DEDICACES

A la mémoire de mon père

A ma mère

A mes soeurs et mes frères

REMERCIEMENTS

Au Nom de Dieu, Le Clément, Le Miséricordieux

• J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah** qui m'a donné la

volonté et le courage pour la réalisation de ce travail

• J'adresse mes sincères remerciements à mon encadreur le Professeur **A.Kandouci**,

de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

• Je tiens à remercier les membres du jury ; **Mlle N.HACHEMI**

de m'avoir honorée en acceptant de présider le jury

Mr.M. KADI. et **Mr.M.LAOUNI** d'avoir accepté d'examiner ce modeste

travail, merci pour toutes leurs remarques et critiques

Table des matières

Introduction

La théorie des trajectoires rugueuses ?

Dans l'analyse stochastique, un chemin rugueux est une généralisation de la notion de chemin lisse permettant de construire une théorie de la solution robuste pour les équations différentielles contrôlées par des signaux classiquement irréguliers, par exemple un processus de Wienner. La théorie a été développée dans les années 1990 par Terry Lyons [45], mais les origines de cette théorie revient aux années 1936. Dans son article "**An Inequality of Hölder-Type connected with Steiltjès Integral**" L.C.Young [54] donna un sens aux intégrales de la forme

$$\int_s^t y_u dw_u, \tag{1}$$

pour deux fonctions $w : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et $y : [0, T] \to \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$ höldériennes, d'exposants respectifs $\alpha, \beta \in]0, 1]$ satisfaisant $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$, avec $d, e \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$. C'est une extension de l'intégrale de Riemann, introduite par ce dernier au milieu du 19ième siècle et correspondant au cas $w = Id_{[0,T]}$.

Entre le milieu des années 1930 et la fin des années 1990, il fallut développer une approche non trajectorielle pour étudier les équations différentielles stochastiques (EDS) dirigées par un mouvement brownien (standard). En effet, par le lemme de continuité de Kolmogorov, ce dernier a seulement des trajectoires höldériennes d'exposant $\alpha < \frac{1}{2}$. Entre 1942 et 1944, K.Itô([40] et [42]) répondit à la question par un argument probabiliste, usant essentiellement de la propriété de martingale du mouvement brownien. Les travaux successifs de J.L.Doob , H.Kunita et J.Wtanabe ([41]) et de l'école française entre 1960 et 1980, ont permis d'aboutir à la forme actuelle de l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale. C'est à la fois qui limite le choix du signal en calcul stochastique, par exemple un mouvement brownien fractionnaire (mBf) d'indice de Hurst $H \neq \frac{1}{2}$ est exclu, mais il a aussi sa force ; notamment en finance, c'est la propriété de semi-martingale du processus de diffusion modélisant le cours d'un actif qui garantie l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Durant les années 1970, H.Doss[30] et H.J.Sussman[53] ont proposè une méthode trajectorielle de résolution des EDSs unidimensionnelles dirigées par une semi-martingale. Ce résultat fut ensuite étendu au cas multidimensionnelle, pour un champ de vecteurs nilpotent (i.e dont les crochets de Lie sont nuls à partir d'un certain rang) par Y.Yamato[55], M.Fliess et D.Normand-Cyrot[33],A.Kohatsu-Higa et de J.A.Léon[56], ainsi que P.Friz et N.Victoir[35].

Considérons une équation différentielle ordinaire (EDO) du type

$$x_t = x_0 + \int_0^t V(x_s)dw_s, \tag{2}$$

Avec $\alpha > \frac{1}{2}$, où $V = (V_1..., V_d)$ désigne un champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ suffisamment régulier. En 1994,T.Lyons [44] utilisa l'intégrale de Young pour définir, puis résoudre les équations de type (2) via un argument de point fixe (M.Zähle[57], puis Y.Hu et D.Nualart[39]) ont ensuite obtenus des résultats analogues via le calcul fractinnaire.

Enfin, dans son article *Differential Equation Driven by Rough Signals* publié en 1998,T.Lyons [46] a introduit la théorie des trajectoires rugueuses en se basant notamment sur les travaux de K.T.Chen [8],[9] et [10], via son " *Universal Limit Theorem*", T.Lyons donna un sens de l'équation (2) pour $\alpha \in]0, 1]$, correspondant au sens de Young pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$, et sans la restriction sur la dimension d de l'espace d'arrivée du signal w.ç

Une $\frac{1}{\alpha}$ trajectoire rugueuse d-dimensionnelle $\mathbb{W}$ est une fonctionnelle α-höldérienne de $[0, T]$ dans l'algèbre tensorielle tronquée $T^{[\frac{1}{\alpha}]}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant l'identité de Chen :

$$\mathbb{W}_{s,t} = \mathbb{W}_{s,u} \otimes \mathbb{W}_{u,t},$$

pour tous $s, t, u \in [0, T]$ tels que $s \leqslant u \leqslant t$. En particulier, $\mathbb{W}$ est une $\frac{1}{\alpha}$ trajectoire rugueuse au-dessus de w si et seulement si $\mathbb{W}^1 = w$.

C'est via cet enrichissement algébrique et le choix de la topologie höl-derienne que T.Lyons contourna le manque de régularité du signal w pour établir le universal limit theorem. Comme dans le cas Young après avoir construit l'intégrale des trajecoires rugueuses $\int \varphi(\mathbb{W})d\mathbb{W}$ T.Lyons ([45]) établit l'existence et l'unicité de la solution de (2) au sens des trajectoires rugueuses (RDE) en montrant la convergence de la suite des itérations de Picard associées, pour la distance α-hölderienne.

Les trajectoires géométriques constituent une catégorie particulière de trajectoires rugueuses, plus simple à manipuler en pratique. Une trajectoire géométrique est la limite, pour la distance α-hölderienne, d'une suite de fonctionnelles de la forme

$$(1, z, \int_{0<r_1<r_2<} dz_{r_1} \otimes dz_{r_2}, ..., \int_{0<r_1<...<r_{\frac{1}{\alpha}}<.} dz_{r_1} \otimes ... \otimes dz_{r_{\frac{1}{\alpha}}}),$$

où $z : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction lipschitzienne.

Récemment, plusieurs variantes de la théorie de T.Lyons furent développées afin de résoudre et d'étudier les équations différentielles dirigées par une trajectoires géométriques. La théorie des k-incréments proposée par M.Gubinelli dans son article Controlling Rough Path [38] ainsi que l'approche de P.Friz et N.Victoir usant de la géométrie de Carnot-Carathéodory et de multiples déclinaisons du lemme de Davis([22]). Cette dernière a été développée dans l'ouvrage très complet "Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths[37]".

Durant les années 2000, de nombreux probabilistes, dont T. Cass, L. Coutin, A.M. Davie, M. Gubinelli, P. Friz, M. Hairer, A. Lejay, T. Lyons luimême, S. Tindel et N. Victoir, ont considérablement fait progresser la théorie des trajectoires rugueuses et surtout ses applications en analyse stochastique. Ceux-ci ont développé l'interaction avec des thèmes classiques en prbabilités tels que : les processus gaussiens , le calcul de Malliavin, les grandes déviations, l'ergodicité etc.

En utilisant les résultats de L.C. Young [54] et T. Lyons [45], il est possible d'étudier des équations différentielles stochastiques de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s, \tag{3}$$

sur un espace probabilisé d'univers Ω, en supposant que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la trajectoire $W(\omega)$ du processus W est α-hölderienne avec $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$. Une solution X de (3) est alors une famille $(X(\omega), \omega \in \Omega)$ de solutions d'équations différentielles ordinaires prises au sens de Young.

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t \mu[X_s(\omega)]ds + \int_0^t \sigma[X_s(\omega)]dW_s(\omega); \quad \omega \in \Omega$$

Cette approche trajectorielle permet notamment d'étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $H \in]\frac{1}{2}, 1]$. Citons par exemple P.Cheridito et al.[12] sur l'équation de langevin fractionnaire ainsi que M.Hairer et A.Ohashi [41] sur l'érgodicité des EDSs dirigées par un mBf (mouvement Brownien fractionnaire)d'indice de Hurst $H > \frac{1}{2}$.

Les développements les plus récents de la théorie des trajectoires rugueuses concernent notamment les équations aux dérivées partielles (cf. A. Deya, M. Gubinelli et S.Tindel [26] sur l'Equation de la Chaleur rugueuse), les équations de Volterra rugueuses (cf. A. Deya et S. Tindel [27] et [28]), ainsi que l'estimation des paramètres d'équations différentielles dirigées par une trajectoire géométrique gaussienne (cf. A.Neuenkirch et S. Tindel [58] dans le cas d'un bruit additif, ainsi que A. Chronopoulou et S. Tindel [13]).

Notre objectif dans ce mémoire est l'analyse stochastique en utilisant cette nouvelle approche de chemin rugueux dans le but de résoudre des équations différentielles stochastiques dirigées par des trajectoires rugueuses.

Nous avons divisé ce travail en trois chapitres :
Le premier chapitre présente l'approche générale de la théorie des trajectoires rugueuses, nous avons mentionnées des notions de base importantes pour la suite de ce mémoire comme la notion de régularité des trajectoires, l'espace des chemins rugueux qui est purement algébrique, ensuite, nous nous intéressons à deux processus gaussiens :(le Mouvement Brownien et le Mouvement brownien fractionnaire) ayant des trajectoires qui ont des pic et des zig-zag par tout, donc se sont des meilleurs exemples pour traiter cette théorie.

Le deuxième chapitre introduit la théorie des chemins rugueux et étend les théorèmes essentiels par Hairer et Friz au cas où on a la régularité $\alpha-$ Holderienne telle que $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en se servant principalement du livre de P. Friz et N. Victoir [37] , de plus nous présentons les différentes étapes de la résolutions des EDRs (Equation différentielle Stochastique Rugueuses).

Enfin, quelques exemples d'applications pour l'illustration des résultats présentés ont été introduits en troisième chapitre, tels que les trajectoires du prix typiques comme des chemins rugueux et la volatilité des chemins du prix continues à droite.

Chapitre 1

Notions préliminaires sur les trajectoires rugueuses

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

On commence par introduire une notion mathématique qui joue un rôle central dans la théorie des probabilités :

Définition 1.1.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ *une famille de sous tribus de* $\mathcal{F}$. *On dit que* $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ *est une filtration si c'est une famille croissante , au sens où* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ *si* $s \leqslant t$.

On comprend $\{\mathcal{F}_t\}$ comme " l'information au temps t ", plus le temps croît $(s \leq t)$, plus on a d'informations $(\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t)$. Une filtration $\{\mathcal{G}_t\}$ est dite plus grosse que $\{\mathcal{F}_t\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout $t \geqslant 0$. Une filtration est dite **normale** si elle vérifie deux propriétés supplémentaires :

- Les parties négligeables au sens large dans toutes les $\mathcal{F}_t$, au sens où $\mathbb{P}[A] = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0$
- La filtration est continue à droite au sens où

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_{t+}^X =^{def} \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^X$$

Si $\{\mathcal{F}_t\}$ est une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 1.1.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.Une famille $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ de variable aléatoire sur Ω est appelée un processus stochastique. On dit que le processus X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté si X_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable pour tout $t \geqslant 0$.*

1.2 Processus Gaussiens

Définition 1.2.1. *Un processus est dit gaussien si toutes les lois fini dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ sont gaussiennes $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \cdots, t_n \in T)$.*

Autrement dit, $X = (X_t)_t$ est gaussien si toute combinaison linéaire $a_1 X_{t_1} + \cdots + a_n X_{t_1}$ suite une loi gaussienne (pour toute $n \in \mathbb{N}, t_1, \cdots, t_n \in T$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$)

La loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_1})$ est connue (via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne $(\mathbb{E}[X_{t_1}], \cdots, \mathbb{E}[X_{t_n}])$ et la matrice de covariance $(Cov(X_{t_i}, X_{t_j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n})$.

On comprend dés lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dés qu'on se donne la fonction moyenne $a(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et l'opérateur de covariance $K(s,t) = cov(X_s, X_t)$.

En effet, la loi fini dimensionnelle de $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ est alors la loi normale de dimension $n, \mathcal{N}(a_n, K_n)$ avec $a_n = (a(t_1), \cdots, a(t_n))$ et $K_n = (K(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Les fonctions a et K définissent donc toutes les lois fini dimensionnelles de X et donc aussi sa loi.

1.3 Exemples de processus gaussiens

1.3.1 Mouvement brownien

Le mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus stochastique dépendant du temps t et vérifiant :

1. Le processus $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien, c'est-à-dire pour tous temps $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$, le vecteur $(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.
2. $(B_t)_{t\geqslant 0}$ est presque sûrement continu, c'est-à-dire pour toute réalisation, la fonction $t \to B_t(\omega)$ est continue.
3. Pour tous s et t, la moyenne est $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et la covariance est $\mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s,t)$.

1.3.2 Mouvement brownien fractionnaire

Le mouvement brownien fractionnaire (mBf en abrégé) $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ d'indice de Hurst $H \in (0,1)$ est le seul processus vérifiant les propriétés suivantes :

1. L'autosimilarité ; $\forall a > 0, (a^{-H} B_{at})_{t\geqslant 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geqslant 0}$.
2. Les accroissements sont stationnaires ; $\forall h > 0, (B_{t+h} - B_h)_{t\geqslant 0}$ a même loi que $(B_t)_{t\geqslant 0}$.
3. Un processus gaussien avec $\mathbb{E}(B_1) = 0$, et $\mathbb{E}(B_1^2) = 1$.

1.4 Notions de variations, continuité des trajectoires et propriétés de α-Hôlderienne

Définition 1.4.1. *Un chemin $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ est dit de variation finie, dans $[s,t]$, si la 1-variation de x sur $[s,t]$ qui est définie par*

$$\|x\|_{1-var;[s,t]} = (\sup_{\Pi\in\Delta[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} \|x(t_{k+1}) - x(t_k)\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

est finie. L'espace des chemins continus $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ de variation finie sera notée $\mathcal{C}^{1-var}([s,t],\mathbb{R}^d)$.

Remarque : $\|.\|_{1-var;[s,t]}$ n'est pas une norme, car les fonctions constantes ont une 1-variation nulle, mais elle est évidemment une semi-norme. Si x est continuement différentiable sur $[s,t]$, on voit facilement que :

$$\|x\|_{1-var;[s,t]} = \int_s^t \|x'(s)\|ds$$

Proposition 1.4.1. *Soit $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ un chemin continu de p-variation finie avec $p < 1$. Alors, x est constant.*

Proposition 1.4.2. *Soit $x \in \mathcal{C}^{1-var}([0,T],\mathbb{R}^d)$. La fonction $(s,t) \to \|x\|_{1-var,[s,t]}$ est additive, c'est-à-dire pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant T$,*

$$\|x\|_{1-var,[s,t]} + \|x\|_{1-var,[t,u]} = \|x\|_{1-var,[s,u]}$$

et elle contrôle x dans le sens que pour $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$,

$$\|x(s) - x(t)\| \leqslant \|x\|_{1-var,[s,t]}$$

La fonction $s \to \|x\|_{1-var,[0,s]}$ est de plus continue et croissante.

1.5 Condition Hölderienne

En analyse, **la continuité Hölderienne** ou **condition de Hölder**, nommée d'aprés le mathématicien allemand Otto-Hôlder : est une condition suffisante, généralisant celle de Lipschitz, pour qu'une application définie entre deux espaces métriques soit uniformément continue. La définition s'applique donc en particulier pour les fonctions d'une variable réelle.

Si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont deus espaces métriques , une fonction $f : X \to Y$ est dite **α-Hölderienne** s'il existe une constante C telle que pour tout

$x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)^\alpha$$

- Les applications 1-Höldériennes sont les applications lipschitziennes.
- Pour $\alpha \in]0, 1]$ fixé, l'ensemble des fonctions réelles α-Hölderienne bornées sur X est un espace vectoriel, couramment noté $\mathcal{C}^{0,a}(X)$, particulièrement important en analyse fonctionnelle.

1.5.1 Propriétés

- Toute application f qui est α-hölderienne est continue. Mieux, elle est uniformément continue , car si $\varepsilon > 0$ alors pour $\eta = (\varepsilon/C)^{\frac{1}{\alpha}}$ l'inégalité $d(x, y) < \eta$ implique $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
- Une fonction sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui est lipschitzienne est presque partout dérivable : c'est le **théorème de Rademacher** [1]
- Au contraire pour $\alpha < 1$, il existe des fonctions α-Hölderienne et nulle part dérivables, comme la fonction de van der Waerden-Takagi ou la fonction de Weierstrass. Ces dernières sont définies comme séries de fonctions.
- Si l'espace métrique (X, d) est de **diamètre** [2] fini, alors toutes application α-hölderienne sur X est bornée.

Théorème 1.1. ***(Régularité)*** *Soit X un processus gaussien centré ($\mathbb{E}(X_t) = 0$), de fonction de covariance $r(s, t)$ .On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s, t :*

$$r(t, t) + r(s, s) - 2r(s, t) \leqslant c|t - s|^\alpha$$

1. le théorème de Rademacher est un résultat d'analyse qui s'énonce ainsi :
Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}^m$ une application Lipschitzienne. Alors f est dérivable presque partout sur A.

2. dans un espace métrique (E, d), on appelle **diamètre** d'une partie non vide A la borne supérieure des distances entre deux points de A :

$$diam(A) = \sup\{d(a, b) | a \in A, b \in A\}.$$

alors il existe une version continue $\tilde{X}$ de X. De plus, pour tout $\gamma < \frac{\alpha}{2}$, les trajectoires de $\tilde{X}$ sont presque sûrement hölderienne de coéfficient γ.

Notation et conventions : on note :

$\mathcal{C}^{p-var}([s,t];\mathbb{R}^d)$: **L'ensembles des fonctions continues de p-variation finie**.
$\mathcal{C}^{\alpha-hold}([s,t];\mathbb{R}^d)$: **L'ensemble des fonctions α-höldériennes.**

Afin d'avoir la définition d'une trajectoire rugueuse, nous avons besoin des notions suivantes :

1.6 Quelques outils fondamentaux de la théorie des chemins rugueux

1.6.1 Contrôles et espaces fonctionnels

Pour tous $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, soit

$$\Delta_{s,t} = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 : s \leqslant u \leqslant v \leqslant t\}$$

en particulier, on note $\Delta_T = \Delta_{0,T}$, ainsi que

$$\bar{\Delta}_T = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant T\}$$

et

$$\Delta_\infty = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leqslant u \leqslant v\}$$

Définition 1.6.1. *Soient $(s,t) \in \bar{\Delta}_T$ et $y : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue :*

1. *La fonction y est de p-variation finie si et seulement si,*

$$\|y\|_{p-var,s,t} = \sup_{D=\{r_k\}\in D_{s,t}} (\sum_{k=1}^{|D|-1} \|y_{r_{k+1}} - y_{r_k}\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

L'application $\|.\|_{p-var,s,t}$ *est une semi-norme sur l'e.v. (espace véctoriel)* $\mathcal{C}^{p-var}([s,t];\mathbb{R}^d)$ *des fonctions continues et de p-variation finie*

2. *La fonction y est* α*-höldérienne si et seulement si,*

$$\|y\|_{\alpha-hold;s,t} = \sup_{u,v\in\Delta_{s,t}} \frac{\|y_v - y_u\|}{|u-v|^\alpha} < \infty$$

L'application $\|.\|_{\alpha-hold;s,t}$ *est une semi-norme sur l'e.v.* $\mathcal{C}^{\alpha-hold}([s,t];\mathbb{R}^d)$ *des fonctions* α*-höldériennes.*

1.7 Signature et Groupe libre

Commençons par introduire la notion d'algèbre d'ordre N sur $\mathbb{R}^d$

Définition 1.7.1. *Le produit tensoriel sur* $\mathbb{R}^d$ *d'ordre* $k \in \mathbb{N}^*$ *sur* $\mathbb{R}^d$ *est l'application qui à tous* $a_1...a_k \in \mathbb{R}^d$ *associe*

$$a_1 \otimes ... \otimes a_k = (a_1^{i_1}...a_k^{i_k}, i_1...i_k = 1,...d)$$

L'image de $\mathbb{R}^d$ *par le produit tensoriel d'ordre* k *est notée*

$$(\mathbb{R}^d)^{\otimes k} = \{a_1 \otimes ... \otimes a_k, a_1...a_k \in \mathbb{R}^d\}$$

Définition 1.7.2. *L'algèbre tensorielle (tronquée) d'ordre* N *sur* $\mathbb{R}^d$ *désigne l'ensemble :*

$$T^N(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{k=0}^{N} (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$$

Définition 1.7.3. *Une fonctionnelle* $Y : \bar{\Delta}_T \to T^N(\mathbb{R}^d)$ *est multiplicative si est seulement si , elle satisfait l'identité de Chen :*

$$\forall k = 0, \cdots, N, \forall 0 \le s \le u \le t \le T, \quad Y_{s,t}^k = (Y_{s,u} \otimes Y_{u,t})^k.$$

Si de plus $N = [p]$

$$\sup_{D=\{r_k\}\in D_T} \sum_{k=1}^{|D|-1} \left\|Y_{r_k,r_{k+1}}\right\|^p_{T^{[p]}(\mathbb{R}^d)} < \infty,$$

alors Y est une p-trajectoire rugueuse.(on en parlera plus tard)

Définition 1.7.4. *Soit $y : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et de 1-variation finie.* ***La signature*** *d'ordre N de y est l'application $S_N(y) : \bar{\Delta}_T \to T^N(\mathbb{R}^d)$ définie par $S_N^0(y) = 1$ et,*

$$\forall k = 1, \cdots, N, \forall (s,t) \in \bar{\Delta}_T, \quad S_N^k(y)_{s,t} = \int_{s<r_1<\cdots<r_k} dy_{r_1} \otimes \cdots dy_{r_k}.$$

Proposition 1.7.1. *Soit $y \in [0,T] \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue et de 1-variation finie :*

1. *L'application $S_N(y)$ est une fonctionnelle multiplicative d'ordre N.*
2. *En dimension $d = 1$,*

$$\forall k = 0, \cdots, N, \forall (s,t) \in \bar{\Delta}_T, S_N^k(y)_{s,t} = \frac{(y_t - y_s)^k}{k!}.$$

3. *Par rapport à 1, $S_N(y)_{0,T}$ admet un symétrique dans $T^N(\mathbb{R}^d)$ pour le produit tensoriel $\otimes$:*

$$S_N(y)_{0,T} \otimes S_N(y_{T-.})_{0,T} = S_N(y_{T-.})_{0,T} \otimes S_N(y)_{0,T} = 1$$

   où, $y_{T-.}$ désigne la fonction de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$ qui à tout $t \in [0,T]$ associe y_{T-t}.

