomial en permettant à un prix boursier de se déplacer vers le haut, vers le bas ou de rester identique avec certaines probabilités, comme indiqué dans le schéma ci-dessous.



3.1 Description du modèle

Les arbres trinomiaux fournissent une méthode efficace de calcul numérique des prix des options. Les arbres trinomiaux peuvent être construits de manière similaire à

l'arbre binomial. On veut définir les paramètres suivants : u , d , p_u , p_m et p_d . Nous utiliserons le modèle trinomial défini par :

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S(t)u, & \text{avec la probabilité } p_u; \\ S(t) & \text{avec la probabilité } 1 - p_u - p_d; \\ S(t)d & \text{avec la probabilité } p_d. \end{cases}$$

3.1.1 Les hypothèses du marché

On impose ici les hypothèses suivantes :

1. La volatilité σ de l'actif sous-jacent est constante.
2. Le prix de l'actif risqué suit un mouvement géométrique.
3. r est le taux d'investissement sans risque.
4. L'absence d'arbitrage, il indique que le rendement moyen de l'actif devrait être égal au rendement sans risque. Il peut être écrit sous la forme explicite suivante :

$$\mathbb{E}[S(t_{i+1})|S(t_i)] = e^{r\Delta t}S(t_i)$$

Une contrainte supplémentaire vient de l'exigence selon laquelle la taille du saut vers le haut est la réciproque de la taille du saut vers le bas,

$$ud = 1$$

Alors que cette condition n'est pas toujours utilisée pour une construction en arbre trinomial, elle simplifie grandement la complexité du schéma numérique : elle conduit à un arbre recombinaison.

Étant donné la connaissance des tailles de saut u, d et les probabilités de transition p_u, p_d , il est maintenant possible de calculer la valeur de l'actif sous-jacent S . Définissons le nombre de sauts ascendants, descendants et intermédiaires comme N_u, N_d, N_m respectivement Et donc la valeur du cours de l'action sous-jacente au nœud j pour le temps i est donné par :

$$S_{i,j} = u^{N_u} d^{N_d} S(t_0)$$

où

$$N_u + N_d + N_m = n$$

3.1.2 Ensemble des paramètres de l'arbre Trinomial

Sous les hypothèses énoncés précédemment, il existe une famille de modèles d'arbres trinomial, Dans ce travail, on va considéré la famille populaire, sa taille de saut est :

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad , \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

ses probabilités de transition sont données par :

$$p_u = \left(\frac{\exp(r\frac{\Delta t}{2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}})} \right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}) - \exp(r\frac{\Delta t}{2})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}})} \right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

3.2 Évaluation

Dans cette section, on va construire un algorithme d'évaluation d'une option européenne à l'aide d'un arbre trinomial. Pour celà, nous avons besoin des quantités suivantes :

1. Les probabilités de transition de divers mouvements de prix des actions, ce sont les p_u , p_d et p_m .
2. Les tailles des mouvements vers le haut, le bas et le milieu, ce sont les u , d et $m = 1$.
3. Le gain ou l'état terminal de notre option (Call ou Put) à la maturité i.e. les fins des nœuds.

3.2.1 Valeur d'une option européenne à l'aide du modèle trinomial

Un Call (Put) européen est un contrat qui donne à son propriétaire le droit d'acheter (vendre) un actif convenu (actif sous-jacent) au prix convenu K (prix d'exercice) au moment spécifié T (date d'échéance).

La méthodologie lorsque l'évaluation des options utilisant un arbre trinomial est exactement la même que l'utilisation d'un arbre binomial. Une fois que l'arbre des prix de l'action est construit et que les bénéfices de l'option au moment de l'échéance T sont calculés :

$$C(S, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (\text{option Call})$$

$$P(S, T) = \max(K - S_T, 0) \quad (\text{option Put})$$

Après cela, il reste à appliquer l'algorithme d'induction inversé suivant, où n représente la position du temps et j la position de l'espace :

