République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année univ.: 2016/2017

# Les applications harmoniques avec potentiel et généralisations

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Géométrie Différentielle

par

**R**eguig **Y**asmina [1]

Sous la direction de

**Pr**. S. Ouakkas

Soutenu le 24 Mai 2017 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| **Mr. S. Abbas** | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Président |
| **Mr. S. O**uakkas | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Rapporteur |
| **Mr. D. D**jebouri | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinateur |
| **Mme. N. B**ekkouche | Université Dr Tahar Moulay - Saïda | Examinatrice |

1. e-mail : Z.elyassamin@yahoo.fr

# — «Remerciements» —

*Tout d'abord, je remercie le Dieu, mon créateur de mon avoir donné les forces, la volonté et le courage afin d'accomplir ce travail modeste.*

*Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de mémoire, S.Ouakkas qui m'a dirigé tout au long de ce mémoire. sa disponibilité, sa réactivité, sa enthousiasme et ses conseils judicieux sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail.*

*Je remercie les membres de mon jury de mémoire pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'avoir enrichi de toutes leurs remarques.*

*Je remercie mes trés chères parents d'être toujours la pour moi, quoi qu'il arrive et sans condition.*

*Je remercie également ma famille en particulier mon frère et mes sœurs ainsi que pour leurs présences, leur soutien et le bol d'air qui m'ont procuré surtout pendant les périodes difficiles que j'ai traversé dans mon travail.*

*Comment ne pas mentionner ceux qui m'ont vu de plus loin : Volker Branding, Yingbo Han, Ataushi Tauchikawa et Maria Alessandra Ragusa.*

*Il convient aussi de remercier tous ceux qui ont participé de prés comme de loin à cet avènement.*

*Finalement, je tiens à exprimer mes remerciements à tous mes amis intimes, mes collègues de l'université de Saïda et tous mes enseignants de master G.D.*

# TABLE DES MATIÈRES

# Abstract

The purpose of this research is to discuss some properties of harmonic maps with potential. This includes the variationnels problems, where we introduce the notion of bi-harmonic maps with potential. Then we will use the stress-energy tensor to obtain the monotonicity formulas and Liouville theorems under some conditions on the potential H, to investigate the constant Dirichlet boundary value problem.


**Keywords :harmonic maps with potential, stress energy tensor, monotonicity formulas, Dirichlet problem**.


# Résumé

Le but de ce recherche est de discuter de certaines propriétés des applications harmoniques avec potentiel. Cela inclut les problèmes variationnels, où nous introduisons la notion des applications biharmoniques avec potentiel. Ensuite, nous utiliserons le tenseur énergie impulsion pour obtenir les formules de monotonie et les théorèmes de Liouville avec certaines conditions sur le potentiel H, pour étudier le problème de Dirichlet.


**Mots-clés :les applications harmoniques avec potentiel, tenseur énergie impulsion, formule de monotonie, problème de Dirichlet.**


# ملخص

الغرض من هذا البحث هو دراسة بعض خصائص التطبيقات التوافقية بواسطة كمون. وهذا يشمل المشاكل التغييرية أين سيتم التعريف بمفهوم التطبيقات ثنائية التوافقية بواسطة كمون. ثم سوف نستخدم موتر الطاقة للحصول على الرتابة ونظريات **Liouville** وذلك بوضع بعض الشروط على الكمون لدراسة المعادلات الفيزيائية **Dirichlet**.


**الكلمات المفتاحية:** التطبيقات التوافقية بواسطة كمون، الرتابة، موتر الطاقة ونظريات Liouville.

# ♦ Introduction ♦

Les applications harmoniques sont des solutions à un problème variationnel géométrique naturel. Cette notion est née de notions essentielles en géométrie différentielle, comme les géodésiques, les surfaces minimales et les fonctions harmoniques. Ils ont introduis par Eells et Sampson en 1964 dans [17].

Dans la même veine, en 1965 J. Eells et L. Lemaire ont étendu la notion des applications harmoniques aux applications biharmoniques dans [18] qui sont par définition les points critiques de la fonctionnelle associée à $\varphi$

$$E_2(\varphi, \Omega) = \int_\Omega |\tau(\varphi)|^2 dv_g$$

où $\tau(\varphi)$ est appelé le champ de tension de l'application $\varphi$.

Dans un contexte différent, A.Fardoun et A.Ratto ont introduit une nouvelle notion d'harmonicité en 1996, c'est les applications hamoniques avec potentiel entre les variétés riemanniennes. Cette notion est une généralisation naturelle des applications harmoniques usuelles qui avait son propre fond mathématique et physique, par exemple l'équation Landau-Lifshitz statique. Ils ont découvert certains propriétés très différentes de celles des applications harmoniques ordinaires en raison de la présence du potentiel. Ils ont étudié le problème de Dirichlet et a également obtenu un résultat de type Liouville où la variété $M$ à un domaine compact.

Notre objective dans ce travail est d'étudier les propriétés géométriques des applications harmoniques et biharmoniques avec potentiel correspondant aux points critiques des fonctionnelles associées à $\varphi$

$$E_H(\varphi, \Omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega \{|d\varphi|^2 - H(\varphi)\} dv_g,$$

resp.

$$E_{2,H}(\varphi, \Omega) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\tau_H(\varphi)|^2 dv_g,$$

où $H : N \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $C^\infty$.

Ce travail se compose de deux chapitres et deux annexes.

Le premier chapitre consiste à rappeler les principaux résultats des applications harmoniques et biharmoniques entre deux variétés riemanniennes. Aprés faire les calculs variationnelles on arrive à une cractérisation des applications harmoniques et biharmoniques donnée par l'équation d'Euler Lagrange qui nous permet de construires quelques exemples dans les deux cas.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des applications harmoniques par rapport à un potentiel en deux parties.

**Première partie** : Dans cette partie l'étude sera du même principe utilisé dans le premier chapitre, en présentant quelques exemples et propriétés des applications harmoniques avec potentiel, puis on introduit les applications biharmoniques avec potentiel.

**Deuxième partie** : On commençe par définir le tenseur énergie impulsion avec potentiel, pour donner quelques formules de monotonie afin d'étudier le problème de Dirichlet pour les applications harmoniques avec potentiel.

Finalement, ce travail se termine par ces deux annexes :

**Le premier annexe** : Dans cet annexe, on va étudier la géométrie des applications harmoniques dans le cas conforme et on va trouver une autre caractérisation des applications harmoniques avec potentiel.

**Le deuxième annexe** : Dans cette section on va étudier les applications $p$-harmoniques avec potentiel, en définissant la première et la deuxième variation et le théorème de Liouville dans ce cas.

# ◀ Notation ▶

Le tableau suivant rassemble les notations importantes utilisées dans ce mémoire.

| | |
|---|---|
| $M = (M^m, g)$ | Une variété riemannienne de dimension $m$. |
| $N = (N^n, h)$ | Une variété riemannienne de dimension $n$. |
| $\varphi : M \to N$ | Une application de classe $C^\infty$. |
| $\Omega$ | Un domaine compact sur $M$. |
| $B = \{e_i\}_{1 \leq i \leq m}$ | Une base orthonormée sur $M$. |
| $X, Y$ | Deux champs de vecteurs sur M. |
| $V, W$ | Deux champs de vecteurs appartenant à $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$. |
| $\widetilde{V}, \widetilde{W}, \widetilde{X}$ | Les champs de vecteurs sur $N$, où $\widetilde{V} \circ \varphi = V$ et $\widetilde{W} \circ \varphi = W$. |
| $\nabla^M, \nabla^N$ | Deux connexions sur les variétés riemanniennes $M, N$. |
| $\nabla^\varphi$ | Une connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}TN$, $\nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}TN) \to \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\nabla^\varphi_X V = \nabla^N_X \widetilde{V}$. |
| $\mathbf{R}^N$ | La courbure sur $\nabla^N$ qui est la connexion sur la variété $N$, $$\mathbf{R}^N(X, Y) = \nabla^N_X \nabla^N_Y - \nabla^N_Y \nabla^N_X - \nabla^N_{[X,Y]}.$$ |
| ${}^M\Gamma^k_{ij}, \quad {}^N\Gamma^k_{ij}$ | Les symboles de christoffel sur les variétés $M$ respectivement $N$, $${}^M\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m g^{kl}\Big(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\Big).$$ |
| $Sect^M$ | La courbure sectionnelle définie pour tout $X, Y$ par : $$Sect^M(X, Y) = g(\mathbf{R}^M(X, Y)Y, X).$$ |
| $Ricci^M$ | Le tenseur de Ricci défini pour tout champ de vecteur $X$ par : $$Ricci^M X = \sum_{i=1}^m R^M(X, e_i)e_i.$$ |
| $Hess^M$ | La hessienne d'une fonction $f \in C^\infty$, telle que : $$(Hess^M f)(X, Y) = g(\nabla^M_X grad^M f, Y).$$ |
| $Tr_g$ | La trace par rapport à la métrique g. |

# CHAPITRE 1

# GÉOMÉTRIE DES APPLICATIONS HARMONIQUES & BIHARMONIQUES

## Introduction

Ce chapitre a pour but de rappeller les principaux résultats en géométrie harmonique qui conserne : les applications harmoniques, les applications biharmoniques, les tenseurs énergie impulsion et bi-énergie impulsion.

## 1.1 Préliminaires

Dans cette section, on va énoncer quelques définitions élémentaires, qu'on aura besoin au long de tout ce travail.

**Définition 1.1.1** *La seconde forme fondamentale de l'application $\varphi$ est la dérivée covariante de la 1-forme vectorielle $d\varphi$, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\alpha, \beta \in C^{\infty}(M)$, on a :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^{\varphi}_{X} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^{M}_{X} Y).$$

*Cette forme est $C^{\infty}(M)$-bilinéaire symétrique, c'est-à-dire :*

$$(\nabla d\varphi)(\alpha.X, \beta.Y) = \alpha\beta(\nabla d\varphi)(X,Y),$$
$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla d\varphi(Y,X).$$

**Proposition 1.1.1** *Si $\nabla^N$ est une connexion linéaire compatible avec la métrique $h$ sur $N$, alors la connexion linéaire $\nabla^\varphi$ est compatible avec la métrique $h_\varphi$ sur $\varphi^{-1}TN$.*

$$X(h_\varphi(V,W)) = h_\varphi(\nabla^\varphi_X V, W) + h_\varphi(V, \nabla^\varphi_X W).$$

**Démonstration.** Tout d'abord rappelons que si $\widetilde{V} \circ \varphi = V$ et $\widetilde{W} \circ \varphi = W$, alors

$$\begin{aligned} X(h_\varphi(V,W)) &= X(h(\widetilde{V},\widetilde{W}) \circ \varphi) \\ &= \widetilde{X}(h(\widetilde{V},\widetilde{W})) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Comme $d\varphi(X) = \widetilde{X} \circ \varphi$, on déduit

$$\begin{aligned} X(h_\varphi(V,W)) &= h((\nabla^N_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{W})) \circ \varphi + h((\widetilde{V},\nabla^N_{\widetilde{X}}\widetilde{W})) \circ \varphi, \\ &= h((\nabla^\varphi_X V, W)) \circ \varphi + h((V, \nabla^\varphi_X W)) \circ \varphi. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. ■

**Proposition 1.1.2** *Soit $\nabla^N$ une connexion sans torsion sur $N$, alors*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]),$$

*pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.*

**Démonstration.** Supposons que $X$ et $V$ (resp. $Y$ et $W$) sont $\varphi$-conjugués : i.e

$$d\varphi(X) = V \circ \varphi \quad \text{et} \quad d\varphi(Y) = W \circ \varphi,$$

alors

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = (\nabla^N_V W) \circ \varphi$$

et

$$[V,W] \circ \varphi = d\varphi \circ [X,Y],$$

or $\nabla^N$ est une connexion sans torsion, il suit que

$$\nabla^N_V W = \nabla^N_W V + [V,W],$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) &= (\nabla^N_V W) \circ \varphi, \\ &= (\nabla^N_W V + [V,W]) \circ \varphi, \\ &= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]). \end{aligned}$$

**Théorème 1.1.1** ***(Théorème de divergence** [2] et [15]).*
*Soit $\omega$ une 1-forme définie sur un voisinage inclu dans $\Omega$. Alors*

$$\int_{\Omega}(div\omega)dv^M = \int_{\partial\Omega}\omega(\boldsymbol{n})dv^{\partial\Omega} \qquad et \qquad \int_{\Omega}(divX)dv^M = \int_{\partial\Omega}g(X,\boldsymbol{n})dv^{\partial\Omega},$$

*où $\partial\Omega$ est le bord de $\Omega$ et $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$.*
*$dv^M$ (ou $dv_g$) est la forme volume sur $M$, définie localement dans un repère par :*

$$dv_g = \sqrt{\det g}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

**Corollaire 1.1.1** *Pour tout $\omega$ une 1-forme à support compact dans $\Omega$, on a*

$$\int_{\Omega}(div\omega)dv^M = 0 \qquad et \qquad \int_{\Omega}(divX)dv^M = 0.$$

## 1.2 Les applications harmoniques

**Définition 1.2.1** *La densité de $\varphi$ est la donnée d'une fonction de classe $C^\infty$ définie pour tout $x \in M$ par :*

$$\begin{aligned} e(\varphi) : M &\to [0, +\infty[ \\ x &\mapsto \frac{1}{2}|d_x\varphi|^2, \end{aligned}$$

*où $|d_x\varphi|$ est la norme de Hilbert-Shmidt de la différentielle $d_x\varphi$ de $\varphi$ au point $x$, donnée par :*

$$\begin{aligned} |d_x\varphi|^2 &= Tr_g\varphi^*h \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)). \end{aligned}$$

*Si les variétés $M$ et $N$ sont munis respectivement des coordonnées $\{x^i\}_{1\leq i\leq m}$ et $\{y^\alpha\}_{1\leq\alpha\leq n}$, au voisinage des points $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$, alors :*

$$|d_x\varphi|^2 = g_x^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\Big|_x \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\Big|_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x)).$$

*L'énergie de $\varphi$ sur $\Omega$ est définie de la manière suivante :*

$$E(\varphi,\Omega) = \int_{\Omega} e(\varphi)dv_g = \frac{1}{2}\int_{\Omega}|d\varphi|^2 dv_g.$$

**Définition 1.2.2** *Pour tout domaine $\Omega$, une variation est une application de classe $C^\infty$*

$$\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N, \quad \epsilon > 0$$
$$(x,t) \mapsto \varphi_t(x),$$

*où $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \in C^\infty(M,N)$ est une famille d'applications.*

**Définition 1.2.3** ***(Application harmonique)***
*Une application $\varphi$ est dite harmonique si et seulement si c'est un point critique de la fonctionnelle énergie, i.e :*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, M)\Big|_{t=0} = 0,$$

*$\{\varphi_t\}$ étant une variation (de classe $C^\infty$) de $\varphi$ à support dans $\Omega$.*

Abordons désormais les deux points importants de ce chapitre, l'énoncé et la démonstration de la première et la deuxième variation de l'énergie.

### 1.2.1 Première variation de l'énergie

Afin de donner la formule de la première variation de la fonctionnelle énergie il faut d'abord définir la notion du champ de tension.

