République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Saïda

Faculté des Sciences

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Equations Différentielles

Sujet

Etude de la stabilité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles

Présenté par

Bouzaida Fatna

Soutenue le : 22/05/2017

Jury :

Président : S. Ouakkas, à l'Université de Saïda, Algérie

Encadreur : S. Abbas, MCA à l'Université de Saïda, Algérie

Examinateur : N. Bekkouche, à l'Université de Saïda, Algérie

Examinateur : K. Djerfi, à l'Université de Saïda, Algérie

Remerciements

Au nom du miséricordieux qui nous a affranchi de l'ignorance et de l'obscurité, qui a illuminé notre chemin par la bénédiction du raisonnement pour nous inciter à acquérir le savoir. Louange à notre créateur "ALLAH" à qui on doit notre éternel gratitude.

Un remerciement ne suffira jamais à exprimer ce que je ressens envers mon encadreur qui a bien voulu partager son savoir et sa compétence. Sans ses judicieux conseils, ses remarques fructueuses, sa disponibilité, sa remarquable direction , ce travail n'aurai jamais aboutie. Mon encadreur Dr. Saïd Abbas.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté d'examiner mon modeste travail.

Et aux respectueux enseignants de la Géométrie Différentielle et tous mes amis et mes collègues pour leurs encouragements.

Finalement, un grand merci pour mes tantes pour leurs présences distinctives et leurs importantes contributions.

Le fruit de mon travail est un hommage a une personne exceptionnelle que j'admire et j'adore, je vois à travers ses yeux et je sens à travers son coeur ; qui a une grande influence dans ma vie, qui n'a jamais perdu foi en moi. Ma plus précieuse bénédiction : Ma mère.

Dédicaces

Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté ainsi

que la conscience afin de terminer mes études.

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études.

Ma chère mère et mon cher père.

A ma précieuse grand mère.

A toute la famille Bouzaïda et la famille Elfazazi.

A mes frères. A mes adorables tantes pour leurs présences et encouragements.

A mes oncles.

A mon père de coeur Ikhlef Bouelam.

A tous mes amis sans exception.

Au promo de 2^{eme} année Master Géométrie Différentielle .

A mon encadreur Dr. Saïd-Abbas.

BOUZAIDA FATNA

Résumé

Ce mémoire interprète le problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires fonctionnelles et partielles du premier ordre dans un domaine infini. Dans le quel on étudie l'existence des solutions à l'aide du théorème de point fixe de Schauder accompagné par le théorème de Corduneanu, qui réalise la compacité afin d'utilisé le théorème de Schauder, qui donne l'existence mais pas nécessairement l'unicité suivi par la stabilité des solutions qui y'est vérifié par des hypothéses posées.

Mots clés : Espace de Banach, problème de Cauchy, les théorèmes des points fixes particulièrement le théorème de Schauder et la stabilité.

Abstract

This memory interprets the Cauchy problem for the ordinary functional differential equations and the first-order partial in an infinite domain. Which we study the existence of solutions using Schauder's fixed point theorem accompanied by Corduneanu's theorem, which Realizes the compactness in order to use Schauder's theorem, which gives existence but not necessarily the uniqueness followed by the stability of solutions so that it is verified by hypotheses posed.

Keywords : Banach space, Cauchy problem, fixed points theorems particularly Schauder's theorem and stability.

Table des matières

Introduction

L'art de la prédiction a été révolutionné par un événement majeur de l'histoire des sciences, survenu au milieu du 17^{eme} siècle : la naissance des équations différentielles et plus précisément des équations différentielles ordinaires [5].

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers l'EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. L'étude mathématique des EDP nous a aussi appris à faire preuve d'un peu de modestie : on a d'ecouvert l'impossibilité de prévoir à moyen terme certains phénomènes gouvernés par des EDP non-linéaires pensez au désormais célèbre effet papillon : une petite variation des conditions initiales peut en temps trés long conduire à des très grandes variations. D'un autre côté, on a aussi appris à "entendre la forme d'un tambour" : on a démontré mathématiquement que les fréquences émises par un tambour lors de la vibration de la membrane - un phénomène décrit par une EDP, permettent de reconstituer parfaitement la forme du tambour [2].

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles .

Une EDP a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire (à une seule variable) ; les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles des solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites se présentent plutôt sous la forme de fonction ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand, ce qui est vrai dans la quasi-totalité des problèmes .

L'objective de ce travail consiste a étudié l'existence et la stabilité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles. Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe (le théorème de Schauder et le théorème de Corduneanu).

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Juliusz Schauder. Il intervient dans la démonstration de l'existence des solutions d'équations différentielles particulièrement dans notre cas pour le problème de Cauchy.

Ce travail est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier Chapitre, nous présentons des notations, des définitions et résultats qui nous seront utiles pour la suite de cette étude avec une introduction au probléme de Cauchy accompagnée de quelques notions de stabilité, certaines lemmes préliminaires et théorèmes de point fixe.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la stabilité des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t));\ \text{si } t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

avec la conditions initiale

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

Qui interprète quelques problémes de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires dans le cas non borné. Nous présentons deux résultats, le premier est basé sur le théorème de Schauder particulièrement utile pour prouver l'existence des solutions qui n'est pas nécessairement unique, et l'autre résultat sur la stabilité des solutions avec un exemple pour terminé.

Dans le troisième Chapitre, nous étudions l'existence et la stabilité des solutions de l'équation différentielle partielle du premier ordre suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = f(t, x, u(t, x));\ \text{si } (t, x) \in J := \mathbb{R}_+ \times [0, b], \tag{3}$$

avec la conditions initiale

$$u(0, x) = \Phi(x);\ \text{si } x \in [0, b], \tag{4}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [0, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

On achève ce travail par un exemple illustré et une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et les théorèmes qui seront utilisées dans les autres chapitres.