$$C_{n,j} = e^{-r\Delta t} [p_u C_{n+1,j+1} + p_m C_{n+1,j} + p_d C_{n+1,j-1}]$$

L'algorithme d'induction peut être dérivé du principe de neutralité du risque et est le même pour les options Call et Put. Lorsqu'il est appliqué dans le contexte d'un arbre trinomial (en utilisant exactement la même méthodologie que l'arbre binomial), nous pouvons calculer la valeur de l'option dans les nœuds intérieurs de l'arbre en le considérant comme une pondération de la valeur d'option aux nœuds futurs, actualisés par un pas de temps. Ainsi, nous pouvons calculer le prix de l'option au moment n , C_n , comme le prix de l'option d'un mouvement ascendant $p_u C_{n+1}$ plus le prix de l'option du mouvement du milieu par $p_m C_{n+1}$ plus le prix de l'option d'un mouvement vers le bas par $p_d C_{n+1}$, réduit d'une seule fois, $e^{-r\Delta t}$. Ainsi, notre dernière formule d'induction inversée est appliqué pour nous donner les prix des options à n'importe quel nœud de l'arbre. Le nom de l'algorithme doit maintenant être clair, car il suffit de valoriser l'option à maturité, c'est-à-dire les nœuds de feuilles, puis nous parcourons notre chemin vers l'arrière à travers les valeurs d'option de calcul de l'arbre à tous les nœuds jusqu'à ce que nous atteignons la racine S_0 , C_0 .

Algorithmme : European Option Pricing Algorithm For Trees

1. Declare and initialize $S(0)$