**Définition 1.2.4** *La section $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par*

$$\tau(\varphi) = Tr_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\}, \tag{1.1}$$

*est appelé le champ de tension de l'application $\varphi$.*

**Théorème 1.2.1** *Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $\Omega$. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, \Omega)\Big|_{t=0} = -\int h(\upsilon, \tau(\varphi)) dv_g,$$

*où $\upsilon(x)$ dénote le champ de vecteurs de variation de $\{\varphi_t\}$,*

$$\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)\Big|_{t=0} = d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)}N.$$

**Preuve.** Pour illustrer le théorème $\boxed{1.2.1}$, on considère que $\{(e_i, 0)(0, \frac{d}{dt})\}$ est une base sur la variété produit $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ où $\{\frac{d}{dt}\}$ est une base sur $(-\epsilon, \epsilon)$. On remarque que le crochet de Lie

$$\Big[\Big(e_i, 0\Big)\Big(0, \frac{d}{dt}\Big)\Big] = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, m.$$

On pose

$$d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i).$$

En effet,

$$d\phi(e_i, 0) : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to TN,$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \tfrac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\tfrac{d}{dt})|_{t=0} \\ &= \upsilon(x), \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x, t)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi_t, \Omega)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i))dv_g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))dv_g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\Big|_{t=0} dv_g. \end{aligned}$$

D'aprés la proposition $\boxed{1.1.1}$ et la symétrie de la métrique $h$, on trouve

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, \Omega)\Big|_{t=0} = \int_\Omega h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\Big|_{t=0} dv_g, \tag{1.2}$$

Grâce à la proposition $\boxed{1.1.2}$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0))\Big|_{t=0}dv_g \\
&= \int_\Omega h(\nabla^{N}_{(d\varphi(e_i))}\upsilon,d\varphi(e_i))dv_g \\
&= \int_\Omega h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon,d\varphi(e_i))dv_g.
\end{aligned}$$

Maintenant, soit $\omega$ la 1-forme différentielle à support dans $\Omega$, définie par :

$$\omega(X)=h(\upsilon,d\varphi(X)),\qquad X\in\Gamma(TM).$$

On a

$$\begin{aligned}
div^M\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\
&= e_i(\omega(e_i))-\omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= e_i(h(\upsilon,d\varphi(e_i))-h(\upsilon,d\varphi,(\nabla_{e_i}e_i)) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon,d\varphi(e_i))+h(\upsilon,\tau(\varphi)),
\end{aligned}$$

et comme $\displaystyle\int_\Omega div^M\omega\, dv_g=0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0}=-\int h(\upsilon,\tau(\varphi))dv_g. \qquad \blacksquare$$

Le théorème $\boxed{1.2.1}$ nous donne le résultat suivant :

**Corollaire 1.2.1** *Une application $\varphi$ est dite harmonique si et seulement si $\tau(\varphi)=0$. En coordonnées locales, on a :*

$$\tau(\varphi)=g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}+\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi-\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi.$$

### 1.2.2 Seconde variation de l'énergie

**Théorème 1.2.2** *Soit $\varphi$ une application harmonique. Si $\{\varphi_{t,s}\}$ une variation de $\varphi$ à support dans $\Omega$, alors*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}, \Omega)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_\Omega h\big( - Tr_g \mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi)d\varphi - Tr_g(\nabla^\varphi)^2 \upsilon_1, \upsilon_2\big) dv_g,$$

*où*

$$\upsilon_1 = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \qquad \upsilon_2 = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

*dénotent les deux vecteurs de variations.*

**Preuve.** Posons

$$\phi : (x,t,s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi_{t,s}(x) \in N,$$

$$E_i = (e_i, 0, 0), \; \frac{\partial}{\partial t} = \Big(0, \frac{d}{dt}, 0\Big) \; et \; \frac{\partial}{\partial s} = \Big(0, 0, \frac{d}{ds}\Big).$$

On a

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{(t,s)}; \Omega)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i)) dv_g \Big|_{(t,s)=(0,0)}. \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &= h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pour le premier terme de l'égalité (1.4), on a

$$\begin{aligned} h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big) \\ &= h\Big(\mathbf{R}^N(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), d\phi(E_i)) d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big) \\ &\quad + h\Big(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big) \\ &\quad + h\Big(\nabla^\phi_{[\frac{\partial}{\partial t}, E_i]} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Soit $\omega$ la 1-forme différentielle à support dans $\Omega$ définie sur $M$ par :

$$\omega(X) = h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(X)\Big), \qquad X \in \Gamma(TM).$$

Par définition de la divergence, on trouve

$$\begin{aligned} div^M\omega &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla^M_{e_i}e_i)\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{e_i\Big(h\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big)\Big) \\ &\quad -h\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} div^M\omega &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{h\Big(\nabla^\phi_{E_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big) \\ &\quad +h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \nabla^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i)\Big) \\ &\quad -h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Comme $\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m}\Big\{\nabla^\varphi_{e_i}d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i}e_i)\Big\}$, alors

$$\begin{aligned} div^M\omega &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{h\Big(\nabla^\phi_{E_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big) \\ &\quad +h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \tau(\varphi)\Big). \end{aligned}$$

Or $\varphi$ est harmonique, nous voyons que

$$div^M\omega = \sum_{i=1}^{m}h\Big(\nabla^\phi_{E_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)\Big). \tag{1.6}$$

D'aprés les formules (1.5) et (1.6), on a

$$\sum_{i=1}^{m}h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i))\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \sum_{i=1}^{m}h(\mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi(e_i))\upsilon_2, d\varphi(e_i)) + div^M\omega. \tag{1.7}$$

Le deuxième terme de l'égalité (1.4) nous donne :

$$\begin{aligned} h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\Big) &= h\Big(\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big) \\ &= E_i\Big(h\Big(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big)\Big) \\ &\quad -h\Big(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Encore, Si $\eta$ une 1-forme différentielle à support dans $\Omega$ définie sur $M$ par :

$$\eta(X) = h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_X \upsilon_1).$$

Alors

$$div^M \eta = \sum_{i=1}^{m} \Big\{ e_i(h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{e_i} \upsilon_1)) - h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \upsilon_1) \Big\}. \tag{1.9}$$

D'aprés les formules (1.8)et (1.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= div^M \eta + \sum_{i=1}^{m} h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \upsilon_1) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} \upsilon_1). \end{aligned} \tag{1.10}$$

En utilisant les formules (1.3) , (1.4) , (1.7) et (1.10), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}, \Omega)|_{(t,s)=(0,0)} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \Big\{ - h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \upsilon_2\Big) \\ &\quad + h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \upsilon_1\Big) - h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} \upsilon_1\Big)\Big\} dv_g \\ &= \int_{\Omega} h( - Tr_g \mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi)d\varphi - Tr_g(\nabla^{\varphi})^2 \upsilon_1, \upsilon_2) dv_g. \end{aligned}$$

■

## 1.3 Exemples d'applications harmoniques

**Exemple 1.3.1** *Toute application constante $\varphi : M \to N$ est harmonique.*

**Exemple 1.3.2** *L'application identité $M \to M$ est harmonique.*

**Exemple 1.3.3** *Si on considère que notre variété d'arrivée $N$ est simplement $\mathbb{R}$ munie de la métrique euclidienne, on trouve les fonctions harmoniques.*

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= Tr_g \nabla d\varphi \\
&= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\
&= \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) \\
&= e_i(e_i(\varphi)) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(\varphi) \\
&= g(\nabla_{e_i} grad\, \varphi, e_i) \\
&= div(grad\, \varphi) \\
&= \triangle(\varphi).
\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'expression locale du champ de tension devient

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\, {}^M\Gamma^k_{ij}\Big).$$

Dans ce paragraphe, on raisonne sur les applications harmoniques entre les surfaces.

**Propriété 1.3.1** *Soient $\Sigma$ une surface régulière dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et*

$$\varphi : (U, <,>_{\mathbb{R}^2}) \to (\mathbb{R}^3, <,>_{\mathbb{R}^3}),$$

*une paramétrisation locale de $\Sigma$, où $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors $\Sigma$ est dite minimale si et seulement si $\varphi$ est harmonique . En effet,*

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 = \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|^2, \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

*Notons que :*

$$\overrightarrow{n} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right|},$$

*est le vecteur unitaire normal,*

$$E = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2, \qquad F = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \qquad G = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2,$$

$$L = \left\langle \overrightarrow{n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \qquad M = \left\langle \overrightarrow{n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}, \qquad N = \left\langle \overrightarrow{n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

*On obtient :*

$$H = \frac{1}{2}\frac{LG + NE - 2FM}{EG - F^2}.$$

*La courbure moyenne de* $\Sigma$*. D'autre part :*

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} - \left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tau(\varphi) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

*Par conséquent* $\tau(\varphi)$ *est normal à la surface* $\Sigma$ *et on a*

$$H = \frac{L+N}{2E} = \frac{\langle \overrightarrow{n}, \tau(\varphi)\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

**Propriété 1.3.2** *La composée de deux applications harmoniques n'est pas en général une application harmonique. En particulier si* $\varphi$ *est harmonique et* $\psi$ *est totalement géodisique*[1] *alors* $\psi \circ \varphi$ *est harmonique.*

1. Totalement géodisique i.e : $\nabla d\psi = 0$.

**Contre-exemple**

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux applications de classe $(C^\infty)$ donnés par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto (x,0,0) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto 2x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

On calcule maintenant $\tau(\varphi)$ et $\tau(\psi)$, on trouve

$$\tau(\varphi) = \Big(\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}\Big) = 0.$$

De même pour $\tau(\psi)$

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \Big(\frac{\partial^2 \psi}{dx^2}, \frac{\partial^2 \psi}{dy^2}, \frac{\partial^2 \psi}{dz^2}\Big) \\ &= 4 - 2 - 2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut que les deux applications sont harmoniques,
mais on remarque que la composée

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2, \end{aligned}$$

est non harmonique.

Depuis leurs premier travail sur les applications harmoniques, J.Eells et J.H.Sampson en 1965 suggeraient l'idée d'applications biharmoniques que en introduisant la notion d'applications polyharmoniques $\varphi : M \to N$ d'ordre $k$. Pour $k = 2$, nous avons les applications biharmoniques, qui sont des applications critiques de la bi-énergie. ces applications sont importantes dans la théorie d'élasticité en physique.

## 1.4 Les applications biharmoniques

**Définition 1.4.1** *La fonctionnelle bi-énergie de l'application $\varphi$ est définie par :*

$$E_2(\varphi;\Omega) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau(\varphi)|^2 dv_g.$$

*L'application $\varphi$ est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie, c'est -à- dire :*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t;\Omega)\Big|_{t=0} = 0,$$

*où $\{\varphi_t\}$ étant une variation (de classe $C^\infty$) de $\varphi$ à support dans $\Omega$.*

### 1.4.1 Première variation de la bi-énergie

**Définition 1.4.2** *Le champ bi-tension de $\varphi$ est une section sur $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par :*

$$\tau_2(\varphi) = -J_\varphi(\tau(\varphi)) = -\Big(\Delta^\varphi\tau(\varphi) + Tr_g\mathbf{R}^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi\Big), \tag{1.11}$$

*où $J_\varphi$ est l'opérateur de Jacobi défini par*

$$\begin{aligned} J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}TN) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ \upsilon &\longmapsto \Delta^\varphi\upsilon + Tr_g\mathbf{R}^N(\upsilon, d\varphi)d\varphi. \end{aligned}$$

**Théorème 1.4.1** *Si $\{\varphi_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $\Omega$, alors*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = -\int_\Omega h\Big(\upsilon, \tau_2(\varphi)\Big)dv_g,$$

*où $\upsilon = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ est le champ de variation à $\varphi_t$.*

**Preuve.**
Posons $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon) \to N$, l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_2(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega h(\nabla d\varphi_t(e_i), \nabla d\varphi_t(e_i))dv_g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega h(\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla((e_i,0),(e_i,0))dv_g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}h(d\phi((e_i,0),(e_i,0)), d\phi((e_i,0),(e_i,0))dv_g\Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

D'aprés la proposition $\boxed{1.1.1}$ et la symétrie de la métrique $h$, on trouve

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\right) dv_g\Big|_{t=0}\\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^m h\left(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \tau(\varphi)\right) dv_g\Big|_{t=0}. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

En appliquant la seconde forme fondamentale de l'application $\varphi$, on trouve

$$
\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) = \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\left(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\right).
$$

D'aprés la définition de la courbure, on a

$$
\begin{aligned}
\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \mathbf{R}^N\Big(d\phi((0,\frac{d}{dt}),(e_i,0))\Big)d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\
&\quad +\nabla^\phi_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^M_{e_i}e_i,0).
\end{aligned}
$$

En vertu de la proposition $\boxed{1.1.2}$ et de $\left[\left(0,\frac{d}{dt}\right),(e_i,0)\right]=0$, alors

$$
\begin{aligned}
\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \mathbf{R}^N d\phi((0,\frac{d}{dt}),d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0)\\
&\quad +\nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}) - \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}).
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\tau(\varphi)\Big)\Big|_{t=0} &= h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)\Big)\\
&\quad +h\Big(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon,\tau(\varphi)\Big) - h\Big(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon,\tau(\varphi)\Big).
\end{aligned}
\qquad (1.13)
$$

Soit $\omega\in\Gamma(T^*M)$ la 1-forme différentielle à support dans $\Omega$, définie par

$$
\omega(X) = h\Big(\nabla^\varphi_X\upsilon,\tau(\varphi)\Big).
$$

On a

$$\begin{aligned} div^M\omega &= \sum_{i=1}^m \Big\{ e_i(h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi)) - h(\nabla_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon, \tau(\varphi))\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^m \Big\{ h(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi)) + h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) - h(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon, \tau(\varphi))\Big\}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Des formules (1.13) et (1.14), on obtient

$$\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{i=1}^m h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)\Big) + div^M\omega - \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)\Big). \quad (1.15)$$

Soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$ la 1-forme différentielle à support dans $\Omega$ définie par

$$\eta(X) = h\Big(\upsilon, \nabla^\varphi_X\tau(\varphi)\Big), \qquad X \in \Gamma(TM).$$

On a

$$\begin{aligned} div^M\eta &= \sum_{i=1}^m \Big\{ e_i(h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) - h(\upsilon, \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi))\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^m \Big\{ h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) + h(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) - h(\upsilon, \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi))\Big\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

En remplaçant l'équation (1.15) dans (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)\Big|_{t=0} = \\ &\sum_{i=1}^m h(\mathbf{R}^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i)), \upsilon) + div^M\omega - div^M\eta \\ &+\sum_{i=1}^m h\Big(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)\Big) - \sum_{i=1}^m h\Big(\upsilon, \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)\Big). \end{aligned} \quad (1.17)$$

D'aprés les formules (1.12) et (1.17), on obtient

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = -\int_\Omega \sum_{i=1}^m h\Big(-\mathbf{R}^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) + \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi),v\Big)dv_g.$$

■

Du théorème $\boxed{1.4.1}$ on déduit :

**Corollaire 1.4.1** *Une application $\varphi$ est dite biharmonique si et seulement si $\tau_2(\varphi)=0$. Localement, on a*

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) \;=\; & g^{ij}\Big\{\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x_i\partial x_j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x_j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x_i\partial x_j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\\ & +\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_j} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^\rho}{\partial x_j}\,{}^N\Gamma^\upsilon_{\alpha\beta}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\upsilon\rho}\\ & -{}^M\Gamma^k_{ij}\Big(\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^k} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^k}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Big) - \tau^\upsilon\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j}\,{}^N\mathbf{R}^\sigma_{\beta\alpha\upsilon}\Big\}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi,\end{aligned}$$

*où $\tau^\gamma = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)$ et ${}^N\mathbf{R}^\sigma_{\beta\alpha\upsilon}$ désignent les composantes du tenseur courbure de $N$.*

**Propriété 1.4.1** *Toute application harmonique est biharmonique, mais l'inverse n'est pas vrai. En effet, si $\varphi$ est une application harmonique. Alors $\tau(\varphi)=0$, ainsi*

$$\tau_2(\varphi) = -J_\varphi(\tau(\varphi)) = -J_\varphi(0) = 0.$$

*D'autre part, on considère l'application $\varphi$ définie par :*

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto x^3 - y^2.\end{aligned}$$

*On remarque que $\varphi$ est biharmonique car*

$$\tau_2(\varphi) = 0,$$

*mais $\tau(\varphi) = 3x^2 - 2y$, donc $\varphi$ n'est pas harmonique.*

**Exemples 1.4.1**

1. *Considérons l'application différentiable*
$$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$p \longmapsto \varphi(p) = (\varphi^1(p), \ldots, \varphi^n(p)).$$
*Alors* $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), \ldots, \tau_2(\varphi^n))$, *donc* $\varphi$ *est biharmonique si et seulement si les applications* $\varphi^i, i = 1, \ldots, n$ *sont biharmoniques.*
2. *Le simple exemple d'une application biharmonique, les polynôme de degrés 2 et 3 sur* $\mathbb{R}$.

## 1.5 Le tenseur énergie impulsion

Le tenseur énergie impulsion est un outil mathématique utilisé notamment en relativité générale afin de représenter la répartition de masse et d'énergie dans l'espace-temps. Dans le contexte des applications harmoniques. En 1980 le tenseur d'énergie a été étudié en détail par Baird et Eells dans [4].