1.1 Notations et Définitions

Définition 1.1.1. *On dit qu'un espace métrique* (X, d) *est complet si toute suite de Cauchy de* X *est convergente dans* X*. Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach.*

Exemple : $\mathbb{R}$ avec la distance standard $d(x, y) = |x - y|$ est complet.

Définition 1.1.2. *On appelle espace de Banach* $(E, \|.\|_E)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Exemple :

L'ensemble $C([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

Lemme 1.1.1. *Soit* $B := B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions bornées de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$. B *est un espace de Banach avec la norme standard*

$$\|u\|_B = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |u(t)|.$$

Preuve : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Fixons $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$| f_p(x) - f_q(x) | \leqslant \| f_p - f_q \|_B,$$

La suite $f_n(x)$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est complet, la suite $f_n(x)$ converge. D'où on note $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. En effet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, elle est donc bornée par une constante M. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$| f_n(x) | \leqslant \| f_n \|_B \leqslant M; \qquad \text{(par passage à la limite)}$$

On a donc $| f(x) | \leqslant M$, ce qui prouve que $f \in B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec $\| f_n \|_B \leqslant M$. Il reste à prouver que $f_n \to f$ dans $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tel que, pour tout $p, q > N$, on a

$$\| f_p - f_q \| \leqslant \varepsilon.$$

De sorte que

$$| f_p(x) - f_q(x) | \leqslant \varepsilon.$$

lorsque $p \mapsto +\infty$, on trouve

$$| f(x) - f_q(x) | \leqslant \varepsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\| f - f_q \|_B \leqslant \varepsilon.$$

Ceci est vraie pout tout $p > N$ et donc f_p converge vers f.
Finalement, toute suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ converge, donc $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est complet.

Proposition 1.1.1. *Tout sous espace fermé d'un espace métrique complet est complet.*

Lemme 1.1.2. *L'ensemble $BC := BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues qui sont bornées est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{BC} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |u(t)|.$$

Preuve : D'une part, nous savons que $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un espace de Banach. D'autre part ; BC est un sous-espace vectoriel fermé de $B(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, car une limite uniforme de fonctions continues est continue. Donc, d'après la proposition précédente, BC est un espace de Banach.

La Compacité.

Définition 1.1.3. *(Borel-Lebesgue) On dit qu'un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un* *sous-recouvrement fini :*

$$\Big(X = \bigcup_{i \in I} Q_i\Big) \Rightarrow \Big(\exists J \in I, J < \infty, X = \bigcup_{i \in J} Q_i\Big).$$

Proposition 1.1.2. *Un espace topologique (X, T) est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide :*

$$\Big(\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset\Big) \Rightarrow \Big(\exists J \in I, J < \infty, \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset\Big).$$

La Convexité.

Définition 1.1.4. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in C, \forall \theta \in [0,1],\ \theta x + (1+\theta)y \in C.$$

Autrement dit si x et y sont deux points de C le segment reliant x à y doit être inclus dans C.

Fonction uniformément bornée.

Définition 1.1.5. *On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique E dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ est uniformément bornée s'il existe un nombre M telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leqslant M \text{ ou } \|f_n(x)\| \leqslant M.$$

Il est équivalent de dire que la suite des normes $\|f_n(x)\|_\infty$ est bornée par M ou bien que les fonctions f_n sont toutes dans une boule $B(0, M)$ de l'espace normé $(B(E, \mathbb{R}^d), \|.\|_\infty)$ des fonctions bornées sur E.

L'équicontinuité.

Définition 1.1.6. *Soient* (X, d) *et* (X', d') *deux espaces métriques, on dit qu'une partie* A *de* $C(X, X')$ *est équicontinue si :*

$$\forall x, y \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall f \in A, \text{ telle que } d(x,y) \leqslant \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leqslant \epsilon.$$

Autrement dit, toutes fonctions de $A \subset C(X, X')$ *sont continues sur* X*, et elles sont continues "de la même façon".*

L'équiconvergence.

D est uniformement bornée dans BC, toute fonction de D est équiconvergente, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0, |u(t) - \lim_{t \mapsto +\infty} u(t)| < \epsilon,$$

pour tout $t \geqslant T(\epsilon)$ et $u \in D$.

1.2 Le Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

L'objectif de cette section est d'étudié l'existence des solutions et l'unicité locale et globale des problèmes de Cauchy (c'est à dire une équation différentielle ordinaire pour laquelle on a donné une condition initiale) sans connaître explicitement les solutions.

Définition 1.2.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, et une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, définie et continue sur U à valeur dans $\mathbb{R}$.*
Etant donnée une équation différentielle du premier ordre sous forme normale

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1.1}$$

pour $(t, y(t)) \in U$, et un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions y telle que

$$y(t_0) = y_0. \tag{1.2}$$

Notation : On note le problème de Cauchy de la façon suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)); & \forall (t, y(t)) \in U, \\ y(t_0) = y_0, & \forall (t_0, y_0) \in U. \end{cases} \tag{1.3}$$

Définition 1.2.2. *Une solution du problème de Cauchy (1.3) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0, y_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

- *pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$,*
- *pour tout $t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$,*
- *$y(t_0) = y_0$.*

Théorème 1.2.1. *Une fonction $y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy (1.3) si et seulement si :*

1. *La fonction y est continue et* $\forall t \in \mathbb{R}_+, (t, y(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

2. *La solution y du problème de Cauchy est appelée l'intégrale du problème*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \tag{1.4}$$

Définition 1.2.3. *On dit que la solution (I, y) est une solution globale du problème de Cauchy (1.3) dans $\mathbb{R}_+$, si (I, y) est une solution locale et $I = \mathbb{R}_+$.*

Définition 1.2.4. *[10] Une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \times BC \to BC$ définie sur un ouvert $\mathbb{R}_+ \times U$ de $\mathbb{R}_+ \times BC$ est dite Lipschitizienne par rapport à son deuxième argument si, pour tout $y_1, y_2 \in U$ et $t \geqslant 0$, il existe $c > 0$ telle que*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\|_{BC} \leqslant c\|y_1 - y_2\|_{BC}.$$

De plus, si $0 < c < 1$, f est dite Contractante.