2. Calculate the jump sizes u ; d and m
3. Calculate the transition probabilities p_u ; p_d and p_m
4. Build the share price tree
5. Calculate the payoff of the option at maturity, i.e node N
6. For (int $i = N; i > 0; -- i$) do
7. Calculate option price at node i based on
8. $C_{n,j} = e^{-r\Delta t} [p_u C_{n+1,j+1} + p_m C_{n+1,j} + p_d C_{n+1,j-1}]$
9. End for
10. Output option price

Chapitre 4

Exemples et simulation

4.1 Exemple

$$S_0 = 100, n = 25, K = 102, \sigma = 25\%, T = 1, \Delta_t = T/n = 0.04, r = 10\%$$

$$u = \exp(\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$u = \exp(0.25\sqrt{2 \times 0.04})$$

$$u = 1.07327066$$

$$d = 1/u = \exp(-\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$d = 1/u = 0.9317314234$$

$$m = 1$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(r\frac{\Delta_t}{2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(0.1 \times 0.02) - \exp(-0.25 \times 0.1414213562)}{\exp(0.25 \times 0.1414213562) - \exp(-0.25 \times 0.1414213562)} \right)^2$$

$$p_u = 0.2698477954$$

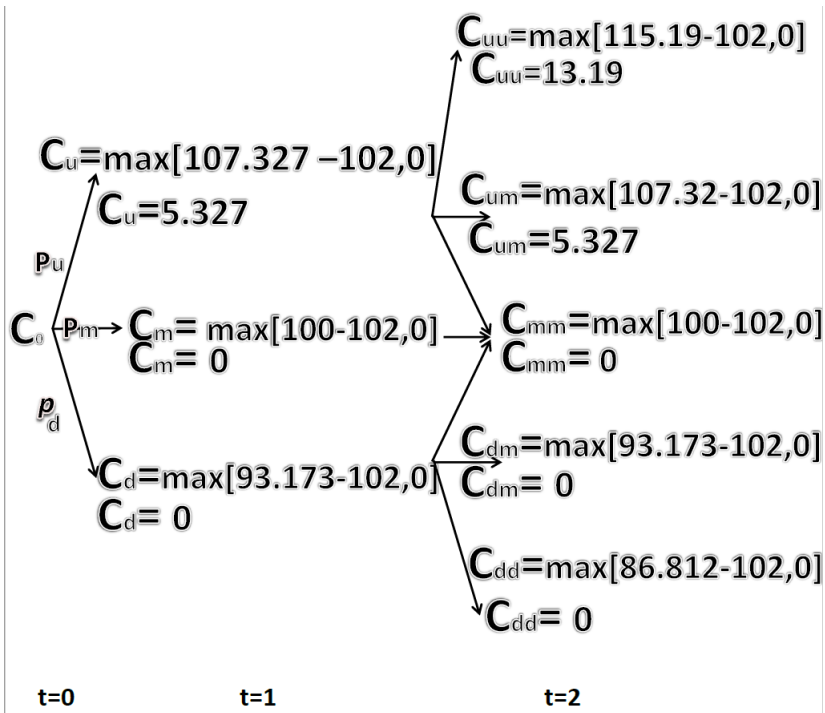
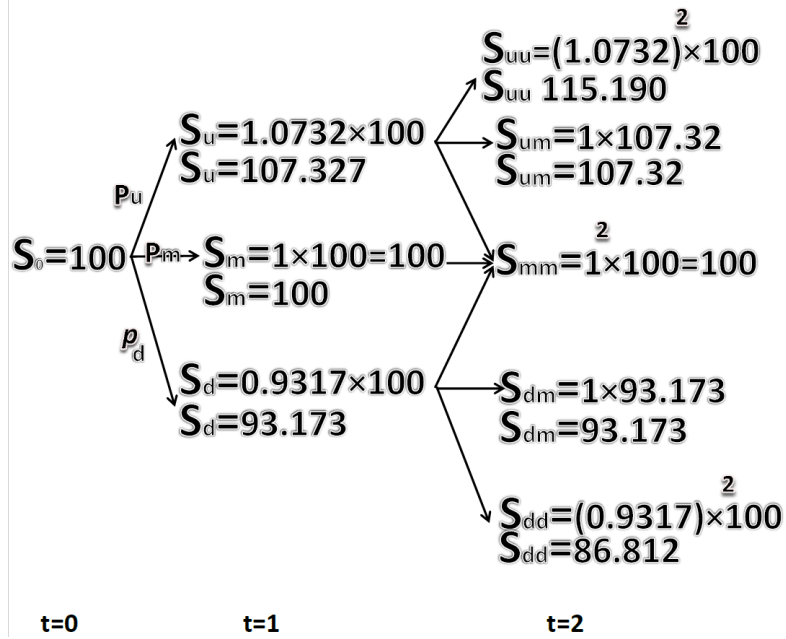
$$p_d = \left(\frac{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(r\frac{\Delta_t}{2})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{\exp(0.25 \times 0.1414213562) - \exp(0.1 \times 0.02)}{\exp(0.25 \times 0.1414213562) - \exp(-0.25 \times 0.1414213562)} \right)^2$$