4. *Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\delta_\lambda : T^N(\mathbb{R}^d) \to T^N(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur de dilatation défini par*

$$\forall a \in T^N(\mathbb{R}^d), \forall k = 0, \cdots, N, \delta_\lambda^k(a) = \lambda^k a^k.$$

   On a la signature d'ordre N de y satisfait :

$$\forall (s,t) \in \bar{\Delta}_T, S_N(\lambda y)_{s,t} = \delta_\lambda S_N(y)_{s,t}.$$

Théorème 1.2. *([37]) L'ensemble :*

$$G_{\mathbb{N}}(\mathbb{R}^d) = \{S_N(y)_{0,1}; y \in \mathcal{C}^{1-var}([0,1];\mathbb{R}^d)\} \subset T^N(\mathbb{R}^d)$$

*muni de produit tensoriel $\otimes$ est un **groupe de Lie**[3] appelé groupe libre d'ordre N sur $\mathbb{R}^d$.*

Définition 1.7.5. *Un champs de vecteurs $V = (V_1, ..., V_d)$ sur $\mathbb{R}^e$ est une application qui à tout $a \in \mathbb{R}^e$ associe une matrice $V(a) \in \mathcal{M}_{e,d}(\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall b \in \mathbb{R}^e, V(a)b = \sum_{i=1}^{d} V_i(a)b^i$$

1.8 Les trajectoires rugueuses

Définition 1.8.1. ***Les trajectoires rugueuses** sont des trajectoires prenant des valeurs dans l'algèbre de tenseur libre tronquée[4](plus précisément dans le groupe nilpotent libre incorporé dans l'algèbre de tensor libre), les puissances tenseurs de $\mathbb{R}^d$,notée $(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ sont équipées par la norme projective $\|.\|$.*
Soit $T^n(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre de tenseur tronquée.

$$T^n(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{i=0}^{n} (\mathbb{R}^d)^{\otimes i}$$

Soit $\Delta_{0,1} = (s,t) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux applications continues $\Delta_{0,1} \to T^{(\lfloor p \rfloor)}(\mathbb{R}^d)$.Soit $\mathbf{X}^j$ la projection de $\mathbf{X}j-$tenseurs et de même pour $\mathbf{Y}^j$. La métrique de p-variation est définie par

$$d_p(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \max_{j=1,\dots,\lfloor p \rfloor} \sup_{0=t_0<t_1<\dots<t_n=1} (\sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{X}_{t_i,t_{i+1}} - \mathbf{Y}_{t_i,t_{i+1}}\|^{\frac{p}{j}})^{\frac{j}{p}}$$

Où le supremum est pris sur toutes les partitions-finies.

3. **groupe de Lie** est un groupe doté d'une structure de variété différentielle, pour laquelle les opérations de groupe-multiplication et inversion-sont différentiables

4. **une algèbre tensorielle** est une algèbre sur un corps dont les éléments (appelés tenseurs) sont représentés par des combinaisons linéaire de " mots " formés avec des vecteurs d'un espace vectoriel donné

1.9 Les trajectoires géométriques rugueuses :

Définition 1.9.1. *Un chemin $x : [s,t] \to G_N(\mathbb{R}^d)$ est dit à variation bornée sur $[s,t]$, si la 1-variation de x sur $[s,t]$, qui est définie par*

$$\|x\|_{1-var;[s,t]} := \sup_{\Pi \in \mathcal{D}[s,t]} \sum_{k=0}^{n-1} d(x(t_{k+1}), x(t))$$

est finie, où d est ***la distance de Carnot-Carathéodory***[5] *sur $G_N(\mathbb{R}^d)$. L'espace des chemins de variations bornées $x : [s,t] \to \mathbb{R}^d$ sera désigné par $\mathcal{C}^{1-var}([s,t], G_N(\mathbb{R}^d))$.*

Définition 1.9.2. *Une application continue $X = (1, X^1, X^2) : \Delta \to T^2(\mathbb{R}^d)$ est dite* ***une trajectoire rugueuse,*** *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *(Identité de Chen) $\forall 0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t \leqslant 1$,*

$$X^1_{s,t} = X^1_{s,u} + X^1_{u,t}, \qquad X^2_{s,t} = X^2_{s,u} + X^2_{u,t} + X^1_{s,u} \otimes X^1_{u,t}$$

2. *La p-variation finie i.e* $\qquad \|X^1\|_p < \infty \qquad$ *et* $\qquad \|X^2\|_{\frac{p}{2}} < \infty.$

Nous omettrons essentiellement le 0-ième composant évident "1" et écrivons simplement $X = (X^1, X^2)$ .Les deux normes de la condition (2) définissent naturellement une distance sur $\Omega_p(\mathbb{R}^d)$.

1.9.1 Exemples des trajectoires rugueuses

Mouvement brownien Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien standard multidimensionnel, soit $\circ$ l'intégration de Stratonovich. Alors

$$B_{s,t} = \left(1, \int_{s<s_1<t} \circ dB_{s_1}, \int_{s<s_1<s_2<t} \circ dB_{s_1} \otimes \circ dB_{s_2}\right)$$

est une p-trajectoire géométrique rugueuse pour tout $2 < p < 3$. Cette trajectoire géométrique rugueuse est appelée : trajectoire rugueuse brownienne

5. on appelle **métrique de Carnot Carathéodory** une forme bilinéaire (principalement définie positive) définie sur une distribution horizontale. Ces métriques engendrent des distances, dite également de Carnot Carathéodory.

de Stratonovich.

Mouvement brownien fractionnaire

– Plus généralement, soit $B_H(t)$ un mouvement brownien fractionnaire multidimensionnel (un processus dont les composants sont des mouvements browniens fractionnaires indépendants) avec $H > 1/4$. Si $B_H^m(t)$ est le m-ième interpolation dyadique linéaire par morceaux [6] de $B_H(t)$, alors

$$\begin{aligned} B_H^m(s,t) &= (1, \int_{s<s_1<t} dB_H^m(s_1), \int_{s<s_1<s_2<t} dB_H^m(s_1) \otimes dB_H^m(s_2), \\ &\quad \int_{s<s_1<s_2<s_3<t} dB_H^m(s_1) \otimes dB_H^m(s_2) \otimes dB_H^m(s_3)), \end{aligned}$$

converge presque sûrement dans la métrique de p-variation vers un p-chemin géométrique rugueuse pour $\frac{1}{H} < p$.

La théorie des trajectoires rugueuses vise à donner un sens à l'équation différentielle contrôlée

$$dY_t^i = \sum_{j=1}^{d} V_j^i(Y_t) dX_t^i,$$

où le contrôl i.e la trajectoire continue X_t prend ses valeurs dans un espace de Banach, ne doit pas être différentielle ni de variation bornée. Un exemple répondu de trajectoire contrôlée X_t : trajectoire d'un processus de Wiener. Dans ce cas, l'équation différentielle contrôlée ci-dessus peut être interprétée comme une équation différentielle stochastique et une intégration par dX_t^i peut être définie dans le sens d'Itô. Cependant, le calcul d'Itô est défini dans le sens de L^2.

Les trajectoires rugueuses donnent une définition quasi sûre de l'équation différntielle stochastique. La notion de solution des trajectoires rugueuses est

6. L'ensemble des nombres **dyadiques** noté formellement par :

$$D = \left\{ \frac{a}{2^b} | (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}.$$

bien posée dans le sens où $X(n)_t$ est une suite de chemins lisses convergeant vers X_t par rapport à la métrique de $p-$variation :

$$dY(n)_t^i = \sum_{i=1}^{d} V_j^i(Y_t) dX(n)_t^j;$$

$$dY_t^i = \sum_{j=1}^{d} V_j^i(Y_t) dX_t^j$$

alors $Y(n)$ converge vers Y dans la métrique de $p-$variation . Cette propriété de continuité et la nature déterministe des solutions permettent de simplifier et de renforcer de nombreux résultats dans l'analyse stochastique tels que la théorie de grands écarts de "Freidlin-Wentzell's Large Deviation theory" ([10]) ainsi que des résultats sur les flux stochastiques.

En fait, la théorie des trajectoires rugueuses peut aller bien au-delà de la portée du calcul d'Itô et de Stratonovich et permet de comprendre les équations différentielle dirigées par des trajectoires non semi-martingales, tels que les processus de Gauss et les processus de Markov.

Un résultat central dans la théorie des trajectoires rugueuses est le théorème de Limite Universelle de Lyons.Une version (faible) du résultat est la suivante :

Théorème 1.3. *Soit $X(n)$ une suite de trajectoires avec variation totale finie et soit*

$$X(n)_{s,t} = (1, \int_{s<s_1<t} dX(n)_{s1}, \cdots, \int_{s<s_1<\cdots<s_{\lfloor p \rfloor}<t} dX(n)_{s_1} \otimes \cdots \otimes dX(n)_{s_{\lfloor p \rfloor}})$$

désigne le relèvement du chemin rugueux de $X(n)$.
On suppose que $X(n)$ converge dans la métrique de p-variation vers une trajectoire rugueuse p-géométrique X quand $n \to \infty$. Soit $(V_j^i)_{j=1,\ldots,d}^{i=1,\ldots,n}$ des fonctions qui ont au moins $\lfloor p \rfloor$ dérivées limitées et les $\lfloor p \rfloor$ dérivatives sont α-Hôlderiennes continues pour certains $\alpha > p - \lfloor p \rfloor$. Soit Y(n) est une solution

de l'équation différentielle

$$dY(n)_t^i = \sum_{j=1}^{d} V_j^i(Y(n)_t)dX(n)_t^i$$

Et soit $Y(n)$ *définie par :*

$$Y(n)_{s,t} = (1, \int_{s<s_1<t} dY(n)_{s_1}, \cdots, \int_{s<s_1<\cdots<s_{\lfloor p\rfloor}<t} dY(n)_{s_1} \otimes \cdots \otimes dY(n)_{s_{\lfloor p\rfloor}}).$$

Alors, $Y(n)$ *converge dans la métrique de p-variation vers le p-chemin géométrique rugueux* Y.
De plus, Y *est une solution de l'équation différentielle :*

$$dY(n)_t^i \quad = \quad \sum_{j=1}^{d} V_j^i(Y(n))_t dX_t^j, \tag{1.1}$$

dirigée par le chemin géométrique rugueux X*. En résumé, le théorème peut être interprété comme quoi l'application de la solution* $\Phi : G\Omega_p(\mathbb{R}^d) \to G\Omega_p(\mathbb{R}^e)$ *de EDR (2.3) est continue (et en fait localement lipschitz) dans la topologie associée à la métrique de p-variation.*

Chapitre 2

Calcul stochastiques par les chemins rugueux

2.1 Notations utilisées

Nou utilisons souvent le symbole $\lesssim$, dans le contexte de l'expression

$$|X_t - X_s| \lesssim |t-s|^\alpha.$$

Cela signifie que le côté gauche est bornée par le côté droit multiplié par une constante. On définit les incréments d'une fonction $f : [0,T] \to V$ comme $f_{s,t} := f(t) - f(s)$. On désigne par C^α l'espace des fonctions α-Hôlderienne continues avec

$$\mathrm{C}^\alpha := \left\{ f | f : [0,T] \to V \{\text{et}\} \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|f_t - f_s|}{|t-s|}^\alpha < \infty \right\}.$$

L'espace $\mathrm{C}_2^{2\alpha}$ est défini de la manière suivante

$$\mathrm{C}_2^{2\alpha} := \left\{ f | f : [0,T]^2 \to V \text{ et } \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|f_{s,t}|}{|t-s|}^{2\alpha} < \infty \right\}.$$

La semi-norme α-Hôlderienne de f est définie par

$$\|f\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|f_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

Nous utilisons souvent les foncions $F \in \mathrm{C}^3$, telles que $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. Ensuite, la dérivée de la fonction $DF : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ est défini comme l'espace des fonctions de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$. La deuxième dérivée

$$D^2F : \mathbb{R}^d \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}^n).$$

Nous discuterons seulement des espaces de Banach en dimensions finies et particulièrement les espaces réels $d-$dimensionnels $\mathbb{R}^d$.
Dans la suite, on note "sym" : l'opérateur de symétrie.

Nous utilisons souvent les approximations de Taylor, et les termes restants des approximations de Taylor. On utilise la notation suivante, Soit F donné comme ci-dessus, et $x, y \in \mathbb{R}^d$, alors :

$$F(x) - F(y) = DF(y)(x-y) + \frac{1}{2}D^2F(y)(x-y)^{\otimes 2} + \bar{R}^F_{x,y}$$

Par la formule de Lagrange des termes restants, on sait que :

$$\bar{R}^F_{x,y} = \frac{1}{6}D^3F(y^*)(x-y)^{\otimes 3}$$

pour $y^* \in (y, x)$.

Nous écrivons parfois ça $|f_{s,t}| = o(|t-s|)$. Cela implique que $|f_{s,t}| \lesssim |t-s|^\gamma$ pour $\gamma > 1$. Si la facteur γ est important pour un calcul supplémentaire, nous écrivons $|f_{s,t}| = o(|t-s|^\gamma)$.

2.2 Introduction de base aux chemins rugueux

Soit $X^{(1)}$ un processus $\alpha-$Hölder régulier, c'est-à-dire $X^{(1)} \in \mathrm{C}^\alpha$. Une question essentielle dans la théorie des chemins rugueux est de donner un sens aux intégrales de la forme

$$X^2_{s,t} := \int_s^t X^{(1)}_{s,r} dX^{(1)}_r, \tag{2.1}$$

où $X^{(1)}_{s,t} := X^{(1)}_t - X^{(1)}_s$, et lorsque $X^{(1)}_{s,t}$ est de la régularité Hölderienne $< \frac{1}{2}$. Qaund $X^{(1)} \in \mathrm{C}^1$ alors $X^{(2)}_{s,t}$ est bien définie en lisant (2.1) de gauche à droite.

Si $X^{(1)} \in \mathrm{C}^{\alpha}, \alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ alors $\int_s^t X^{(1)}_{s,r} dX^{(1)}_r$ s'appelle intégrale de Young est peut être démontré qu'elle est bien définie, et donc, la définition peut être lue de gauche à droite. Le problème se pose lorsque $X^{(1)} \in \mathrm{C}^{\beta}, \beta < \frac{1}{2}$, alors l'intégrale n'est pas en général, bien définie, et nous devons donc construire un objet $X^{(2)}_{s,t}$ tel que la définition dans (2.1) peut être lue de droite à gauche.

Dans la suite, on donne le cadre approprié pour pouvoir construire de telles intégrales et les analyser. Pour donner une certaine intuition, nous commençons par une construction lorsque la régularité $\alpha-$Hölderienne du chemin $X^{(1)}$ est dans $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, et on montre comment on peut étendre la théorie au cas où $\alpha \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.

2.3 L'espace des chemins α-Hôlder rugueux

Soit $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ et soit la semi norme α-Hôlderienne donnée par $\|f\|_{\alpha} := \sup_{s,t \in [0,T], s \neq t} \frac{|f_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}}$. On définit l'espace des chemins rugueux α-Hôlderienne par les paires $(1, X^{(1)}, X^{(2)})$ où $X^{(1)} : [0,T] \to V$ et $X^{(2)} : [0,T]^2 \to V \otimes V$, et tel que

$$\|X^{(1)}\|_{\alpha} = \sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{|X^{(1)}_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty, \quad \|X^{(2)}\|_{2\alpha} = \sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{|X^{(2)}_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} < \infty$$

et $\forall s, u, t \in [0,T]$, on a :

$$X^{(2)}_{s,t} - X^{(2)}_{s,u} - X^{(2)}_{u,t} \quad = \quad X^{(1)}_{s,u} \otimes X^{(1)}_{u,t} \qquad \text{(relation de Chen)} \qquad (2.2)$$

Pour simplifier nous écrivons $\mathbf{X} := (1, X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T], V)$ pour un espace de Banach V. Comme on peut voir facilement que l'espace $\mathcal{C}^{\alpha}([0,T], V) \subset \mathrm{C}^{\alpha} \oplus \mathrm{C}^{2\alpha}_2$. Supposons que $X^{(1)} \in \mathrm{C}^{\alpha}$. Le chemin $X^{(1)}$ peut être relevé (ou il existe un relèvement) à un élément $(1, X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathrm{C}^{\alpha}$, si et seulement s'il existe un objet $X^{(2)} \in \mathrm{C}^{2\alpha}_2$, tel que la relation de Chen est satisfaite.

L'espace $\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ n'est pas un espace de Banach, car il n'est pas un espace linéaire en raison de restrictions de la relation de Chen.

La relation de Chen est une pièce essentielle dans la construction des deuxièmes intégrales itérées, et nous la généraliserons plus tard à la troisième intégrale itérée. On considère en général que les espaces de Banach V à dimension finie, et le produit tensoriel peut être considérés comme une sorte de multiplication vectorielle de manière à ce que, pour deux vecteurs $a, b \in V, a \otimes b := ab^T$. Ensuite , nous allons présenter une métrique appropriée sur l'espace des chemins rugueux.

Définition 2.3.1. *Soit* $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$. *On définit la métrique sur* $\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ *par*

$$d_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|X^{(1)} - Y^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)} - Y^{(2)}\|_{2\alpha}$$

Cette métrique ne rend pas l'espace $\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ complet, en introduisant des valeurs initiales des chemins X et Y à la quantité $d_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, la complétion aura lieu. C'est-à-dire en introduisant X_0 et Y_0, on peut rendre l'espace $\mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$ complet sous la métrique $|X_0^{(1)} - Y_0^{(1)}| + d_\alpha(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Pour montrer la convergence dans cette métrique , nous allons se concentrer sur l'interpolation. Ensuite, nous définirons la notion d'un chemin géométrique rugueux.

2.4 L'espace des chemins géométriques rugueux

À partir du calcul "régulier", nous connaissons le fait que si X est un chemin suffisamment lisse, alors :

$$sym\left(\int_s^t x_{s,r} dx_r\right) = \frac{1}{2} x_{s,t} \otimes x_{s,t} \tag{2.3}$$

Où, sym représente l'opérateur de symétrie donné par :

$$sym(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) \qquad \text{pour} \qquad A \in V \otimes V$$

Nous voulons définir un espace des chemins rugueux α-Hôlderiennes qui satisfait (2.3). C'est-à-dire pour un chemin rugueux $(1, X^{(1)}, X^{(2)})$, On définit $X_{s,t}^{(1)(i)} = e_i(X_{s,t}^1)$ et $X_{s,t}^{(2)(i,j)} = e_i \otimes e_j(X_{s,t}^{(2)})$. Si $X^{(2)}$ est tel que :

$$X_{s,t}^{(2)(i,j)} + X_{s,t}^{(2)(j,i)} = \int_s^t X_{s,r}^{(1),i} dX_r^{(1),j} + \int_s^t X_{s,r}^{(1),j} dX_r^{(1),i}$$

$$= \int_s^t X_r^{(1),i} dX_r^{(1),j} + \int_s^t X_r^{(1),j} dX_r^{(1),i} - X_s^{(1),i} X_{s,t}^{(1),j} - X_s^{(1),j} X_{s,t}^{(1),i}$$

$$= \int_s^t d(X^{(1),i} X^{(1),j})_r - X_s^{(1),i} X_{s,t}^{(1),j} - X_s^{(1),j} X_{s,t}^{(1),i} = X_{s,t}^{(1),i} X_{s,t}^{(1),j}$$

Nous appelons le chemin $(1, X^{(1)}, X^{(2)})$ un chemin géométrique rugueux, et on dit que $sym(X_{s,t}^{(2)}) = \frac{1}{2} X_{s,t}^{(1)} \otimes X_{s,t}^{(1)}$. On donne une définition plus formelle des chemins géométriques comme suit.