1.3 Notions de stabilité

Beaucoup d'équations différentielles n'admettent pas des solutions analytiques. On peut alors recourir à des méthodes numériques et graphiques pour trouver une solution approchée. L'étude de la solution dans le plan de phase ou de la stabilité au voisinage d'un point d'équilibre fournit des informations qualitatives importantes sur la solution.

La théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales.

Définition 1.3.1. *(Équilibre)[11]*

Soit le système d'équation différentielle $\dot{y} = f(y), f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. On dit que* y_0 *est un équilibre si la fonction constante* y_0 *est solution pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, ce qui équivaut à dire que* $f(y_0) = 0$*.*

Définition 1.3.2. *(Stabilité)[11]*

Soit le système d'équation différentielle $\dot{y} = f(y), f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et soit* $y_0 \in \mathbb{R}$ *un équilibre. On dit que :*

1. y_0 *est un équilibre stable si, pour tout voisinage* U *de* y_0*, il éxiste un voisinage* V *de* y_0 *tel que* $\forall \tilde{y_0} \in V$*,*

   (i) $y(t, \tilde{y_0})$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$*,*

   (ii) $y(t, \tilde{y_0}) \in U$*, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$*.*

2. y_0 *est un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable, et s'il existe un voisinage* W *de* y_0 *tel que* $\forall \tilde{y_0} \in W$*,*

   (i) $y(t, \tilde{y_0})$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+$*,*

   (ii) $\lim_{t \to \infty} y(t, \tilde{y_0}) = y_0$*.*

Soit $\Omega \neq \emptyset \subset BC$, et soit $G : \Omega \to \Omega$, on considère la solution d'équation

$$(Gu)(t) = u(t). \tag{1.5}$$

Maintenant nous définissons l'attractivité locale et globale des solutions de l'équation (1.5).

Définition 1.3.3. *Les solutions de l'équation (1.5) sont localement attractives s'il existe une boule* $B(u_0, \eta)$ *dans l'espace* BC *telle que, pour des solutions arbitraires*

$v = v(t)$ et $w = w(t)$ de l'équation (1.5) appartenant à $B(u_0, \eta) \bigcap \Omega$, on a

$$\lim_{t\to\infty} \Big(v(t) - w(t)\Big) = 0. \tag{1.6}$$

Quand la limite (1.6) est uniforme par rapport à $B(u_0, \eta)$, alors les solutions de l'équation (1.5) sont uniformément localement attractives (où de manière équivalente, les solutions de l'équation (1.5) sont localement asymptotiquement stables).

Définition 1.3.4. *les solutions $v = v(t)$ de l'équation (1.5) sont globallement attractives si l'équation (1.6) est vérifiée pour toutes solutions $w = w(t)$ de l'équation (1.5).*
Si l'équation (1.6) est satisfaite uniformément par rapport à l'ensemble Ω, alors les solutions de l'équation (1.5) sont globalement asymptotiquement stables (où uniformement globalement attractives).

1.4 La théorie des points fixes

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom de théorème d'application contractante) est un théorème simple à prouvé et qui s'applique au espaces complets et possède de nombreuse applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions pour les équations différentielles où les équations intégrables et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton dans la résolution d'équation non linéaire, ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.4.1. *(Théorème de Banach) [1]*
Soient (F, d) *un espace métrique complet et* $f : F \to F$ *une application strictement contractante i.e, il existe* $0 < c < 1$ *telle que, pour tout* $u, v \in F$,

$$d(f(u), f(v)) < cd(u, v).$$

Alors, il existe un unique point fixe u_0 *telle que* $f(u_0) = u_0$.

Ce théorème donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 1.4.2. *[4] Soit* K *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \longrightarrow K$ *une fonction continue. Il existe* $x \in K$ *tel que* $f(x) = x$.

Remarque.
Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Le théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante

Théorème 1.4.3. *(Brouwer)[4] Si* $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = x$.

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer d'où nous avons besoin

Théorème 1.4.4. *(Théorème de Schauder) [1]*
Soit E *un espace de Banach,* M *un convexe, fermé et borné de* E*, et* $N : M \to M$ *un opérateur continu et compact. Alors* N *admet au moins un point fixe dans* M.

1.5 Lemmes Préliminaires

Lemme 1.5.1. *Soit $h \in C(\mathbb{R}_+)$. Une fonction $u \in BC(\mathbb{R}_+)$ est une solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = h(t); \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u_0; \quad u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Si et seulement si $u(t)$ vérifie

$$u(t) = u_0 + \int_0^t h(s)ds; \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.8}$$

Preuve : *Soit $u(t)$ une solution du problème* (1.7).
Alors,

$$\frac{d}{dt}u(t) = h(t),$$

d'où nous obtenons,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}u(s)ds = \int_0^t h(s)ds.$$

Depuis

$$\int_0^t \frac{d}{ds}u(s)ds = u(t) - u(t_0),$$

il s'ensuit

$$u(t) = u_0 + \int_0^t h(s)ds.$$

Maintenant si $u(t)$ vérifie (1.8). *Il est claire que $u(t)$ vérifie*

$$u(0) = u_0 \ \ et \ \ \frac{d}{dt}u(t) = h(t); \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Posons $\Delta := [0,a] \times [0,b], \quad D_t w(t,x) := \frac{\partial}{\partial t} w(t,x); \quad (t,x) \in \Delta.$