$$p_d = 0.2309102701$$

$$P_m = 1 - P_u - P_d$$

$$P_m = 0.4992419345$$



le prix d'une option C_0

$$C_0 = \frac{P_u \times C_u + P_m \times C_m + P_d \times C_d}{\exp(r\Delta_t)}$$

$$C_0 = \frac{0.2698477954 \times 5.327066 + 0.4992419345 \times 0 + 0.2309102701 \times 0}{\exp(0.1 \times 0.04)}$$

$$C_0 = 1.431758513$$

4.1.1 Simulation

$$s=100$$

$$k=102$$

$$v=0.25$$

$$r=0.1$$

$$T=1$$

$$m=1$$

$$n=25$$

$$dt=T/n$$

$$u=\exp(v \times \sqrt{2 \times dt})$$

$$d=1/u$$

$$pu = (\exp((r) \times dt/2) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pd = (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp((r) \times dt/2))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pm = 1 - pu - pd;$$

$$Su = s \times u$$

$$Sm = s \times m$$

$$Sd = s \times d \quad Suu = s \times u^2$$

$$Sum = s \times u \times m$$

$$Smm = s \times m^2$$

$$Sdm = s \times d \times m$$

$$Sdd = s \times d^2$$

$$Cu = \max(Su - k, 0)$$

$$Cm = \max(Sm - k, 0)$$

$$Cd = \max(Sd - k, 0)$$

$$Cuu = \max(Suu - k, 0)$$

$$Cum = \max(Sum - k, 0)$$

$$Cmm = \max(Smm - k, 0) \quad Cdm = \max(Sdm - k, 0)$$

$$Cdd = \max(Sdd - k, 0)$$

$$C_0 = (pu * Cu + pm * Cm + pd * Cd) / \exp(r * dt)$$

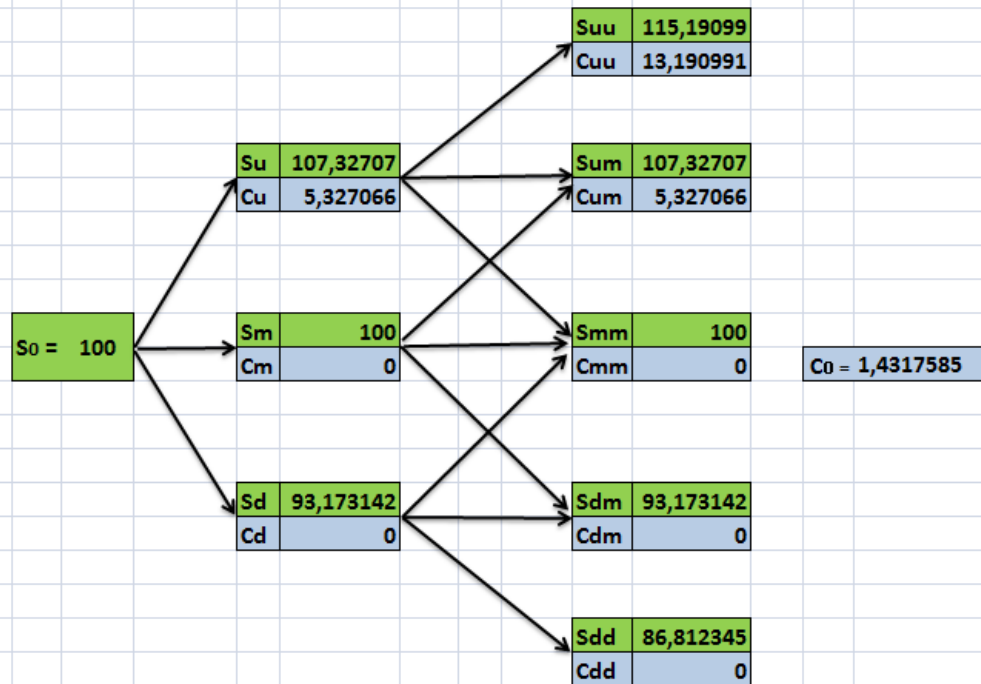
$$C_0 = 1.431758513$$

Pricing European Options with a Trinomial Tree

Boyle 1986

Parameters

Number of Nodes	25
Time to Maturity	1
Step	0,04
Risk Free Rate	10%
Volatility	25%
Action Value	100
Strike Price	102
Up Probability	0,26985
Down Probability	0,23091
Stationary Probability	0,49924
u	1,07327
d	0,93173
m	1
Option Value	1,43176



4.2 Exemple

$$S_0 = 90, K = 95, \sigma = 15\%, T = 1, n = 2, \Delta_t = T/n = 0.5, r = 12\%$$

$$u = \exp(\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$u = \exp(0.15\sqrt{2 \times 0.5})$$

$$u = 1.161834$$

$$d = 1/u = \exp(-\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$d = 1/u = 0.860708$$

$$m = 1$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(r\frac{\Delta_t}{2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(0.12 \times 0.25) - \exp(-0.15 \times 0.5)}{\exp(0.15 \times 0.5) - \exp(-0.15 \times 0.5)} \right)^2$$