**Définition 1.5.1** *Le tenseur énergie impulsion de* $\varphi$ *est défini par :*
$$S(\varphi) = e(\varphi)g - \varphi^*h.$$
*Pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a*
$$S(\varphi)(X, Y) = e(\varphi)g(X, Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y)),$$
$S(\varphi)$ *est un champs de tenseur de type* $(0, 2)$ *symétrique.*

La question qui se pose maintemant est : **Quelle est la relation entre le tenseur énergie impulsion et les applications harmoniques ?**
-On va exposer la réponse de cette problématique dans la proposition et le théorème suivants :

**Proposition 1.5.1** *Soient* $\{g_t\}_{t\in[-\epsilon,\epsilon]}$ *une variation de classe* $C^\infty$ *de la métrique* $g$ *et* $\langle , \rangle$ *est la métrique riemannienne induite sur* $T^*M \otimes T^*M$ *alors :*
$$\frac{d}{dt}E(\varphi, \Omega)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\int_\Omega \langle S(\varphi), \delta_g\rangle dv_g,$$
*où* $\delta_g = \frac{\partial}{\partial t}g_t\Big|_{t=0} \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$.

*Localement on a :*

$$g_t = g_{ij}(t,x)dx^i \otimes dx^j, \qquad g_0 = g = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j \qquad et \qquad \delta_g = \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(t,x)\Big|_{t=0} dx^i \otimes dx^j.$$

**Preuve.** On a

$$\frac{d}{dt}E(\varphi,\Omega)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial g_{ij}} e(\varphi)\delta g_{ij} dv_g + \int_\Omega e(\varphi)\frac{\partial}{\partial g_{ij}}(dv_g)\delta g_{ij}.$$

D'une part $dv_g = \sqrt{\det g_{ij}}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, alors $\forall a, b \in \{1 \ldots m\}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g_{ij}}(dv_g) &= \frac{1}{2}(\det g_{ij})^{-\frac{1}{2}}\ {}^c(g_{ab})dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \frac{1}{2}(\det g_{ij})^{-1}\ {}^c(g_{ab})(\det g_{ij})^{\frac{1}{2}} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \frac{1}{2} g^{ab} dv_g. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Où $g^{ij}$ dénote la matrice inverse de $g_{ij}$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g_{ab}} e(\varphi) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g^{ij}}{\partial g_{ab}}\Big)\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2} g^{ia} g^{jb} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{1}{2}(\varphi^* h)^{ab}. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

D'aprés (1.18) et (1.19), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi,\Omega)\Big|_{t=0} &= -\frac{1}{2}\int_\Omega (\varphi^* h)^{ij}\delta g_{ij} dv_g + \frac{1}{2}\int_\Omega e(\varphi) g^{ij} dv_g \delta g_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \langle e(\varphi) g^{ij} - (\varphi^* h)^{ij}, \delta g_{ij}\rangle dv_g \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \langle S(\varphi), \delta g\rangle dv_g,
\end{aligned}$$

et on obtient le résultat voulu. ■

**Théorème 1.5.1** *La relation entre $S(\varphi)$ et $\tau(\varphi)$ est donnée par :*

$$div^M S(\varphi) = -h(\tau(\varphi), d\varphi). \tag{1.20}$$

**Preuve.** On remarque que

$$\begin{aligned} div^M S(\varphi) &= Tr\nabla S(\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}(S(\varphi)))(e_i) \end{aligned}$$

et

$$S(\varphi)(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k))\delta_{ij} - h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (div^M S(\varphi))(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}(S(\varphi)(e_i, e_j)) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m} e_i\Big(h(d\varphi(e_k), d\varphi(e_k)\Big)\delta_{ij} - \sum_{i=1}^{m} e_i\Big(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big) \\ &= -h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) - \sum_{i,j=1}^{m} h(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) - \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i)) \\ &= -h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)). \end{aligned}$$

Dans la dernière égalité, on a utilisé la symétrie de la seconde forme fondamentale . ■

À partir de ce théorème, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.5.1**

✓ *Si $\varphi$ est harmonique, alors $S(\varphi)$ est conservatif ($i.e, div^M S(\varphi) = 0$).*

✓ *Si $\varphi$ est une submersion et si $div^M S(\varphi) = 0$, alors $\varphi$ est harmonique.*

Un autre outil important dans ce chapitre en géométrie harmonique est le tenseur bi-énergie impulsion.

## 1.6 Le tenseur bi-énergie impulsion

**Définition 1.6.1** *Le tenseur bi-énergie impulsion $S_2(\varphi) \in \Gamma(\odot^2 T^*M)$ d'une application $\varphi$ est définie par*

$$S_2(\varphi) = \Big(\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 + div\, h(\tau(\varphi), d\varphi)\Big)g + 2sym\; h(\nabla\tau(\varphi), d\varphi), \qquad (1.21)$$

*où*

$$div\,(h(\tau(\varphi), d\varphi)) = -|\tau(\varphi)|^2 - \langle d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi)\rangle.$$

*Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.*

$$sym\; h(\nabla\tau(\varphi), d\varphi)(X, Y) = \frac{1}{2}\Big\{h(\nabla_X\tau(\varphi), d\varphi(Y)) + h(\nabla_Y\tau(\varphi), d\varphi(X))\Big)\}.$$

**Théorème 1.6.1** *La relation entre $S_2(\varphi)$ et $\tau_2(\varphi)$ est donnée par :*

$$div^M S_2(\varphi) = -h(\tau_2(\varphi), d\varphi). \qquad (1.22)$$

Donnons maintenant la démonstration du théorème :

**Preuve.**
Supposons que $S_2(\varphi)$ s'écrit de la forme suivante :

$$S_2(\varphi) = T_1 + T_2,$$

où $T_1, T_2 \in \Gamma(T^*M \odot T^*M)$ sont deux champs de tenseurs définis par :

$$T_1(X, Y) = -\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 g(X, Y) - \langle d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi)\rangle g(X, Y),$$
$$T_2(X, Y) = h(d\varphi(X), \nabla_Y\tau(\varphi)) + h(d\varphi(Y), \nabla_X\tau(\varphi)).$$

Comme $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x \in M$, on commençe par donner la divergence de $T_1$ au point $x$

$$\begin{aligned}(div^M\, T_1)(e_j) &= \sum_{i=1}^m e_i(T_1(e_i, e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^m e_i(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2\delta_{ij} - \langle d\varphi, \nabla^\varphi\tau(\varphi)\rangle\delta_{ij}),\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
(div^M\, T_1)(e_j) &= -h(\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi), \tau(\varphi)) - e_j(\langle d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau(\varphi)\rangle) \\
&= -h(\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi), \tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

De même pour $T_2$ au point $x \in M$, on obtient

$$\begin{aligned}
(div^M\, T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} e_i(T_2(e_i, e_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi)) + h(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))) \\
&= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} d(\varphi)(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} d(\varphi)(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) + \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)).
\end{aligned}$$

On utilise que :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{e_i} d(\varphi)(e_i) \quad \text{et} \quad \nabla^{\varphi}_{e_i} d(\varphi)(e_j) = \nabla^{\varphi}_{e_j} d(\varphi)(e_i)$$

$$\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) = \mathbf{R}^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\tau(\varphi),$$

ce qui permet de retrouver

$$\begin{aligned}
(div^M\, T_1)(e_j) + (div^M\, T_2)(e_j) &= \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_j}\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_j), \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&= -h(\tau_2(\varphi), d\varphi).
\end{aligned}$$

■

Du théorème $\boxed{1.6.1}$, on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 1.6.1**
✓ *Si $\varphi$ est biharmonique, alors $div^M S_2(\varphi) = 0$.*
✓ *Si $\varphi$ est une submersion et si $div^M S_2(\varphi) = 0$, alors $\varphi$ est biharmonique.*

## 1.7 Formule de monotonie des applications harmoniques

**Théorème 1.7.1** *Si $S(\varphi)(X, \cdot)$ une 1-forme sur $M$ définie par :*

$$\Big(S(\varphi)(X, \cdot)\Big)(Y) = S(\varphi)(X, Y),$$

*pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors*

$$div\Big(S(\varphi)(X, \cdot)\Big) = divS(\varphi) + S(\varphi)(\nabla_{e_i}X, e_i). \tag{1.23}$$

**Preuve.** Rappelons que si $\omega$ est une 1-forme différentielle sur $M$, alors

$$\begin{aligned} div^M\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)e_i \\ &= e_i\Big(\omega(e_i)\Big) - \omega\Big(\nabla_{e_i}e_i\Big). \end{aligned}$$

Posons $\omega = S(\varphi)(X, \cdot)$, on a donc :

$$\begin{aligned} div\Big(S(\varphi)(X, \cdot)\Big) &= \Big(\nabla_{e_i}S(\varphi)(X, \cdot)\Big)e_i \\ &= e_i\Big(S(\varphi)(X, e_i)\Big) - S(\varphi)(X, \nabla_{e_i}e_i). \end{aligned} \tag{1.24}$$

Or

$$\begin{aligned} div\Big(S(\varphi)\Big)(X) &= \Big(\nabla_{e_i}S(\varphi)(X, e_i)\Big) \\ &= e_i\Big(S(\varphi)(X, e_i)\Big) - S(\varphi)(X, \nabla_{e_i}e_i) - S(\varphi)(\nabla_{e_i}X, e_i). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Des équations (1.24) et (1.25), on obtient

$$div\Big(S(\varphi)(X, \cdot)\Big) = divS(\varphi) + S(\varphi)(\nabla_{e_i}X, e_i). \qquad \blacksquare$$

## 1.8 Théorème de Liouville pour les applications harmoniques

Dans cette partie, nous montrons le théorème de Liouville pour les applications harmoniques.

**Théorème 1.8.1** *Soit $N$ une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ($Sect^N \leq 0$). Si $\varphi : (\mathbb{R}^m, \langle, \rangle_{\mathbb{R}^m}) \to N$ est une application harmonique telle que*

$$E(\varphi, \Omega) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx < \infty.$$

*Alors $\varphi$ est une application constante.*

**Preuve.** pour la démonstration en utilisant la formule standard de Bochner pour l' application $\varphi$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi|^2 &= |\nabla d\varphi|^2 + \langle d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau(\varphi)\rangle + \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(Ricci^{\mathbb{R}^m} e_i), d\varphi(e_i)) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{m} h(\mathbf{R}^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))d\varphi(e_j), d\varphi(e_i)), \end{aligned} \tag{1.26}$$

où

$$|\nabla d\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} h(\nabla d\varphi(e_i, e_j), \nabla d\varphi(e_i, e_j))$$

et

$$\langle d\varphi, \nabla^{\varphi}\tau(\varphi)\rangle = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)).$$

Puisque $\tau(\varphi) = 0, \quad Ricci^{\mathbb{R}^m} = 0, \quad Sect^N < 0$, alors l'équation (1.26) devient

$$\frac{1}{2}\Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi|^2 \geq |\nabla d\varphi|^2. \tag{1.27}$$

On sait que si $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}\Delta^M f^2 &= e_i(e_i(f^2))\\ &= e_i(2e_i(f)f)\\ &= 2f\Delta^M f + |grad^M f|^2\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{2}\Delta^M f^2 = f\Delta^M f + |grad^M f|^2.$$

Pour $f = |d\varphi|$, on obtient

$$\frac{1}{2}\Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi|^2 = |d\varphi|\Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi| + |grad^{\mathbb{R}^m}|d\varphi||^2.$$

De (1.27) et l'inégalitè de Kato , on arrive à

$$|d\varphi|\Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi| \geq |\nabla d\varphi|^2 - |grad^{\mathbb{R}^m}|d\varphi||^2 \geq 0.$$

Ainsi, $|d\varphi|$ est une fonction sub-harmonique positive. C'est-à-dire :

$$|d\varphi| \geq 0, \quad \Delta^{\mathbb{R}^m}|d\varphi| \geq 0.$$

On obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx = \infty \quad ou \quad |d\varphi| = constante.$$

Puisque

$$Vol(\mathbb{R}^m) = \infty$$

et

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} |d\varphi|^2 dx < \infty,$$

alors

$$|d\varphi| = 0.$$ ■

## 1.9 Conclusion

Ce chapitre rassemble les éléments mathématiques de base utilisés dans la suite de cette recherche qui permettent de définir la notion des applications harmoniques avec potentiel décrite au chapitre suivant.

# CHAPITRE 2

# LES APPLICATIONS HARMONIQUES AVEC POTENTIEL

## Introduction

Dans ce chapitre, on définit la notion d'harmonicité dans la présence d'un potentiel $H$ qui a été introduite par A.Fardoun et A.Ratto en 1996 (voir [19] pour une introduction au sujet et motivations).

On éxpose des résultats analogues à celle connues pour les applications harmoniques en définissant les applications harmoniques avec potentiel $H$, en continuant d'utiliser les notations et les définitions du premier chapitre.

## 2.1 Théorie générale

**<u>Convention :</u>** On commence ce chapitre par quelques définitions de base en utilisant que $H$ est une fonction de classe $C^\infty$ sur $N$.

**Définition 2.1.1** *On appelle énergie avec potentiel $H$ d'une application $\varphi$ la fonctionnelle définie de la manière suivante :*

$$E_H(\varphi, \Omega) = \int_\Omega \{e(\varphi) - H(\varphi)\} dv_g.$$

**Définition 2.1.2** *Une application $\varphi$ est dite harmonique avec potentiel $H$ si et seulement si elle est un point critique de la fonctionnelle $E_H$ i.e :*

$$\frac{d}{dt}E_H(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = 0.$$

*Le champ de tension avec potentiel de $\varphi$ est définie par :*

$$\tau_H(\varphi) = \tau(\varphi) + (grad^N H)\circ\varphi,$$

*où $\tau(\varphi) = Tr_g\nabla d\varphi$ est le champ de tension de $\varphi$.*

**Remarque 2.1.1** *De l'expression de $\tau_H(\varphi)$, il est clair que si le gradient du potentiel $H$ est nul, alors l'application $\varphi$ est harmonique et $H$ est constante.*

La théorie des applications harmoniques avec potentiel fait intervenir le calcul variationnel pour obtenir des formules importantes qu'on va les donner ici :

### 2.1.1 Première variation de l'énergie $E_H$

**Théorème 2.1.1** *Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $\Omega$. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_H(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = -\int h\Big(\tau_H(\varphi), \upsilon\Big)dv_g,$$

*où $\upsilon(x)$ dénote le champ de vecteur de variation de $\{\varphi_t\}$*

$$\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)\Big|_{t=0} = d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big)_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)}N.$$

**Preuve.**
On considère que $\{(e_i,0)(0,\frac{d}{dt})\}$ est une base sur la variété produit $M\times(-\epsilon,\epsilon)$ où $\{\frac{d}{dt}\}$ est une base sur $(-\epsilon,\epsilon)$. On remarque que le crochet de Lie

$$\Big[(e_i,0)\Big(0,\tfrac{d}{dt}\Big)\Big] = 0, \forall i = 1,\ldots,m.$$

On pose

$$d\phi(e_i,0) = d\varphi(e_i).$$

En effet,

$$\frac{d}{dt}E_H(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = \int_\Omega \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)\Big) - \frac{\partial}{\partial t}H\circ\phi\Big|_{t=0} dv_g,$$

mais $\frac{\partial}{\partial t}H\circ\phi = h(\upsilon,(grad^N H)\circ\phi)$, ce qui résulte que :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_H(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(e_i,0)} d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big), d\phi(e_i,0)\Big) - h\Big(\upsilon,(grad^N H)\circ\phi\Big)\Big|_{t=0} dv_g\\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i)\Big) - h\Big(\upsilon,(grad^N H)\circ\varphi\Big) dv_g.\end{aligned}$$

Si $\omega$ est une 1-forme différentielle à support dans $\Omega$, donnée par :

$$\omega(X) = h\Big(\upsilon, d\varphi(X)\Big), \quad \forall X\in\Gamma(TM).$$

Alors

$$\begin{aligned}div^M\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i)\\ &= e_i\Big(\omega(e_i)\Big) - \omega\Big(\nabla_{e_i}e_i\Big)\\ &= e_i\Big(h(\upsilon,d\varphi(e_i)\Big) - h\Big(\upsilon,d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)\Big)\\ &= h\Big(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i)\Big) + h\Big(\upsilon,\tau(\varphi)\Big)\end{aligned}$$

et comme $\int_\Omega div^M\omega\, dv_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E_H(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = -\int_\Omega h\Big(\tau_H(\varphi),\upsilon\Big)dv_g. \qquad \blacksquare$$

Le théorème $\boxed{2.1.1}$ nous permet de reformuler la définition $\boxed{2.1.2}$ dans un équivalent de manière dans le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.1** *Une application $\varphi$ est dite harmonique avec potentiel $H$ si et seulement si $\tau_H(\varphi) = 0$.*

*Localement, on a :*

$$\tau_H(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi + h^{ij}\frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\circ\varphi.$$

**Exemple 2.1.1** *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *l'inversion définie par :*

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

*Soit* $y = \varphi(x)$ *dans le codomaine. Alors* $\varphi$ *est harmonique avec potentiel* $H$ *donnée par*

$$H = (m-2)\|y\|^4, \; m > 2.$$

$\star$ *Par un simple calcul, on remarque que si* $m = 2$*, alors* $\varphi$ *est une application harmonique.*

**Exemple 2.1.2** *On considère la sphère* $\mathbb{S}^2$ *et* $\mathbb{T}^2$ *le tore de révolution. Alors l'application de Smith* $\varphi_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ *définie par :*

$$\varphi(s,t) = \Big(\cos(2s), \sin(2s)e^{ik\theta}\Big), \quad s \in [0,\pi] \quad et \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

*est harmonique avec potentiel* $H = \dfrac{k^2 \sin^2 2s}{2} + C$*, où* $k$ *et* $C$ *sont des constantes arbitraires.*

Maintenant, on considère l'exemple suivant d'une application harmonique avec potentiel $H$ tel que $H$ vérifi $\|grad^N H\|^2 > 0 = \mathbf{R}$ où $\mathbf{R}$ dénote la courbure du codomaine :

**Exemple 2.1.3**

**(a)** *Pour tout* $i = 1, \dots, m$ *et* $j \geq 2$*, on définie l'application* $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *par :*

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m) = (x_1)^j + \ldots + (x_i)^2 + \ldots + (x_m)^j,$$

*si* $j = 2$ *l'application* $\varphi$ *est simplement* $\varphi(x) = \|x\|^2$.