Lemme 1.5.2. *Soit $g \in C(\Delta)$. Une fonction $w \in C(\Delta)$ telle que sa dérivée $D_t w(t,x)$ existe et est intégrable sur Δ est une solution du problème*

$$\begin{cases} D_t w(t,x) = g(t,x); \ (t,x) \in \Delta, \\ w(t_0,x) = w_0(x); \ (t_0,x) \in \Delta, \quad w_0 \in C([0,b]). \end{cases} \tag{1.9}$$

Si et seulement si $w(t,x)$ vérifie

$$w(t,x) = w_0(x) + \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds; \ (t,x) \in \Delta. \tag{1.10}$$

Preuve : *Soit $w(t,x)$ une solution du problème* (1.9). *Alors,*

$$D_t w(t,x) = g(t,x).$$

D'où nous obtenons

$$\int_{t_0}^{t} D_s w(s,x)ds = \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds.$$

Depuis

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} w(s,x)ds = w(t,x) - w(t_0,x),$$

il s'ensuit

$$w(t,x) = w_0(x) + \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds.$$

Maintenant si $w(t,x)$ vérifie (1.10). *Il est claire que $w(t,x)$ vérifie*

$$w(t_0,x) = w_0(x) \ \ et \ \ \frac{\partial}{\partial t} w(t,x) = g(t,x); \ t \in \Delta.$$

Le lemme suivant généralise le théorème d'Arzelà-Ascoli dans le cas non-borné

Lemme 1.5.3. *[3] (Théorème de Corduneanu)*
Soit $D \subset BC$. Alors D est relativement compacte si et seulement si les conditions sont vérifiées :

(a) *D est uniformement bornée dans BC,*

(b) *Toute fonction dans D est équicontinue sur $\mathbb{R}_+$ (équicontinue sur chaque compact de $\mathbb{R}_+$),*

(c) *Toute fonction de D est équiconvergente, c'est-à-dire :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0, |u(t) - \lim_{t \mapsto +\infty} u(t)| < \epsilon,$$

pour tout $t \geqslant T(\epsilon)$ et $u \in D$.

Chapitre 2

Résultats d'existence et de stabilité pour les équations différentielles ordinaires fonctionnelles

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la stabilité des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t)); \text{ si } t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

avec la conditions initiale

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

2.2 Existence des Solutions

Définition 2.2.1. *Une fonction $u \in BC$ est dite solution du problème (2.1)-(2.2) si u vérifie l'équation (2.1) dans $\mathbb{R}_+$, et la condition initiale (2.2).*

Remarque 2.2.1. *Une fonction $u \in BC$ est solution du probléme (2.1)-(2.2), si et seulement si u vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds; \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.3}$$

Maintenant, nous présentons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.2.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(H_1) *Il existe une fonction positive $P \in BC$, telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leqslant P(t)\frac{|u-v|}{1+|u-v|}; \quad t \in \mathbb{R}_+, u, v \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t P(s)ds = 0.$$

(H_2) *La fonction $t \to f(t,0)$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$ et* $\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t |f(s,0)|ds = 0.$

Si

$$P_* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t P(s)ds < 1.$$

Alors, le problème (2.1)-(2.2) possède une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration :

Posons

$$P^* = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} P(t),\ \ f_* = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t,0)|\ et\ f^* = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_0^t f(s,0)ds.$$

Considérons la boule

$$B_\eta = \{u \in BC; \parallel u \parallel_{BC} \leqslant \eta\},$$

telle que,

$$\eta \geqslant \frac{|u_0| + f^*}{1 - P_*}.$$

Il est clair que B_η est un fermée et bornée.

Considérons l'opérateur de point fixe $N : BC \mapsto BC$, défini par :

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds.$$

On montrera que $N : B_\eta \mapsto B_\eta$ satisfait les conditions du Théorème 1.4.4. La preuve sera donnée dans quatre étapes.

Etape 1 : N est continu.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \mapsto u$ dans B_η, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t) - (Nu)(t)| &= |u_0 + \textstyle\int_0^t f(s,u_n(s))ds - u_0 - \int_0^t f(s,u(s))ds| \\
&= |\textstyle\int_0^t f(s,u_n(s))ds - \int_0^t f(s,u(s))ds| \\
&\leqslant \textstyle\int_0^t P(s)\frac{|u_n(s)-u(s)|}{1+|u_n(s)-u(s)|}ds \\
&\leqslant \textstyle\int_0^t P(s)|u_n(s)-u(s)|ds \\
&\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|u_n(t)-u(t)| \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_0^t P(s)ds \\
&\leqslant P_*\|u_n - u\|_{BC} \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur N est continu.

Etape 2 : $N(B_\eta)$ est uniformément bornée.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et $u \in B_\eta$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t)| &= |u_0 + \textstyle\int_0^t f(s,u(s))ds| \\
&\leqslant |u_0| + |\textstyle\int_0^t f(s,u(s))ds| \\
&\leqslant |u_0| + \textstyle\int_0^t |(f(s,u(s)) - f(s,0) + f(s,0))|ds \\
&\leqslant |u_0| + \textstyle\int_0^t |f(s,0) + P(s)\frac{|u(s)|}{1+|u(s)|}|ds \\
&\leqslant |u_0| + \textstyle\int_0^t (|f(s,0)| + P(s)|u(s)|)ds \\
&\leqslant |u_0| + \textstyle\int_0^t |f(s,0)|ds + \int_0^t P(s)|u(s)|ds \\
&\leqslant |u_0| + \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_0^t |f(s,0)|ds + \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|u(t)| \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\int_0^t P(s)ds \\
&\leqslant |u_0| + f^* + P_*\|u\|_{BC} \\
&\leqslant |u_0| + f^* + P_*\eta \\
&\leqslant \eta.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|(Nu)(t)| \leqslant \eta.$$

Donc $N(B_\eta) \subset B_\eta$. Comme B_η est bornée, alors $N(B_\eta)$ est uniformément bornée.