Définition 2.4.1. *On dit qu'un chemin* $(1, X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathcal{C}^\alpha$ *est géométrique s'il satisfait aux conditions suivantes :*

$$sym(X_{s,t}^{(2)}) = \frac{1}{2} X_{s,t}^{(1)} \otimes X_{s,t}^{(1)}$$

Formellement, nous écrivons : $(1, X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathcal{C}_g^\alpha$.
Il existe deux façons de définir l'espace des chemins géométriques rugueux. L'une des façons est de définir l'espace $\mathcal{C}_g^\alpha$ comme l'espace des chemins rugueux α-Hölderiennes , qui satisfont également la relation :

$$X_{s,t}^{(2)(i,j)} + X_{s,t}^{(2)(j,i)} = X_{s,t}^{(1)(i)} \otimes X_{s,t}^{(1)(j)},$$

ou on pourrait définir $\mathcal{C}_g^{0,\alpha}$ comme l'adhérence des relèvements des chemins lisses dans $\mathcal{C}^\alpha$. Nous avons donc la relation :

$$\mathcal{C}_g^{0,\alpha} \subset \mathcal{C}_g^\alpha \subset \mathcal{C}^\alpha$$

En fait, on peut montrer que les deux définitions sont identiques, voir ([1])

chap. 2.
Comme on peut s'y attendre, les chemins rugueux qui sont géométriques peuvent être approchés par des chemins lisses. Soit $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Pour tout $(1, X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathcal{C}_g^\beta([0,T], \mathbb{R}^d)$ il existe une suite des chemins lisses $X^{(1),n} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ tel que

$$(1, X^{(1),n}, X^{(2),n}) := \left(1, X^{(1),n}, \int X_{0,r}^{(1),n} dX_r^{(1),n}\right) \to (1, X^{(1)}, X^{(2)})$$

Uniformément sur $[0,T]$, et avec des bornes uniformément rugueuses. Par interpolation, la convergence se maintient pour les chemins rugueux α-Hölderiennes, avec $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta)$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to\infty} d_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) = 0.$$

Lemme 2.4.0.1. *Soit $(X^{(1),n}, X^{(2),n}) \in \mathcal{C}^\beta$, pour $\frac{1}{3} < \alpha < \beta$ tel que les bornes uniforme*

$$\sup_n \|X^{(1),n}\|_\beta < \infty \quad \sup_n \|X^{(2),n}\|_{2\beta} < \infty,$$

et avec la convergence $X_{s,t}^{(1),n} \to X_{s,t}^{(1)}$ et $X_{s,t}^{(2),n} \to X_{s,t}^{(2)}$ uniformément sur $[0,T]$. Alors $(X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathcal{C}^\beta$, et on a la convergence pour la métrique d_α ,

$$d_\alpha(\mathbf{X}^n, \mathbf{X}) = \|X^{(1),n} - X^{(1)}\|_\alpha + \|X_{s,t}^{(2),n} - X_{s,t}^{(2)}\|_{2\alpha} \to 0.$$

Preuve En utilisant la convergence uniforme et les bornes uniformes on a :

$$|X_{s,t}^{(1)}| := \lim |X_{s,t}^{(1),n}| \lesssim |t-s|^\beta \quad |X_{s,t}^{(2)}| := \lim |X_{s,t}^{(2),n}| \lesssim |t-s|^{2\beta}$$

et il existe une suite ε_n tel que :

$$\begin{aligned} |X_{s,t}^{(1)} - X_{s,t}^{(1),n}| &\leq K|t-s|^\beta \quad \text{et} \quad |X_{s,t}^{(1)} - X_{s,t}^{(1),n}| < \varepsilon_n \\ |X_{s,t}^{(2)} - X_{s,t}^{(2),n}| &\leq K|t-s|^{2\beta} \quad \text{et} \quad |X_{s,t}^{(2)} - X_{s,t}^{(2),n}| < \varepsilon_n \end{aligned}$$

Uniformément pour tous $s,t \in [0,T]$. En utilisant l'inégalité $a \wedge b \leq a^{1-\theta} b^{\theta}$, où $\theta \in (0,1)$, on combine les deux expressions ci-dessus avec $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$, on trouve :

$$\begin{aligned} |X^{(1)}_{s,t} - X^{(1),n}_{s,t}| &\lesssim \varepsilon_n^{1-\frac{\alpha}{\beta}} |t-s|^{\alpha} \\ |X^{(2)}_{s,t} - X^{(2),n}_{s,t}| &\lesssim \varepsilon_n^{1-\frac{\alpha}{\beta}} |t-s|^{2\alpha} \end{aligned}$$

□

Remarque Compte tenu de la convergence uniforme des chemins ci-dessus, et du fait que les deux chemins sont en $\mathcal{C}^{\beta}$, nous n'obtenons que la convergence dans la métrique d_{α}, en raison des restrictions sur l'inégalité utilisée, nous pouvons toujours choisir α aussi près que β comme nous voulons.

Il s'avère qu'une bonne façon de voir l'espace $\mathcal{C}^{\alpha}([0,T],\mathbb{R}^d)$ est de le regarder comme une algèbre de tenseurs tronquée. La définition est également trés adaptée aux intégrales itérées à ordre supérieur et sera essentielle dans la construction de la relation de Chen dans les produits tensorielles. On la résume dans la définition suivante

Définition 2.4.2. *Soit l'espace de Banach $V = \mathbb{R}^d, X^{(1)} : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et $X^{(2)} : [0,T] \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ qui satisfait la relation de Chen (2.2). On définit*

$$\mathbf{X}_{s,t} \quad = \quad \left(1, X^{(1)}_{s,t}, X^{(2)}_{s,t}\right) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d) := T^{(2)}(\mathbb{R}^d), \tag{2.4}$$

et on définit la multiplication de l'algèbre de tenseurs tronqué de deux éléments $(a,b,c), (\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) \in T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$(1,a,b) \otimes (1,\tilde{a},\tilde{b}) = (1, a+\tilde{a}, b+\tilde{b}+a\otimes\tilde{a})$$

On peut donc regarder comment que cette multiplication s'applique aux chemins rugueux, on trouve :

$$\mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t} = \left(1, X^{(1)}_{s,u} + X^{(1)}_{u,t}, X^{(2)}_{s,u} + X^{(2)}_{u,t} + X^{(1)}_{s,u} \otimes X^{(1)}_{u,t}\right) =: \mathbf{X}_{s,t}.$$

On voit que la définition correspond très bien à la relation de Chen, et que $\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_s^{-1} \otimes \mathbf{X}_t$, où $\mathbf{X}_s^{-1} := \left(1, -X^1_s, -X^{(2)}_{0,s} + X^{(1)}_{0,s} \otimes X^{(1)}_{0,s}\right)$. L'espace

$T^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ peut être généralisé pour contenir n+1-uplets d'intégrales itérées, dans le sens où :

$$T^n(\mathbb{R}^d) := \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathbb{R}^d)^{\otimes i}.$$

On s'attendrait alors à ce que les intégrales itérées d'ordre supérieur obéissent à une sorte de relation de Chen de la même manière que pour les uplets de chemins rugueux. Il s'avère que, lorsque on prend $\mathbf{X} \in T^n(\mathbb{R}^d)$, on trouve une relation de Chen en postulant que :

$$\mathbf{X}_{s,t} := \mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t},$$

où le produit tensoriel représente le produit dans le sens de l'algèbre tronqué. Dans la section suivante, nous allons regarder de plus près l'espace $T^3(\mathbb{R}^d)$ qui contiendra les quatre uplets nécessaires pour examiner les problèmes de régularité lorsque $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

2.5 Les chemins rugueux dans le cas de la régularité faible

On s'intéresse à voir la construction de l'espace des chemins géométriques rugueux avec le coefficient de α-Hölderienne $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Nous voulons donc définir l'espace $T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$ par :

$$T^{(3)}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R} \oplus \bigoplus_{n=1}^{3} (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}.$$

Un élément de $T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$ est de la forme $x = (1, a, b, c) \in T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$, et la multiplication de deux éléments x, et $y = (1, a', b', c') \in T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$ donne :

$$x \otimes y := (1, a + a', b + b' + a \otimes a', c + c' + a \otimes b' + b \otimes a').$$

Par conséquent, pour un chemin rugueux $\mathbf{X}$ nous avons la relation suivante :

$$\mathbf{X}_{s,t} = \mathbf{X}_{s,u} \otimes \mathbf{X}_{u,t}$$

$$=\Big(1, X^{(1)}_{s,u}+X^{(1)}_{u,t}, X^{(2)}_{s,u}+X^{(2)}_{u,t}+X^{(1)}_{s,u}\otimes X^{(1)}_{u,t}, X^{(3)}_{s,u}+X^{(3)}_{u,t}+X^{(1)}_{s,u}\otimes X^{(2)}_{u,t}+X^{(2)}_{s,u}\otimes X^{(1)}_{u,t}\Big)$$

C'est ce qui définit la relation de Chen sur $T^{(3)}(\mathbb{R}^d)$. On voit que, en plus de la relation de Chen sur la seconde intégrale itérée, nous exigerons que la troisième intégrale itérée satisfasse la relation :

$$X^{(3)}_{s,t}-X^{(3)}_{s,u}-X^{(3)}_{u,t}=X^{(1)}_{s,u}\otimes X^{(2)}_{u,t}+X^{(2)}_{s,u}\otimes X^{(1)}_{u,t}.$$

Soit $\alpha\in(\frac{1}{4},\frac{1}{3}]$; alors $\mathbf{X}_{s,t}=\Big(X^{(1)}_{s,t}, X^{(2)}_{s,t}, X^{(3)}_{s,t}\Big)\in\mathcal{C}^{\alpha}([0,T],V)$

$$\begin{aligned} X^{(1)}_{s,t} &= X^{(1)}_t - X^{(1)}_s \\ X^{(2)}_{s,t} &= \int_s^t X^{(1)}_{s,r}dX^{(1)}_r \\ X^{(3)}_{s,t} &= \int_s^t X^{(2)}_{s,r}dX^{(1)}_r \end{aligned}$$

Comme on le sait, si $X^{(1)}_{s,t}\in V$ alors $X^{(2)}_{s,t}\in V\otimes V$, et donc la troisième intégrale itérée $X^{(3)}$ prendra des valeurs dans $V^{\otimes 3}$. Puisque les définitions sont lues de droite à gauche ; à-priori on n'a aucune information sur le type de chemin $X^{(1)}$, et on n'a pas défini ce que devrait être le deuxième intégrale itérée. L'un des objectifs dans la théorie de la trajectoire rugueuse est de trouver les processus $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ tels que la relation de Chen et les conditions de régularité sont satisfaites, et on peut défini les intégrales itérées comme étant les objets $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$.

On définit la métrique d_α sur $\mathcal{C}^{\alpha}([0,T],V)$, par :

$$d_\alpha(\mathbf{X},\tilde{\mathbf{X}}):=\|X^{(1)}-\tilde{X}^{(1)}\|_\alpha+\|X^{(2)}-\tilde{X}^{(2)}\|_{2\alpha}+\|X^{(3)}-\tilde{X}^{(3)}\|_{3\alpha}$$

En outre, on note la norme α-Hölderienne homogène par :

$$|||\mathbf{X}|||_\alpha:=\|X^{(1)}\|+\sqrt{\|X^{(2)}\|_{2\alpha}}+\sqrt[3]{\|X^{(3)}\|_{3\alpha}}.$$

Dans la section suivante, on va présenter le concept de chemins géométriques rugueux. Ce sont les chemins où la deuxième et la troisième intégrales itérées satisfont les règles de base du calcul ordinaire et joueront un rôle important en particulier dans les applications et dans la théorie de la trajectoire rugueuse en général.

2.6 Les chemins géométriques rugueux de faible régularité

L'espace des chemins géométriques rugueux $\mathcal{C}_g^\alpha$ est défini de sorte que tous les chemins rugueux dans $\mathcal{C}_g^\alpha$ peuvent être approchés par des chemins lisses. Nous exigerions donc que les intégrales itérées se comportent de telle sorte qu'elles satisfassent certaines règles de calcul de base , c'est-à-dire :

$$sym(X_{s,t}^{(2)}) = \frac{1}{2} X_{s,t}^{(1)} \otimes X_{s,t}^{(1)}$$

et

$$sym(X_{s,t}^{(3)}) = \frac{1}{6} X_{s,t}^{\otimes(3)}$$

Si le chemin rugueux obéit aux deux conditions ci-dessus, on dit que $\mathbf{X} = (1, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) \in \mathcal{C}_g^\alpha$. L'espace $\mathcal{C}_g^\alpha$ peut être défini comme décrit ci-dessus ; par les deux conditions, ou comme une adhérence de la famille de chemins lisses dans $\mathcal{C}^\alpha$. Comme nous l'avons déja vu, nous pouvons toujours interpoler des chemins lisses dans l'espace de trajectoires rugueuses $\mathcal{C}^\alpha$, mais naturellement ils satisfont encore leurs "règles de calcul" habituelles.

Remarque : Pour $\alpha < \beta, \mathrm{C}^\beta \subset \mathrm{C}^\alpha$. En effet, par interpolation, on sait que tous les chemins dans C^β peuvent être approchés dans C^α, et nous avons la relation :

$$\|X\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha} = \sup_{s,t\in[0,T],s\neq t} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\beta} \frac{1}{|t-s|^{\alpha-\beta}} \leq \|X\|_\beta T^{\beta-\alpha},$$

Par conséquent, si $\|X\|_\beta < \infty$, alors $X \in \mathrm{C}^\alpha$, mais l'inverse n'est pas en général vrai. Cela peut évidemment être étendu à l'espace $\mathcal{C}^\alpha$ dans le sens que $\mathcal{C}^\beta \subset \mathcal{C}^\alpha$ pour $\beta > \alpha$.

2.7 Intégration par les chemins rugueux

Dans cette section, on étend les résultats au cas où la régularité α-Hölderienne est telle que $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. La différence entre la théorie de la trajectoire rugueuse lorsque $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ et $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ est qu'on a besoin d'introduire des dérivés d'ordre supérieur de l'intégrant à partir des chemins rugueux pour pouvoir définir une intégrale appropriée. Par des intégrales appropriées, on entend les intégrales de la forme $\int_0^{\cdot} Y_r dX_r$ où Y peut être une fonction de X ou d'un autre chemin qui est intégrable par rapport à X. Lors de l'introduction des dérivations d'ordre supérieure de l'intégrant Y, nous obtiendrons plus d'expressions à traiter dans nos (in) égalités, mais nous serons en mesure de traiter des intégrales beaucoup plus irrégulière que celles indiquées dans la première section.

2.7.1 Lemme fondamental de la théorie des chemins rugueux

On présente maintenant l'un des résultats les plus importants dans la théorie des chemins rugueux, c'est le lemme fondamental (Swing lemma). Avant de l'énoncer, on introduit un exemple illustratif lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$. En utilisant la théorie de l'intégration de Young, on veut construire une application d'intégration abstraite I, qui fonctionne de la même manière que les sommes Riemann-Steiltjes. C'est-à-dire on veut trouver la fonction $Z_{s,t}$ qui détermine complètement l'intégrale de Y par rapport à X, c'est-à-dire $Z_{s,t} = \int_s^t Y_r dX_r$. Si $X \in \mathrm{C}^\alpha$ et $Y \in \mathrm{C}^\beta$ tels que $\alpha + \beta > 1$, Young ([54]) a trouvé que :

$$Z_{s,t} = Y_s X_{s,t} + o(|t-s|).$$

C'est-à-dire, la fonction $Y_s X_{s,t}$ détermine complètement $Z_{s,t}$. Par conséquent, on veut trouver ψ, de sorte que $Z_{s,t} = I(\psi)_{s,t}$ soit bien définie comme étant une image de ψ sous une application d'intégration abstraite I.

Définition 2.7.1. *On définit l'espace* $\mathrm{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T]^2, W)$*, des fonctions* ψ *définies sur* $[0,T]^2$ *à valeurs dans* W *tel que* $\psi_{t,t} = 0$ *et*

$$\|\psi\|_{\alpha,\beta} := \|\psi\|_\alpha + \|\delta\psi\|_\beta < \infty,$$

où $\delta\psi_{s,u,t} := \psi_{s,t} - \psi_{s,u} - \psi_{u,t}$

Cet espace devient est utile pour la preuve du lemme fondamental et dans d'autres applications.

Lemme 2.7.1.1. ***(Swing Lemma)*** *Soit α et β tel que $0 < \alpha \leq 1 < \beta$ alors il existe une (unique) application continue $I : \mathrm{C}_2^{\alpha,\beta}([0,T]^2, W) \to \mathrm{C}^{\alpha}([0,T]^2, W)$ telle que $(I\psi)_0 = 0$ et*

$$|(I\psi)_{s,t} - \psi_{s,t}| \leq C|t-s|^{\beta},$$

où C ne dépend que de β et $\|\delta\psi\|_{\beta}$. (La norme α-Hölderienne de $I\psi$ dépend aussi de $\|\psi\|_{\alpha}$, et donc de $\|\psi\|_{\alpha,\beta}$).

Preuve : Notons que I est par construction une application linéaire , et donc sa continuité est une conséquence de sa bornitude. L'unicité est immédiate ; supposons par l'absurde que pour une fonction ψ, il ya deux candidats F_1 et F_2 pour $I\psi$. On définit $F = F_1 - F_2$. On a $F = 0$ et $|F_{s,t}| \lesssim |t-s|^{\beta}$ pour $\beta > 0$, et on sait que la seule fonction qui vérifie cette propriété (plus forte que la régularité lipschitzienne) c'est la fonction $F = 0$. Il reste à trouver l'application d'intégration I. On peut penser qu'elle serait de la forme :

$$(I\psi)_{s,t} = \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in P} \psi_{u,v}$$

où P c'est une partition sur $[s,t]$ et $|P| := \max |u-v|, u, v \in P$. Friz et Hairer offrent deux arguments pour la preuve du lemme fondamental dans ([1]). Ici, on suit le deuxième argument. L'argument qui suit est essentiellement dû à Young, qui a montré que la covergence est immédiate quand $|P| \to 0$, c'est-à-dire que la même limite est obtenue le long de toute suite de subdivisions P_n avec $|P_n| \to 0$. On considère une partition P de $[s,t]$ et soit $r \geq 1$ le nombre d' intervalles dans P. Lorsque $r \geq 2$ il existe $u \in [s,t]$ tel que $[u_-, u], [u, u_+] \in P$ et

$$|u_+ - u_-| \leq \frac{2}{r-1}|t-s|,$$

car dans le cas contraire, on tombe sur la contradiction

$$2|t-s| < \sum_{u\in P^0} |u_+ - u_-| \leq 2|t-s|$$

. Par conséquent, en supprimant le point $u \in P$ en une intégrale et en regardant la différence entre les deux, on trouve :

$$|\int_{P\setminus\{u\}} \psi - \int_P \psi| = |\delta\psi_{u_-,u,u_+}| \leq \|\delta\psi\|_\beta \left(\frac{2}{r-1}|t-s|\right)^\beta$$

On outre, on peut voir cela, s'il ya plus de 3 éléments dans P, c'est-à-dire $r \geq 3$, il existe deux points $u, v' \in P$, tels que :

$$|\psi_{s,t} - \int_P \psi| \leq \left|\psi_{s,t} - \int_{P\setminus\{u\}} \psi\right| + |\int_{P\setminus\{u\}} \psi - \int_P \psi|$$

$$\leq \left|\psi_{s,t} - \int_{P\setminus\{u,v\}} \psi\right| + |\int_{P\setminus\{u,v\}} \psi - \int_{P\setminus\{u\}} \psi| + |\int_{P\setminus\{u\}} \psi - \int_P \psi|$$

En itérant cette procédure, et on sélectionne un nouveau point u à supprimer chaque fois, on obtient que la différence entre $\psi_{s,t}$ et $\int_P \psi$ est plus grande, on voit que :

$$\sup_{P\subset[s,t]} |\psi_{s,t} - \int_P \psi_{s,t}| \leq \|\delta\psi\|_\beta \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{2}{i-1}|t-s|\right)^\beta \leq 2^\beta \|\delta\psi\|_\beta \zeta(\beta)|t-s|^\beta,$$

où $\zeta(\beta) = \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{r^\beta}$ est la fonction zéta de Riemann. Il reste à montrer que :

$$\sup_{P\vee P'<\varepsilon} |\int_P \psi_{s,t} - \int_{P'} \psi_{s,t}| \to 0 \qquad \text{quand} \qquad \varepsilon \searrow 0.$$

Ce qui implique l'existence de $I\psi$ comme la limite $\lim_{|P|\to 0} \int_P \psi$. Sans perte de généralité on peut supposer que P' est plus fine que P et donc $|P| \vee |P'| = |P|$ et

$$\int_P \psi - \int_{P'} \psi = \sum_{[u,v]\in P} \left(\psi_{u,v} - \int_{P'\cap[u,v]} \psi\right).$$

Ensuite, pour $|P| < \varepsilon$ on peut utiliser l'inégalité maximale pour voir que :

$$|\int_P \psi - \int_{P'} \psi| \leq 2^\beta \|\delta\psi\|_\beta \zeta(\beta) \sum_{[u,v]\in P} |u-v|^\beta = O(|P|^\beta) \leq O(|\varepsilon|^\beta),$$

puisque $\beta > 1$ ce qui conclut l'argument. □

Pour clarifier l'impact du lemme fondamental (Swing Lemma), on doit souligner que ce lemme reste valable indépendamment de la régularité α-hôlderienne et la construction de ψ, tant qu' on choisit ψ telle que $\|\delta\psi\|_\beta < \infty$ pour $\beta > 1$. Par conséquent, il dépend seulement du choix de la fonction ψ. On va montrer l'utilisation du lemme fondamental dans le contexte de l'intégration de Young. Comme nous l'avons déjà mentionné, on veut définir une intégrale de la forme $\int_s^t Y_r dX_r = I(\psi)_{s,t}$, alors si on choisit $\psi_{s,t} = Y_s X_{s,t}$ où $|X_{s,t}| \lesssim |t-s|^\alpha$ et $|Y_{s,t}| \lesssim |t-s|^\gamma$, on peut voir que :

$$\delta\psi_{s,u,t} = -Y_{s,u} X_{u,t},$$

et que $|Y_{s,u}X_{u,t}| \lesssim |t-s|^{\alpha+\gamma}$. maintenant, soit $\alpha + \delta > 1$. On sait d'aprés le lemme fondamental que $|I(\psi)_{s,t} - \psi_{s,t}| \lesssim \|\delta\psi\|_\beta |t-s|^\beta$ pour $\beta > 1$. Donc, on a besoin de vérifier que $\|\delta\psi\|_\beta < \infty$. Cela vient directement du fait que $|Y_{s,u}X_{u,t}| \lesssim |t-s|^{\alpha+\gamma}$, on définit $\beta = \alpha + \gamma$, et on voit que le lemme fondamental (Swing Lemma) est satisfait, et que $\psi_{s,t}$ "détermine" l'intégrale sur des petits intervalles de temps, dans le sens que

$$|I(\psi)_{s,t}| \leq |\psi_{s,t}| + o(|t-s|^\beta).$$

Lorsque la régularité de X et Y est plus faible, on a besoin de faire étendre la fonction ψ pour qu'elle contient des dérivées supérieures sur Y et des intégrales itérées plus réelles de X. Comme on le verra, on peut construire une fonction ψ dans le cas où $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ en introduisant la première et la deuxième dérivée de Y et le chemin rugueux $(1, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) \in \mathcal{C}^\alpha$. En réalité, le sens de dérivée dans ce contexte est un peu ambigueux, la dérivée de Y n'est pas nécessairement unique, nous éxigeons seulement que les termes restants d'une approximations de type Taylor soient finis par rapport à la norme Hölderienne.