**(b)** *Pour* $i = 1, \dots, m$ *et* $j \geq 2$*, on définie l'application* $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *par :*

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m) = \Big((x_1)^j, \dots, (x_i)^2, \dots, (x_m)^j\Big).$$

**Propriété 2.1.1** *Soient* $M_1$ *et* $M_2$ *deux variétés riemanniennes. Si les deux applications* $\varphi_1 : M_1 \to N$ *et* $\varphi_2 : M_2 \to N$ *sont harmoniques avec potentiels* $H_1$ *(resp.* $H_2$*), alors l'application* $\varphi : M_1 \times M_2 \to N$ *est harmonique avec potentiel* $H = H_1 + H_2$.

**Propriété 2.1.2** *La composée de deux applications harmoniques avec potentiel n'est pas en général une application harmonique avec potentiel.*

**Contre-exemple**

Soient $\varphi$ et $\psi$ deux applications de classe $(C^\infty)$ donnés par :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -e^x,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x - e^x.\end{aligned}$$

Si on considère la fonction réelle $H$ définie par :

$$\begin{aligned}H : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto e^x,\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}\tau_H(\varphi) &= \tau(\varphi) + grad^N H\\ &= -e^x + e^x = 0\end{aligned} \tag{2.1}$$

et

$$\begin{aligned}\tau_H(\psi) &= \tau(\psi) + grad^N H\\ &= -e^x + e^x = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2), on conclut que les deux applications sont harmoniques par rapport au potentiel $H$. Par contre

$$\begin{aligned}\psi \circ \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -e^x - e^{-e^x},\end{aligned}$$

n'est pas harmonique avec potentiel $H$.

### 2.1.2 Seconde variation de l'énergie $E_H$

**Théorème 2.1.2** *Soit $\varphi$ une application harmonique avec potentiel, alors*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_H\Big(\varphi_{(t,s)}, \Omega\Big)\Big|_{t=s=0} = \int_\Omega h\Big(J_H^\varphi(v_1), v_2\Big) dv_g,$$

*où*

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \qquad v_2 = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

*représentent les deux vecteurs de variations et* $J_H^\varphi(\upsilon_1) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *est définie par :*

$$J_H^\varphi(\upsilon_1) = -Tr_g(\nabla^\varphi)^2\upsilon_1 - Tr_g\mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi)d\varphi - (\nabla_{\upsilon_1}^N grad^N H)\circ\varphi, \tag{2.3}$$

*avec*

$$Tr_g(\nabla^\varphi)^2\upsilon_1 = \nabla_{e_i}^\varphi\nabla_{e_i}^\varphi\upsilon_1 - \nabla_{\nabla_{e_i}^M e_i}^\varphi\upsilon_1.$$

**Preuve.** Soit $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow N$, une variation avec deux paramètres telle que $\phi(x,t,s) = \varphi_{t,s}(x)$. On remarque que :

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}, X\Big] = \Big[\frac{\partial}{\partial s}, X\Big] = \Big[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\Big] = 0.$$

Posons

$$E_i = (e_i, 0, 0),\ \ \frac{\partial}{\partial t} = \Big(0, \frac{d}{dt}, 0\Big),\ \ et\ \ \frac{\partial}{\partial s} = \Big(0, 0, \frac{d}{ds}\Big).$$

Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E_H(\varphi_{t,s},\Omega)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big(e(\varphi_{t,s}) - H(\varphi_{t,s})\Big)dv_g.$$

Si $(t,s) = (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}e(\varphi_{t,s}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}h\Big(d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big)\\
&= h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big)\\
&\quad +h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(E_i)\Big).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour le premier terme de l'égalité (2.4), on a

$$h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big) = h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{E_i}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}
h\Big(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big) &= h\Big(\nabla^\phi_{E_i}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big)\\
&\quad +h\Big(\mathbf{R}^N\Big(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), d\phi(E_i)\Big)d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), d\phi(E_i)\Big).
\end{aligned}$$

On définit la 1-forme différentielle $\omega$ sur $M$ par :

$$\omega(X) = h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{t=s=0}, d\phi(X)\Big), \quad X \in \Gamma(TM).$$

Alors

$$div^M\omega = h\Big(\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{t=s=0}, d\phi(E_i)\Big) + h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{t=s=0}, \tau(\varphi)\Big).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)\Big) &= h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon_1, d\varphi(e_i))\upsilon_2, d\varphi(e_i)\Big) \\ &\quad - h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{t=s=0}, \tau(\varphi)\Big) + div^M\omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pour le deuxième terme de l'égalité (2.4), on a

$$\begin{aligned} h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\Big) &= h\Big(\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big) \\ &= E_i\Big(h\Big(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big)\Big) \\ &\quad - h\Big(d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big), \nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big). \end{aligned}$$

On définit la 1-forme différentielle $\eta$ sur $M$ par :

$$\eta(X) = h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_X \upsilon_1\Big), \quad X \in \Gamma(TM).$$

Alors

$$div^M\eta = \sum_{i=1}^{m}\Big\{e_i\Big(h(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_X \upsilon_1)\Big) - h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \upsilon_1\Big)\Big\}.$$

Ce qui nous donne

$$h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)\Big) = div^M\eta - h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon_1\Big) + h\Big(\upsilon_2, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}\upsilon_1\Big). \quad (2.6)$$

Rappelons maintenant que

$$\frac{\partial}{\partial s} H(\varphi_{t,s})\Big|_{s=0} = h\Big(\upsilon_2, (grad^N H) \circ \varphi\Big),$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}H(\varphi_{t,s})\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big|_{(t,s)=(0,0)},(grad^N)\circ\varphi\Big)\\ &\quad +h\Big((\nabla^N_{\upsilon_1}grad^N H)\circ\varphi,\upsilon_1\Big).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Enfin, d'aprés (2.4), (2.5), (2.6), (2.8) et le théorème de divergence, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\Big(e(\varphi_{t,s})-H(\varphi_{t,s})\Big) &= h\Big(\upsilon_2,-Tr_g(\nabla^{\varphi})^2-Tr_g\mathbf{R}^N(\upsilon_1,d\varphi)d\varphi-(\nabla^N_{\upsilon_1}grad^N H)\circ\varphi\Big)\\ &\quad -h\Big(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\upsilon_2,\tau_H(\varphi)\Big).\end{aligned}$$

En tenant compte que $\varphi$ est harmonique avec potentiel $H$, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E_H\Big(\varphi_{(t,s)},\Omega\Big)\Big|_{t=s=0}=\int_\Omega h\Big(J^{\varphi}_H(\upsilon_1),\upsilon_2\Big)dv_g,$$

où $J^{\varphi}_H(\upsilon_1)$ est définie par l'équation (2.3). ■

## 2.2 Les applications biharmonique avec potentiel

**Définition 2.2.1** *Une application $\varphi$ est dite biharmonique avec potentiel si et seulemant si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie avec potentiel définie par :*

$$E_{2,H}(\varphi,\Omega)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\tau_H(\varphi)|^2dv_g,\quad i.e\quad \frac{d}{dt}E_{2,H}(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0}=0.$$

**Définition 2.2.2** *Le champ bi-tension avec potentiel d'une application $\varphi$ de classe $C^\infty$ est définie par :*

$$\tau_{2,H}(\varphi)=\tau_2(\varphi)-J_\varphi\Big((gradH)\circ\varphi\Big)-\Big(\nabla_{\tau(\varphi)}(gradH)\Big)\circ\varphi-\Big(\nabla_{(gradH)\circ\varphi}(gradH)\circ\varphi\Big),$$

*où*

$$\begin{aligned}J_\varphi\Big((gradH)\circ\varphi\Big) &= \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\Big((gradH)\circ\varphi\Big)-\nabla_{\nabla^M_{e_i}e_i}\Big((gradH)\circ\varphi\Big)\\ &\quad +\mathbf{R}^N\Big((gradH)\circ\varphi,d\varphi(e_i)\Big)d\varphi(e_i).\end{aligned}$$

### 2.2.1 Première variation de $E_{2,H}$

**Théorème 2.2.1** *Si $\varphi_t$ est une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $\Omega$, alors*

$$\frac{d}{dt}E_{2,H}(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = -\int_\Omega h\Big(\tau_{2,H}(\varphi),\upsilon\Big)dv_g,$$

*où $\upsilon = \dfrac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ est le champ de variation à $\varphi_t$.*

**Preuve.** Soient $\varphi_t$ une variation de classe $C^\infty$ de $\varphi$ à support dans $\Omega$ et $\upsilon \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de variation. Posons $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon)\to N$, l'application définie par $\phi(x,t)=\varphi_t(x)$. Alors

$$\frac{d}{dt}E_{2,H}(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0} = \int_\Omega h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}[\nabla d\phi\,((e_i,0),d\phi(e_i,0))+(grad^N H)\circ\varphi],\tau_H(\varphi_t)\Big)dv_g\Big|_{t=0} \tag{2.8}$$

On choisit $B$ une base orthonormée sur $M$ définie dans un voisinage d'un point $x\in M$ telle que $\nabla^M_{e_i}e_j=0$ au point $x$, pour tous $i,j\in 1,\dots,m$. Au point $x$, on a

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0) = \nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big)\ \ car\ \ \Big[(e_i,0),\Big(0,\frac{d}{dt}\Big)\Big]=0,$$

avec

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^M_{e_i}e_i,0) = \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big).$$

D'où

$$\begin{aligned}\nabla_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0)-\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\Big(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\Big)\\ &= \mathbf{R}^N\Big(d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big),d\phi(e_i,0)\Big)d\phi(e_i,0)+\nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\ &\quad+\nabla^\phi_{[(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})]}d\phi(e_i,0)-(\nabla^M_{e_i}e_i,0).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\nabla_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \mathbf{R}^N\Big(d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big),d\phi(e_i,0)\Big)d\phi(e_i,0)+\nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big)\\ &\quad-\nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi\Big(0,\frac{d}{dt}\Big).\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'autre part, on a

$$h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}(grad^N H)\circ\varphi,\tau_H(\varphi)\Big)=h\Big(\nabla^{N}_{\tau_H(\varphi)}(grad^N H),\upsilon\Big). \tag{2.10}$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
&h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}[\nabla d\phi((e_i,0),d\phi(e_i,0))+(grad^N H)\circ\varphi],\tau_H(\varphi_t)\Big)dv_g\Big|_{t=0}=\\
&h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau_H(\varphi)\Big)+h\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i},\tau_H(\varphi)\Big)\\
&-h\Big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big)+h\Big(\nabla^{N}_{\tau_H(\varphi)}(grad^N H),\upsilon\Big).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On définit la 1-forme différentielle $\omega$ sur $M$ à support dans $\Omega$ par :

$$\omega(X)=h\Big(\nabla^{\varphi}_X\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
div^M\omega &= \sum_{i=1}^m e_i\Big(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon,\tau_H(\varphi))\Big)-h\Big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i},\tau_H(\varphi)\Big)+h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_H(\varphi))-h\Big(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Des formules (2.9) et (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}[\nabla d\phi((e_i,0),d\phi(e_i,0))+(grad^N H)\circ\varphi],\tau_H(\varphi_t)\Big)dv_g\Big|_{t=0}=\\
&+\sum_{i=1}^m h\Big(\mathbf{R}^N(\upsilon,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau_H(\varphi)\Big)+div^M\omega\\
&-\sum_{i=1}^m h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_H(\varphi))+h\Big(\nabla^{N}_{\tau_H(\varphi)}(grad^N H),\upsilon\Big).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

On définit la 1-forme différentielle $\eta$ sur $M$ à support dans $\Omega$ par :

$$\eta(X)=h\Big(\nabla^{\varphi}_X\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned} div^M\eta &= \sum_{i=1}^m e_i\Big(h\Big(\nabla^\varphi_X\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big)\Big)-h\Big(\upsilon,\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau_H(\varphi)\Big)\\ &= \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon,\tau_H(\varphi)\Big)+h\Big(\upsilon,\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon\Big)-h\Big(\upsilon,\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau_H(\varphi)\Big). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituant (2.13) dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}[\nabla d\phi((e_i,0),d\phi(e_i,0))+(grad^N H)\circ\varphi],\tau_H(\varphi_t)\Big)dv_g\Big|_{t=0} &= div^M\omega-div^M\eta\\ +\sum_{i=1}^m\Big\{h\Big(\mathbf{R}^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\upsilon\Big)+h\Big(\mathbf{R}^N(grad^N H,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\upsilon\Big)\\ +h\Big(\upsilon,\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau_H(\varphi)\Big)-h\Big(\upsilon,\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau_H(\varphi)\Big)\Big\}+h\Big(\nabla^N_{\tau_H(\varphi)}(grad^N H),\upsilon\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

D'aprés les formules (2.8) , (2.15) et le théorème de divergence, on conclut que :

$$\frac{d}{dt}E_{2,H}(\varphi_t,\Omega)\Big|_{t=0}=-\int_\Omega h\Big(\tau_{2,H}(\varphi),\upsilon\Big)dv_g. \qquad\blacksquare$$

**Corollaire 2.2.1** *Une application $\varphi$ est dite biharmonique avec potentiel si et seulement si*

$$\tau_{2,H}(\varphi)=0.$$

*En particulier si $\varphi$ est une application harmonique, alors $\varphi$ est dite biharmonique avec potentiel $H$ si est seulement si*

$$J_\varphi((grad^N H)\circ\varphi)+(\nabla_{(gradH)\circ\varphi}(grad^N H))\circ\varphi=0.$$

**Corollaire 2.2.2** *L'application identité $Id_M : M\longrightarrow M$ est biharmonique avec potentiel si et seulement si*

$$grad\Delta H+\frac{1}{2}grad\left(|gradH|^2\right)+2Ricci^M(gradH)=0.$$

**Exemple 2.2.1** *On considère l'application identité* $Id : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, $m \neq 2$. *Supposons que* $(H = H(r), r = |x|)$. *D'aprés le corollaire* $\boxed{2.2.1}$, *on déduit que l'application identité est dite biharmoique avec potentiel si et seulement si la fonction* $H$ *est une solution de l'équation différentielle suivante :*

$$H''' + \frac{m-1}{r}H'' - \frac{m-1}{r^2}H' + H'H'' = 0. \tag{2.16}$$

*Si on prend* $\beta = H'$, *l'équation (2.16) s'écrit :*

$$\beta'' + \frac{m-1}{r}\beta' - \frac{m-1}{r^2}\beta + \beta\beta'. \tag{2.17}$$