Etape 3 : $N(B_\eta)$ est équicontinue sur chaque compact $[0, a]$ de $\mathbb{R}_+$.

Soient $t_1, t_2 \in [0, a], t_1 < t_2$ et soit $u \in B_\eta$, alors

$$\begin{aligned}
|(Nu(t_2)) - (Nu(t_1))| &= |u_0 + \textstyle\int_0^{t_2} f(s, u(s))ds - u_0 - \int_0^{t_1} f(s, u(s))ds| \\
&= |\textstyle\int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s))ds| \\
&\leqslant \textstyle\int_{t_1}^{t_2} (P(s)\frac{|u(s)|}{1+|u(s)|} + |f(s, 0)|)ds \\
&\leqslant \textstyle\int_{t_1}^{t_2} (P(s)|u(s)| + |f(s, 0)|)ds \\
&\leqslant \textstyle\int_{t_1}^{t_2} |f(s, 0)|ds + \int_{t_1}^{t_2} P(s)|u(s)|ds \\
&\leqslant \sup_{t \in [0,a]} \int_{t_1}^{t_2} |f(s, 0)|ds + \sup_{t \in [0,a]} |u(t)| \sup_{t \in [0,a]} P(t) \int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leqslant (f^* + P^*\eta)| \textstyle\int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leqslant (f^* + P^*\eta)(t_2 - t_1) \underset{t_1 \mapsto t_2}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur $N(B_\eta)$ est équicontinue.

Etape 4 : $N(B_\eta)$ est equiconvergente.

Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $u \in B_\eta$. Alors, nous avons

$$\begin{array}{rcl} |(Nu)(t)| & = & |u_0 + \int_0^t f(s,u(s))ds| \\ & \leqslant & |u_0| + \int_0^t |f(s,u(s))|ds \\ & \leqslant & |u_0| + \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,0) + f(s,0)|ds \\ & \leqslant & |u_0| + \int_0^t (P(s)\frac{|u(s)|}{1+|u(s)|} + |f(s,0)|)ds \\ & \leqslant & |u_0| + \int_0^t P(s)ds + \int_0^t |f(s,0)|ds. \end{array}$$

D'où,

$$|(Nu)(t)| \mapsto |u_0| \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{array}{rcl} |(Nu)(t) - (Nu)(+\infty)| & = & |u_0 + \int_0^t f(s,u(s))ds - u_0| \\ & = & |\int_0^t f(s,u(s))ds| \\ & \leqslant & \int_0^t P(s)ds + \int_0^t |f(s,0)|ds \mapsto 0 \text{ quand } t \mapsto +\infty. \end{array}$$

On trouve donc

$$|(Nu)(t) - (Nu)(+\infty)| \mapsto 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Donc, $N(B_\eta)$ est équiconvergente.

D'après le Lemme 1.5.3, l'opérateur $N : B_\eta \to B_\eta$ est continu et compact. Par conséquent, le théorème 1.4.4 implique que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

2.3 La stabilité des Solutions

Dans cette section, nous démontrons la stabilité des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.3.1. *Supposons que les hypothèses* (H_1), (H_2) *et la condition* $P_* < 1$ *sont vérifiées. Alors les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont localement asymptotiquement stables.*

Preuve :

Soit w une solution du problème (2.1)-(2.2). Considérons la boule $B(w, P_*)$. Soit $u \in B(w, P_*)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t) - w(t)| &= |(Nu)(t) - (Nw)(t)| \\
&= |u_0 + \int_0^t f(s, u(s))ds - u_0 - \int_0^t f(s, w(s))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s, u(s)) - f(s, w(s))|ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)\frac{|u(s) - w(s)|}{1 + |u(s) - w(s)|}ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)ds \\
&\leqslant P_*.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|N(u) - w\|_{BC} \leqslant P_*.$$

Donc $N(B(w, P_*)) \subset B(w, P_*)$. En plus, si u est solution du problème (2.1)-(2.2), alors

$$\begin{aligned}
|u(t)-w(t)| &= |(Nu)(t)-(Nw)(t)| \\
&= |u_0+\int_0^t f(s,u(s))ds-u_0-\int_0^t f(s,w(s))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,u(s))-f(s,w(s))|ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)\frac{|u(s)-w(s)|}{1+|u(s)-w(s)|}ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t\mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont localement asymptotiquement stables.

Maintenant, sous les conditions du Théorème 2.2.1, nous pouvons démontrer la stabilité globale des solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.3.2. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont globalement asymptotiquement stables.*

Démonstration :

Soient u et v deux solutions du probléme (2.1)-(2.2). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t)-v(t)| &= |(Nu)(t)-(Nv)(t)| \\
&= |u_0+\int_0^t f(s,u(s))ds - u_0 - \int_0^t f(s,v(s))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)\frac{|u(s)-v(s)|}{1+|u(s)-v(s)|}ds \\
&\leqslant \int_0^t P(s)ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on trouve

$$|u(t)-v(t)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Par conséquent, les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont globalement asymptotiquement stables.

2.4 Exemple

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) = f(t,u(t)); \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.4}$$

avec la condition initiale

$$u(0) = 2, \tag{2.5}$$

où
$$f(t,u(t)) = \frac{e^{-4-t}|u(t)|}{(1+t^2)(1+|u(t)|)}.$$

Il est clair que la fonction f est continue. Nous pouvons voir que l'hypothèse (H_1) est satisfaite pour $P(t) = e^{-4-t}$.