$$p_u = 0.4679912$$

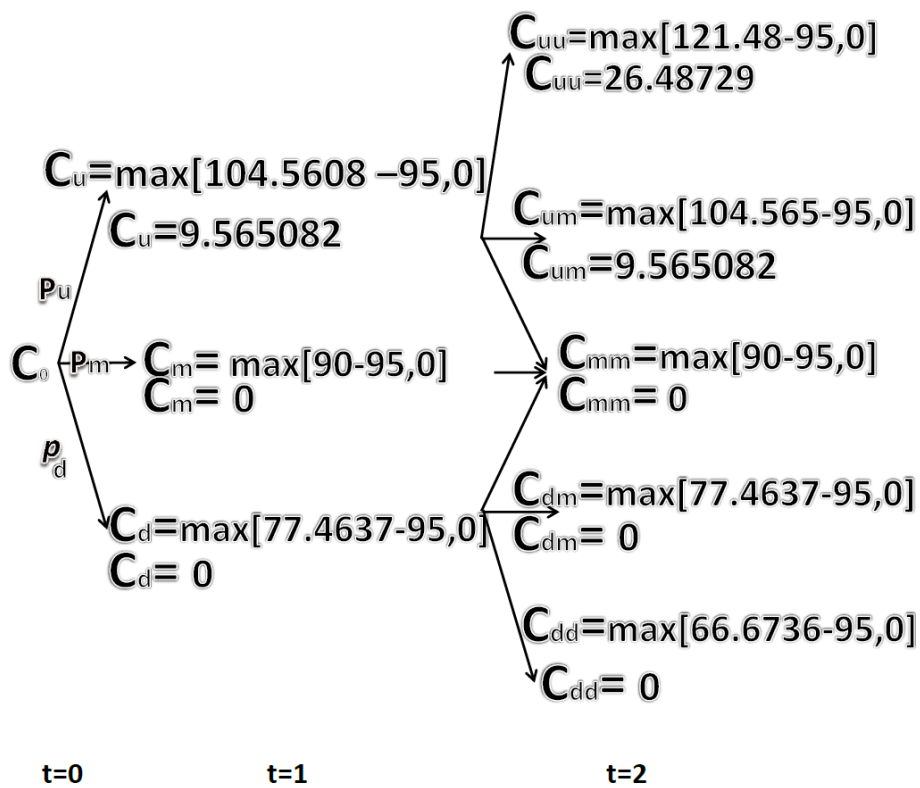
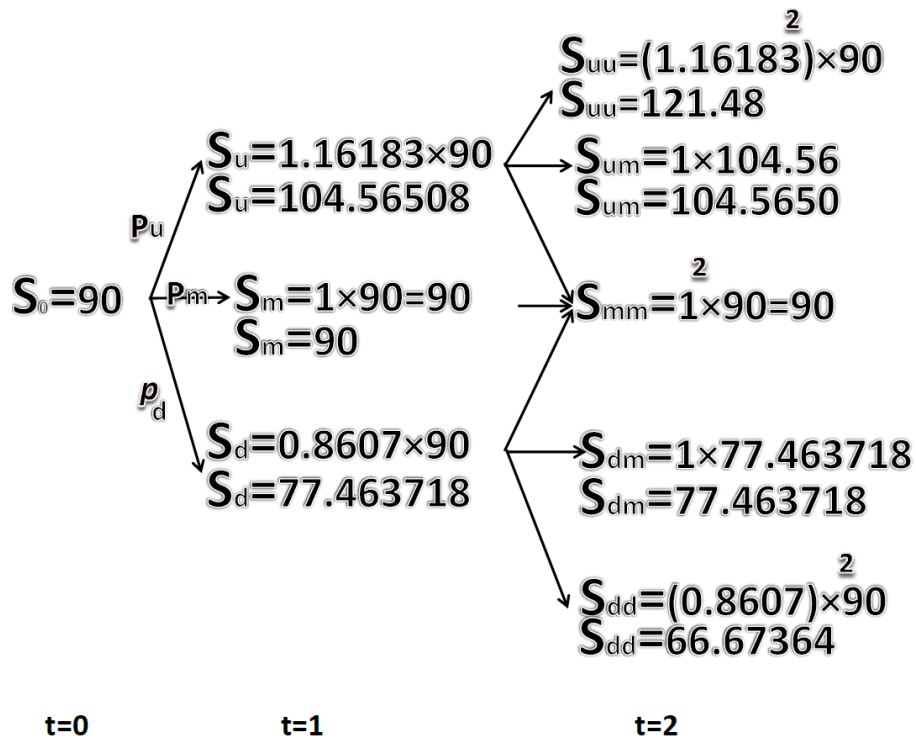
$$p_d = \left(\frac{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(r\frac{\Delta_t}{2})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{\exp(0.15 \times 0.5) - \exp(0.12 \times 0.25)}{\exp(0.15 \times 0.5) - \exp(-0.15 \times 0.5)} \right)^2$$

$$p_d = 0.09979357$$

$$P_m = 1 - P_u - P_d$$

$$P_m = 0.4322153$$



le prix d'une option C_0

$$C_0 = \frac{P_u \times C_u + P_m \times C_m + P_d \times C_d}{\exp(r\Delta_t)}$$

$$C_0 = \frac{0.4679912 \times 9.5650 + 0.4322153 \times 0 + 0.9979357 \times 0}{\exp(0.12 \times 0.5)}$$

$$C_0 = 4.21569$$

4.2.1 Simulation

$$s=90$$

$$k=95$$

$$v=0.15$$

$$r=0.12$$

$$T=1$$

$$m=1$$

$$n=2$$

$$dt=T/n$$

$$u=\exp(v \times \sqrt{2 \times dt})$$

$$d=1/u$$

$$pu = (\exp((r) \times dt/2) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pd = (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp((r) \times dt/2))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pm = 1 - pu - pd;$$