*On remarque que* $\beta = \dfrac{a}{r}(a \in \mathbb{R}^*)$ *est une solution particulière de l'équation (2.17), alors l'application* $Id$ *est biharmonique avec potentiel si et seulement si* $a = 4 - 2m$ *et dans ce cas la fonction* $H$ *est donnée par*

$$H(r) = \ln(Cr^{4-2m}),\ C > 0.$$

## 2.3 Le tenseur énergie impulsion avec potentiel

Une autre notion importante pour les applications harmoniques avec potentiel a été introduite par S.Yao, est donné par la définition suivante :

**Définition 2.3.1** *Le tenseur énergie impulsion avec potentiel est un champs de tenseur de type* $(0, 2)$ *symétrique défini par :*

$$\begin{aligned} S_H(\varphi) &= \Big(e(\varphi) - H(\varphi)\Big)g - \varphi^* h \\ &= S(\varphi) - H(\varphi)g. \end{aligned}$$

*Pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$, *on a*

$$S_H(\varphi)(X,Y) = \Big(e(\varphi) - H(\varphi)\Big) \cdot g(X,Y) - h(d\varphi(X), d\varphi(Y)).$$

**Lemme 2.3.1** *Soit $\varphi$ une application harmonique avec potentiel $H$. Alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$,*

$$\begin{aligned}(div^M S_H(\varphi))(X) &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i} S_H(\varphi))(e_i, X) \\ &= -h(\tau_H(\varphi), d\varphi(X)).\end{aligned}$$

**Preuve.** Rappelons que

$$div^M S(\varphi) = -h(\tau(\varphi), d\varphi(X)).$$

Alors

$$\Big(div^M S_H(\varphi)\Big)(X) = div^M S(\varphi)(X) - div^M\Big(H(\varphi)\cdot g\Big)(X).$$

Depuis

$$\begin{aligned}div^M\Big(H(\varphi)g\Big)(X) &= \Big(\nabla_{e_i} H(\varphi) g\Big)(e_i, X) \\ &= \nabla_{e_i} H(\varphi)\cdot g(e_i, X) \\ &= \nabla_X H(\varphi) \\ &= (\nabla_{d\varphi(X)} H)(\varphi) \\ &= h\Big((gradH)(\varphi), d\varphi(X)\Big),\end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned}\Big(div^M S_H(\varphi)\Big)(X) &= -h(\tau(\varphi) + (gradH)(\varphi), d\varphi(X)) \\ &= -h(\tau_H(\varphi), d\varphi(X)). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

**Corollaire 2.3.1** *Si $\varphi$ est une application harmonique avec potentiel $H$, alors*

✓ *$\varphi$ est vérifie la loi de conservation (i.e $div^M S_H(\varphi) = 0$).*

✓ *$div^M S_H(\varphi)(X) = h(grad^N H(\varphi), d\varphi(X))$.*

*Inversement, si $\varphi$ est une submersion et $div^M S_H(\varphi) = 0$, alors $\varphi$ est harmonique avec potentiel .*

**Proposition 2.3.1** *Soit $T$ un tenseur de type (0.2) symétrique. on a la formule intégrale suivante :*

$$\int_{\partial\Omega} T(X, \boldsymbol{n}) ds_g = \int_{\Omega} \Big[h\Big(T, \frac{1}{2}L_X g\Big) + (divT)(X)\Big] dv_g, \tag{2.18}$$

*où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$. Si $\varphi$ une application harmonique avec potentiel, on a*

$$(div^M S(\varphi))(X) = -h\Big(\tau(\varphi), d\varphi(X)\Big) = h\Big((grad^N H)(\varphi), d\varphi(X)\Big) = h\Big(grad(H\circ\varphi), X\Big).$$

*On applique la formule (2.18) pour $T = S(\varphi)$, on trouve*

$$\int_{\partial\Omega} S(\varphi)(X,\boldsymbol{n})ds_g = \int_\Omega \Big[h\Big(S(\varphi), \frac{1}{2}L_X g\Big) + h\Big(grad(H\circ\varphi), X\Big)\Big]dv_g. \tag{2.19}$$

*Or $div^M S_H(\varphi) = 0$, l'égalité (2.18) est équivalente à l'équation suivante :*

$$\int_{\partial\Omega} S_H(\varphi)(X,\boldsymbol{n})ds_g = \int_\Omega h\Big(S_H(\varphi), \frac{1}{2}L_X g\Big)dv_g. \tag{2.20}$$

## 2.4 La formule de monotonie de $E_H$

Grâce à la notion du tenseur énergie impulsion avec potentiel on obtient ce qu'on appelle formules de monotonie et les théorèmes de type Liouville pour les applications harmoniques avec potentiel avec certaines conditions sur $H$.

• Soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. On considère que $M = (M^m, f^2 g_0)$ de pôle $\mathcal{X}_0$ et $r(\mathcal{X}) = d_{g_0}(\mathcal{X}, \mathcal{X}_0)$ la distance relative au pôle $\mathcal{X}_0$.

• Soit $B_R(\mathcal{X}_0) = \{\mathcal{X} \in M : r(\mathcal{X}) \leq R\}$. On note par $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ les valeurs propres de la matrice $Hess_{g_0}(r^2)$ et $e_H(\varphi) = e(\varphi) - H(\varphi)$.

<u>**Conditions :**</u> Il est claire que $\nu = f^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r}$ est le vecteur unitaire externe au long de $\partial B(r) \subset M$. Supposons que :

$(f_1)$ $\dfrac{\partial \log f}{\partial r} \geq 0$.

$(f_2)$ Il existe une constante $\sigma > 0$, telle que

$$(m-2)r\frac{\partial \log f}{\partial r} + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i - 2\lambda_{max}\Big) \geq \sigma.$$

**Théorème 2.4.1** *Soit $\varphi$ une application harmonique avec potentiel, où $H \leq 0$ (ou $H|_{\varphi(M)\leq 0}$). Si $f$ satisfaite $(f_1)$ et $(f_2)$, alors*

$$\frac{\int_{B_{\rho_1}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g}{\rho_1^\sigma} \leq \frac{\int_{B_{\rho_2}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g}{\rho_2^\sigma},$$

*pour tout* $0 < \rho_1 \leq \rho_2$.

**Preuve.** En prenant $\Omega = B_R(\mathcal{X}_0)$ et $X = r\dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{1}{2}\nabla^0 r^2$ dans (2.20), où $\nabla^0$ dénote la dérivée covariante déterminée par la métrique $g_0$. avec un calcul direct, on trouve :

$$\frac{1}{2}L_X g = rf\frac{\partial f}{\partial r}g_0 + \frac{1}{2}f^2 L_X g_0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} h\Big(S_H(\varphi), \frac{1}{2}L_X g\Big) &= h\Big(S_H(\varphi), rf\frac{\partial f}{\partial r}g_0 + \frac{1}{2}f^2 L_X g_0\Big) \\ &= r\frac{\partial \log f}{\partial r}h(S_H(\varphi), g) + \frac{1}{2}f^2 h\Big(S_H(\varphi), Hess_{g_0}(r^2)\Big). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Comme $H \leq 0$, alors $e(\varphi) \leq e_H(\varphi)$ et on a

$$h\Big(S_H(\varphi), g\Big) = me_H(\varphi) - 2e(\varphi) \geq (m-2)e_H(\varphi).$$

Avec l'hypothèse $\dfrac{\partial \log f}{\partial r} \geq 0$, on aura

$$r\frac{\partial \log f}{\partial r}h\Big(S_H(\varphi), g\Big) \geq (m-2)r\frac{\partial \log f}{\partial r}e_H(\varphi).$$

Soit $B$ une base orthonormée par rapport à $g_0$ et $e_m = \dfrac{\partial}{\partial r}$. On peut supposer que $Hess_{g_0}(r^2)$ est une matrice diagonale. $\{\widetilde{e_i} = f^{-1}e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée par rapport à $g$.

Pour le deuxième terme à gauche de l'équation (2.28), on a

$$\begin{aligned}
f^2h\Big(S_H(\varphi), Hess_{g_0}(r^2)\Big) &= \sum_{i,j=1}^{m}[e_H(\varphi)g(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j) - \varphi^*h(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j)]Hess_{g_0}(r^2)(e_i,e_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} S_H(\varphi)(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j)Hess_{g_0}(r^2)(e_i,e_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^{m} e_H(\varphi)Hess_{g_0}(r^2)(e_i,e_j) - \sum_{i,j=1}^{m}\varphi^*h(\widetilde{e}_i,\widetilde{e}_j)Hess_{g_0}(r^2)(e_i,e_j)\\
&\geq e_H(\varphi)\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_i - 2e(\varphi)\lambda_{max},
\end{aligned}$$

D'où

$$f^2h\Big(S_H(\varphi), Hess_{g_0}(r^2)\Big) \geq \Big(\sum_{i,j=1}^{m}\lambda_i - 2\lambda_{max}\Big)e_H(\varphi). \tag{2.22}$$

Alors, on a

$$h\Big(S_H(\varphi), \frac{1}{2}L_Xg\Big) \geq \Big[(m-2)r\frac{\partial \log f}{\partial r} + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i - 2\lambda_{max}\Big)\Big]e_H(\varphi). \tag{2.23}$$

D'autre part, comme $|\nabla r| = f^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)}\Big(S_H(\varphi),\nu\Big)ds_g &\leq \int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)g\Big(r\frac{\partial}{\partial r},\nu)\Big)ds_g\\
&= R\int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)f ds_g\\
&= R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0)}\Big(\int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)}\frac{e_H(\varphi)}{|\nabla r|}ds_g\Big)dr\\
&= R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Des formules (2.20), (2.23) et (2.24), on a

$$R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g \geq \int_{B_R(\mathcal{X}_0)} \Big((m-2)r\frac{\partial \log f}{\partial r}+\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i-2\lambda_{max}\Big)\Big)e_H(\varphi)dv_g. \quad (2.25)$$

Par la condition $f_2$, on obtient

$$R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g \geq \sigma \int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g. \quad (2.26)$$

i.e

$$R\frac{d}{dR}\frac{\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g}{R^\sigma} \geq 0.$$

Ce qui nous donne

$$\frac{\int_{B_{\rho_1}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g}{\rho_1^\sigma} \leq \frac{\int_{B_{\rho_2}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi)dv_g}{\rho_2^\sigma}, \quad (2.27)$$

pour tout $0 < \rho_1 \leq \rho_2$. ■

**Lemme 2.4.1** *[24] Soit $M$ une variété riemannienne complète de pôle de $\mathcal{X}_0$. On dénote par $K_r$ la courbure radiale de $M$.*

**(i)** *Si $-\alpha^2 \leq K_r \leq -\beta^2 > 0$ avec $\alpha \geq \beta > 0$, alors*

$$\beta\coth(\beta r)[g - dr\otimes dr] \leq Hess(r) \leq \alpha\coth(\alpha r)[g - dr\otimes dr];$$

**(ii)** *Si $-\dfrac{A}{(1+r^2)^{1+\epsilon}} \leq K_r \leq \dfrac{B}{(1+r^2)^{1+\epsilon}}$ avec $\epsilon > 0$, $A \geq 0$ et $0 \leq B \leq 2\epsilon$, alors*

$$\frac{1-B/2\epsilon}{r}[g - dr\otimes dr] \leq Hess(r) \leq \frac{e^{\frac{A}{2\epsilon}}}{r}[g - dr\otimes dr]\,;$$

**(iii)** *Si $-\dfrac{a^2}{1+r^2} \leq K_r \leq \dfrac{b^2}{1+r^2}$ avec $a \geq 0$ et $b^2 \in [0, \frac{1}{4}]$, alors*

$$\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2r}[g - dr\otimes dr] \leq Hess(r) \leq \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2r}[g - dr\otimes dr].$$

**Lemme 2.4.2** *Soit $M$ une variété riemannienne complète de pôle $\mathcal{X}_0$. On dénote par $K_r$ la courbure radiale de $M$.*

**(i)** *Si* $-\alpha^2 \leq K_r \leq -\beta^2 > 0$ *avec* $\alpha \geq \beta > 0$ *et* $(m-1)\beta - 2\alpha \geq 0$, *alors*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 2\lambda_{max} \geq 2\Big(m - \frac{2\alpha}{\beta}\Big);$$

**(ii)** *Si* $-\dfrac{A}{(1++r^2)^{1+\epsilon}} \leq K_r \leq \dfrac{B}{(1+r^2)^{1+\epsilon}}$ *avec* $\epsilon > 0$, $A > 0$ *et* $0 \leq B < 2\epsilon$, *alors*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 2\lambda_{max} \geq 2\Big[1 + (m-1)\Big(1 - \frac{B}{2\epsilon}\Big) - 2e^{\frac{A}{2\epsilon}}\Big];$$

**(iii)** *Si* $-\dfrac{a^2}{1+r^2} \leq K_r \leq \dfrac{b^2}{1+r^2}$ *avec* $a \geq 0$ *et* $b^2 \in [0, \frac{1}{4}]$, *alors*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 2\lambda_{max} \geq 2\Big[(m-1)\frac{1+\sqrt{1-4b^2}}{2} - \sqrt{1+4a^2}\Big].$$

**Preuve.** Si $K_r$ vérifie (i), alors du lemme 2.4.1, pour tout $R > 0$ sur $B_r(\mathcal{X}_0) \setminus \{\mathcal{X}_0\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 2\lambda_{max} &\geq 2\Big[1 + (m-1)\beta r \coth(\beta r) - 2\alpha r \coth(\alpha r)\Big] \\ &= 2\Big[1 + \beta r \coth(\beta r)\Big(m - 1 - \frac{2\alpha}{\beta} \cdot \frac{\coth(\alpha r)}{\coth(\beta r)}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Grâce à la croissance de la fonction $\beta r \coth(\beta r) \to 1$ quand $r \to 0$ et $\dfrac{\coth(\alpha r)}{\coth(\beta r)} < 1$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - 2\lambda_{max} &\geq 2\Big[1 + 1 \cdot \Big(m - 1 - \frac{2\alpha}{\beta}\Big)\Big] \\ &= 2\Big(m - \frac{2\alpha}{\beta}\Big), \end{aligned}$$

pour tout $0 < \beta < \alpha$. De la même façon, on utilise le lemme (2.4.1) et l'inégalité ci-dessus reste valable pour les cas (ii) et (iii) sur $B_R(\mathcal{X}_0)$. ∎

**Théorème 2.4.2** *Soit $M$ une variété riemannienne complète de pôle $\mathcal{X}_0$. Supposons que la courbure radiale satisfait une des conditions suivantes :*

**(i)** *Si* $-\alpha^2 \leq K_r \leq -\beta^2 > 0$ *avec* $\alpha \geq \beta > 0$ *et* $(m-1)\beta - 2\alpha \geq 0$.

**(ii)** *Si* $-\dfrac{A}{(1++r^2)^{1+\epsilon}} \leq K_r \leq \dfrac{B}{(1++r^2)^{1+\epsilon}}$ *avec* $\epsilon > 0,\ A > 0,\ 0 \leq B < 2\epsilon,$

*et* $1 + (m-1)\Big(1 - \dfrac{B}{2\epsilon}\Big) - 2e^{\frac{A}{2\epsilon}} > 0.$

**(iii)** *Si* $-\dfrac{a^2}{1+r^2} \leq K_r \leq \dfrac{b^2}{1+r^2}$ *avec* $a \geq 0,\ b^2 \in [0, \frac{1}{4}]$

*et* $(m-1)(1+\sqrt{1-4b^2}) - 2\sqrt{1+4a^2} > 0.$

*Soit $\varphi$ une application harmonique avec potentiel et $H \leq 0$ ou $H|_{\varphi(M) \leq 0}$, alors*

$$\frac{\int_{B_{\rho_1}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi) dv_g}{\rho_1^\Lambda} \leq \frac{\int_{B_{\rho_2}(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi) dv_g}{\rho_2^\Lambda}, \tag{2.28}$$