L'hypothèse (H_2) est satisfaite pour $f(t,0) = 0$. En plus, nous avons $P_* = e^{-4} < 1$.

Donc toutes les conditions du Théorème 2.2.1 sont satisfaites, le problème (2.4)-(2.5) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

En plus d'après le Théorème 2.3.2, les solutions du problème (2.4)-(2.5) sont globalement asymptotiquement stables.

f est continue, alors

$$\begin{aligned}
|f(t,u)-f(t,v)| &= \left|\tfrac{e^{-4-t}|u(t)|}{(1+t^2)(1+|u(t)|)} - \tfrac{e^{-4-t}|v(t)|}{(1+t^2)(1+|v(t)|)}\right| \\
&= \left|\tfrac{e^{-4-t}}{(1+t^2)}\left(\tfrac{|u(t)|}{(1+|u(t)|)} - \tfrac{|v(t)|}{(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\tfrac{e^{-4-t}}{(1+t^2)}\left(\tfrac{|u(t)|(1+|v(t)|)-|v(t)|(1+|u(t)|)}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\tfrac{e^{-4-t}}{(1+t^2)}\left(\tfrac{|u(t)|+|u(t)||v(t)|-|v(t)|-|u(t)||v(t)|}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\tfrac{e^{-4-t}}{(1+t^2)}\left(\tfrac{|u(t)|-|v(t)|}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&\leqslant e^{-4-t}\tfrac{|u(t)|-|v(t)|}{(1+|u(t)|-|v(t)|)}.
\end{aligned}$$

Ainsi que, nous avons
$$\lim_{t\mapsto+\infty}\int_0^t e^{-4-t}ds = 0.$$

D'ou, l'hypothèse (H_1) est bien vérifié pour $P(t) = e^{-4-t}$.

Il s'ensuit que
$$P_* = e^{-4} < 1,$$

de plus, la fonction $f(t,0)=0$ est bien borné dans $\mathbb{R}_+$ qui montre que l'hypothèse (H_2) est vérifié pour $f(t,0)=0$.

Donc toutes les conditions du Théorème 2.2.1 sont satisfaites, le problème (2.4)-(2.5) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

En plus d'après le Théorème 2.3.2, les solutions du problème (2.4)-(2.5) sont globalement asymptotiquement stables.

Chapitre 3

Résultats d'existence et de stabilité pour les équations différentielles partielles du premier ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation différentielle partielle du premier ordre suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = f(t,x,u(t,x));\ \text{si } (t,x) \in J := \mathbb{R}_+ \times [0,b], \tag{3.1}$$

avec la conditions initiale

$$u(0,x) = \Phi(x);\ \text{si } x \in [0,b], \tag{3.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Phi : [0, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues données.

3.2 Existence des Solutions

Définition 3.2.1. *Une fonction $u \in BC$ est dite solution du problème (3.1)-(3.2) si u vérifie l'équation (3.1) dans J et la condition initiale (3.2).*

Remarque 3.2.1. *Une fonction $u \in BC$ est solution du probléme (3.1)-(3.2) si et seulement si $u(t, x)$ vérifie l'équation intégrale suivante :*

$$u(t, x) = \Phi(x) + \int_0^t f(s, x, u(s, x))ds; \ (t, x) \in J. \tag{3.3}$$

Maintenant, nous présentons les conditions suffisantes pour l'existence des solutions du problème (3.1)-(3.2).

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifées :*

(H_{01}) *Il existe une fonction positive $Q \in BC$, telle que*

$$|f(t, x, u) - f(t, x, v)| \leqslant Q(t, x)\frac{|u - v|}{1 + |u - v|}; \quad (t, x) \in J, u, v \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t Q(s, x)ds = 0; \quad x \in [0, b],$$

avec

$$Q^* = \sup_{(t,x)\in J} Q(t, x), \ Q_* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t Q(s, x)ds.$$

(H_{02}) *La fonction* $t \to f(t,x,0)$ *est bornée dans* J *et* $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} \int_0^t f(t,x,0) = 0;$ $x \in [0,b]$, *avec*

$$f^* = \sup_{(t,x)\in J} \int_0^t f(s,x,0)ds, \;\; f_* = \sup_{(t,x)\in J} |f(t,x,0)|.$$

Si $Q_* < 1$.

Alors, le problème (3.1)-(3.2) admet une solution sur $\mathbb{R}_+ \times [0,b]$.

Démonstration :

Posons $\Phi^* = \| \Phi \|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,b]} | \Phi(x) |$. Et considérons la boule fermée et bornée

$$B_\eta = \{u \in BC; \| u \|_{BC} \leqslant \eta\},$$

telle que

$$\eta \geqslant \frac{\Phi^* + f^*}{(1 - Q_*)}.$$

Transformont le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $N : BC \mapsto BC$, défini par :

$$(Nu)(t,x) = \Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds.$$

Pour tout $(t,x) \in J$ et $u \in B_\eta$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
|(Nu)(t,x)| & = & |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds| \\
& \leqslant & |\Phi(x)| + |\int_0^t f(s,x,u(s,x))ds| \\
& \leqslant & |\Phi(x)| + \int_0^t |f(s,x,u(s,x)) - f(s,x,0) + f(s,x,0)|ds \\
& \leqslant & |\Phi(x)| + \int_0^t Q(s,x)\frac{|u(s,x)|}{1+|u(s,x)|}ds + \int_0^t |f(s,x,0)|ds \\
& \leqslant & |\Phi(x)| + \int_0^t Q(s,x)|u(s,x)|ds + \int_0^t |f(s,x,0)|ds \\
& \leqslant & |\Phi(x)| + \sup\limits_{(t,x)\in J} \displaystyle\int_0^t |f(s,x,0)|ds + \sup\limits_{(t,x)\in J} |u(t,x)| \sup\limits_{(t,x)\in J} \displaystyle\int_0^t Q(s,x)ds \\
& \leqslant & \Phi^* + f^* + Q_*\|u\|_{BC} \\
& \leqslant & \Phi^* + f^* + Q_*\eta \\
& \leqslant & \eta.
\end{array}$$

Donc, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,b]$ et $u \in B_\eta$, nous avons

$$N(u) \in B_\eta.$$

On montrera que $N : B_\eta \to B_\eta$ satisfait les conditions du Théorème 1.4.4. La preuve sera donnée par plusieurs étapes :

Etape 1 : N est continue.