$$Su = s \times u$$

$$Sm = s \times m$$

$$Sd = s \times d \quad Suu = s \times u^2$$

$$Sum = s \times u \times m$$

$$Smm = s \times m^2$$

$$Sdm = s \times d \times m$$

$$Sdd = s \times d^2$$

$$Cu = \max(Su - k, 0)$$

$$Cm = \max(Sm - k, 0)$$

$$Cd = \max(Sd - k, 0)$$

$$Cuu = \max(Suu - k, 0)$$

$$Cum = \max(Sum - k, 0)$$

$$Cmm = \max(Smm - k, 0) \quad Cdm = \max(Sdm - k, 0)$$

$$Cdd = \max(Sdd - k, 0)$$

$$C_0 = (pu \times Cu + pm \times Cm + pd \times Cd) / \exp(r \times dt)$$

$$C_0 = 4.21569$$

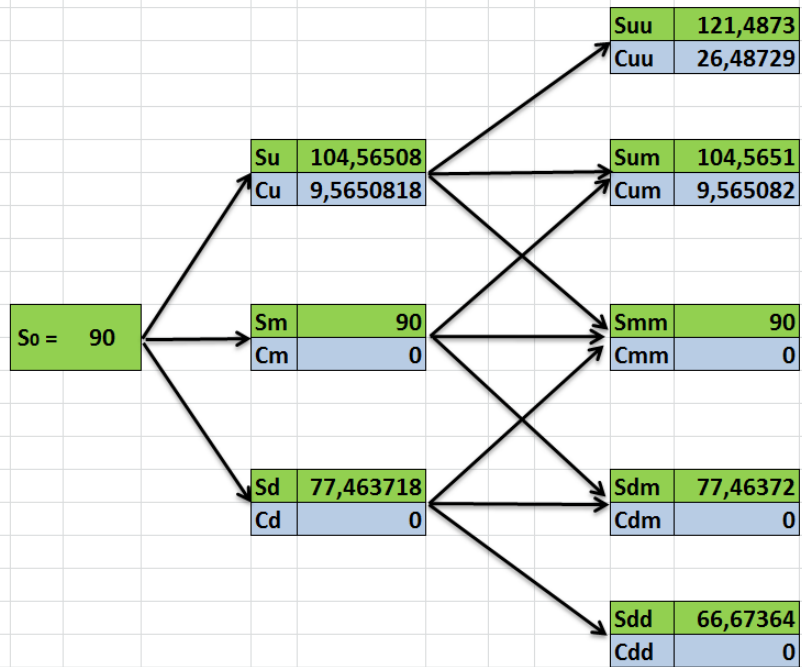
Pricing European Options with a Trinomial Tree

Boyle 1986

Parameters

Number of Nodes	2
Time to Maturity	1
Step	0,5
Risk Free Rate	12%
Volatility	15%
Action Value	90
Strike Price	95

Up Probability	0,468
Down Probability	0,0998
Stationary Probability	0,4322
u	1,1618
d	0,8607
m	1
Option Value	4,2157



C₀ = 4,21569

4.3 Exemple

$$S_0 = 70, K = 50, \sigma = 13\%, T = 1, n = 2, \Delta_t = T/n = 0.5, r = 10\%$$

$$u = \exp(\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$u = \exp(0.13\sqrt{2 \times 0.5})$$

$$u = 1.1388$$

$$d = 1/u = \exp(-\sigma\sqrt{2\Delta_t})$$

$$d = 1/u = 0.8781$$

$$m = 1$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(r\frac{\Delta_t}{2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_u = \left(\frac{\exp(0.1 \times 0.25) - \exp(-0.1 \times 0.5)}{\exp(0.13 \times 0.5) - \exp(-0.13 \times 0.5)} \right)^2$$