Le lemme fondamental conduit naturellement à bien choisir un espace de processus intégrables Y et de leurs dérivés, de sorte qu' on peut facilement construire des intégrales. Pour qu' un tel espace bien défini, on discute le cas où $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ et on veut définir l'intégrale d'une fonction $f(X)$ par rapport à X. Si on regarde une fonction $f \in \mathrm{C}_b^3$ et $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha, \alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, on a l'extension de Taylor de f dans $X^{(1)}$ comme suit :

$$f(X_t^1) - f(X_s^{(1)}) = Df(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(1)} + R_{s,t}^{f(X^{(1)})},$$

où $R_{s,t}^{f(X)}$ est le terme restant de la série de Taylor. La question devient alors quelle type de régularité qui peut être induit sur le terme reste $R_{s,t}^{f(X)}$. En utilisant le théorème de Lagrange, On a $|R_{s,t}^{f(X^{(1)})}| \leq |D^2 f|_\infty |X_{s,t}^{(1)} \otimes X_{s,t}^{(1)}| \lesssim |t-s|^{2\alpha}$. Maintenant, si on regarde l'intégrale de $f(X^{(1)})$ par rapport au chemin $(1, X^{(1)}, X^{(2)})$, on voit que :

$$\int_s^t f(X_r^{(1)})dX_r^{(1)} = \int_s^t f(X_s^{(1)})dX_r^{(1)} + \int_s^t Df(X_s^{(1)})X_{s,r}^{(1)}dX_r^{(1)} + \int_s^t R_{s,t}^{f(X^{(1)})}dX_r.$$

Si on peut prouver que $\int_s^t R_{s,t}^{f(X^{(1)})dX_r}$ tend vers 0 quand $s \to t$ alors les intégrales

$$\int_s^t f(X_s^{(1)})dX_r + \int_s^t Df(X_s^{(1)})X_{s,r}^{(1)}dX_r^{(1)}$$

déterminent complètement $\int_s^t f(X_r^{(1)})dX_r^{(1)}$ dans la limite lorsque $s \to t$. En fait, on peut calculer ces intégrales plus explicitement, car nous pouvons déplacer des parties des intégrants comme suit,

$$\int_s^t f(X_r^{(1)})dX_r + \int_s^t Df(X_s^{(1)})X_{s,r}^{(1)}dX_r$$

$$= f(X_s^1)\int_s^t dX_r^{(1)} + Df(X_s^{(1)}) + Df(X_s^{(1)})\int_s^t X_{s,r}^{(1)}dX_r^{(1)}.$$

On a déjà défini les deux intégrales du côté droit de l'équation ci-dessus comme suit :

$$\int_s^t dX_r^{(1)} := X_{s,t}^{(1)} \qquad \text{et} \qquad \int_s^t X_{s,r}^{(1)}dX_r^{(1)} := X_{s,t}^{(2)}$$

.
Nous avons donc l'approximation suivante :

$$\int_s^t f(X_r^{(1)}dX_r^{(1)} \approx f(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(1)} + Df(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(2)},$$

En supposant que $\int_s^t R_{s,r}^{f(X^{(1)})} dX_r \to 0$ quand $s \to t$. Revenons au lemme fondamental, si on choisit $\psi_{s,t} := f(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(1)} + Df(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(2)}$, on peut obtenir :

$$\begin{aligned}
\delta\psi_{s,u,t} &= f(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(1)} + Df(X_s^{(1)})X_{s,t}^{(2)} - f(X_s^{(1)})X_{s,u}^{(1)} \\
&- Df(X_s^{(1)})X_{s,u}^{(2)} - f(X_u^{(1)})X_{u,t}^{(1)} - Df(X_u^{(1)})X_{u,t}^{(2)} \\
&= -f(X^{(1)})_{s,u}X_{u,t}^{(1)} + Df(X_s^{(1)})(X_{u,t}^{(2)} + X_{s,u}^{(1)} \otimes X_{u,t}^{(1)}) - Df(X_u^{(1)})X_{u,t}^{(2)} \\
&= -Df(X^{(1)})_{s,u}X_{u,t}^{(2)} - R_{s,u}^{f(X^{(1)})}X_{u,t}^{(1)}
\end{aligned}$$

et on voit que $|\delta\psi_{s,u,t}| \lesssim |t-s|^{3\alpha}$. Par le lemme fondamental (Swing Lemma), l'intégrale donnée par :

$$\int_s^t f(X_r)dX_r := \lim_{|P|\to 0} \sum_{[u,v]\in P} \psi_{u,v},$$

existe, et bien définie. Pour s'adapter à des régularités faibles, il semble nécessaire de faire des approximations de Taylor d'ordre supérieur pour obtenir la régularité suffisante sur le reste $R^{f(X)}$. Il est important donc de construire l'espace des processus intégrables comme fonctions $Y : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ de sorte que le terme restant de l'extension de "type Taylor" est d'une certain régularité dépendant du chemin rugueux. La définition suivante est à la construction d'un tel espace pour les valeurs $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

2.8 L'espace des chemins rugueux contrôlés

Notons que l'objectif de notre travail n'est pas consacré à l'étude des chemins rugueux contrôlées et le but de cette section c'est juste pour présenter quelque estimations concernant la théorie du contrôle des chemins rugueux.

Définition 2.8.1. *Soit* $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T],V)$, *on dit que* $Y \in \mathrm{C}^\alpha([0,T],W)$ *est contrôlé par* $\mathbf{X}$ *s'il existe deux fonctions* $Y' : [0,T] \to \mathcal{L}(V,W)$ *et* Y'' :

$[0,T] \to \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V,W))$ *telle que les termes restants* $R^{Y^{(1)}}, R^{Y^{(2)}}$, *et* $R^{y^{(3)}}$ *donné implicitement par les relations*

$$Y_{s,t} = Y'_s X^{(1)}_{s,t} + Y''_s X^{(2)}_{s,t} + R^{Y^{(3)}}_{s,t}$$

$$Y'_{s,t} = Y''_s X^{(1)}_{s,t} + R^{Y^{(2)}}_{s,t}$$

$$Y''_{s,t} = R^{Y^{(1)}}_{s,t},$$

satisfaites $\|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha} < \infty, \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha} < \infty$ *et* $\|R^{Y^{(1)}}\|_{\alpha} < \infty$. *Ceci définit l'espace des chemins rugueux contrôlés, qui est donné formellement par :*

$$D^\alpha_X := \left\{ (Y, Y', Y'') \in \mathrm{C}^\alpha([0,T], W) : \sum_{i=1}^{3} \|R^{Y^i}\|_{i\alpha} < \infty \right\}.$$

On équipera cet espace d'une semi-norme

$$\|(Y, Y', Y'')\|_{D^\alpha_X} := \|R^{Y^{(1)}}\|_{\alpha} + \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha} + \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha}.$$

En introduisant les valeurs initiales de Y et de ses dérivés, on obtient la norme

$$(Y, Y', Y'') \to |Y_0| + |Y'_0| + |Y''_0| + \|(Y, Y', Y'')\|_{D^\alpha_X}.$$

muni de cette norme, l'espace D^α_X devient un espace Banach régulier.

Remarque : En conséquence de la façon dont nous avons défini cet espace, si $(Y, Y', Y'') \in D^\alpha_X$ on obtient les bornes suivantes

$$\|Y''\|_\alpha = \|R^{Y^{(1)}}\|_\alpha$$

$$\|Y'\|_\alpha \lesssim \|R^{Y^{(1)}}\|_\alpha + \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha}$$

$$\|Y\|_\alpha \lesssim \|R^{Y^{(1)}}\|_\alpha + \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha} + \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha}$$

Ensuite, on va présenter des estimations utiles.

Proposition 2.8.1. *Soit* $(Y, Y', Y'') \in D_X^\alpha$ *pour un chemin fixe* $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], V)$, *alors on a les trois estimations suivantes :*

$$\|Y\|_\alpha \leq |Y'|_\infty \|X^{(1)}\|_\alpha + |Y''|_\infty \|X^{(2)}\|_\alpha + \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha} T^{2\alpha}$$

$$\leq C_{T,\alpha} \left(1 + \|X^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)}\|_{2\alpha}\right) (|Y_0'| + |Y_0''| + \|(Y, Y', Y'')\|_{D_X^\alpha}),$$

$$(2) \qquad \|Y'\|_\alpha \leq D_{T,\alpha}(1 + \|X^{(1)}\|_\alpha)(|Y_0''| + \|(Y, Y', Y'')\|_{D_X^\alpha})$$

$$(3) \qquad \|Y\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \leq K_{T,\alpha} \left(1, \|X^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)}\|_{2\alpha}\right) (|Y_0'| + |Y_0''| + \|(Y, Y', Y'')\|_{D_X^\alpha}).$$

Où C_T^α *est une constante qui dépend uniquement de* T *et* α *et peut être choisie uniformément sur* T *pour* $T \in (0, 1]$.

Preuve Les résultats suivent directement en considérant que

$$Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t}^{(1)} + Y_s'' X_{s,t}^{(2)} + R_{s,t}^{Y^{(3)}},$$

et

$$|Y'|_\infty \leq |Y_0'| + \|Y'\|_\alpha T^\alpha,$$

où il en va de même pour la dérivée seconde de Y.

En sachant cela, il est facile de montrer également que pour une constante appropriée D dépendant de T et α et il en est de même pour cette estimation. Dans le théorème suivant , on utilisera le lemme fondamental (Swing Lemma) et l'espace des chemins contrôlés définis ci-dessus pour montrer comment on peut construire l'intégrale approximative lorsque $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$.

Théorème 2.1. *(Lyon's Theorem) Soit* $\mathbf{X} = (1, X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) \in \mathcal{C}^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ *pour* $T > 0$ *et* $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, *et soit* $(Y, Y', Y'') \in D_X^\alpha$. *Alors l'intégrale rugueuse définie par :*

$$\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r = \lim_{|P| \to 0} \sum_{[u,v] \in P} (Y_u X_{u,v}^{(1)} + Y_u' X_{u,v}^{(2)} + Y'' X_{u,v}^{(3)}),$$

existe et elle a la borne suivante :

$$|\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t}^{(1)} - Y_s' X_{s,t}^{(2)} - Y_s'' X_{s,t}^{(3)}| \lesssim \left(\sum_{i=1}^{3} \|X^{(4-i)}\|_{(4-i)_\infty} \|R^{Y^{(i)}}\|_{i\alpha} \right) |t-s|^{4\alpha} \tag{2.5}$$

Preuve *On veut trouver une fonction* ψ *telle que* $\|\delta\psi\|_\beta < \infty$ *pour certains* $\beta > 0$. *Si on définit la fonction* ψ *telle que :*

$$\psi_{s,t} = Y_s X_{s,t}^{(1)} + Y_s' X_{s,t}^{(2)} + Y_s'' X_{s,t}^{(3)},$$

alors

$$\delta\psi_{s,u,t} = -(Y_{s,u} - Y_s' X_{s,u}^{(1)} - Y_s'' X_{s,u}^{(2)}) X_{u,t}^{(1)} - (Y_{s,u}' - Y_s'' X_{s,u}^{(1)}) X_{u,t}^{(2)} - Y_{s,u}'' X_{u,t}^{(3)}$$

$$= - \sum_{i=1}^{3} R_{s,u}^{Y^{(i)}} X_{u,t}^{(4-i)}.$$

Maintenant, par le lemme fondamental (Swing Lemma), on voit que :

$$|\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t}^{(1)} - Y_s' X_{s,t}^{(2)} - Y_s'' X_{s,t}^{(3)}| \lesssim \left(\sum_{i=1}^{3} \|X^{(4-i)}\|_{(4-i)_\alpha} \|R^{Y^{(i)}}\|_{i\alpha} \right) |t-s|^{4\alpha}$$

ce qui implique que l'intégrale rugueuse existe. □

Remarque La façon la plus simple de voir l'intégrale rugueuse est de regarder :

$$\int_0^\cdot F(X_s) d\mathbf{X}_s$$

lorsque F est suffisamment régulière.

On va donner un bref argument sur la façon de construire cette intégrale . Soit $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$ une fonction C_b^3 et soit $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha, \alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. On définit $Y_s = F(X_s), Y_s' = DF(X_s)$ et $Y_s'' = D^2F(X_s)$. Les fonctions restantes sont données de la manière habituelle,

$$\begin{array}{rcc} R_{s,t}^{Y^{(3)}} & = & Y_{s,t} - Y_s' X_{s,t} - Y_s'' X_{s,t}^{(1)} \\ R_{s,t}^{Y^{(2)}} & = & Y_{s,t}' - Y_s'' X_{s,t}^{(1)}, \\ R_{s,t}^{Y^{(1)}} & = & Y_{s,t}'' \end{array}$$

Donc on a :

$$\|R^{Y^{(1)}}\|_{\alpha} \leq \|D^{(3)}F\|_{\infty}\|X\|_{\alpha}$$
$$\|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha} \leq \frac{1}{2}\|D^{(3)}F\|_{\infty}\|X\|_{\alpha}^{2}$$
$$\|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha} \leq \frac{1}{6}\|D^{(3)}F\|_{\infty}\|X\|_{\alpha}^{3}.$$

En effet, on sait que F est trois fois continuement différentiable et bornée, et donc Lipschitzienne. Alors, les trois premières inégalités peuvent être trouvées de la même manière ; En regardant le reste de Lagrange d'une extension de Taylor. Pour trouver les bornes pour $R^{Y^{(3)}}_{s,t}$, on regarde une extension de Taylor par rapport au terme reste de Lagrange

$$R^{Y^{(3)}}_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X^{(1)}_{s,t} - Y''_s X^{(2)}_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X^{(1)}_{s,t} - \frac{1}{2}Y'' X^{(1)}_{s,t} \otimes X^{(1)}_{s,t}$$
$$= \frac{1}{6}D^3 F(X^{(1)}_s + \xi X^{(1)}_{s,t}) X^{(1)\otimes 3}_{s,t},$$

où $\xi \in (0,1)$, et par la régularité de F on sait que D^2F est un opérateur symétrique et puisque $Sym(X^{(2)}_{s,t}) = \frac{1}{2}X^{(1)}_{s,t} \otimes X^{(1)}_{s,t}$ ce qui précède. Maintenant, l'estimation α-Hôlderienne se déduit directement, et on voit que $|R^{Y^{(3)}}_{s,t}| \lesssim |t-s|^{3\alpha}$. Le même argument s'applique à $R^{Y^{(2)}}$ et $R^{Y^{(1)}}$. Donc par le théorème (Lyon's Theorem) l'intégrale $\int_0^\cdot F(X_s)d\mathbf{X}_s$ est bien définie. □

Remarque On veut souligner que les bornes trouvées dans le théorème (Lyon's Theorem) impliquent qu'il existe une application continue de $D^\alpha_X([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n))$ vers $D^\alpha_X([0,T],(\mathbb{R}^n))$ tel que :

$$(Y,Y',Y'') \in D^\alpha_X([0,T],\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^n)) \mapsto \left(\int_0^\cdot Y_r d\mathbf{X}_r, Y, Y'\right) \in D^\alpha_X([0,T],\mathbb{R}^n).$$

En effet, si on définit $(Z,Z',Z'') = (\int_0^\cdot Y_r d\mathbf{X}_r, Y, Y')$, puis on définit les fonctions restantes $R^{Z^{(i)}}$ pour $i = 1,2,3$ similaires comme précédemment,

$$R^{Z^{(3)}}_{s,t} = \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X^{(1)}_{s,t} - Y'_s X^{(2)}_{s,t}$$
$$R^{Z^{(2)}}_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s X^{(1)}_{s,t}$$

$$R^{Z^{(1)}}_{s,t} = Y'_{s,t}.$$

Ensuite, par l'équation (2.5), on sait que :

$$\left|R^{Z^{(3)}}_{s,t}\right| = |\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X^{(1)}_{s,t} - Y'_s X^{(2)}_{s,t}|$$

$$\lesssim |Y''|_\infty \|X^{(3)}\|_{3\alpha}|t-s|^{3\alpha} + \left(\sum_{i=1}^{3} \|X^{(4-i)}\|_{(4-i)\alpha}\|R^{Y^i}\|_{i\alpha}\right)|t-s|^{4\alpha}.$$

Ensuite, on sait

$$\|R^{Z^{(2)}}\|_{2\alpha} = \|Y - Y'X^{(1)}\|_{2\alpha} \leq |Y''|_\infty \|X^{(2)}\|_{2\alpha} + \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha} < \infty$$

et

$$\|R^{Z^{(1)}}\|_{\alpha} = \|Y\|_{\alpha} \leq |Y''|_\infty \|X^{(1)}\|_{\alpha} + \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha} < \infty$$

dû de fait que :

$$(Y, Y', Y'') \in D^\alpha_X([0,T], \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n))$$

et donc,

$$(\int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r, Y, Y') \in D^\alpha_X([0,T], \mathbb{R}^n).$$

Ce qui rend la continuité de cette application évidente dans la prochaine section.
Le dernier sujet de cette partie, sera sur la stabilité des intégrales rugueuses, où on donne des bornes essentielles qu' on utilise dans les sections ultérieures.

2.9 La stabilité des intégrales rugueuses

On étudie la différence de deux chemins contrôlés $(Y, Y', Y'') \in D^\alpha_X$ et $(\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) \in D^\alpha_{\tilde{X}}$. Cela pourrait sembler un peu étrange, car les espaces D^α_X et $D^\alpha_{\tilde{X}}$ sont deux espaces différents (car les éléments des espaces sont controlés par deux chemins différents). Pourtant, si on peut définir une fonction de type "distance" entre les éléments de ces espaces , nous pourrions l'utiliser dans, par exemple l'approximation. Nous allons commencer cette section avec une définition d'une fonction de distance.

Définition 2.9.1. *Soit* $(Y, Y', Y'') \in D_X^\alpha$ *et* $(\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) \in D_{\tilde{X}}^\alpha$*, alors on définit une fonction de distance entre les chemins comme suit :*

$$d_{X,\tilde{X},\alpha}(Y, Y', Y''; \tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) := \sum_{i=1}^{3} \|R^{Y^i} - R^{\tilde{Y}^i}\|_{i\alpha}.$$

Nous allons suivre un lemme donnant une estimation de la différence entre deux chemins.

Lemme 2.9.0.2. *Soit* $\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}} \in \mathcal{C}^\alpha$ *et* $(Y, Y', Y'') \in D_X^\alpha, (\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) \in D_{\tilde{X}}^\alpha$ *avec la propriété :*

$$|Y_0| + |Y_0'| + |Y_0''| + \|Y, Y', Y''\|_{D_X^\alpha} \leq M \in \mathbb{R}^+ \qquad et$$

$$d_\alpha(0, \mathbf{X}) := \|X^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)}\|_{2\alpha} + \|X^{(3)}\|_{3\alpha} \leq M$$

Avec les mêmes bornes pour $(\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''})$ *et* $\tilde{\mathbf{X}}$*, et par l'utilisation de la Remarque (2.1), on peut définir :*

$$(Z, Z', Z'') = \left(\int_0 Y_s d\mathbf{X}_s, Y, Y' \right),$$

et de la même manière on définit $(\tilde{Z}, \tilde{Z'}, \tilde{Z''})$*. Ensuite, nous avons les estimations localement lipschitziennes suivantes :*

$$d_{X,\tilde{X},\alpha}(Z, Z', Z''; \tilde{Z}, \tilde{Z'}, \tilde{Z''}) \leq C_M(d_\alpha \left(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}\right) + |Y_0'' - \tilde{Y_0''}| + d_{X,\tilde{X}\alpha} \left(Y, Y', Y''; \tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}\right) T^\alpha)$$

où $C_M := C(T, \alpha, M)$ *est uniforme en* $T \leq 1$.