*pour tout $0 < \rho_1 < \rho_2$, où $\Lambda$ est donné par :*

$$\Lambda = \begin{cases} m - \dfrac{2\alpha}{\beta}, & si\ K_r\ satisfait\ (i) \\ 1 + (m-1)\Big(1 - \dfrac{B}{2\epsilon}\Big) - 2e^{\frac{A}{2\epsilon}}, & si\ K_r\ satisfait\ (ii) \\ (m-1)(1+\sqrt{1-4b^2}) - 2\sqrt{1+4a^2}, & si\ K_r\ satisfait\ (iii) \end{cases}$$

**Preuve.** On prends $f = 1$ dans (2.25), on obtient :

$$R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0} e_H(\varphi) dv_g \geq \int_{B_R(\mathcal{X}_0)} \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i - 2\lambda_{max}\Big) e_H(\varphi) dv_g,$$

Du lemme $\boxed{2.4.2}$, on a

$$R\frac{d}{dR}\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi) dv_g \geq \Lambda \int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_H(\varphi) dv_g,$$

ce qui implique que $R\frac{d}{dR}E_H^R(\varphi) \geq \Lambda E_H^R(\varphi)$. Ainsi on obtient la formule de monotonie suivante :

$$\frac{E_H^{\rho_1}(\varphi)}{\rho_1^{\Lambda}} \leq \frac{E_H^{\rho_2}(\varphi)}{\rho_2^{\Lambda}}$$

pour tout $0 < \rho_1 < \rho_2$. ■

## 2.5 Théorème de Liouville

Comme application de la formule de monotonie, on a le théorème suivant

**Théorème 2.5.1** *Soit $M$ une variété riemannienne complète et noncompacte avec une courbure de Ricci positive. Supposons que la variété $N$ est de courbure sectionnelle négative. Si $\varphi$ est une application harmonique avec potentiel $H$ où $H$ est une fonction concave et $e(\varphi) := \frac{1}{2}|d\varphi|^2 < \infty$, alors $\varphi$ doit être constante.*

**Preuve.** On suit le calcul dans [32], pp. 26] pour une application harmonique avec potentiel, on a la formule de Bochner standard suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{2}|d\varphi|^2 &= |\nabla d\varphi|^2 + h\Big(d\varphi(Ric^M(e_i)), d\varphi(e_i)\Big) - h\Big(\mathbf{R}^N(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\Big) \\ &\quad - Hess\, H(d\varphi, d\varphi). \end{aligned} \tag{2.29}$$

On utilise le fait que $H$ est une fonction concave et $\mathbf{R}^N$ négative dans (2.29), alors

$$\Delta e(\varphi) \geq |\nabla d\varphi|^2. \tag{2.30}$$

On a l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on retient

$$|de(\varphi)|^2 \leq 2e(\varphi)|\nabla d\varphi|^2. \tag{2.31}$$

On fixe $\epsilon > 0$ un nombre positive et on calcule

$$\Delta\sqrt{e(\varphi)+\epsilon} = \frac{\Delta e(\varphi)}{2\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}} - \frac{1}{4}\frac{|\nabla d\varphi|^2}{(e(\varphi)+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{|\nabla d\varphi|^2}{2\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}}\Big(1 - \frac{e(\varphi)}{e(\varphi)+\epsilon}\Big) \geq 0,$$

où on utilise (2.30) et (2.31).
Soit $\eta$ une fonction arblitraire sur $M$ à support compact, on obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_M \eta^2 \sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Delta\sqrt{e(\varphi)+\epsilon} dM \\ &= -2\int_M \eta\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\, h\Big(\nabla\eta, \nabla\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big) dM - \int_M \eta^2 \Big|\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dM. \end{aligned}$$

Maintenant, soient $\mathcal{X}_0$ un point de $M$ et $B_R, B_{2R}$ deux boules géodesiques centrée en $\mathcal{X}_0$ de rayons $R$ et $2R$ respectivement. On choisit une fonction de sectionnement

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_R \\ 0, & x \in M\backslash B_{2R} \end{cases}$$

tel que $0 \leq \eta \leq 1$, $|\nabla\eta| \leq \dfrac{C}{R}$ pour une constante positive $C$. Alors, on trouve

$$0 \leq -2\int_{B_{2R}} \eta\sqrt{e(\varphi)+\epsilon} h\Big(\nabla\eta, \nabla\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big) dx - \int_{B_{2R}} \eta^2 \Big|\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dx.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & 2\left(\int_{B_{2R}\backslash B_R} \eta^2 \Big|\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_{2R}\backslash B_R} |\nabla\eta|^2 (e(\varphi)+\epsilon) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ & - \int_{B_{2R}\backslash B_R} \eta^2 \Big|\nabla\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dx - \int_{B_R} \Big|\nabla\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dx. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_{B_R} \Big|\nabla\sqrt{e(\varphi)+\epsilon}\Big|^2 dx \leq \int_{B_{2R}\backslash B_R} |\nabla\eta|^2 (e(\varphi)+\epsilon) dx \leq \frac{C^2}{R^2}\int_{B_{2R}} (e(\varphi)+\epsilon) dx.$$

On note par $B'_R$ l'ensemble $B'_R := \{x \in B_R | e(\varphi)(x) = 0\}$, cela nous donne

$$\int_{B'_R} \frac{|\nabla e(\varphi)|^2}{4e(\varphi)} dx \leq \frac{C^2}{R^2}\int_{B_{2R}} e(\varphi) dx.$$

Maintenant, si $R \to \infty$ et par l'hypothèse que l'énergie est finie, on trouve

$$\int_{M\setminus\{e(\varphi)=0\}} \frac{|\nabla e(\varphi)|^2}{4e(\varphi)} dM \leq 0,$$

alors $e(\varphi)$ doit être constante. Si $e(\varphi) \neq 0$, alors le volume de $M$ soit fini. Or, le volume d'une variété riemanienne complète et noncompacte de courbure de *Ricci* positive est infini. Alors $e(\varphi) = 0$, ce qui termine la preuve. ■

## 2.6 Problème de Dirichlet

Pour étudier le problème de valeur limite constante de Dirichlet pour les applications harmoniques avec potentiel, nous commençons par :

**Définition 2.6.1** *Soit $\Omega \subset M$ un domaine borné. on dénote par $\partial\Omega$ le bord de $\Omega$. Alors $\partial\Omega$ est appellé étoilé s'il existe un point intérieur $\mathcal{X}_0 \in \Omega$ tel que*

$$h\Big(\frac{\partial}{\partial r_{\mathcal{X}_0}}, \nu\Big)\Big|_{\partial\Omega} \geq 0,$$

*où $\nu$ est le vecteur unitaire normale extérieure à $\partial\Omega$ et $\dfrac{\partial}{\partial r_{\mathcal{X}_0}}$ est le champ de vecteurs unitaire tel que pour tout $\mathcal{X} \in \Omega\setminus\{\mathcal{X}_0\} \cup \partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial r_{\mathcal{X}_0}}$ est le vecteur unitaire tangent à la unique géodésique joindre $\mathcal{X}_0$ à $\mathcal{X}$ et pointer loin de $\mathcal{X}_0$. Il est évident que tout domaine convexe est étoilé.*

**Théorème 2.6.1** *Soit $\varphi$ une application harmonique avec potentiel $H$, et $\Omega$ un domaine étoilé tandis que le pôle $\mathcal{X}_0 \in \Omega$. Supposons que $\dfrac{\partial H \circ \varphi}{\partial r} \geq 0$ sur $\Omega$ et $f$ satisfaite $f_2$. Si $\varphi \equiv P \in N$, alors $\varphi$ doit être constante sur $\Omega$ et $grad^N H(P) = 0$.*

**Preuve.** Soit $X = r\dfrac{\partial}{\partial r}$, où $r = r_{\mathcal{X}_0}$. Du théorème $\boxed{2.4.1}$, on sait que

$$g\Big(S(\varphi), \frac{1}{2}L_X g\Big) \geq \sigma e(\varphi), \tag{2.32}$$

où $\sigma$ est une constante positive. Depuis $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv P$, $d\varphi(\eta) = 0$ pour tout vecteur tangent $\eta$ à $\partial\Omega$. Pour tout $\mathcal{X} \in \partial\Omega$, on a

$$\begin{aligned} S(\varphi)\Big(r\frac{\partial}{\partial r}, \nu\Big) &= r\left[e(\varphi)g\Big(r\frac{\partial}{\partial r}, \nu\Big) - h\Big(d\varphi\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big), d\varphi(\nu)\Big)\right] \\ &= r\left[e(\varphi)g\Big(r\frac{\partial}{\partial r}, \nu\Big) - g\Big(r\frac{\partial}{\partial r}, \nu\Big)|d\varphi|^2\right] \\ &= -rg\Big(r\frac{\partial}{\partial r}, \nu\Big)e(\varphi) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

D'aprés (2.19), (2.32) et (2.33), on a

$$\int_\Omega e(\varphi)dv_g = 0,$$

ce qui implique que $\varphi(\Omega) = P$ et $grad^N H(P) = 0$.

## 2.7 Conclusion

La théorie des applications harmoniques avec potentiel entre les variétés riemanniennes est vaste. En priciser, dans ce chapitre on a adopté les résultats des calculs variationnels, les formules de monotonie et un type de problèmes des équations aux dérivées partielles avec une condition de Dirichlet.

# ANNEXE A

# GÉOMÉTRIE CONFORME DES APPLICATIONS HARMONIQUES

## Introduction

Le but de ces annexes est de généraliser la notion d'harmonicité avec potentiel dans certains cas particuliers, en commençant par les propriétés des applications harmoniques en géométrie conforme, puis on va étudier les applications $p$-harmoniques avec potentiel.

**Définition A.1** *Une application $\varphi$ est dite confome s'il existe une fonction $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $C^\infty$, telle que :*

$$h_\varphi\Big(d\varphi(X), d\varphi(Y)\Big) = \lambda^2 g(X,Y),$$

*pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$. La fonction $\lambda$ est appelée dilatation de $\varphi$.*

## A.1 Géométrie conforme

En mathématiques, une application conforme est une fonction qui préserve les angles localement. Une structure conforme sur une variété de classe $C^\infty$ peut définie également comme une classe de métriques riemanniennes équivalentes en conformité.

Nous étudions les applications conformes entre les variétés équidimensionnelles (c'ést-à -dire $\varphi : (M^n, g) \to (N^n, h)$).

### A.1.1 Les applications conforme-harmoniques

**Proposition A.1.1** *Soit $\varphi$ une submersion conforme de dilatation $\lambda$, alors $\varphi$ est harmonique si et seulement si l'équation suivante est vérifie :*

$$(2-n)d\varphi(grad^M \ln \lambda) = 0.$$

**Preuve.** Pour montrer cette proposition, il suffit de vérifier que

$$\tau(\varphi) = (2-n)d\varphi(grad^M \ln \lambda). \tag{A.1}$$

En effet :

Soit $B$ une base orthonormée définie sur $M$ dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla_{e_i} e_j^M = 0$ au point $x$, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Au point $x$, on a :

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^{n} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ e_i\Big(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big) - h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j)\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi$ est conforme de dilatation $\lambda$ et $\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_j) = \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i)$, alors

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ e_i(\lambda^2)\Big(g(e_i, e_j)\Big) - h\Big(d\varphi(e_i), \nabla^{\varphi}_{e_j} d\varphi(e_i)\Big)\Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{ 2\lambda^2\Big(g(e_i(\ln \lambda)e_i, e_j)\Big) - \frac{1}{2} e_j\Big(h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_j))\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Or le gradient d'une fonction $f$ de classe $C^\infty(M)$ défini par $g(grad^M f, e_j) = e_j(f)$, alors

$$\begin{aligned} h(\tau(\varphi), d\varphi(e_j)) &= 2\lambda^2 g(grad^M \ln \lambda, e_j) - n\lambda^2 g(grad^M \ln \lambda, e_j) \\ &= (2-n)h\Big(d\varphi(grad^M \ln \lambda), d\varphi(e_j)\Big). \end{aligned}$$ ■

**Remarque A.1.1** *Dans ce cas, on déduit que le champ de tension avec potentiel est défini par :*

$$\tau_H(\varphi) = (2-n)d\varphi(grad^M \ln \lambda) + (grad^N H) \circ \varphi.$$

**Proposition A.1.2** *Soit $\varphi$ une application non constante, alors :*

$$S(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \dim M = 2 \text{ et } \varphi \text{ est conforme.}$$

**Preuve.** Si $S(\varphi) = 0$ alors :

$$\begin{aligned} S(\varphi) = 0 &\Rightarrow e(\varphi)g - \varphi^* h = 0 \\ &\Rightarrow \varphi^* h = e(\varphi)g \\ &\Rightarrow \varphi^* h = \frac{1}{2}|d\varphi|^2 g = \lambda^2 g. \end{aligned}$$

On retient que $\varphi$ est conforme. Ainsi

$$\begin{aligned} TrS(\varphi) &= S(\varphi)(e_i, e_i) \\ &= e(\varphi)g(e_i, e_i) - 2e(\varphi) \\ &= (m-2)e(\varphi). \end{aligned}$$

D'où $m = 2$.

Inversement, si $\varphi^* h = \lambda^2 g$ , alors $e(\varphi) = \dfrac{m\lambda^2}{2}$ et $S(\varphi) = \Big(\dfrac{m-2}{2}\Big)\lambda^2 g$. ■

**Remarque A.1.2** *Une application $\varphi$ est dite conforme si $\varphi^* h = \lambda^2 g$, où $\lambda \in C^\infty(M)$, dans le cas où $\lambda$ est une constante non nulle alors $\varphi$ est dite une application homothétique.*

**Proposition A.1.3** *Soit $\varphi$ une application harmonique est conforme. Si $m > 2$ alors $\varphi$ est homothétique.*

**Preuve.** En effet, avec ces hypothèses on a :

$$0 = div^M S(\varphi) = \frac{m-2}{2} d(\lambda^2) = \frac{m-2}{2} d\lambda^2.$$

## A.1.2 Les applications conforme-biharmoniques

Premièrement, nous calculons le tenseur bi-énergie impulsion pour une application conforme où on prouve que $S_2(\varphi)$ ne dépend que de la dilatation.