$$p_u = 0.4602$$

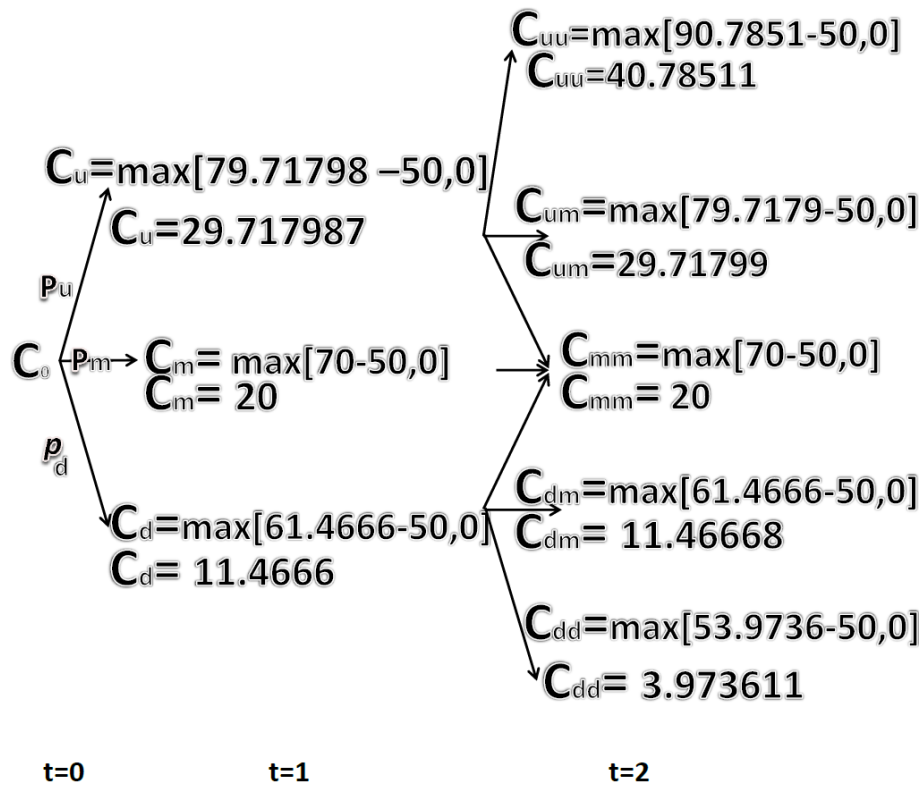
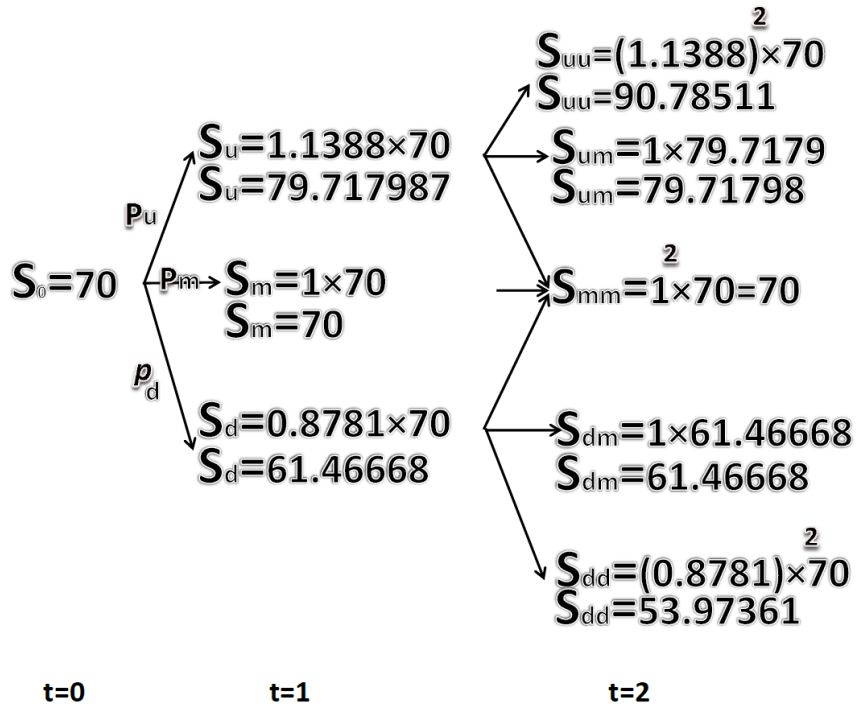
$$p_d = \left(\frac{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(r\frac{\Delta_t}{2})}{\exp(\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}}) - \exp(-\sigma\sqrt{\frac{\Delta_t}{2}})} \right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{\exp(0.13 \times 0.5) - \exp(0.1 \times 0.25)}{\exp(0.13 \times 0.5) - \exp(-0.13 \times 0.5)} \right)^2$$

$$p_d = 0.1035$$

$$P_m = 1 - P_u - P_d$$

$$P_m = 0.4364$$



le prix d'une option C_0

$$C_0 = \frac{P_u \times C_u + P_m \times C_m + P_d \times C_d}{\exp(r\Delta_t)}$$

$$C_0 = \frac{0.4602 \times 29.17987 + 0.4364 \times 2 + 0.1035 \times 11.4666}{\exp(0.1 \times 0.5)}$$

$$C_0 = 22.438529$$

4.3.1 Simulation

$$s=70$$

$$k=50$$

$$v=0.13$$

$$r=0.1$$

$$T=1$$

$$m=1$$

$$n=2$$

$$dt=T/n$$

$$u=\exp(v \times \sqrt{2 \times dt})$$

$$d=1/u$$

$$pu = (\exp((r) \times dt/2) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pd = (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp((r) \times dt/2))^2 / (\exp(v \times \sqrt{dt/2}) - \exp(-v \times \sqrt{dt/2}))^2$$