Preuve On utilisera l'inégalité simple $|xy - \tilde{x}\tilde{y}| \leq |x||y - \tilde{y}| + |x - \tilde{x}||\tilde{y}|$ argument à travers la preuve. On regarde la différence :

$$R_{s,t}^{Z^{(3)}} - R_{s,t}^{\tilde{Z}^{(3)}} = \int_s^t Y_r d\mathbf{X}_r - Y_s X_{s,t}^{(1)} - Y_s' X_{s,t}^{(2)} - \left(\int_s^t \tilde{Y}_r d\tilde{\mathbf{X}}_r - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t}^{(1)} - \tilde{Y'}_s \tilde{X}_{s,t}^{(2)} \right)$$

et on définit $\psi_{s,t} = Y_s X_{s,t}^{(1)} + Y_s' X_{s,t}^{(2)} + Y_s'' X_{s,t}^{(3)}$ et $\Delta_{s,t} := \psi_{s,t} - \tilde{\psi}_{s,t}$, on trouve

$$|R_{s,t}^{Z^{(3)}} - R_{s,t}^{\tilde{Z}^{(3)}}| = |(I\Delta)_{s,t} - \Delta_{s,t} + Y_s'' X_{s,t}^{(3)} - \tilde{Y''}_s^{(3)}|$$

$$\leq C\|\delta\Delta\|_{4\alpha}|t - s|^{4\alpha} + |Y_s'' X_{s,t}^{(3)} - \tilde{Y''}_s X_{s,t}^{(3)}|,$$

où

$$\delta\Delta_{s,u,t} = -\sum_{i=1}^{3} R_{s,u}^{Y^{(i)}} X_{u,t}^{(4-i)} + \sum_{i=1}^{3} R_{s,u}^{\tilde{Y^{(i)}}} \tilde{X}_{u,t}^{(4-i)}.$$

En utilisant l'inégalité (3.3), on obtient l'estimation suivante :

$$|Y''_s X_{s,t}^{(3)} - \tilde{Y''}_s \tilde{X}_{s,t}^{(3)}| \leq |Y''_s||X_{s,t}^{(3)} - \tilde{X}_{s,t}^{(3)}| + |Y''_s - \tilde{Y''}_s||\tilde{X}_{s,t}^{(3)}|.$$

Cela implique que :

$$\|R^{Z^{(3)}} - R^{\tilde{Z^{(3)}}}\|_{3\alpha} \leq C\|\delta\Delta\|_{4\alpha}T^\alpha + C_M\|X^{(3)} - \tilde{X^{(3)}}\|_{3\alpha}$$

$$+C_M\left(\left|Y''_0 - \tilde{Y''}_0\right| + T^\alpha\|R^{Y^{(1)}} - R^{\tilde{Y^{(1)}}}\|_\alpha\right).$$

de même, nous trouvons que :

$$\|R^{Z^{(2)}} - R^{\tilde{Z^{(2)}}}\|_{2\alpha} \leq \|R^{Y^{(3)}} - R^{\tilde{Y^{(3)}}}\|_{3\alpha}T^\alpha + C_M\|X^{(2)} - \tilde{X^{(2)}}\|_{2\alpha}$$

$$+C_M\left(\left|Y''_0 - \tilde{Y''}_0\right| + T^\alpha\|R^{Y^{(1)}} - R^{\tilde{Y^{(1)}}}\|_\alpha\right).$$

Enfin on regarde $R^{Z^{(1)}} - R^{\tilde{Z}^{(1)}}$ et on trouve :

$$\|R^{Z^{(1)}} - R^{\tilde{Z^{(1)}}}\|_\alpha = \|Y' - \tilde{Y'}\|_\alpha = \|Y''X^{(1)} - \tilde{Y''}\tilde{X^{(1)}} + R^{Y^{(2)}} - R^{\tilde{Y^{(2)}}}\|_\alpha$$

$$\leq C_M\|X^{(2)} - \tilde{X^{(2)}}\|_\alpha + C_M\left(\left|Y''_0 - \tilde{Y''_0}\right| + T^\alpha\|R^{Y^{(1)}} - R^{\tilde{Y^{(1)}}}\|_\alpha\right) + \|R^{Y^{(2)}} - R^{\tilde{Y^{(2)}}}\|_\alpha T^\alpha.$$

Notons que tous les termes $\|R^{Y^{(i)}} - R^{\tilde{Y^{(i)}}}\|_{i\alpha}$ pour $i = 1, 2, 3$ sont multipliés par T^α. En collectant ces termes, nous obtenons l'estimation suivante :

$$d_{X,\tilde{X},\alpha}(Z, Z', Z''; \tilde{Z}, \tilde{Z}', \tilde{Z}'')$$

$$\leq C_M(d_\alpha(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) + |Y''_0 - \tilde{Y''_0}| + d_{X,\tilde{X},\alpha}(Y, Y', Y''; \tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''})T^\alpha),$$

Ce qui achève la preuve.

2.10 Compositions des chemins rugueux contrôlés avec des fonctions régulières

Un résultat important pour prouver l'existence et l'unicité des équations différentielles rugueuses est la composition des fonctions régulières avec des chemins rugueux contrôlés. Dans cette section, nous allons donner des estimations importantes, et regarder la stabilité des fonctions régulières composées avec des trajectoires rugueuses contrôlés.

2.10.1 Composition avec des fonctions régulières :

Soit $f \in \mathrm{C}_b^3(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On veut montrer que si $(Y, Y', Y'') \in D_X^\alpha([0,T], \mathbb{R}^m)$ tel que :

$$Y : [0,T] \to \mathbb{R}^m,$$

$$Y' : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$$

et

$$Y'' : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}^m)$$

pour certaines $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha(\mathbb{R}^d)$, alors $(f(Y), f(Y'), f(Y'')) \in D_X^\alpha$. Nous devons donc trouver des dérivées appropriés de f pour obtenir la régularité nécessaire pour les termes restants $R^{f(Y)^{(i)}}, i = 1, 2, 3$. C'est-à-dire, nous sommes intéresseés à trouver des dérivées $f' : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ et $f'' : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}^n)$ telles que le terme restant $R_{s,t}^{f(Y)^{(3)}}$ est donnée par la relation :

$$f(Y)_{s,t} = f(Y_s)' X_{s,t}^{(1)} + f(Y_s)'' X_{s,t}^{(2)} + R_{s,t}^{f(Y)^{(3)}},$$

est finie dans la $3\alpha-$norme, et de même pour les deux autres termes restants. Si nous faisons une approximations de Taylor de $f(Y_t)$, on trouve :

$$f(Y_t) - f(Y_s) = Df(Y_s)Y_{s,t} + \frac{1}{2}D^2 f(Y_s)Y_{s,t}^{\otimes 2} + \bar{R}_{s,t}^f.$$

Puisque $f \in \mathrm{C}_b^3$, et par le théorème du terme restant de Lagrange, on a $\left\|\bar{R}_{s,t}^f\right\|_{3\alpha} < \infty$. En outre, on a $Y_{s,t} = Y_s' X_{s,t}^{(1)} + Y_s'' X_{s,t}^{(2)} + R_{s,t}^{Y^{(3)}}$, et on peut l'insérer dans l'équation ci-dessus , on trouve :

$$f(Y_t) - f(Y_s) = Df(Y_s)\left(Y'_s X^{(1)}_{s,t} + Y''_s X^{(2)}_{s,t} + R^{Y(3)}_{s,t}\right)$$

$$+\frac{1}{2}D^2 f(Y_s)\left(Y'_s X^{(1)}_{s,t} + Y''_s X^{(2)}_{s,t} + R^{(3)}_{s,t}\right)^{\otimes 2} + \bar{R}^f_{s,t},$$

de cette équation, on peut calculer :

$$f(Y_t) - f(Y_s) = Df(Y_s)Y'_s X^{(1)}_{s,t} + Df(Y_s)Y''_s X^{(2)}_{s,t}$$

$$+\frac{1}{2}D^2 f(Y_s)(Y'_s X^{(1)}_{s,t})^{\otimes 2} + R^{Y(3)}_{s,t} + \bar{R}^f_{s,t} + o(|t-s|)$$

on a $\left|R^{Y(3)}_{s,t} + \bar{R}^f_{s,t} + o(|t-s|)\right| \lesssim |t-s|^{3\alpha}$, on veut construire les dérivées de f par les termes restants lorsque on revient à $R^{Y(3)}_{s,t} + \bar{R}_{s,t} + o(|t-s|)$. On choisit $f(Y_s)' = Df(Y_s)Y'_s$, ce qui donne les termes :

$$Df(Y_s)Y''_s X^{(2)}_{s,t} + \frac{1}{2}D^2 f(Y_s)(Y'_s X^{(1)}_{s,t})^{\otimes 2}.$$

On note ici que $(Y'_s X^{(1)}_{s,t})^{\otimes 2} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, et $D^2 f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m\times m}, \mathbb{R}^n)$ et $D^2 f$ symétrique. De plus, si $sym(Y'_s X^{(2)}_{s,t} Y'_s) = \frac{1}{2}(Y'_s X^{(1)}_{s,t})^{\otimes 2}$, on trouve un condidat pour la deuxième dérivée, notée :

$$f(Y)'' = Df(Y)Y'' + D^2 f(Y)(Y')^{\otimes 2}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^{d\times d}, x \longmapsto Df(Y)Y''x + D^2 f(Y)Y'xY'$, et $f(Y)'' : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d\times d}, \mathbb{R}^n)$. Il est facile de montrer que : $(Y'_s X^{(2)}_{s,t} Y'_s) = \frac{1}{2}(Y'_s X^{(1)}_{s,t})^{\otimes 2}$. En effet, du fait que $\mathbf{X}$ est géométrique, on peut vérifier cela :

$$\begin{aligned} sym(Y'_s X^{(2)}_{s,t} Y'_s) &= \frac{1}{2}\left(Y'_s X^{(2)}_{s,t} Y'_s + \left(Y'_s X^{(2)}_{s,t} Y'_s\right)^T\right) = Y'_s sym(X^{(2)}_{s,t})Y'_s \\ &= Y'_s \frac{1}{2} X^{(1)}_{s,t} \otimes X^{(1)}_{s,t} Y'_s = \frac{1}{2}\left(Y'_s X^{(1)}_{s,t}\right)^{\otimes 2} \end{aligned}$$

De plus, les candidats $f(Y)' = Df(Y)Y'$ et $f(Y)'' = Df(Y)Y''+D^2f(Y)(Y')^{\otimes 2}$ sont convenables. On obtient que $R^{f(Y)^{(3)}}$ est donné implicitement par la relation :

$$f(Y)_{s,t} = Df(Y_s)Y'_sX^{(1)}_{s,t} + (D^2f(Y_s)(Y'_s)^{\otimes 2} + Df(Y_s)Y''_s)X^{(2)}_{s,t} + R^{f(Y)^{(3)}}_{s,t},$$

comme ce choix satisfait $\left\|R^{f(Y)^{(3)}}\right\|_{3\alpha} < \infty$. Il suit du fait que $R^{f(Y)^{(3)}} = f(Y)_{s,t} - f(Y)_{s,t} - f(Y)'_sX^{(1)}_{s,t} - f(Y)''_sX^{(2)}_{s,t}$, donc en insérant les dérivées que nous avons choisis ci-dessus dans cette relation, et les calculs qu'on a effectués, on trouve que :

$$R^{f(Y)^{(3)}} = R^{Y^{(3)}}_{s,t} + \bar{R}^f_{s,t} + o(|t-s|)$$

en utilisers la formule de Lagrange des termes restants pour trouver $\left|\bar{R}^f_{s,t}\right| \leq C|Y_{s,t}|^3$.

$$\|R^{f(Y)^{(3)}}\|_{3\alpha} \leq C\left(\|Y\|^3_\alpha + \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha}\right),$$

où C dépend de $|f|_{C^3_b}, T$ et α se déduisent des calculs précédents.

Maintenant, on vérifie que les termes $R^{f(Y)^{(1)}}$ et $R^{f(Y)^{(2)}}$ sont bornées respectivement dans la $\alpha-$norme et $2\alpha-$norme selon le choix de $f(Y)'$ et $f(Y)''$. Regardons $R^{f(Y)^{(2)}}$,

$$R^{f(Y)^{(2)}}_{s,t} = (Df(Y)Y')_{s,t} - (D(f(Y_s)Y''_s + D^2f(Y_s)(Y'_s)^{\otimes 2})X^{(1)}_{s,t}.$$

Par les calculs, on trouve :

$$R^{f(Y)^{(2)}}_{s,t} = Df(Y_t)Y'_{s,t} + Df(Y)_{s,t}Y'_s - (D^2f(Y_s)(Y'_s)^{\otimes 2} + Df(Y_s)Y''_s)X^{(1)}_{s,t}$$

En utilisant le fait que $Y'_{s,t} = Y''_sX^{(1)}_{s,t} + R^{Y^{(2)}}_{s,t}$, on obtient l'expression suivante :

$$R^{f(Y)^{(2)}}_{s,t} = Df(Y)_{s,t}Y''_{s,t}X^{(1)}_{s,t} + (Df(Y)_{s,t} - D^2f(Y_s)Y'_sX^{(1)}_{s,t})Y'_s + Df(Y_s)R^{Y^{(2)}}_{s,t}$$

Si nous procédons maintenant à une approximation de Taylor de premier ordre de $Df(Y)$, c'est-à-dire $Df(Y)_{s,t} = D^2f(Y_s)Y_{s,t} + \bar{R}^{Df}_{s,t}$. alors on sait par le théorème de Lagrange que $\left\|\bar{R}^{Df}_{s,t}\right\|_{2\alpha} < \infty$ puisque $|Y_{s,t}| \lesssim |t-s|^\alpha$. En remplaçant ceci aux l'expression précédente, on trouve :

$$R^{f(Y)^{(2)}}_{s,t} = Df(Y)_{s,t}Y''_{s,t}X^{(1)}_{s,t} + D^2f(Y)_s(Y_{s,t} - Y'_sX^{(1)}_{s,t})Y'_s + Df(Y_s)R^{Y^{(2)}}_{s,t} + \bar{R}^{Df}_{s,t}Y'_s$$
$$= Df(Y)_{s,t}Y''_sX^{(1)}_{s,t} + D^2f(Y)_s(Y''_sX^{(2)}_{s,t} + R^{Y^{(3)}}_{s,t} + \bar{R}^{Df}_{s,t})Y'_s + Df(Y_s)R^{Y^{(2)}}_{s,t}.$$

Maintenant, tous ces termes sont bornés par rapport la $2\alpha-$norme, c'est-à-dire, on peut voir que :

$$\left|Df(Y)_{s,t}Y''_sX^{(1)}_{s,t}\right| \leq |Df|_\infty|Y''|_\infty|Y_{s,t}|\left|X^{(1)}_{s,t}\right| \lesssim |t-s|^{2\alpha},$$

et

$$\left|D^2f(Y)_s(Y''_sX^{(2)}_{s,t} + R^{Y^{(3)}}_{s,t})Y'_s\right| \leq |D^2f|_\infty|Y'|_\infty(|Y''|_\infty\left|X^{(2)}_{s,t}\right| + \left|R^{Y^{(3)}}_{s,t}\right| + \left|\bar{R}^{Df}_{s,t}\right|) \lesssim |t-s|^{2\alpha},$$

et enfin, on a $\left|Df(Y_s)R^{Y^{(2)}}_{s,t}\right| \leq |Df(Y)|_\infty\left|R^{Y^{(2)}}_{s,t}\right| \lesssim |t-s|^{2\alpha}$. Par conséquent, si on choisit la première et la seconde dérivée de f telle que :

$$f(Y)_t = f(Y_t), \quad f(Y)'_t = Df(Y_t)Y'_t, \quad f(Y)''_t = D^2f(Y_t)(Y'_t)^{\otimes 2} + Df(Y_t)Y''_t$$

Nous avons que tous les termes restants, donnés implicitement par les relations habituelles (section L'espace des chemins rugueux contrôlés) sont bornés dans leurs $\alpha-$métriques. Ensuite, on cite un théorème donnant une borne appropriée pour la D^α_X semi-norme d'une fonction régulière composée d'un chemin contrôlé, que nous utilisons plus tard pour montrer l'existence pour EDRs.

Théorème 2.2. *Soit* $f \in C^3_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), (Y, Y', Y'') \in D^\alpha_X([0,T], \mathbb{R}^m)$ *pour* $\mathbf{X} \in \mathcal{C}^\alpha_g([0,T], \mathbb{R}^d)$, *avec* $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$, *alors le chemin rugueux contrôlé* $(f(Y), f(Y)', f(Y)'') \in D^\alpha_X([0,T], \mathbb{R}^n)$ *où* $f(Y)'$ *et* $f(Y)''$ *sont donnés par les dérivés ci-dessus. Supposons que :*

$$|Y_0| + |Y'_0| + |Y''_0| + \|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X} \leq M \in [1, \infty),$$

et la même borne pour $d_\alpha(0, \mathbf{X})$. *Donc, il existe une constante* C_M *(en fonction de* $T > 0, M, \|f\|_{C^3_b}$, *et* α, *) telle que :*

$$\|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D^\alpha_X}$$
$$\leq C_M\left(1 + \|X^{(1)}\|_\alpha + X^{(2)}\|_{2\alpha}\right)(1 + |Y'_0| + |Y''_0| + \|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X}).$$

2.11 Solution des EDR dirigées par des chemins rugueux

EDR : Equations différentielles rugueuses
Dans cette section, on s'intéresse à des résultats trouvée par Friz et Hairer [1] au cas où la régularité α-hôlderienne sur les chemins rugueux est telle que $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$. Notre objectif est d'établir une méthode pour prouver l'existence de solutions d'équations différentielles de la forme

$$dY_t = f(Y_t)dX_t, \qquad y_0 = x \in \mathbb{R}^d,$$

où $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ est α-hôlderienne rugueuse, avec $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ et $Y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ est la "sortie" du système, et f est une fonction agréable. D'aprés la théorie des EDO (Equation différentielle ordinaire) classiques, nous connaissons ces équations lorsque $X \in \mathrm{C}^1$ et on peut écrire

$$dY_t = f(Y_t)\dot{X}_t dt, \qquad y_0 = x \in \mathbb{R}^d,$$

et une solution est facilement trouvée. Cependant, lorsque X est rugueux, il n'est pas trivial de trouver la solution, ni même de prouver l'existence. La méthode de résolution utilisée dans cette section est basée sur une itération de Picard, et notre preuve est similaire à celle de [16], mais la régularité faible requiert des calculs supplémentaires.