On prend une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \mapsto u$ dans B_η, pour tout $(t,x) \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nu_n)(t,x) - (Nu)(t,x)| &= |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u_n(s,x))ds - \Phi(x) - \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,x,u_n(s,x)) - f(s,x,u(s,x))|ds \\
&\leqslant \int_0^t Q(s,x)\frac{|u_n(s,x)-u(s,x)|}{1+|u_n(s,x)-u(s,x)|}ds \\
&\leqslant \int_0^t Q(s,x)|u_n(s,x) - u(s,x)|ds \\
&\leqslant Q_*\|u_n - u\|_{BC} \underset{n\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Etape 2 : $N(B_\eta)$ est uniformément bornée.

Evident, puisque $N(B_\eta) \subset B_\eta$ et B_η est bornée.

Etape 3 : $N(B_\eta)$ est équicontinue sur chaque compact dans $[0,a] \times [0,b]$ de J. Soient $t_1, t_2 \in [0,a]$, $x \in [0,b]$, $t_1 < t_2$ et soit $u \in B_\eta$, alors

$$\begin{aligned}
|(Nu)(t_2,x) - (Nu)(t_1,x)| &= |\Phi(x) + \int_0^{t_2} f(s,x,u(s,x))ds - \Phi(x) - \int_0^{t_1} f(s,x,u(s,x))ds| \\
&= |\int_{t_1}^{t_2} f(s,x,u(s,x))ds| \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} Q(s,x)\frac{|u(s,x)|}{1+|u(s,x)|}ds + \int_{t_1}^{t_2} |f(s,x,0)|ds \\
&\leqslant \int_{t_1}^{t_2} Q(s,x)|u(s,x)|ds + \int_{t_1}^{t_2} |f(s,x,0)|ds \\
&\leqslant (f^* + Q^*\|u\|_{BC})| \int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leqslant (f^* + Q^*\eta)(t_2 - t_1) \underset{t_1\mapsto t_2}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur N est équicontinu.

Etape 4 : $N(B_\eta)$ est equiconvergente.

Soient $(t,x) \in J$ et $u \in B_\eta$. Alors

$$\begin{array}{rcl} |(Nu)(t,x)| & = & |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds| \\ & \leqslant & |\Phi(x)| + |\int_0^t f(s,x,u(s,x))ds| \\ & \leqslant & \Phi^* + \int_0^t |(f(s,x,u(s,x)) - f(s,x,0) + f(s,x,0))|ds \\ & \leqslant & \Phi^* + \int_0^t Q(s,x)\frac{|u(s,x)|}{1+|u(s,x)|}ds + \int_0^t |f(s,x,0)|ds \\ & \leqslant & \Phi^* + \int_0^t Q(s,x)|u(s,x)|ds + \int_0^t |f(s,x,0)|ds. \end{array}$$

On a

$$|(Nu)(t,x)| \mapsto \Phi^* \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Donc, pour tout $x \in [0,b]$, on trouve

$$|(Nu)(t,x) - (Nu)(+\infty,x)| \mapsto 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

En effet

$$\begin{array}{rcl} |(Nu)(t,x) - (Nu)(+\infty,x)| & = & |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds - \Phi(x)| \\ & \leqslant & \int_0^t |f(s,x,0)|ds + \|u\|_{BC} \int_0^t Q(s,x)ds \\ & & \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty. \end{array}$$

3.3 La stabilité des Solutions

Dans cette section, nous démontrons la stabilité des solutions du problème (3.1)-(3.2).

Théorème 3.3.1. *Supposons que les hypothèses* (H_{01}), (H_{02}) *et la condition* $Q_* < 1$ *sont vérifiées. Alors les solutions du problème (3.1)-(3.2) sont localement asymptotiquement stables.*

Preuve :

Soit ω une solution du problème (3.1)-(3.2). Considérons la boule $B(\omega, Q_*)$. Soit $u \in B(\omega, Q_*)$, alors pour tout $(t,x) \in J$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
|(Nu)(t,x) - w(t,x)| & = & |(Nu)(t,x) - (Nw)(t,x)| \\
& = & |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds - \Phi(x) - \int_0^t f(s,x,w(s,x))ds| \\
& \leqslant & \int_0^t |f(s,x,u(s,x)) - f(s,x,w(s,x))|ds \\
& \leqslant & \int_0^t Q(s,x)\frac{|u(s,x)-w(s,x)|}{1+|u(s,x)-w(s,x)|}ds \\
& \leqslant & \int_0^t Q(s,x)ds \\
& \leqslant & Q_*.
\end{array}$$

D'où,

$$\|N(u) - w\|_{BC} \leqslant Q_*.$$

Donc $N(B(\omega, Q_*)) \subset B(\omega, Q_*)$. En plus, si u est solution du problème (3.1)-(3.2), alors

$$\begin{array}{rcl}
|u(t,x) - w(t,x)| & = & |(Nu)(t,x) - (Nw)(t,x)| \\
& = & |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds - \Phi(x) - \int_0^t f(s,x,w(s,x))ds| \\
& \leqslant & \int_0^t |f(s,x,u(s,x)) - f(s,x,w(s,x))|ds \\
& \leqslant & \int_0^t Q(s,x)\frac{|u(s,x)-w(s,x)|}{1+|u(s,x)-w(s,x)|}ds \\
& \leqslant & \int_0^t Q(s,x)ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.
\end{array}$$

Finalement, les solutions du problème (3.1)-(3.2) sont localement asymptotiquement stables.