$$pm = 1 - pu - pd;$$

$$Su = s \times u$$

$$Sm = s \times m$$

$$Sd = s \times d \quad Suu = s \times u^2$$

$$Sum = s \times u \times m$$

$$Smm = s \times m^2$$

$$Sdm = s \times d \times m$$

$$Sdd = s \times d^2$$

$$Cu = \max(Su - k, 0)$$

$$Cm = \max(Sm - k, 0)$$

$$Cd = \max(Sd - k, 0)$$

$$Cuu = \max(Suu - k, 0)$$

$$Cum = \max(Sum - k, 0)$$

$$Cmm = \max(Smm - k, 0) \quad Cdm = \max(Sdm - k, 0)$$

$$Cdd = \max(Sdd - k, 0)$$

$$C_0 = (pu \times Cu + pm \times Cm + pd \times Cd) / \exp(r \times dt)$$

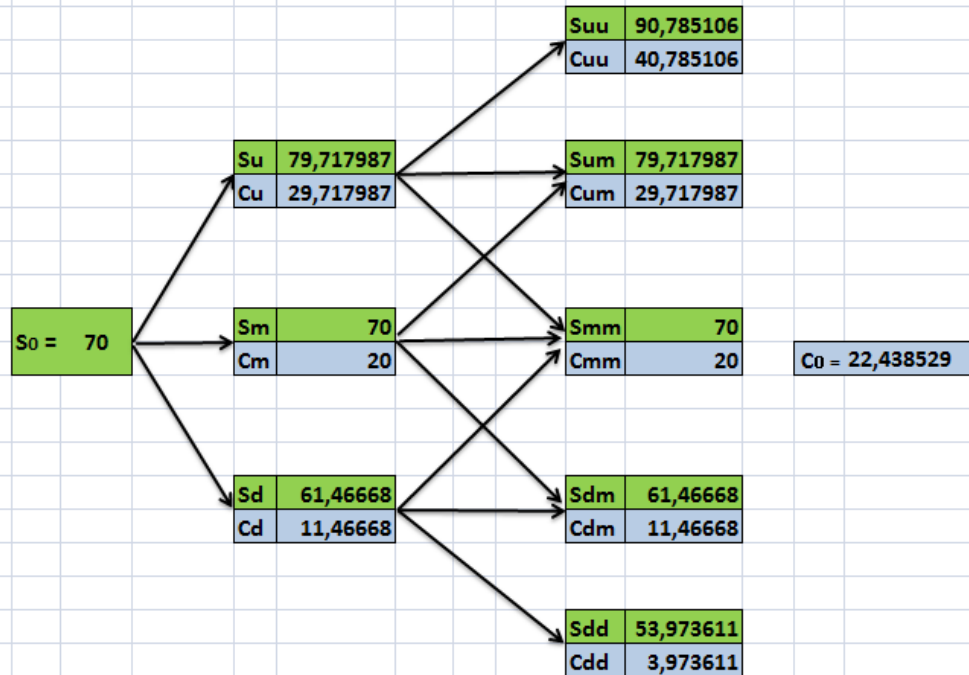
$$C_0 = 22.438529$$

Pricing European Options with a Trinomial Tree

Boyle 1986

Parameters

Number of Nodes	2
Time to Maturity	1
Step	0,5
Risk Free Rate	10%
Volatility	13%
Action Value	70
Strike Price	50
Up Probability	0,460159
Down Probability	0,103458
Stationary Probability	0,436382
u	1,138828
d	0,878095
m	1
Option Value	22,43853



Conclusion

À présent, le procédé de l'arbre trinomial est étendu aux options exotiques, notamment les options à barrières par Ritchken puis Chenk et Vorst en 1995. Ils ont proposé de mettre à profit la souplesse du modèle trinomial de Boyle pour apporter une solution à l'évaluation de ces options. Puis aux options à plusieurs actifs risqués dont la matrice des variances-covariances des rendements est diagonale.

Bibliographie

- [1] D. Lamberton and B. Lapeyre, Introduction to stochastic calculus applied to finance, Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and Francois Manton, Chapman and Hall, London, 1996.
- [2] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy, 81 (1973), 637-654.
- [3] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, Sixth Edition, Prentice Hall, 2004.
- [4] J. Jacod and P. Protter, Probability essentials, Springer, 2002.
- [5] Mark Rubinstein, On the Relation Between Binomial and Trinomial Option Pricing Models, May 2000.
- [6] Olivier Pironneau, Introduction au pricing d'option en finance, 2006.
- [7] Paul Clifford and Oleg Zaboronski, Pricing Options Using Trinomial Trees, 2008.
- [8] Paul Clifford, Yan Wang, Oleg Zaboronski, Kevin Zhang, Pricing Options Using Trinomial Trees, 2010.
- [9] Pierre-Yves DEBOUDÉ et Nicolas GRESSER, Valeur d'option et coût du capital Théorie et application réglementaire, Novembre 2004.
- [10] Tero Haahtela, Recombining Trinomial Tree for Real Option Valuation with Changing Volatility, 2002.