2.11.1 Existence de solutions aux EDRs géométriques

L'objectif de cette section est de prouver l'existence et l'unicité des solutions aux EDR géométriques de la forme

$$dY_t = f(Y)d\mathbf{X}_t,$$

où $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^\alpha([0,T], \mathbb{R}^d)$ et f est une fonction suffisamment lisse $f : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. Nous établirons le résultat en montrant qu'il existe un point fixe Y sur un intervalle assez petit $[0, T_0]$, puis on peut itérer la procédure sur l'intervalle $[T_0, 2T_0]$ et soit $Y_0 f(T_0)$ sur cet intervalle,

Théorème 2.3. *Soit* $\frac{1}{4} < \alpha < \beta < \frac{1}{3}$ *et* $[0,T] \subset [0,1]$*, et soit* $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}) \in \mathcal{C}_g^{\beta}([0,T], \mathbb{R}^d)$*, avec* $d_\beta(0,\mathbf{X}) \leq M$*. En outre, soit*

$$f \in C_b^4(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)) \quad \textit{et} \quad X \in \mathbb{R}^m,$$

alors il existe un élément unique $(Y, Y', Y'') \in D_X^{\alpha}([0,T], \mathbb{R}^m)$ *tel que*

$$Y_t = x + \int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s,$$

lorsque $t < T$*, et les intégrales* $\int_0^t f(Y_s) d\mathbf{X}_s$ *sont interprétés comme une intégrale rugueuse, dans le sens du théorème (2.1) (Lyon's Theorem) et* $(f(Y), f(Y)', f(Y)'') \in D_X^{\alpha}$ *est construit à partir de* Y *dans le sens de la section (2.10).*

Preuve Dans la raison de simlifier la preuve , nous allons construire la solution comme un point fixe dans l'espace D_X^{α} où $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_g^{\beta}$. Il s'avère que la solution est réellement en D_X^{β} dû au fait que $|Y_{s,t}| \leq |Y'|_\infty |X_{s,t}^{(1)}| + |Y''|_\infty |X_{s,t}^{(2)}| + |R_{s,t}^{Y}|$. À partir de la section (2.10), on sait que pour tout Y, tel que $(Y, Y', Y'') \in D_X^{\alpha}$ et certaines fonctions $f \in \mathrm{C}_b^4(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m))$, on peut définir un chemin contrôlé par :

$$(f(Y), f(Y)', f(Y)'') \in D_X^{\alpha}$$

où $f(Y)' = Df(Y)Y'$ et $f(Y)'' = D^2 f(Y)(Y')^{\otimes 2} + Df(Y)Y''$, comme nous l'avons montionné à la section (2.10). On définit l'application :

$$\mathcal{M}_T(Y, Y', Y'') = \left(x + \int_0^{\cdot} f(Y)_s d\mathbf{X}, f(Y), f(Y)' \right) \in D_X^{\alpha}$$

Ce qu'on appelle l'application d'Itô-Lyons. On veut construire une boule unité B_T dans D_X^{α} telle que, de sorte que, quand on choissit T assez petit, on laisse la boule unité invariante par l'application $\mathcal{M}_T$. Pour ce faire, nous devons définir un centre de la boule B_T. Le point intuitif $(x, f(x), f(x)')$ n'est pas en général dans D_X^{α}, et nous devons donc choisir un autre point comme un centre qui dépend du chemin $X^{(1)}$. Il est simple de vérifier que :

$$t \to (x + f(x) X_{0,t}^{(1), f(x), 0}) \in D_X^{\alpha}.$$

En effet, on peut voir que $\sum_{i=1}^{3}\left\|R^{x+f(x)X^{(1)}}\right\|_{i\alpha} < \infty$ car tous les termes restants sont essentiellement nulles. Et donc, cela semble être un bon centre de la boule B_T. Rappelons que le chemin d'accés ci-dessus est un chemin évalué dans une variable, c'est-à-dirre que nous pouvons définir $\hat{Y}_{s,t} = f(x)X^{(1)}_{0,s}$, et les incréments de $\hat{Y}$ sont donnés par $\hat{Y} = f(x)X^{(1)}_{s,t}$, de plus $\hat{Y'}_s = f(x)$, et donc $\hat{Y'_{s,t}} = 0$. Pour réduire la notation, on définit le centre :

$$(\hat{Y}_., \hat{Y'_.}, \hat{Y''_.}) = (x + f(x)X_{0,.}, f(x), 0).$$

Considérons la norme $|Y_0|+|Y'_0|+|Y''_0|+\|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X}$, et (Y, Y', Y'') tel que $Y_0 = x = \hat{Y}_0, Y'_0 = f(x) = \hat{Y'_0}$, et $Y''_0 = 0 = \hat{Y''_0}$. Alors la boule unité B_T est définie de telle sorte que :

$$\begin{aligned}|Y_0 - x| + |Y'_0 - f(x)| + |Y''_0 - 0| + \|Y - \hat{Y}, Y' - \hat{Y'}, Y'' - \hat{Y''}\|_{D^\alpha_X} \\ = \|Y - \hat{Y}, Y' - \hat{Y'}, Y'' - \hat{Y''}\|_{D^\alpha_X} \leq 1.\end{aligned}$$

En fait, on peut montrer que :

$$\|Y - \hat{Y}, Y' - \hat{Y'}, Y'' - \hat{Y''}\|_{D^\alpha_X} = \|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X},$$

dû de fait que :

$$\begin{aligned}R^{(Y-\hat{Y})^{(3)}}_{s,t} &= Y_{s,t} - \hat{Y_{s,t}} - \left(Y'_s X^{(1)}_{s,t} - \hat{Y'_s} X^{(1)}_{s,t}\right) - \left(Y''_s X^{(2)}_{s,t} - \hat{Y''_s} X^{(2)}_{s,t}\right) \\ &= Y_{s,t} - Y'_s X^{(1)}_{s,t} - Y''_s X^{(2)}_{s,t} = R^{Y^{(3)}}_{s,t}\end{aligned}$$

Et donc $\|R^{(Y-\hat{Y})^{(3)}}\|_{3\alpha} = \|R^{Y^{(3)}}\|_{3\alpha}$. Ensuite, en ragardant $R^{(Y-\hat{Y})^{(2)}}$, nous voyons que :

$$R^{(Y-\hat{Y})^{(2)}}_{s,t} = Y'_{s,t} - \hat{Y'_{s,t}} - \left(Y''_s X^{(1)}_{s,t} - \hat{Y''_s} X^{(1)}_{s,t}\right) = Y'_{s,t} - Y''_s X^{(1)}_{s,t}.$$

De plus, $\|R^{(Y-\hat{Y})^{(2)}}\|_{2\alpha} = \|R^{Y^{(2)}}\|_{2\alpha}$. Le dernier qui reste à verifier est $R^{(Y-\hat{Y})^{(1)}}$, où il est facile de voir que $\|R^{(Y-\hat{Y})^{(1)}}\|_\alpha = \|R^{Y^{(1)}}\|_\alpha$. La boule B_T est définie comme suit :

$$B_T = \{(Y, Y', Y'') \in D^\alpha_X : Y_0 = x, Y'_0 = f(x), Y''_0 = Df(x)f(x); \|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X} \leq 1\}.$$

Nous avons aussi pour tous $(Y, Y', Y'') \in B_T$,

$$|Y'_0| + |Y''_0| + \|Y, Y', Y''\|_{D^\alpha_X} \leq \|f\|_{C^3_b} + 1.$$

Notre objectif maintenant est de trouver un T tel que la boule B_T soit invariante par l'application $(Y, Y', Y'') \mapsto \mathcal{M}_T(Y, Y', Y'')$. Par le théorème (2.1) on a :

$$\|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D_X^\alpha} \leq C_M \left(1 + \|X^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)}\|_{2\alpha}\right) (1+|Y_0'|+|Y_0''|+\|Y, Y', Y''\|_{D_X^\alpha})$$

Pour simplifier les calculs, on laisse la constante C varier et dépend de $T, \alpha, \beta, \|f\|_{C_b^3}, X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ et on trouve :

$$\begin{aligned}
\|\int_0^\cdot f(Y)d\mathbf{X}_s, f(Y), f(Y')\|_{D_X^\alpha} &\leq \|f(Y')\|_\alpha + \|f(Y) - f(Y_.)'X_.^{(1)}\|_{2\alpha} \\
&+\|\int_0^\cdot f(Y)d\mathbf{X}_s - f(Y)X^{(1)} - f(Y)'X^{(2)}\|_{3\alpha} \\
\leq (|f(Y_0)''|+\|R^{f(Y)^{(1)}}\|_\alpha T^\alpha) \left(\sum_{i=1}^3 \|X^{(i)}\|_{i\alpha}\right) &+ \|R^{f(Y)^{(2)}}\|_{2\alpha}T^\alpha + \|R^{f(Y)^{(3)}}\|_{3\alpha}T^\alpha \\
&+CT^\alpha \left(\sum_{i=1}^3 \|X^{(4-i)}\|_{(4-i)\alpha}\|R^{f(Y)^{(i)}}\|_{i\alpha}\right)
\end{aligned}$$

où cela vient du fait qu'on utilise les inégalités établis dans théorème (2.1),et dans la section (2.10) plus des calculs, on trouve que :

$$\begin{aligned}
&\leq T^\alpha(|f(Y_0)'| + |f(Y_0)''| + \|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D_X^\alpha}) \left(1 + \sum_{i=1}^3 \|X^{(i)}\|_{i\alpha}\right) \\
&+C(|f(Y_0)'| + |f(Y_0)''| + \|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D_X^\alpha}) \left(\sum_{i=1}^3 \|X^{(i)}\|_{i\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons alors $\|X^{(i)}\|_{i\alpha} \leq \|X^{(i)}\|_{i\beta}T^{i(\beta-\alpha)}$ pour $i = 1, 2, 3$ et voyons cela :

$$\|\int_0^\cdot f(Y)d\mathbf{X}_s, f(Y), f(Y')\|_{D_X^\alpha} \leq C(|f(Y_0)'|+|f(Y_0)''|+\|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D_X^\alpha})\times T^{\beta-\alpha},$$

où $C = C(T, \alpha\|X\|_\beta^{(1)}, \|X\|_{2\beta}^{(2)})$. La prochaine étape consiste à regarder l'application d'Itô-Lyons dans la D_X^α- norme, et à trouver des bornes suffisantes. Nous voulons que les bornes soient multipliées par un facteur T^γ où $\delta \in \mathbb{R}_+$, de sorte que lorsque T devient plus petit, tous les côtés droits de nos inégalités diminueront. De cette façon, nous pouvons obtenir un T_0 tel que $\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')\|_{D_X^\alpha} \leq 1$. En effet :

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')\|_{D_X^\alpha} = \| \int_0^{\cdot} f(Y)d\mathbf{X}_s, f(Y), f(Y')\|_{D_X^\alpha}$$

$$\leq C(|f(Y_0)'| + |f(Y_0)''| + \|f(Y), f(Y)', f(Y)''\|_{D_X^\alpha}) \times T^{\beta-\alpha},$$

$$\leq C(|f(Y_0)'| + |f(Y_0)''| + C_M(1 + \|X^{(1)}\|_\alpha + \|X^{(2)}\|_{2\alpha})(1 + |Y_0'| + |Y_0''|$$

$$+\|Y, Y', Y''\|_{D_X^\alpha})) \times T^{\beta-\alpha}$$

En utilisant le fait que $|Y_0'|+|Y_0''|+\|Y,Y',Y''\|_{D_X^\alpha}) \leq \|f\|_{C_b^3}+1$, on trouve que :

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')\|_{D_X^\alpha} \leq C\left(\|f\|_{C_b^3} + C(M+1)(\|f\|_{C_b^3}+2)\right) \times T^{\beta-\alpha}$$
$$= o(T^{\beta-\alpha})$$

Par conséquent, nous avons constaté que :

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')\|_{D_X^\alpha;[0,T]} \leq o(T^{\beta-\alpha})$$

Donc, on peut trouver un T_0 assez petit tel que

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')\|_{D_X^\alpha;[0,T]} \leq 1$$

Qui montre que $\mathcal{M}_{T_0}(B_{T_0}) \subset B_{T_0}$ et donc laisse B_{T_0} invariant.

Maintenant, nous continuons en montrant la proporiété de contraction de $\mathcal{M}_T$ qui nous permettent de savoir qu'il existe un point fixe, et donc l'unicité de la solution du théorème du point fixe de Banach. Nous sommes intéressés à regarder deux chemins rugueux différents contrôlés (Y, Y', Y'') et $(\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''})$ controlés par le même $\mathbf{X}$, qui ont les mêmes valeurs initiales, c'est-à-dire $Y_0 = \tilde{Y_0} = x$ et ainsi de suite. On définit les incréments d'une fonction $\Delta_s = f(Y_s) - f(\tilde{Y_s})$ et $\Delta'_s = f(Y_s)' - f(\tilde{Y_s})'$ et $\Delta''_s = f(Y_s)'' - f(\tilde{Y_s})''$, et on regarde la différence dans l'application Itô-Lyons évaluée dans les deux chemins contrôlés différents,

$$\|\mathcal{M}_T(Y, Y', Y'') - \mathcal{M}_T(\hat{Y}, \hat{Y'}, \hat{Y''})\|_{D_X^\alpha}$$

$$= \| \int_0^\cdot \Delta_s d\mathbf{X_s}, \Delta, \Delta' \|_{D_X^\alpha} \leq C(|\Delta'_0| + |\Delta''_0| + \|\Delta, \Delta', \Delta''\|_{D_X^\alpha}) \times T^{\beta-\alpha}.$$

Par suite, on veut montrer que $\|\Delta, \Delta', \Delta''\|_{D_X^\alpha} \lesssim \|Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y'}, Y'' - \tilde{Y''}\|_{D_X^\alpha}$. En utilisant le fait que $f \in C_b^4$, il existe des fonctions :

$$G_s := g(Y_s, \tilde{Y_s})$$

$$H_s := Y_s - \tilde{Y_s}$$

tel que $\Delta_s = G_s H_s$, où la fonction g est donnée par :

$$g(x, y) := \int_0^1 Df(xt + (1-t)y)dt$$

On voit que $g \in C_b^3$ dans les variables x et y, avec $\|g\|_{C_b^3} \leq C\|f\|_{C_b^4}$, En outre, nous voyons cela,

$$D_x g(x, y) = \int_0^1 D^2 f(xt+(1-t)y)tdt \qquad \text{et} \qquad D_y g(x, y) = \int_0^1 f(xt+(1-t)y)(1-t)dt.$$

De la section (2.10) on sait que :

$$(G, G', G'') =$$
$$(G, D_x G Y' + D_y G \tilde{Y'},$$
$$(D_x^2 G (Y')^{\otimes 2} + D_x G Y'') + \left(D_y^2 G \left(\tilde{Y'}\right)^{\otimes 2} + D_y G \tilde{Y''}\right)) \in D_X^\alpha.$$

De cela, nous obtenons facilement la borne

$$\|G, G', G''\|_{D_X^\alpha} \leq C\|f\|_{C_b^4}$$

où$C = C(T, \alpha\|X\|_{\alpha}^{(1)}, |X\|_{2\alpha}^{(2)})$ qui est uniforme sur $(Y, Y', Y''), (\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) \in B_T$ pour $T \leq 1$. Nous continuons en regardant le chemin construit par G et H comme suit, $(GH, (GH)', (GH)'') \in D_X^{\alpha}$. Lorsque les dérivés sont définis de la manière suivante $(GH)' = G'H + GH'$ et $(GH)'' = G''H + 2G'H' + GH''$. On trouve l'estimation, qui est un calcul long, mais tout à fait simple

$$\begin{aligned} &\|GH, (GH)', (GH)''\|_{D_X^{\alpha}} \\ &\leq C(|G_0| + |G_0'| + |G_0''| + \|G, G', G''\|_{D_X^{\alpha}}) \\ &\times(|H_0| + |H_0'| + |H_0''| + \|H, H', H''\|_{D_X^{\alpha}}). \end{aligned}$$

Les calculs sont obtenus, sachant que G' est un opérateur symétrique. De plus, prenant en considération que pour tout $(Y, Y', Y''), (\tilde{Y}, \tilde{Y'}, \tilde{Y''}) \in B_T$, on a $H_0 = Y_0 - \tilde{Y}_0, H_0' = 0$ et $H_0'' = 0$ il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\|\Delta, \Delta', \Delta''\|_{D_X^{\alpha}} \\ &\leq C(|G_0| + |G_0'| + |G_0''| + \|G, G', G''\|_{D_X^{\alpha}})(\|H, H', H''\|_{D_X^{\alpha}}) \\ &\leq D(|g|_\infty + |g'|_\infty \left(|Y_0'| + |\tilde{Y_0'}|\right)) \\ &+\|g''\|_{C_b^2} \left(|(Y_0')^{\otimes 2}| + |Y_0''| + |\tilde{Y_0''}| + |\left(\tilde{Y_0'}\right)^{\otimes 2}|\right) + C\|f\|_{C_b^4} \\ &\times \left(\|Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y'}, Y'' - \tilde{Y''}\|_{D_X^{\alpha}}\right) \end{aligned}$$

À l'aide des estimations indiquées précédemment, nous pouvons constater que $|g|_\infty, |g|_\infty', \|g''\|_{C_b^2} \leq K\|f\|_{C_b^4}$ et $|(Y_0')^{\otimes 2}| + |Y_0''| + |\tilde{Y_0''}| + |\left(\tilde{Y_0'}\right)^{\otimes 2}| \leq K_2 \left(\|f\|_{C_b^4} + \|f\|_{C_b^4}^2\right)$ et donc nous voyons cela

$$\|\Delta, \Delta', \Delta''\|_{D_X^{2\alpha,3\alpha}} \leq C\left(\|Y - \tilde{Y}, Y' - \tilde{Y'}, Y'' - \tilde{Y''}\|_{D_X^{\alpha}}\right)$$

Par conséquent, nous avons cela

$$\|\mathcal{M}_T(Y,Y',Y'')-\mathcal{M}_T(\hat{Y},\hat{Y'},\hat{Y''})\|_{D_X^\alpha} \leq C\left(\|Y-\tilde{Y},Y'-\tilde{Y'},Y''-\tilde{Y''}\|_{D_X^\alpha}\right)\times T^{\beta-\alpha}$$

Donc, par les inégalités obtenues ici, et les résultats obtenus en prouvant l'invariance de la boule B_{T_0} c'est-à-dire $\mathcal{M}(B_{T_0}) \subset B_{T_0}$ pour un T_0 suffisamment petit, il existe $q \in (0,1]$ tel que

$$\|\mathcal{M}_{T_0}(Y,Y',Y'') - \mathcal{M}_{T_0}(\tilde{Y},\tilde{Y'},\tilde{Y''}\|_{D_X^\alpha} \leq q\|Y-\tilde{Y},Y'-\tilde{Y'},Y''-\tilde{Y''}\|_{D_X^\alpha}$$

Le résultat est maintenant issu du théorème du point fixe de Banach, et nous pouvons construire la solution itérativement sur $[0,1]$ comme décrit précédemment.

Chapitre 3

Applications da la théorie des chemins rugueux dans la finance

3.1 Notations et conventions

Tout au long de cette application, $T \in (0, \infty)$ et on écrit $\Omega := \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^d)$ pour l'espace d-dimensionnel des chemins continus Le processus de coordonnées sur Ω est indiqué par $S_t(\omega) = \omega(t), t \in [0,T]$. Pour $i \in \{1, ..., d\}$, on écrit également $S_t^i(\omega) = \omega^i(t)$, où $\omega = (\omega^1, ..., \omega^d)$.

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est définie par $\mathcal{F}_t := \sigma(S_s : s \leq t)$, et on met $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T$. Le temps d'arrêt τ et les σ-algèbres associées à $\mathcal{F}_\tau$ sont définis comme habituellement.

Sauf mention de contraire, les inégalités du type $\mathcal{F}_t \geq \mathrm{G}_t$, où $\mathcal{F}$ et G sont des processus sur Ω, sont supposées tenues pour tous $\omega \in \Omega$.
La fonction indicatrice de l'ensemble A est notée par $\mathbf{1}_A$

Une partition π de $[0,T]$ est un ensemble finie de points temporels,

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T\}.$$

De temps en temps, on identifie π par l'ensemble des intervalles

$$\{[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{m-1}, t_m]\},$$

et on écrit l'expression $\sum_{[s,t]\in\pi}$

Pour $f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ et $t_1,t_2\in[0,T]$, on note $f_{t_1,t_2}:=f(t_2)-f(t_1)$ et on définit la p-variation de f restreinte à $[s,t]\subseteq[0,T]$ par :

$$\|f\|_{p-var[s,t]} \quad := \quad \sup\left\{\left(\sum_{k=0}^{m-1}|f_{t_k,t_{k+1}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} : s=t_0<...<t_m=t, m\in\mathbb{N}\right\}, p>0$$

(qui peut être égale $+\infty$). On fixe $\|f\|_{p-var}=\|f\|_{p-var,[0,T]}$. On écrit $\Delta_T:=\{(s,t):0\le s\le t\le T\}$ et on définit la p-variation de la fonction $g:\Delta_T\to\mathbb{R}^n$ de la même manière, en remplaçant $f_{t_k,t_{k+1}}$ par $g_{t_k,t_{k+1}}$.

Pour $\alpha>0$ l'espace C^α est composé par les fonctions qui sont $\lfloor\alpha\rfloor$ fois continue différentiable, avec les dérivées partielles d'ordre $\lfloor\alpha\lfloor$ sont $(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)-$Höldériennes continues. L'espace C^α_b se compose des fonctions dans C^α qui sont bornées, avec leurs dérivées partielles, et on définit la norme $\|.\|_{\mathrm{C}^\alpha_b}$ par :

$$\|f\|_{\mathrm{C}^\alpha_b}:=\sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\|D^kf\|_\infty+\|D^{\lfloor\alpha\rfloor}f\|_{\alpha-\lfloor\alpha\rfloor},$$

où $\|.\|_\beta$ désigne la norme $\beta-$Hölderienne pour $\beta\in(0,1)$, et $\|.\|_\infty$ désigne la convergence uniforme. Pour $x,y\in\mathbb{R}^d$ on écrit $xy:=\sum_{i=1}^d x_iy_i$ pour le produit habituel. Cependant, on rencontre des termes de la formes $\int SdS$ ou $S_sS_{s,t}$, pour $s,t\in[0,T]$, où nous rappellons que S désigne le processus de coordonnées sur Ω. Ces expressions doivent être comprises comme la matrice $(\int S^idS^j)_{1\le i,j\le d}$, et de manière similaire pour $S_sS_{s,t}$. L'interprétation sera généralement claire du contexte.

Nous utilisons la notation $a\lesssim b$ s'il existe une constante $c>0$, indépendamment des variables considérées, de sorte que $a\le c\cdot b$, et nous écrivons $a\simeq b$ si $a\lesssim b$ et $b\lesssim a$. Si on veut souligner la dépendance de c et la variable x, alors on écrit $a(x)\lesssim_x b(x)$.
On fait la convention que $0/0:=0\cdot\infty:=0$ et $\inf\emptyset:=\infty$.

3.2 Les trajectoires du prix typique comme des chemins rugueux

Dans cette section, notre approche de l'intégration stochastique dans les modèles mathématiques financières libres basée sur l'intégrale du chemin rugueux. Ici, on montre que, pour chaque trajectoire du prix typique, la paire (S, A) est un $p-$ chemin rugueux pour tout $p \in (2, 3)$, où

$$A(s,t) = \int_s^t S_{s,r} dS_r := \int_s^t S_{s,r} \otimes dD_r := \left(S_r^i dS_s^j - S_s^i S_{s,t}^j\right)_{1 \leq i,j \leq d}.$$

Théorème 3.1. *Pour $(s,t) \in \Delta_T, \omega \in \Omega$, et $i, j \in \{1, ..., d\}$, on définit*

$$A_{s,t}^{i,j}(\omega) := \int_s^t S_r^i dS_r^j(\omega) - S_s^i(\omega) S_{s,t}^j(\omega) := \int_0^t S_r^i dS_r^j - \int_0^s S_r^i dS_r^j - S_s^i(\omega) S_{s,t}^j(\omega).$$

Soit $p > 2$, pour un chemin du prix typique, $A = (A^{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ a un $p/2-$ variation finie, et en particulier $\mathbb{S} = (S, A)$ est un $p-$ chemins rugueux.