**Théorème A.1.1** *Soit $\varphi$ une application conforme avec dilatation $\lambda$, alors nous avons*

$$S_2(\varphi) = (2-n)\lambda^2 \Big\{ \Big( \frac{n-2}{2} |grad \ln \lambda|^2 + \Delta \ln \lambda \Big) g - 2\nabla d \ln \lambda \Big\} \tag{A.2}$$

*et la trace de $S_2(\varphi)$ est donné par*

$$Tr_g S_2(\varphi) = -(2-n)^2\lambda^2\Big\{\frac{n}{2}|grad\ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big\}. \tag{A.3}$$

Pour prouver le théorème. $\boxed{\text{A.1.1}}$, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme A.1.1** *Soit $\varphi$ une application conforme avec dilatation $\lambda$, puis pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ et pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons*

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) &= \lambda^2(X(\ln\lambda)Y(f) - Y(\ln\lambda)X(f)) \\ &\quad +\lambda^2\nabla df(X,Y) + \lambda^2 d\ln\lambda(gradf)g(X,Y). \end{aligned} \tag{A.4}$$

**Preuve du lemme.** Soit $f \in C^\infty(M)$, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) &= X(\lambda^2 g(gradf, Y)) - h(d\varphi(gradf), \nabla_X d\varphi(Y)) \\ &= X(\lambda^2)g(gradf, Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) + \lambda^2 g(gradf, \nabla_X Y) \\ &\quad -h(d\varphi(gradf), \nabla d\varphi(X,Y)) - h(d\varphi(gradf), d\varphi(\nabla_X Y)) \\ &= X(\lambda^2)g(gradf, Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) + \lambda^2 g(gradf, \nabla_X Y) \\ &\quad -h(d\varphi(gradf), \nabla d\varphi(X,Y)) - \lambda^2 g(gradf, \nabla_X Y). \end{aligned}$$

En notant par

$$g(\nabla_X gradf, Y) = \nabla df(X,Y),$$

alors nous obtenons

$$h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) = 2\lambda^2 X(\ln\lambda)Y(f) + \lambda^2\nabla df(X,Y) - h(d\varphi(gradf), \nabla d\varphi(X,Y)).$$

De même, nous avons

$$h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) = 2\lambda^2 Y(\ln\lambda)X(f) + \lambda^2\nabla df(X,Y) - h(d\varphi(gradf), \nabla d\varphi(X,Y)).$$

Ensuite, nous déduisons que

$$\begin{aligned} h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) &= h(d\varphi(X), \nabla_Y d\varphi(gradf)) \\ &\quad +2\lambda^2(X(\ln\lambda)Y(f) - Y(\ln\lambda)X(f)). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour le terme $h(d\varphi(X), \nabla_Y d\varphi(gradf))$, nous avons

$$\begin{aligned}
h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) &= h(\nabla d\varphi(gradf, Y), d\varphi(X)) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X)\\
&= h\Big(\nabla_{gradf} d\varphi(Y), d\varphi(X)\Big) - \lambda^2 g\Big(\nabla_{gradf} Y, X\Big)\\
&\quad +\lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X)\\
&= gradf\Big(\lambda^2 g(X,Y)\Big) - h\Big(\nabla_{gradf} d\varphi(X), d\varphi(Y)\Big)\\
&\quad -\lambda^2 g\Big(\nabla_{gradf} Y, X\Big) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X)\\
&= 2\lambda^2 d\ln\lambda(gradf) g(X,Y) - h(\nabla d\varphi(X, gradf), d\varphi(Y))\\
&\quad +\lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X).
\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\begin{aligned}
h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) &= -h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) + 2\lambda^2 \nabla df(X,Y)\\
&\quad +2\lambda^2 d\ln\lambda(gradf) g(X,Y). \qquad (A.6)
\end{aligned}$$

Enfin, si nous remplaçons (A.6) dans (A.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) &= \lambda^2 (X(\ln\lambda)Y(f) - Y(\ln\lambda)X(f))\\
&\quad +\lambda^2 \nabla df(X,Y) + \lambda^2 d\ln\lambda(gradf) g(X,Y).
\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du lemme. ■

**Remarque A.1.3** *Soit $\varphi$ une application conforme avec dilatation $\lambda$, alors si on considère $f = \ln\lambda$, L'équation (A.4) donne*

$$h(\nabla_X d\varphi(grad\ln\lambda), d\varphi(Y)) = \lambda^2(\nabla d\ln\lambda(X,Y) + |grad\ln\lambda|^2 g(X,Y)).$$

**Preuve du théorème** : Par définition, le tenseur bi-énergie impulsion est donné par :

$$S_2(\varphi) = \Big(-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 + div^M h(\tau(\varphi), d\varphi)\Big)g - 2symh(\nabla\tau(\varphi), d\varphi). \qquad (A.7)$$

Comme

$$|\tau(\varphi)|^2 = (2-n)^2\lambda^2|grd\ln\lambda|^2$$

et

$$div^M h(\tau(\varphi), d\varphi)\Big) = (2-n)\Big(2\lambda^2|grd\ln\lambda|^2 + \lambda^2\ln\lambda\Big),$$

on déduit

$$-\frac{1}{2}|\tau(\varphi)|^2 + div^M h(\tau(\varphi), d\varphi) = (2-n)\lambda^2\Big(\frac{n+2}{2}|grad\ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big). \qquad \text{(A.8)}$$

En calculant $symh(\nabla\tau(\varphi), d\varphi)$, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned} symh(\nabla\tau(\varphi), d\varphi)(X,Y) &= \frac{1}{2}(h(\nabla_X\tau(\varphi), d\varphi(Y)) + h(\nabla_Y\tau(\varphi), d\varphi(X))) \\ &= \frac{2-n}{2}(h(\nabla_X d\varphi(grad\ln\lambda), d\varphi(Y)) + h(\nabla_Y(grad\ln\lambda), d\varphi(X))). \end{aligned}$$

Par la remaque (A.1.3), nous avons

$$h(\nabla_X d\varphi(grad\ln\lambda), d\varphi(Y)) = \lambda^2\Big(\nabla d\ln\lambda(X,Y) + |grad\ln\lambda|^2 g(X,Y)\Big)$$

et

$$h(\nabla_Y d\varphi(grad\ln\lambda), d\varphi(X)) = \lambda^2\Big(\nabla d\ln\lambda(X,Y) + |grad\ln\lambda|^2 g(X,Y)\Big)$$

puis

$$symh(\nabla\tau(f), d\varphi)(X,Y) = (2-n)\lambda^2\Big(\nabla d\ln\lambda(X,Y) + |grad\ln\lambda|^2 g(X,Y)\Big). \qquad \text{(A.9)}$$

Si nous substituons (A.8) et (A.9) dans (A.7), nous concluons que

$$S_2(\varphi) = (2-n)\lambda^2\Big\{\Big(\frac{n-2}{2}|grad\ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big)g - 2\nabla d\ln\lambda\Big\}.$$

Calculons maintenant la trace du tenseur bi-énergie implusion, nous avons

$$\begin{aligned}
Tr_g S_2(\varphi) &= S_2(\varphi)(e_i, e_i) \\
&= (2-n)\lambda^2\Big(\frac{n-2}{2}|grad \ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big)g(e_i, e_i) \\
&\quad -2(2-n)\lambda^2\nabla d\ln\lambda(e_i, e_i) \\
&= (2-n)n\lambda^2\Big(\frac{n-2}{2}|grad \ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big) \\
&\quad -2(2-n)\lambda^2(\Delta\ln\lambda) \\
&= (2-n)\lambda^2\Big\{\frac{(n-2)}{2}|grad \ln\lambda|^2 + (n-2)\Delta\ln\lambda\Big\}.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$Tr_g S_2(\varphi) = -(2-n)^2\lambda^2\Big\{\frac{n}{2}|grad \ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big\}. \qquad \blacksquare$$

En calculant le Laplacien de la fonction $\lambda^{\frac{n}{2}}$ et en utilisant

$$\Delta\lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}\lambda^{\frac{n}{2}}\Big(\frac{n}{2}|grad \ln\lambda|^2 + \Delta\ln\lambda\Big),$$

nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire A.1.1** *Soit $\varphi : (M^n, g) \to (N^n, h), (n \neq 2)$ une application conforme de dilatation $\lambda$. La trace de $S_2(\varphi)$ est nulle si et seulement si la fonction $\lambda^{\frac{n}{2}}$ est harmonique.*

Le champ bi-tension de l'application conforme est donné par

**Théorème A.1.2** *Soit $\varphi$ une submersion conforme de dilatation $\lambda$, alors $\varphi$ est biharmonique si est seulement si l'équation suivante est vérifie :*

$$\begin{aligned}
&-(2-n)^2\nabla^{\varphi}_{grad^M \ln\lambda} d\varphi(grad^M \ln\lambda) - 2(2-n)d\varphi(Ricci^M grad^M \ln\lambda) \\
&- (2-n)d\varphi(grad^M(\Delta^M \ln\lambda) - 2(2-n)\langle\nabla d\varphi, \nabla d\ln\lambda)\rangle = 0,
\end{aligned}$$

*où*

$$\langle\nabla d\varphi, \nabla d\ln\lambda\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla d\varphi(e_i, e_j)\nabla d\ln\lambda(e_i, e_j)$$

*relativement à une base $B$ sur $M$.*

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme A.1.2** *Si $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe $C^\infty$ et $\gamma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$, alors :*

$$Tr_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(grad^M\gamma) = \nabla^\varphi_{grad^M\gamma}\tau(\varphi) + 2d\varphi(Ricci^M grad^M\gamma) + d\varphi(grad^M(\Delta^M\gamma))$$
$$- Tr_g\mathbf{R}^N(d\varphi(grad^M\gamma), d\varphi)d\varphi + 2\langle\nabla d\varphi, \nabla d\gamma\rangle.$$

**Preuve.** On définit une base orthonormée $B$ sur $M$ dans un voisinage d'un point $x \in M$ telle que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Au point $x$, on a

$$\begin{aligned}\langle\nabla d\varphi, \nabla d\gamma\rangle &= \sum_{i,j=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_j)\nabla d\gamma(e_i, e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_j) g(\nabla^M_{e_i} grad^M\gamma, e_j).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}Tr_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(grad^M\gamma) &= \sum_{i,j=1}^m \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(grad^M\gamma)\\ &= \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i, grad^M\gamma) + \sum_{i,j=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(\nabla^M_{e_i} grad^M\gamma)\\ &= \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i, grad^M\gamma) + \sum_{i,j=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M\gamma)\\ &\quad + \sum_{i=1}^m d\varphi(\nabla^M_{e_i}\nabla^M_{e_i} grad^M)\\ &= \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i, grad^M\gamma) + \langle\nabla d\varphi, \nabla d\gamma\rangle\\ &\quad + d\varphi(Tr_g(\nabla^M)^2 grad^M\gamma). \end{aligned} \tag{A.10}$$

Soit $\nabla^2 d\varphi$ la troisième forme fondamentale définie par :

$$\nabla^2 d\varphi(X, Y, Z) = \nabla^\varphi_X \nabla d\varphi(Y, Z) - \nabla d\varphi(\nabla^\varphi_X Y, Z) - \nabla d\varphi(Y, \nabla^\varphi_X Z). \tag{A.11}$$

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. On a

$$\nabla^2 d\varphi(X,Y,Z) = \nabla^2 d\varphi(Z,Y,X) + d\varphi(\mathbf{R}^M(Z,X)Y) - \mathbf{R}^N(d\varphi(Z), d\varphi(X))d\varphi(Y). \quad (A.12)$$

De la formule (A.12) on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} \nabla d\varphi(e_i, grad^M\gamma) &= \sum_{i=1}^m \nabla^2 d\varphi(e_i, e_i, grad^M\gamma) + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M\gamma) \\
&= \sum_{i=1}^m \nabla^2 d\varphi(grad^M\gamma, e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(\mathbf{R}^M grad^M\gamma, e_i)e_i) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \mathbf{R}^N(d\varphi(grad^M\gamma, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, \nabla^M_{e_i} grad^M\gamma).
\end{aligned}$$

Ce qui résulte que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} \nabla d\varphi(e_i, grad^M\gamma) &= \nabla^\varphi_{grad^M\gamma}\tau(\varphi) + d\varphi(Ricci^M grad^M\gamma) \\
&= -Tr_g \mathbf{R}^N(d\varphi(grad^M\gamma), d\varphi)d\varphi + \langle \nabla d\varphi, \nabla d\gamma \rangle. \quad (A.13)
\end{aligned}$$

En remplaçant la formule

$$Tr_g(\nabla^M)^2 grad^M\gamma = Ricci^M(grad^M\gamma) + grad^M(\Delta^M\gamma),$$

et la formule (A.13) dans (A.10), on déduit le lemme $\boxed{\text{A.1.2}}$. ■

**Preuve du théorème A.1.2** : Par définition, on a :

$$\tau_2(\varphi) = Tr_g \mathbf{R}^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - Tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi).$$

D'aprés l'équation (A.1), on a

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) &= -(2-n)Tr_g \mathbf{R}^N(d\varphi(grad^M \ln\lambda), d\varphi)d\varphi \\
&\quad -(2-n)Tr_g(\nabla^\varphi)^2 d\varphi(grad^M \ln\lambda). \quad (A.14)
\end{aligned}$$

Du lemme $\boxed{\text{A.1.2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
-(2-n)Tr_g(\nabla^{\varphi})^2 d\varphi(grad^M \ln\lambda) &= -(2-n)^2\nabla^{\varphi}_{grad^M \ln\lambda} \\
&\quad -2(2-n)d\varphi(Ricci^M grad^M \ln\lambda) \\
&\quad -(2-n)d\varphi(grad^M(\Delta^M \ln\lambda)) \\
&\quad +(2-n)Tr_g\mathbf{R}^N(d\varphi(grad^M \ln\lambda, d\varphi)d\varphi \\
&\quad -2(2-n)\langle \nabla d\varphi, \nabla d\ln\lambda\rangle. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

En remplaçant la formule (A.15) dans (A.14), le théorème $\boxed{\text{A.1.2}}$ découle. ■

# ANNEXE B

# CAS DES APPLICATIONS $P$-HARMONIQUES AVEC POTENTIEL

**Définition B.1** *Une application $\varphi$ est dite $p$-harmonique avec potentiel si elle est un point critique de la fonctionnelle $p$-énergie avec potentiel définie par :*

$$E_{p,H}(\varphi, \Omega) = \frac{1}{p} \int_\Omega \{|d\varphi|^p - H(\varphi)\} dv_g,$$

*pour tout $p \geq 2$, c'est-à-dire*

$$\frac{d}{dt} E_{p,H}(\varphi_t, \Omega)\Big|_{t=0} = 0.$$

*En particulier, si $p = 2$ et le potentiel $H$ est constant on retombe bien sur la notion des applications harmoniques usuelles.*

**Première variation de $E_{p,H}$**

D'une manière similaire aux applications harmoniques, on peut dériver la première variation des applications $p$-harmoniques avec potentiel comme suit :

$$\frac{d}{dt} E_{p,H}(\varphi_t, \Omega)\Big|_{t=0} = - \int_\Omega h\Big(\tau_{p,H}(\varphi), \upsilon\Big) dv_g, \tag{B.1}$$

où $\tau_{p,H}(\varphi) = \tau_p(\varphi) + (grad^N H) \circ \varphi$ et $\tau_p(\varphi) = -\nabla(|d\varphi|^{p-2} d\varphi)$. La formule de première variation nous donne la condition nécéssaire et suffisante pour qu'une application $\varphi$ soit

$p$-harmonique avec potentiel, donnée par l'équation : $\tau_{p,H}(\varphi) = 0$.

**Seconde variation de** $E_{p,H}$

Soit $\varphi$ une application $p$-harmonique avec potentiel. On note par $e_p(\varphi) = \dfrac{1}{p}|d\varphi|^p$ la $p$-énergie densité de $\varphi$ et $E_p(\varphi,\Omega) = \displaystyle\int_\Omega e_p(\varphi)dv_g$. Si $\{\varphi_{t,s}\}$ une variation de $\varphi$ à support dans $\Omega$, et

$$\upsilon_1 = \frac{\partial\varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \qquad \upsilon_2 = \frac{\partial\varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

dénotent les deux vecteurs de variations et $\phi(x,s,t) = \varphi_{t,s}(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_p(\varphi_{t,s})}{\partial t\partial s}\Big|_{t=s=0} &= (p-2)\int_\Omega |d\varphi|^{p-4}\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla_{e_i}\upsilon_2, d\varphi(e_i)\Big)h\Big(\nabla_{e_j}\upsilon_1, d\varphi(e_j)\Big) \\
&+ \int_\Omega h\Big(\nabla_{\upsilon_2}\upsilon_1, \nabla(|d\varphi|^{p-2}d\varphi)\Big)dv_g + \int_\Omega |d\varphi|^{p-2}h\Big(\nabla\upsilon_1, \nabla\upsilon_2\Big)dv_g \\
&+ \int_\Omega |d\varphi|^{p-2}h\Big(\mathbf{R}^N(d\varphi(e_i),\upsilon_2)\upsilon_1, d\varphi(e_i)\Big)dv_g. \qquad (B.2)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H\circ\varphi_{t,s}}{\partial t\partial s}\Big|_{t=s=0} &= h\Big(\nabla_{\upsilon_2} gradH, \upsilon_1\Big) + h\Big(gradH, \nabla_{\upsilon_2}\upsilon_1\Big) \\
&= Hess\ \ H(\upsilon_2,\upsilon_1) + h\Big(\nabla(|d\varphi|^{p-2}d\varphi), \nabla_{\upsilon_2}\upsilon_1\Big). \qquad (B.3)
\end{aligned}$$

De (B.2) et (B.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_{p,H}(\varphi_{t,s})}{\partial t\partial s}\Big|_{t=s=0} &= (p-2)\int_\Omega |d\varphi|^{p-4}\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla_{e_i}\upsilon_2, d\varphi(e_i)\Big)h\Big(\nabla_{e_j}\upsilon_1, d\varphi(e_j)\Big)dv_g \\
&- \int_\Omega HessH(\upsilon_2,\upsilon_1)dv_g + \int_\Omega |d\varphi|^{p-2}\sum_{i=1}^m h\Big(\mathbf{R}^N(d\varphi(e_i),\upsilon_2)d\varphi(e_i),\upsilon_1\Big)dv_g \\
&- \int_\Omega |d\varphi|^{p-2}\sum_{i=1}^m h\Big(\mathbf{R}^N(d\varphi(e_i),\upsilon_2)d\varphi(e_i),\upsilon_1\Big) + \int_\Omega |d\varphi|^{p-2}h\Big(\nabla\upsilon_1,\nabla\upsilon_2\Big)dv_g.
\end{aligned}$$