Maintenant, sous les conditions du Théorème 3.3.1, nous pouvons démontrer la stabilité globale des solutions du problème (3.1)-(3.2).

Théorème 3.3.2. *Supposons que les hypothèses* (H_{01}) *et* (H_{02}) *sont vérifiées. Alors les solutions du problème (3.1)-(3.2) sont globalement asymptotiquement stables.*

Démonstration :

Soient u et v deux solutions du probléme (3.1)-(3.2). Alors, pour tout $(t,x) \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t,x) - v(t,x)| &= |(Nu)(t,x) - (Nv)(t,x)| \\
&= |\Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds - \Phi(x) - \int_0^t f(s,x,v(s,x))ds| \\
&\leqslant \int_0^t |f(s,x,u(s,x)) - f(s,x,v(s,x))|ds \\
&\leqslant \int_0^t Q(s,x)\frac{|u(s,x)-v(s,x)|}{1+|u(s,x)-v(s,x)|}ds \\
&\leqslant \int_0^t Q(s,x)ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout $x \in [0,b]$, on trouve

$$|u(t,x) - v(t,x)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \mapsto +\infty.$$

Par conséquent, les solutions du problème (3.1)-(3.2) sont globalement asymptotiquement stables.

3.4 Exemple

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$u_t(t,x) = f(t,x,u(t,x)); \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \tag{3.4}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = 1; \;\; x \in [0,1], \tag{3.5}$$

où

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{e^{-x-t}|u(t,x)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t,x)|)}.$$

Puisque la fonction f est continue. Nous pouvons voir que l'hypothèse (H_{01}) est satisfaite pour $Q(t,x) = e^{-x-t}$.

L'hypothèse(H_{02}) est satisfaite pour $f(t,x,0) = 0$. En plus, nous avons $Q_* < 1$.

Donc toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, le problème (3.4)-(3.5) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$.

En plus d'après le Théorème 3.3.2, les solutions du problème (3.4)-(3.5) sont globalement asymptotiquement stables.

f est continue, alors

$$\begin{aligned}
|f(t,x,u) - f(t,x,v)| &= \left|\frac{e^{-x-t}|u(t)|}{(1+x+t^2)(1+|u(t)|)} - \frac{e^{-x-t}|v(t)|}{(1+x+t^2)(1+|v(t)|)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{-x-t}}{(1+x+t^2)}\left(\frac{|u(t)|}{(1+|u(t)|)} - \frac{|v(t)|}{(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-x-t}}{(1+x+t^2)}\left(\frac{|u(t)|(1+|v(t)|)-|v(t)|(1+|u(t)|)}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-x-t}}{(1+x+t^2)}\left(\frac{|u(t)|+|u(t)||v(t)|-|v(t)|-|u(t)||v(t)|}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|\frac{e^{-x-t}}{(1+x+t^2)}\left(\frac{|u(t)|-|v(t)|}{(1+|u(t)|)(1+|v(t)|)}\right)\right| \\
&\leqslant e^{-x-t}\frac{|u(t)|-|v(t)|}{(1+|u(t)|-|v(t)|)}.
\end{aligned}$$

De sorte que, nous avons

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \int_0^t e^{-x-t} ds = 0;\ x \in [0,1].$$

D'ou, l'hypothèse (H_{01}) est bien vérifier pour $Q(t,x) = e^{-x-t}$.

Avec

$$Q_* = e^{-x} < 1;\ x \in [0,1],$$

de plus, la fonction $f(t,x,0) = 0$ est bornée dans J qui montre que l'hypothèse (H_{02}) est bien vérifiée pour $f(t,x,0) = 0$.

Donc toutes les conditions du Théorème 3.2.1 sont satisfaites, le problème (3.4)-(3.5) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

En plus d'après le Théorème 3.3.2, les solutions du problème (3.4)-(3.5) sont globalement asymptotiquement stables.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré l'existence et l'attractivité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles et aux dérivées partielles du premier ordre. Sous certaines conditions sur les fonctionnelles données, nous avons obtenu des résultats sur l'existence et la stabilité des solutions de nos problèmes.

Bibliographie

[1] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] B. Helffer, T. Ramond, Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles, Université Paris-Sud, Janvier-Mai 2007.

[3] C. Corduneanu, Integral Equations and Applications, Cambridge University Press, 1991.

[4] C. MINAZZO, K. RIDER, Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2006-2007.

[5] D. SECK, C. VILLANI, Equations d'évolution, diaraf.seck@ucad.edu.sn, dseck@ucad.sn, villani@ihp.fr, villani@math.univ-lyon1.fr.

[6] F. Boyer, Analyse Fonctionnelle, Université Aix-Marseille, 15 décembre 2015, franck.boyer@univ-amu.fr.

[7] J. K. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[8] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$, J. Appl. Math. Stochastic Anal.

3 (1990), 163-168.

[9] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Appl. Anal. **40** (1991), 173-180.

[10] L. Pujo, Equations Différentielles Ordinaires et Partielles, Université Claude Bernard, pujo@math.univ-lyon1.fr.

[11] P. Chartier, Stabilité des systèmes non-linéaires, 19 novembre 2013.

[12] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Advanced Fractional Differential and Integral Equations, Nova Science Publishers, New York, 2015.

[13] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2012.

[14] T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. **189** (1998), 23-31.