Pour la preuve de ce théorème, on a besoin du lemme suivant qui est une conséquence de l'isométrie d'Itô simple pour un modèle libre

Lemme 3.2.0.1. *Soit $(F^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite des fonctions étagées avec $\|F^m(\omega) - F(\omega)\| \leq c_m$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $m \in \mathbb{N}$. Alors pour un chemin du prix typique ω il existe une constante $C(\omega)$ telle que*

$$\left\| (F^m \cdot S)(\omega) - \int F dS(\omega) \right\|_\infty \leq C(\omega) c_m \sqrt{\log m} \tag{3.1}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc, si $(c_m \sqrt{\log m})$ converge vers 0, alors pour un chemin du prix typique $(F^m \cdot S)$ converge vers $\int F dS$.

Preuve Pour un $c > 0$ l'isométrie d'Itô pour un modèle libre est donnée par

$$\bar{P}\left(\left\{\|(F^m \cdot S) - \int F dS\|_\infty \geq c_m \sqrt{4d \log m} \sqrt{c}\right\} \cap \{< S >_T \leq c\}\right) \leq \frac{1}{m^2}.$$

Preuve du théorème On définit la suite des temps d'arrét dyadiques $(\tau_k^n)_{n,k \in \mathbb{N}}$ par $\tau_0^n := 0$ et

$$\tau_{k+1}^n = \inf\{t \geq \tau_k^n : |S_t - S_{\tau_k^n}| = 2^{-n}\},$$

et $S^n_t := \sum_k S_{\tau^n_k} \mathbf{1}_{[\tau^n_k, \tau^n_{k+1})}(t)$, de sorte que $\|S^n - S\|_\infty \leq 2^{-n}$. En utilisant (3.1), pour le chemin du prix typique ω il existe $C(\omega)$ tel que

$$\left\| (S^n \cdot S)(\omega) - \int S dS(\omega) \right\|_\infty \leq C(\omega) 2^{-n} \sqrt{\log n}.$$

On fixe un tel chemin du prix typique ω, qui est également de $q-$variation finie pour tout $q > 2$. On montre que, pour un tel ω, le processus A est de $p/2-$variation finie pour tout $p > 2$.

On a pour $(s,t) \in \Delta_T$, en omettant l'argument ω du processus considéré

$$\begin{aligned} |A_{s,t}| &\leq \left| \int_s^t S dS_r - (S^n \cdot S)_{s,t} \right| + |(S^n \cdot S)_{s,t} - S_s S_{s,t}| \\ &\leq C(\omega) 2^{-n} \sqrt{\log n} + |(S^n \cdot S)_{s,t} - S_s S_{s,t}| \\ &\lesssim_\varepsilon C(\omega) 2^{-n(1-\varepsilon)} + |(S^n \cdot S)_{s,t} - S_s S_{s,t}| \end{aligned}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$. Le second terme du côté droit peut être estime, en utilisant un argument basé sur l'inégalité maximale de Young([9]) par

$$\max\{2^{-n} c(s,t)^{1/q}, (\sharp\{k : \tau^n_k \in [s,t]\})^{1-2/q} c(s,t)^{2/q} + c(s,t)^{2/q}\}, \tag{3.2}$$

où $c(s,t)$ est une fonction de contrôle avec $|S_{s,t}|^q \leq c(s,t)$ pour tout $(s,t) \in \Delta_T$. En effet, s'il n'existe aucun k tel que $\tau^n_k \in [s,t]$, alors

$$|(S^n \cdot S)_{s,t} - S_s S_{s,t}| \leq 2^{-n} c(s,t)^{1/q},$$

en utilisant que $|S_{s,t}| \leq c(s,t)^{1/q}$. Ceci correspond au premier terme dans le maximum dans (3.2).

D'une autre manière, notons qu'au prix d'ajouter $c(s,t)^{2/q}$ au côté droit, on peut supposer que $s = \tau_{k^n_0}$ pour certain k_0. Soit maintenant $\tau_{k^n_0}, ..., \tau^n_{k_0+N-1}$ est les $(\tau^n_k)_k$ qui sont dans $[s,t)$. Sans perte de généralité, on peut prendre $N \geq 2$, car $(S^n \cdot S)_{s,t} = S_s S_{s,t}$.
Pour simplifier, on note $\tau^n_{k_0+N} = t$. L'idée est de supprimer successivement les points $(\tau^n_{k_0+l})$ de la partition, afin de passer de $(S^n \cdot S)$ à $S_s S_{s,t}$.
Par super-additivité de c , il existe $l \in \{1, ..., N-1\}$, pour lequel

$$c(\tau^n_{k_0+l-1}, \tau^n_{k_0+l+1}) \leq \frac{2}{N-1} c(s,t).$$

En supprimant $\tau^n_{k_0+l}$ de la partition et soustrair l'intégrale résultante de $(S^n \cdot S)_{s,t}$, on obtient

$$|S_{\tau^n_{k_0+l-1}} S_{\tau^n_{k_0+l-1},\tau^n_{k_0+l}} + S_{\tau^n_{k_0+l}} S_{\tau^n_{k_0+l-},\tau^n_{k_0+l+1}} - S_{\tau^n_{k_0+l-1}} S_{\tau^n_{k_0+l-1},\tau^n_{k_0+l+1}}|$$

$$= |S_{\tau^n_{k_0+l-1},\tau^n_{k_0+l}} S_{\tau^n_{k_0+l},\tau^n_{k_0+l+1}}| \leq c(\tau^n_{k_0+l-1}, \tau^n_{k_0+l+1})^{2/q} \leq \left(\frac{2}{N-1}c(s,t)\right)^{2/q}$$

Successivement tout les points sauf $\tau^n_{k_0} = s$, et $\tau^n_{k_0+N} = t$ de la partition donnée

$$|(S^n \cdot S)_{s,t} - S_s S_{s,t}| \leq \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{2}{N-1}c(s,t)\right)^{2/q} \lesssim N^{1-2/q} c(s,t)^{2/q},$$

ce qui donne (3.2). Maintenant, il est facile de voir que

$$\sharp\{k : \tau^n_k \in [s,t]\} \leq 2^{nq} c(s,t)$$

et donc

$$\begin{aligned} |A_{s,t}| &\lesssim_\varepsilon C(\omega)2^{-n(1-\varepsilon)} + \max\{2^{-n}c(s,t)^{1/q}, (2^{nq}c(s,t))^{1-2/q}c(s,t)^{2/q} + c(s,t)^{2/q}\} \\ &= C(\omega)2^{-n(1-\varepsilon)} + \max\{2^{-n}c(s,t)^{1/q}, 2^{-n(2-q)}c(s,t) + c(s,t)^{2/q}\}. \end{aligned}$$

Cela reste valable pour tous $n \in \mathbb{N}, \varepsilon, q > 2$. Supposons pour le moment que $c(s,t) \leq 1$ et soit $\alpha > 0$ une constante qu'on déterminera plus tard. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $2^{-n-1} < c(s,t)^{1/\alpha(1-\varepsilon)} \leq 2^{-n}$. Utilisons cet n dans (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} |A_{s,t}|^\alpha &\lesssim_{\varepsilon,\omega,\alpha} c(s,t) + \max\left\{c(s,t)^{1/(1-\varepsilon)}c(s,t)^{\alpha/q}, c(s,t)^{(2-q)/(1-\varepsilon)+\alpha} + c(s,t)^{2\alpha/q}\right\} \\ &= c(s,t) + \max\left\{c(s,t)^{\frac{q+\alpha(1-\varepsilon)}{q(1-\varepsilon)}}, c(s,t)^{\frac{2-q+\alpha(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon}} + c(s,t)^{2\alpha/q}\right\} \end{aligned}$$

On voudrait que tous les exposants dans le membre droit de (3.3) soient supérieures ou égaux à 1. Pour le premier terme, c'est satisfait pour $\varepsilon < 1$. Pour le troisième terme, on a besoin que $\alpha \geq q/2$. Pour le deuxième terme, on a besoin que $\alpha \geq (q-1-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Puisque $\varepsilon > 0$ peut être choisie arbitrairement proche de 0, cela suffit si $\alpha > q-1$. Maintenant, puisque le $q > 2$ peut être choisie arbitrairement proche de 2, il s'ensuit que α peut être choisi arbitrairement proche de 1. En particulier, on peut prendre $\alpha = p/2$ pour tout $p > 2$, et on obtient :

$$|A_{s,t}|^{p/2} \lesssim_{\omega,\delta} c(s,t)(1 + c(s,t)^{\delta}) \le c(s,t)(1 + c(0,T)^{\delta})$$

pour un $\delta > 0$ approprié.

Il reste à étudier le cas $c(s,t) > 1$, pour lequel on simplifie l'estimation suivante :

$$|A_{s,t}|^{p/2} \lesssim_p \left\| \int_0^{\cdot} S_r dS_r \right\|_\infty^{p/2} + \|S\|_\infty^p \le \left(\left\| \int_0^{\cdot} S_r dS_r \right\|_\infty^{p/2} + \|S\|_\infty^p \right) c(s,t).$$

Par conséquent, pour tout intervalle $[s,t]$ on peut estimer $|A_{s,t}|^{p/2} \lesssim_{\omega,p} c(s,t)$, et la preuve est achevée. $\square$

Proposition 3.2.1. *Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres positifs telle que $(c_n^{\varepsilon}\sqrt{\log n})$ converge vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $\tau_0^n := 0$ et $\tau_{k+1}^n := \inf\{t \ge \tau_k^n : |S_t - S_{\tau_k^n}| = c_n\}, k \in \mathbb{N}$, et soit $S_t^n = \sum_k S_{\tau_k^n} \mathbf{1}_{[\tau_k^n, \tau_{k+1}^n]}(t)$. Alors pour un chemin du prix typique , $((S^n \cdot S))$ converge uniformément vers $\int SdS$. De plus, pour $p > 2$ et pour un chemin de prix typique il existe une fonction contrôle $c = c(p,\omega)$ telle que*

$$\sup_n \sup_{k<l} \frac{|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n}(\omega) - S_{\tau_k^n}(\omega) S_{\tau_k^n,\tau_l^n}(\omega)|^{p/2}}{c(\tau_k^n, \tau_l^n)} \le 1.$$

Preuve La convergence uniforme de $((S^n \cdot S))$ vers $\int SdS$ est immédiate. Pour le deuxième résultat, on fixe $n \in \mathbb{N}$ et $k < l$ telle que $\tau_l^n \le T$. Alors

$$\begin{aligned} |(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}| &\lesssim \left\| (S^n \cdot S) - \int_0^{\cdot} S_s dS_s \right\|_\infty + |A_{\tau_k^n,\tau_l^n}| \\ &\lesssim_\omega c_n\sqrt{\log n} + v_{p/2}(\tau_k^n, \tau_l^n)^{2/p} \lesssim_\varepsilon c_n^{1-\varepsilon} + v_{p/2}(\tau_k^n, \tau_l^n)^{2/p}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ et la dernière estimation est vérifiée par notre hypothèse sur la suite c_n, où $v_{p/2}(s,t) := \|A\|_{p/2-var[s,t]}^{p/2}$ pour $(s,t) \in \Delta_T$. En effet, cette inégalité n'est vraie que pour les chemins du prix typiques et pas pour tout $\omega \in \Omega$.

D'un autre côté, le même argument que dans la preuve du théorème (3.1) (en utilisant l'inégalité maximale de Young et en supprimant successivement les points de la partition) montre que

$$|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}| \;\lesssim\; c_n^{2-q} v_q(\tau_k^n, \tau_l^n) \tag{3.3}$$

où $v_q(s,t) := \|S\|^q_{q-var,[s,t]}$ pour $(s,t) \in \Delta_T$.

Définissons la fonction du contrôle $\tilde{c} := v_q + v_{p/2}$. On prend $\alpha > 0$, si $c_n > \tilde{c}(s,t)^{1/\alpha(1-\varepsilon)}$, alors on utilise (3.7) et le fait que $2-q < 0$, pour obtenir :

$$|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}|^\alpha \lesssim (\tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n))^{\frac{2-q}{(1-\varepsilon)}} v_q(\tau_k^n, \tau_l^n)^\alpha \le \tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n)^{\frac{2-q+\alpha(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}}.$$

L'exposant est plus grand ou égal à 1 pour $\alpha \ge (q-1-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$. Puisque q et ε peuvent être choisis arbitrairement proche de 2 et 0 réspectivement, on peut prendre $\alpha = p/2$, et on a donc :

$$|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}|^{p/2} \lesssim \tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n)(1 + \tilde{c}(0,T)^\delta)$$

pour un $\delta > 0$ appropriée. D'une autre part, si $c_n \le \tilde{c}(s,t)^{1/\alpha(1-\varepsilon)}$, alors on utilise 3.3 pour obtenir :

$$|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}|^\alpha \lesssim \tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n) + \tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n)^{2\alpha/p},$$

de sorte que, dans ce cas nous pouvons prendre $\alpha = p/2$, et nous avons donc dans les deux cas

$$|(S^n \cdot S)_{\tau_k^n,\tau_l^n} - S_{\tau_k^n} S_{\tau_k^n,\tau_l^n}|^{p/2} \lesssim \tilde{c}(\tau_k^n, \tau_l^n),$$

où c est une certaine fonction multiplie de $\tilde{c}$ qui dépend de ω □

3.3 Volatilité des chemins du prix continues à droite

Cette section considère les chemins du prix d'une sécurité financière dans un marché idéalisé. Le résultat principal est que l'indice de variation des chemins du prix typiques est au plus 2. Dans se sens, les chemins du prix typiques ne sont pas plus rugueux que les chemins typiques du mouvement brownien. Nous ne faisons aucune hypothèse stochastique et on suppose seulement que le chemin du prix est continu à droite. La qualification " typique " signifie qu'il existe une stratégie de négociation qui ne risque qu'une seul unité monétaire, mais qui porte un capital infini lorsque l'indice de variation du chemin du prix réalisé dépasse 2.

Soit Ω l'ensemble des fonctions positives continues à droites $\omega : [0,T] \to [0,\infty)$; on appele Ω l'espace d'échantillon. Pour chaque $t \in [0,T], \mathcal{F}_t^0$ est définie comme la plus petite $\sigma-$ algèbre sur Ω qui rend toutes les fonctions $\omega \mapsto \omega(s), s \in [0,t]$, mesurables. On note $\mathcal{F}_t$ la filtration complétée de $\mathcal{F}_t^0$. Un processus S est une famille $S_t : \Omega \to [-\infty,+\infty], t \in [0,T]$, chaque S_t est $\mathbf{F}_t-$ mesurable (on dépose l'adjectif "adapté"). Un évènement est un élément de la $\sigma-$ algèbre $\mathcal{F}_t$. Un temps d'arrêt $\tau : \Omega \to [0,T] \cup \{\infty\}$ à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et $\sigma-$ algèbre $\mathcal{F}_\tau$ sont définies comme d'habitude , on note $\omega(\tau(\omega))$ et $S_{\tau(\omega)}$ pour simplifier à $\omega(\tau)$ et $S_{\tau(\omega)}$.

La classe des stratégies de négociations autorisées est définie en deux étapes. Une stratégie de négociation simple G comprend les éléments suivants : $c \in \mathbb{R}$ (capital initial) ; une suite croissante de temps d'arrêt $\tau_1 \leq \tau_2 \leq ...$, et pour tout $n = 1, 2, ...$ une fonction bornée $\mathcal{F}_{\tau_n}-$ mesurable notée h_n. Il faut que, pour chaque $\omega \in \Omega$, seulement un nombre finie de $\tau_n(\omega)$ devrait être finie. A une telle stratégie G correspond le processus de capital simple

$$K_t^G(\omega) \quad := \quad c + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\omega(\tau_{n+1} \wedge t) - \omega(\tau_n \wedge t)), \qquad t \in [0,T] \quad (3.4)$$

(avec les termes nuls sont ignorées dans la somme) ; la valeur $h_n(\omega)$ est appelée la position prise à l'instant τ_n, et $K_t^G(\omega)$ sera parfois appelé processus capital de G.

Un processus de capital positif est un processus S qui peut être représenté sous la forme :

$$S_t(\omega) \quad := \quad \sum_{m=1}^{\infty} K_t^{G_m}(\omega), \qquad (3.5)$$

où les processus de capital simple $K_t^{G_m}$ doivent être positifs, pour tout $t \in [0, T]$ et $\omega \in \Omega$, et la série positive $\sum_{m=1}^{\infty} c_m$ est supposée convergente, où c_m est le capital initial de G_m. La somme (3.5) est toujours positive mais pourrait prendre la valeur ∞. Puisque $K_0^{G_m}(\omega) = c_m$ ne dépend de ω, $S_0(\omega)$ aussi ne dépend pas de ω et sera abrégé à S_0. Dans nos études, nous nous référons parfois à la suite $(G_m)_{m=1}^{\infty}$ comme une stratégie de risque commerciale $\sum_m c_m$ et se réfère à (3.5)en tant que processus de capital de cette stratégie.

Remarque L'intuition derrière la définition des processus de capital positifs est que le capital initial est divisé en infiniment de comptes et le commerçant applique une stratégie de négociation simple distincte sur chacun de ces comptes. Notre définition des stratégies de négociation simple ne concerne que la position prise dans la sécurité, et non la position de trésorerie. La position au comptant est déterminée uniquement en fonction de la condition selon laquelle la stratégie devrait être autofinancée, et dans de nombreux cas, il n'est pas néccesaire de la mentionner explicitement.

On dit qu'un ensemble $E \subseteq \Omega$ est nul s'il existe un processus de capital positif S tel que $S_0 = 1$ et $S_T(\omega) = \infty$ pour tous $\omega \in E$. Une propriété de $\omega \in \Omega$ est dite vérifiée presque sûrement (p.s), ou pour un ω typique, si l'ensemble des ω pour lequel est nul. Intuitivement, nous attendons à ce qu'une telle propriété soit satisfaite dans un marché qui soit efficace au moins dans une certaine mesure.
Pour tout $p \in (0, \infty)$, la $p-$variation $v_p(f)$ d'une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$v_p(f) := \sup_k \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p, \tag{3.6}$$

où n varies sur tous les entiers strictement positifs et k sur toutes les partitions $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ de l'intervalle $[0, T]$. La variation totale d'une fonction est la même que sa 1-variation. Il est évident que, lorsque f est bornée, il existe un nombre unique $vi(f) \in [0, \infty]$, appelée l'indice de la variation, tel que $v_p(f)$ est finie lorsque $p > vi(f)$ et infinie si $p < vi(f)$. Il est facile de voir que $vi(f) \notin (0, 1)$ lorsque f est continue, mais en général $vi(f)$ peut prendre toutes les valeurs dans $[0, \infty]$.

Théorème 3.2. *Pour $\omega \in \Omega$ un typique, on a :*

$$vi(\omega) \leq 2 \tag{3.7}$$

Dans le cas des semimartingales, la propriété (3.7) a été établie par Lebingle ([8]). Le théorème indique que les chemins du prix ne peuvent pas être trop rugueux. En fait, ce théorème peut être renforcé pour dire qu'il existe une stratégie de risque commerciale au plus 1 unité de monnaie dont le processus de capital est ∞ à tout moment t tel que l'indice de variation de ω sur $[0, t]$ est supérieur à 2.

Soit M_a^b (resp. $D_a^b(f)$) le nombre de visites supérieures (resp. visites inférieures) d'un intervalle ouvert (a, b) par une fonction $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ pendant l'intervalle de temps $[0, T]$. Pour chaque $h > 0$ l'ensemble

$$M(f, h) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_{kh}^{(k+1)h}(f), \qquad D(f, h) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_{kh}^{(k+1)h}(f).$$

La démonstration du théorème est basée sur l'inégalité suivante de Doob :

Lemme 3.3.0.2. *Soit $0 \leq a < b$ des nombres réels. Il existe un processus de capital simple positif S partant de $S_0 = a$ et satisfait pour tous $\omega \in \Omega$*

$$S_T(\omega) \geq (b - a)M_a^b(\omega). \tag{3.8}$$

Preuve L'argument standard suivant sera facile à formaliser. Une stratégie commerciale simple G muni de S peut être définie comme suit. la capital initial est a. Au début, G prend la position 0. La première fois que ω visite $[0, a], G$ prend la position 1 jusqu'à ce que ω atteint $[b, \infty)$, auquel point G prend la position 0, après ω visite $[0, a], G$ maintient la position 1 jusqu'à ω atteint $[b, \infty)$ auquel G prend la position 0,etc. Puisque ω est positive, S sera également positive.

Formellement, on définit $\tau_1 := \{t|\omega(t) \in [0, a]\}$ et, pour $n = 2, 3, ...$

$$\tau_n := \inf\{t|t > \tau_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \omega(t) \in I_n\},$$

où $I_n := [b, \infty)$ pour n pair est $I_n := [0, a]$ pour n impair. (Comme d'habitude, l'expression $\inf \emptyset$ est interprétée comme ∞). Puisque ω est une fonction continue à-droite et $[0, a], [b, \infty)$ sont des ensembles fermés, la borne inférieure dans les définitions de $\tau_1, \tau_2, ...$ sont atteints. Par conséquent, $\omega(\tau_1) \leq a, \omega(\tau_2) \geq b, \omega(\tau_3) \leq a, \omega(\tau_4) \geq b$, et ainsi de suite. Les positions prises par G aux temps $\tau_1, \tau_2, ...$ sont $h_1 := 1, h_2 := 0, h_3 := 1, h_4 := 0$, ...etc , et le capital initial c'est a.