## B.1 Tenseur $p$-énergie impulsion

**Proposition B.1.1** *On définit le teneur $p$-énergie impulsion par :*

$$S_p(\varphi) = e_p(\varphi)g - |d\varphi|^{p-2}\varphi^* h.$$

*Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a*

$$div^M S_p(\varphi) = -h\Big(\tau_p(\varphi), d\varphi(X)\Big). \tag{B.4}$$

**Preuve.** Soit $X \in \Gamma(TM)$, alors

$$\begin{aligned} div^M S_p(\varphi)(X) &= (\nabla_{e_i} S_p(\varphi))(e_i, X) \\ &= \nabla_{e_i}\left(\frac{1}{p}h\Big(d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)\Big)^{\frac{p}{2}} g(e_i, X) - h\Big(|d\varphi|^{p-2} d\varphi(e_i), d\varphi(X)\Big)\right) \\ &\quad -e_p(\varphi)g\Big(e_i, \nabla_{e_i} X\Big) + |d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(e_i), d\varphi\nabla_{e_i} X\Big). \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} div^M S_p(\varphi)(X) &= \Big\{|d\varphi|^{p-2} h\Big(\nabla_{e_i} d\varphi(e_j), d\varphi(e_j)\Big) g(e_i, X) + e_p(\varphi) g(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &\quad -h\Big((\nabla_{e_i}|d\varphi|^{p-2} d\varphi(e_i)), d\varphi(X)\Big) - |d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(e_i), \nabla_{e_i} d\varphi(X)\Big)\Big\} \\ &\quad -e_p(\varphi) g(e_i, \nabla_{e_i} X) + |d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(e_i), d\varphi(\nabla_{e_i} X)\Big). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} div^M S_p(\varphi)(X) &= |d\varphi|^{p-2} h\Big((\nabla_{e_i} d\varphi)e_j, d\varphi(e_j)\Big) g(e_i, X) \\ &\quad -h\Big((\nabla_{e_i}|d\varphi|^{p-2} d\varphi)e_j, d\varphi(X)\Big) - h\Big(|d\varphi|^{p-2} d\varphi(e_i), (\nabla_{e_i} d\varphi)X\Big) \\ &\quad -h\Big(|d\varphi|^{p-2} d\varphi(e_i), d\varphi(\nabla_{e_i} X)\Big) + |d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(e_i), d\varphi(\nabla_{e_i} X)\Big). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$
\begin{aligned}
div^M S_p(\varphi)(X) &= |d\varphi|^{p-2} h\Big((\nabla_X d\varphi)e_j, d\varphi(e_j)\Big) - h\Big((\nabla_{e_i}|d\varphi|^{p-2}d\varphi)e_i, d\varphi(X)\Big) \\
&\quad -|d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(e_i), (\nabla_{e_i}d\varphi)X\Big) \\
&= -h\Big(\tau_p(\varphi), d\varphi(X)\Big).
\end{aligned}
$$

■

**Corollaire B.1.1** *Une application $\varphi$ est dite p-harmonique si est seulement si $div^M S_p(\varphi) = 0$.*

## B.2 Théorème de Liouville pour les applications $p$-harmoniques avec potentiel

**Théorème B.2.1** *Soit $M$ une variété riemannienne complète, simplement connexe de courbure sectionnelle $Sec^M$ négative. On dénote par $B_R(\mathcal{X}_0)$ la boule géodésique de rayon $R$ et de centre $\mathcal{X}_0$. Si l'appication $\varphi : B_R(\mathcal{X}_0) \to N$ est p-harmoniques avec potentiel, tel que $\partial\varphi\Big|_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)} = Q$ où $Q \in N$ satisfait $H(Q) = max_{y\in N} H(y)$. alors $\varphi$ est constante sur $B_R(\mathcal{X}_0)$.*

Pour simplifier la démonstration du théorème B.2.1, on rappelle ces deux lemmes :

**Lemme B.2.1** *Soient $\partial\Omega$ le bord de $\Omega$ et $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normale $\partial\Omega$. Alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$ de support compact, on a*

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} e_p(\varphi) g(X, \boldsymbol{n}) dv_g &= \int_{\partial\Omega} |d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(X), d\varphi(\boldsymbol{n})\Big) \\
&\quad + \int_{\Omega} \Big(divS_p(\varphi)\Big)(X) + \int_{\Omega} \langle S_p(\varphi), \nabla X\rangle dv_g,
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

*où $\nabla X(V, W) = \langle \nabla_X V, W\rangle$.*

**Preuve.** Par un calcul standard, on obtient les inégalités suivantes :

$$div^M(e_p(\varphi)X) = \nabla_X e_p(\varphi) + e_p(\varphi)\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle,$$

$$\nabla_X e_p(\varphi) = div^M\Big(|d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(X), d\varphi(e_i)\Big)e_i\Big) - h\Big(\tau_p(\varphi), d\varphi(X)\Big) - |d\varphi|^{p-2}\langle \nabla X, \varphi^* h\rangle.$$

Alors, on a

$$div^M(e_p(\varphi)X) = div^M(|d\varphi|^{p-2} h\Big(d\varphi(X), d\varphi(e_i)\Big)e_i\Big) - h\Big(\tau_p(\varphi), d\varphi(X)\Big) + \langle \nabla S_p(\varphi), \nabla X\rangle.$$

On utilise la formule de Green et l'égalité (B.4), on obtient l'équation (B.5). ■

**Lemme B.2.2** *Avec les mêmes hypothèses sur $M$ dans le théorème $\boxed{B.2.1}$. On prend $X = r\dfrac{\partial}{\partial r}$. Alors il existe une constante $\delta$ positive tel que*

$$\langle S_p(\varphi), \nabla X\rangle \geq \delta e_p(\varphi). \tag{B.6}$$

***Preuve.*** *Par définition de $S_p(\varphi)$, un calcul direct nous donne*

$$\begin{aligned}
\langle S_p(\varphi), \nabla X\rangle &= e_p(\varphi)[1 + rh_{ij}] - |d\varphi|^{p-2}\Big\{\Big|d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big|^2 + rh_{jk} h\Big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_k)\Big)\Big\} \\
&= \frac{1}{p}|d\varphi|^{p-2}\Big|d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big|^2\Big(1 + r\sum_{j=1}^{m-1} h_{ij} - p\Big) \\
&\quad + \frac{1}{p}|d\varphi|^{p-2}\sum_{i=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2\Big(1 + \sum_{j\neq i} h_{jj} - (p-1)rh_{ii}\Big) \\
&= (I) + (II).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Où

$$I = \frac{1}{p}|d\varphi|^{p-2}\Big|d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big|^2\Big(1 + r\sum_{j=1}^{m-1} h_{ij} - p\Big)$$

et

$$II = \frac{1}{p}|d\varphi|^{p-2}\sum_{j=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2\Big(1 + \sum_{j\neq i} h_{jj} - (p-1)rh_{ii}\Big).$$

Maintenant, On veut estimer $(I)$ et $(II)$ séparément. Premièrement, pour $m > p$ et $p \in [2, +\infty[$, $x \in B_r(\mathcal{X}_0)$ et $i = 1, \ldots, m-1$, on a $h_{ii} \geq \frac{1}{r}$.
Ce qui nous donne

$$I \geq \frac{m-p}{p}|d\varphi|^{p-2}\Big|d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big|^2. \tag{B.8}$$

On note par $\lambda_i$ les valeurs propres de l'opérateur de *Ricci* et on pose que $\lambda_i \geq \sum_{j\neq i}\lambda_j$, pour tout $1 \leq i \leq m-1$, alors
$\lambda_i \geq \sum_{j\neq i}\lambda_j \geq \sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{p-1}$. Cela implique que $\sum_{j\neq i} h_{ii} - hjj \geq 0$.
Ce qu'il suit

$$II \geq \frac{1}{p}|d\varphi|^{p-2}\sum_{i=1}^{m-1}|d\varphi(e_i)|^2. \tag{B.9}$$

En substituant (B.8) et (B.9) dans (B.7), on aura le résultat. ■
**Preuve du théorème B.2.1** : Comme $\varphi$ est $p$-harmonique avec potentiel et d'aprés (B.4) et $\tau_{p,H}(\varphi) = \tau_p(\varphi) + (grad^N H)\circ\varphi$, on a

$$div^M S_p(\varphi) = h\Big(grad^N H)\circ\varphi, d\varphi\Big).$$

On pose $\Omega = B_R(\mathcal{X}_0), X = R\frac{\partial}{\partial r}$ et $\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial r}$, alors l'équation (B.5) devient

$$\begin{aligned} R\int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)} e_p(\varphi)dr &= R\int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)}\Big|d\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big)\Big|^2 dr \\ &+ \int_{B_R(\mathcal{X}_0)} r\frac{\partial H\circ\varphi}{\partial r}dr + \int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)}\langle S_p(\varphi), \nabla X\rangle dr. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Or $\varphi$ est constante sur $\partial B_R(\mathcal{X}_0)$, on utilise (B.6) et (B.10), on aura

$$\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} r\frac{\partial H\circ\varphi}{\partial r} + \delta\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} e_p(\varphi) \leq 0. \tag{B.11}$$

Ainsi, comme $K_M \leq 0$, on a $\Delta r \geq \frac{1}{r}$.

D'autre part, on a $\Delta r = \frac{\partial J(r,\theta)}{\partial r}\frac{1}{J(r,\theta)}$, où $J(r,\theta)d\theta dr$ est l'élément volume de $B_R(\mathcal{X}_0)$ en coordonnées polaires. on déduit

$$\frac{\partial}{\partial r}(rJ(r,\theta)) \geq 2J(r,\theta) > 0,$$

ce qui donne cette inégalité

$$\begin{aligned} \int_0^R r\frac{\partial(H\circ\varphi)}{\partial r}J(r,\theta)dr &= RJ(r,\theta)H(Q) - \int_0^R H\circ\varphi(\theta,r)\frac{\partial}{\partial r}(rJ(r,\theta))dr \\ &\geq RJ(r,\theta H(Q) - H(Q)\int_0^R \frac{\partial}{\partial r}(rJ(r,\theta))dr = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, on retient

$$\int_{B_R(\mathcal{X}_0)} r\frac{\partial H\circ\varphi}{\partial r} = \int_{\partial B_R(\mathcal{X}_0)}\Big(\int_0^R r\frac{\partial H\circ\varphi}{\partial r}J(r,\theta)dr\Big)d\theta. \tag{B.12}$$

D'aprés (B.11) et (B.12), on conclut que $e_p(\varphi) \equiv 0$ sur $B_R(\mathcal{X}_0)$ alors $\varphi$ est constante. ∎

# Conclusion

À partir de ces annexes, deux problèmes restent sans résolution qu'on a pas les étudier :

**(i)** Les applications conformes biharmoniques avec potentiel.

**(ii)** Que se passe t-il si $p = f$ avec $f$ une fonction de classe $C^\infty$ sur la variété de départ pour les applicatins harmoniques avec potentiel ?

# Conclusion

Le but de ce mémoire est de trouver les éléments communs et défférents entre les applications harmoniques et les applications harmoniques avec potentiel. Cette comparaison entre les deux notions est faite par les deux premiers chapitres, en particulier on a pas définir la notion du tenseur bi-énergie impulsion avec potentiel qui joue un rôle trés utile en mathématique physique.

Le point le plus important dans ce travail est l'énoncé du théorème de Liouville qui nous permet de savoir la variation d'une application harmonique (resp. harmonique avec potentiel) sans connaître l'éxpression de cette application en imposant des conditions sur les variétés initiales, ce qui est le plus maximum de résultat qu'on peut la trouver.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Arvind Joshi, Harmonic mapping between riemanienn manifolds, university of southerne Califonia, August 2006.

[2] P. Baird, J.C.Wood, Harmonic morphisme between riemanienn manifolds, Clarandon Press Oxford 2003.

[3] P. Baird, Harmonic maps with symmetry, harmonic morphisms and deformations of metrics.

[4] P. Baird, Eells, J. A Conservation Law for Harmonic Maps ; Lecture Notes in Math. 894 ; Springer : Berlin, Germany, 1981 ; pp. 1-25.

[5] P. Baird M. T.Mustafa, Non-Existence results for harmonic maps with potential. Miramare-TRIESTE, August 2002.

[6] V. Branding. Some remarks on energy inequalities for harmonic maps with potential. arXiv :1609.07391v1 [math.D.G] 23 Sep 2016.

[7] V. Branding. The heat flow for the full bosonic string. arXiv :1510.08758v2 [math.D.G] 20 Jun 2016.

[8] A. Boulal, Djaa. N. E. H and A. Zagane, generlized warped product manifolds and biharmonic maps, 2012.

[9] Q. Chen, On harmonic maps with potential from complete manifolds, ChineseSci. Bull. 43(1998), 1780-1786. (1998),1780-1786.

[10] Q. Chen, 'Liouville theorem for harmonic maps with potential', Manuscripta Math.95(1998), 507-517.

[11] Q. Chen. Stability and constant boundary-value problems of harmonic maps with potential. J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 2000, 68(2) : 145-154.

[12] Q. Chen. harmonic maps with potentil from complete manifolds. Fudan University, Shanghai 200433, China.

[13] J. Cheng Liu. Constant boundary-value problems for p-harmonic maps with potential. J. Geom. Phys, 20 Auot 2005.

[14] S. Dragomir et Marc Soret, Applications et Morphismes Harmoniques.

[15] M.Djaa, Introduction à la Géométrie Riemanienne Et L'Analyse Harmonique sur les variétés (Master-Doctorat) Centre Universitaire de Relizaine (2013).

[16] J. Eells and L.Lemaire, an other report on harmonic maps,
27 December 1987.

[17] J. Eells, Jr. and J. H. Sampson, Harmonic mappings of riemanienn manifolds, American Journal of Mathematics, 09/01/2012.

[18] J. Eells, Lemaire, L. Selected Topics in Harmonic Maps. In Proceedings of the CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Providence, RI, USA, 31 December 1983.

[19] A. Fardoun, Andrea Ratto. Harmonic maps with potential. Cal. Var.Partial Differential Equations, 5(1997), 183-197.

[20] A. Fardoun, Andrea Ratto, Rachid Regbaoui. On the heat follow for harmonic maps with potential. Annals of Global Analysis and Geometry18 : 555-567, 2000.

[21] A. Fardoun, Andrea Ratto, Rachid Regbaoui. Sur l'équation de la chaleur pour les applications harmoniques avec potentiel. Université de Brest, 11 Septembre 1998.

[22] Y. HAN. Monotonicity Formulas of $E_F$-Critical Maps with Potential. Journal of Mathematical Research with Applications, April 25, 2015.

[23] G. Kokarev. A note on morse inequalities for harmonic maps with potential and their applications. School of Mathematics, University of Edinburgh.

[24] H. LIN, Guilin YANG, Yibin REN, et al. Monotonicity formulae and Liouville theorems of harmonic maps with potential. J. Geom. Phys., 2012, 62(9) : 1939-1948.

[25] S. Montaldo and C. Oniciuc, A Short Survey On Bi-harmonic maps between riemanienn Manifolds,2006.

[26] C. Oniciuc, Bi-harmonic maps Between Riemanienn Manifolds, 11-06-2001.

[27] S. Ouakkas, and D. Djebbouri, Conformal Maps, Biharmonic Maps, and the Warped Product, Mathematics 2016, 4, 15 ; doi :10.3390/math4010015.

[28] Z. Rong Zhou. Stabilty and quantum phenomene and Liouville theorems of $p$-harmonic maps with potential 6 June 2002.

[29] A. Tachikawa. Existence an-d regularity results for harmonic maps with potential. Science university of Tokyo. October 12.

[30] H. Urakawa, Harmonic Maps and Biharmonic Maps, 2015.

[31] H. Urakawa, Spectral geometry of the second variation operator of harmonic maps, 1989.

[32] Y. Xin, Geometry of harmonic maps. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 23. Birkhĺauser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[33] Y.X.Dong, S.S.Wei, On vanishing theorems fo vector bundle valued $p$-forms and their applications, Commun. Math .Phys.304(2011)329-368.