Soit n le plus grand nombre entier tel que $\tau_n \leq T$ (avec $n := 0$, lorsque $\tau_1 = \infty$). Maintenant, on obtient de (3.4) : si n est pair,

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= K_T^G(\omega) \\ &= a + (\omega(\tau_2 - \omega(\tau_2)) + (\omega(\tau_4 - \omega(\tau_3) + ... + (\omega(\tau_n) - \omega(\tau_{n-1})) \\ &\geq a + (b-a)M_a^b(\omega), \end{aligned}$$

et si n est impair,

$$\begin{aligned} S_T(\omega) &= K_T^G(\omega) \\ &= a + (\omega(\tau_2 - \omega(\tau_2)) + (\omega(\tau_4 - \omega(\tau_3) + ... + (\omega(\tau_{n-1}) - \omega(\tau_{n-2})) + (\omega(t) - \omega(\tau_n)) \\ &\geq a + (b-a)M_a^b(\omega) + (\omega(t) - \omega(\tau_n)) \\ &\geq a + (b-a)M_a^b(\omega) + (0 - a) = (b-a)M_a^b(\omega); \end{aligned}$$

dans les deux cas (3.8) détient. En particulier, $S_T(\omega)$ est positive ; le même argument s'applique lorsque $t \in [0, T]$ au lieu de T et montre que $S_t(\omega)$ est positive pour tout $t \in [0, T]$.

Il reste à vérifier que chaque τ_n est un temps d'arrêt, nous allons le faire en utilisant une induction de n. Soit $t \in [0, T]$. Puisque ω est continue à droite et $[0, a]$ est fermé, l'ensemble $\{\tau_1 \leq t\}$ c'est la projection dans Ω de l'ensemble $A := \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega | \omega(s) \in [0, a]\}$. Comme $A \in \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t^o$, où $\mathcal{B}_t$ c'est la tribu Boriliénne sur $[0, t]$.$\mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t^o$ c'est la tribu produit, la projection $\{\tau_1 \leq t\}$ est un ensemble $\mathcal{F}_t^o-$ analytique ([4], Theorem III.13(3)). De plus, $\{\tau_1 \leq t\} \in \mathcal{F}_t^o$ ([4], Theorem III.33). On peut voir que τ_1 est un temps d'arrêt.

Maintenant, soit $n \in \{2, 3, ...\}$ et supposons que τ_{n-1} est un temps d'arrêt. Soit $t \in [0, T]$. Puisque ω est continue à droite et I_n est un fermé, l'ensemble

$\{\tau_1 \leq t\}$ est la projection dans Ω de l'ensemble $A := \{(s, \omega) \in [0, T] \times \Omega | s > \tau_{n-1}$ et $\omega(s) \in I_n\}$. Comme $A \in \mathcal{B}_t \times \mathcal{F}_t^o$, le même argument que dans le paraghraphe précédent montre que $\{\tau_1 \leq t\} \in F_t$; donc, τ_n est un temps d'arrêt.

Enfin, on vérifie bien que l'ensemble $\{\tau_n \leq t\}$ est effectivement la projection sur Ω de $A := \{(s, \omega) \in [0, T] \times \Omega | s > \tau_{n-1}$ et $\omega(s) \in I_n\}$, en supposant $n > 1$ (l'assertion correspondante pour $n = 1$ est encore plus facile). Une direction est triviale : $s \in [0, t], s > \tau_{n-1}$, et $\omega(s) \in I_n$ cela implique immédiatement que $\tau_n(\omega) \leq t$. Réciproquement, supposons $\tau_n(\omega), \exists s \in [0, t]$ et une suite $t_1 \geq t_2 \geq ...$ tel que $\lim_{i \to \infty} t_i = s$ et pour tout $i, t_i > \tau_{n-1}(\omega)$ et $\omega(t_i) \in I_n$. Comme ω est continue à droite et I_n est fermé, $\omega(s) = \lim_{i \to \infty} \omega(t_i) \in I_n$. On ne peut pas avoir $s = \tau_{n-1}$ puisque $\omega(s) \in I_n$ et $\omega(\tau_{n-1}) \notin I_n$. □

En fait, dans la Proposition suivante on prouve une version forte du Théorème (3.2). Pour cela on a besoin d'une généralisation da la définition (3.6). Soit $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Pour $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, on pose :

$$v_\phi(f) := \sup_k \sum_{i=1}^{n} \phi(|f(t_i) - f(t_{i-1})|),$$

où k varie sur toute les partitions $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ de $[0, T]$

Proposition 3.3.1. *Supposons* $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *satifait*

$$\sup_{0 < t \leq s \leq 2t} \frac{\phi(s)}{\phi(t)} < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{2j} \phi(2^{-j}) < \infty, \tag{3.9}$$

alors $v_\phi(\omega) < \infty$ *p.s, où* $\phi(0)$ *est réglé sur 0*

Informellement, la première condition dans (3.9) dit que ϕ ne devrait jamais augmenter trop vite, et la deuxième condition dit que $\phi(u)$ s'approche de 0 un peu plu rapide que u^2 quand $u \to 0$. Pour obtenir le théorème (3.2), on définit $\phi(u) := u^p$, où $p > 2$ est un rationnel , et on remarque que l'union dénombrable des évènements nuls est toujours nulle. Un autre exemple simple d'une fonction ϕ satisfaisant (3.9) est $\phi(u) := (u/\log^* u)^2$, où $\log^* u = 1 \vee |\log u|$. Un meilleur exemple est $\phi(u) := u^2/(\log *u \log * \log *u...)$ (le produit est fini si on ignore les facteurs égaux 1) ; pour une preuve de (3.9) pour cette fonction, voir ([9]) Cependant, même pour le dernier choix de ϕ, l'inégalité $v_\phi(\omega) < \infty$ p.s est encore beaucoup plus faible que l'inégalité $v_\psi(\omega) < \infty$ p.s, avec ψ définie par

$$\psi(u) := \frac{u^2}{2 \ln^* \ln^* u},$$

que nous pouvons prouver en supposant ω est continue

Preuve On définit $w(j) := 2^{2j}\phi(2^{-j}), j = 0, 1, ...$; par (3.9), $\sum_{j=0}^{\infty} w(j) < \infty$. Pour simplifier les calculs, on peut supposer que $\sum_{j=0}^{\infty} w(j) = 1$.

Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$; sans perte de généralité, on remplace " $\leq$ " par $<$. On fixe $\omega \in \Omega$, au début nous serons principalement intéressées par le cas où $\sup_{t\in[0,T]} \omega(t) \leq 2^L$ pour un entier positif donné L. On divise $\sum_{i=1}^{n} \phi(|\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|)$ en deux parties ;

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(|\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|) = \sum_{i\in I_+} \phi(\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})) + \sum_{i\in I_-} \phi(\omega(t_{i-1}) - \omega(t_i)),$$

où

$$I_+ := \{i|\omega(t_i) - \omega(t_{i-1}) > 0\},$$
$$I_- := \{i|\omega(t_i) - \omega(t_{i-1}) < 0\}.$$

Par le lemme (3.3.0.2), pour tout $j = 0, 1, ...$ et tout $k \in \{0, ..., 2^{L+j} - 1\}$ il existe un processu de capital simple positif $S^{j,k}$ qui commence par $k2^{-j}$ est satisfait

$$S_T^{j,k}(\omega) \geq 2^{-j} M_{k2^{-j}}^{(k+1)2^{-j}}(\omega).$$

On effectue la sommation de $2^{-L-j}S^{j,k}$ de $k = 0$ à $2^{L+j} - 1$, on obient un processus capital positif S^j tel que

$$S_0^j = \sum_{k=0}^{2^{L+j}-1} k2^{-L-2j} \leq 2^{L-1},$$

$$S_T^j(\omega) \geq 2^{-L-2j} M(\omega, 2^{-j}) \qquad \text{pour} \qquad \sup \omega \leq 2^L.$$

Pour chaque $i \in I_+$, soit $j(i)$ est le plus petit entier positif j satisfaisant

$$\exists k \in \{0, 1, 2...\} : \omega(t_{i-1}) \leq k2^{-j} \leq (k+1)2^{-j} \leq \omega(t_i) \tag{3.10}$$

La sommation sur $w(j)S^j$ de $j = 0, ..,$ nous donne un processus capital positif S tel que $S_0 \leq 2^{L-1}$, et quand $\sup \omega \leq 2^L$, on obtient

$$S_T(\omega) \geq \sum_{j=0}^{\infty} w(j)2^{-L-2j} M(\omega, 2^{-j}) \geq \sum_{i \in I_+} w(j(i))2^{-L-2j(i)} \tag{3.11}$$

$$= 2^{-L} \sum_{i \in I_+} \phi(2^{-j(i)}) \geq \delta \sum_{i \in I_+} \phi(\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})), \tag{3.12}$$

où $\delta > 0$ dépend seulement de L est de la borne supérieure dans (3.9). La deuxième inégalité de (3.11) vient du fait que pour chaque $i \in I_+$ correspond un croisement ascendant d'un intervalle de la forme $(k2^{-j(i)}), (k+1)2^{-j(i)}$.

Une inégalité analogue à l'inégalité entre le deuxième et le dernier terme des séries (3.11)-(3.12) peut être prouvée pour les croisements descendants au lieu des croisements ascendants I_- au lieu de I_+, et $\omega(t_{i-1})$ et $\omega(t_i)$ échangent de rôle. L'utilisation de l'inégalité (dans le troisième passage ci-dessous) donne, lorsque $\sup \omega \leq 2^L$,

$$S_T(\omega) \geq \sum_{j=0}^{\infty} w(j)2^{-L-2j} M(\omega, 2^{-j}) \geq \sum_{j=0}^{\infty} w(j)2^{-L-2j}(D(\omega, 2^{-j}) - 2^{L+j})$$

$$\geq \delta \sum_{i \in I_-} \phi(\omega(t_{i-1}) - \omega(t_i)) - \sum_{j=0}^{\infty} w(j)2^{-j} \geq \delta \sum_{i \in I_-} \phi(\omega(t_{i-1}) - \omega(t_i)) - 1.$$

En utilisant les deux bornes inférieures pour $S_T(\omega)$, on obtient, lorsque $\sup \omega \leq 2^L$,

$$S_T(\omega) \geq \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^{n} \phi(|\omega(t_i) - \omega(t_{i-1})|) - \frac{1}{2}.$$

En prenant, le supremum sur toutes les partitions, on obtient :

$$\sup \omega \leq 2^L \Rightarrow S_T(\omega) \geq \frac{\delta}{2} v_\phi(\omega) - \frac{1}{2}.$$

On peut voir que l'évènement $\{\sup \omega \leq 2^L$ et $v_\phi(\omega) = \infty\}$ est nul. Puisque l'union dénombrable d'évènements nuls est toujours nulle, l'évènement $v_\phi(\omega) = \infty$ est également nul. □

Corollaire 3.1. *: Presque sûrement, le trajectoire du prix $\omega \in \Omega$ est càdlàg.*

Conclusion

• Dans notre mémoire, nous avons étudié la théorie des chemins rugueux en commençant par quelques généralités concernant les processus gaussiens, puis nous avons présenté les différentes versions de cette théorie et introduit la notion de l'algèbre de tenseurs tronquée ; un espace sur lequel les trajectoires prenant leurs valeurs, ainsi que des exemples dans le cadre du Mouvement brownien et le mouvement brownien fractionnaire, nous avons ainsi utilisé cette approche pour chercher les conditions de la résovabilité des équations différentielles stochastiques dirigées par des chemins rugueux ou des processus non semimartingales.

• La valorisation de notre mémoire se montre clairement dans les applications sourtout en finance, tels que la volatilité des chemins du prix typiques

• Notons que cette théorie prend son inspiration dans de nombreux domaines, et reste fortement connectée à ceux-ci, en analyse, algèbre, probabilités, géométrie différentielle et la théorie du contrôle.

Bibliographie

[1] **M Hairer P Friz**. A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures. Springer, 2014.

[2] **F. Baudoin et M. Hairer**. A Version of Hörmander's Theorem for the Fractional Brownian Motion. Probab. Theory Relat. Fields 139, 373-395, 2007.

[3] **F. Baudoin, C. Ouyang et S. Tindel**. Upper Bounds for the Density of Solutions of Stochastic Differential Equations driven by Fractional Brownian Motions. A paraître dans les Annales de l'IHP Proba-Stats, 2012.

[4] **Claude Dellacherie and Paul-Andr ́e Meyer**, Probabilities and Potential, North-Holland, Amsterdam, 1978. Chapters I-IV. French original : 1975 ; reprinted in 2008.

[5] **M. Besalu et D. Nualart**. Estimates for the Solution to Stochastic Differential Equations driven by a Fractional Brownian Motion with Hurst Parameter $H \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Stochastics and Dynamics, Vol. 11, Nos 2 et 3, 243-263, 2011.

[6] **H. Cartan**. Cours de calcul différentiel. Méthodes, Hermann, 2007.

[7] T. Cass, C. Litterer et T. Lyons. Integrability Estimates for Gaussian Rough Differential Equations. arXiv :1104.1813v4, 2011.

[8] **Dominique Lepingle**, La variation d'ordre p des semi-martingales, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 36 :295-316, 1976.

[9] **Sik K. Leung-Yan-Cheong and Thomas M. Cover**, Some equivalences between Shannon entropy and Kolmogorov complexity, IEEE Transactions on Information Theory, **IT-24** :331-338, 1978.

[10] **K.T. Chen**. Iterated Path Integrals and Generalized Paths. Bull. Amer. Math. Soc., 73 :935-938, 1967.

[11] **Ledoux, Michel, Qian, Zhongmin, Zhang, Tusheng** . "Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths". Stochastic Processes and their Applications. 102 (2) : 265-283,(2002).

[12] **P. Cheridito, H. Kawaguchi et M. Maejima**. Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. Electro- nic Journal of Probability, 8(3), p. 1-14, 2003.

[13]] A. Chronopoulou et S. Tindel. On Inference for Fractional Differential Equations. arXiv :1104.3966v1, 2011.

[14] **S.Cohen et F. Panloup**. Approximation of Stationary Solutions of Gaussian Driven Stochastic Differential Equations. Stochastic Processes and their Applications, 121, no. 12, 2776-2801, 2011.

[15] **G.E. Correll et G.E. Futter**. Two Case Studies of Patients with Major Depressive Disorder Given Low-Dose (Subanesthetic) Ketamine Infusions. Pain Medicine, vol. 7, 2006.

[16]] **L. Coutin**. Rough Paths via Sewing Lemma. ESAIM : Probability and Statistics, doi :10.1051/ps/2011108.

[17] **L. Coutin, P. Friz et N. Victoir**. Good Rough Paths Sequences and Applications to Anticipating and Fractional Stochastic Calculus. Ann. Probab., 35(3) :1172-1193, 2007.

[18] **L. Coutin et A. Lejay**. Semi-Martingales and Rough Paths Theory. Electron. J. Probab., 10(23) :761-785 (electronic), 2005.

[19] **L. Coutin et A. Lejay**. Perturbed Linear Rough Differential Equations. INRIA :hal-00722900v1, 2012.

[20] **L. Coutin et Z. Qian**. Stochastic Analysis, Rough Path Analysis and Fractional Brownian Motions. Probab. Theory Related Fields, 122(1) :108-140, 2002.

[21] **J.C. Cox, J.E. Ingersoll et S.A. Ross**. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. Econometrica, 53, pp. 385-407, 1985.

[22] **A.M. Davie**. Differential Equations Driven by Rough Paths : An Approach via Discrete Approximation. Appl. Math. Res. Express AMRX, (2) :Art. ID abm009, 40, 2007.

[23] **L. Decreusefond et S. Ustunel**. Stochastic Analysis of the Fractional Brownian Motion. Poten- tial Anal. 10(2) :177-214, 1999.

[24] **M. Delattre**. Pharmacokinetics and Stochastic Differential Equations : Model and Methodology. 20th Meeting of the Population Approach Group in Europe, Athènes, 2011.

[25] **A. Dembo et O. Zeitouni**. Large Deviations Techniques and Applications. Applications of Mathematics, Vol. 38, New-York. Springer-Verlag, 1998.

[26] **A. Deya, M. Gubinelli et S. Tindel**. Non-Linear Rough Heat Equations. A paraître dans PTRF, 2012.

[27] **A. Deya et S. Tindel**. Rough Volterra Equations 1 : The Algebraic Integration Setting. Stoch. Dyn., 9(3) :437-477, 2009.

[28] **A. Deya et S. Tindel**. Rough Volterra Equations 2 : Convolutional Generalized Integrals. Stoch. Process. Appl., 121(8) :1864-1899, 2011.

[29] **T. Dieker**. Simulation of Fractional Brownian Motion. University of Twente, 2004.

[30] **H. Doss**. Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 283(13) :Ai, A939-A942, 1976.

[31] **D. Feyel et A. De La Pradelle**. Curvilinear Integrals Along Enriched Paths. Electron J. Probab., 11 :860-892, 2006.

[32] **J. Feng, J-P. Fouque et R. Kumar**. Small-Time Asymptotics for Fast Mean-Reverting Stochas- tic Volatility Models. Ann. Appl. Probab. Volume 22, Number 4, 1541-1575, 2012.

[33] **M. Fliess et D. Normand-Cyrot**. Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell- Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen. Séminaire de Probabilités XVI, vol. 920, 257-267, Springer, Berlin, 1982.

[34] **E. Fournié, J-M. Lasry, J. Lebuchoux, P-L. Lions et N. Touzi**. Applications of Malliavin Calculus to Monte-Carlo Methods in Finance. Finance Stochast. 3, 391-412, 1999.

[35] **P. Friz et N. Victoir**. A Note on the Notion of Geometric Rough Paths. Probab. Theory Related Fields, 136(3) :395-416, 2006.

[36] **P. Friz et N. Victoir**. Differential Equations Driven by Gaussian Signals. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 46, no. 2, 369-41, 2010.

[37] **P. Friz et N. Victoir**. Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths : Theory and Applications. Cambridge Studies in Applied Mathematics, 120. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[38]] **M. Gubinelli**. Controlling Rough Paths. J. Funct. Annal. 216, 86-140, 2004.

[39] **Y. Hu et D. Nualart**. Differential Equations driven by Holder Continuous Functions of Order Greater than 1/2. Stochast. Anal. Appl., 2 :399-413, 2007.

[40] **K. Itô**. Stochastic Integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo, 20, 519-524, 1944.

[41] **J. Jacod**. Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in Mathematics 714, Springer, 1979.

[42] **K. Itô**. Stochastic Differential Equations. Memoirs AMS 4, 1951.

[43] **A. Lejay**. Global Solutions to Rough Differential Equations with Unbounded Vector Fields. Séminaire de probabilités XLIV, Lecture Notes in Mathematics 2046, Springer-Verlag, 215- 246, 2012.

[44] **T. Lyons**. Differential Equations Driven by Rough Signals. I. An Extension of and Inequality of L.C. Young. Math. Res. Lett. 1, no. 4, 451-464, 1994.

[45] **T. Lyons**. Differential Equations Driven by Rough Signals. Rev. Mat. Iberoamericana, 14(2) :215-310, 1998.

[46] **T. Lyons**. Differential Equations Driven by Rough Paths. Ecole d'Eté de Probabilités de St- Flour XXXIV, Lecture Notes in Mathematics 1908, Springer, 2004.

[47] **T. Lyons et Z. Qian**. System Control and Rough Paths. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[48] **B.B. Mandelbrot et J.W. Van Ness**. Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Ap- plications. SIAM Rev., 10, 422-437, 1968.

[49] **N. Marie**. Sensitivities via Rough Paths. arXiv :1108.0852v8, 2011.

[50] **J. Neveu**. Processus aléatoires gaussiens. Presses de l'Université de Montréal, 1968.

[51] **J. Neveu**. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Deuxième édition, Masson et Cie, Paris, 1970.

[52] **A. Neuenkirch et S. Tindel**. A Least Square-Type Procedure for Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations with Additive Fractional Noises. arXiv :1111.1816v1, 2011.

[53] **H.J. Sussman**. On the Gap between Deterministic and Stochastic Ordinary Differential Equa- tions. Ann. Probability, 6(1) :19-41, 1978.

[54] **L.C. Young**. An Inequality of Hölder Type Connected with Stieljès Integration. Acta Math. (67) :251-282, 1936.

[55] **Y. Yamato**. Stochastic Differential Equations and Nilpotent Lie Algebras. Z. Wahr. und verw. Gebiete, 47, 213-29, 1979.

[56] **A. Kohatsu-Higa et J.A. León**. Anticipating Stochastic Differential Equations of Stratonovich Type. Appl. Math. Optim. 36, no. 3, 263-289, 1997.

[57] **M. Zähle**. Integration with Respect to Fractal Functions and Stochastic Calculus I. Probab. Theory Relat. Fields 111, 333-374, 1998.

[58] **A. Neuenkirch et S. Tindel**. A Least Square-Type Procedure for Parameter Estimation in Stochastic Differential Equations with Additive Fractional Noises. arXiv :1111.1816v1, 2011