

Dédicace

Je dédie ce travail :

À mes chers parents,

À mes chers frères,

À tous ma famille,

À tous mes amis.

À tous ceux qui m'ont encouragé pour aller jusqu'au bout.

Remerciements

Si je suis arrivé à ce niveau, c'est grâce à Dieu tout puissant, clément et miséricordieux qui m'a donné la force et la patience afin de poursuivre mes études et de pouvoir achever ce modeste travail dans les délais.

Ce mémoire ne serait jamais réalisé sans l'aide et le soutien de mon encadreur Dr. Bennihi, que je remercie infiniment et à qui j'exprime ma gratitude et ma reconnaissance pour son aide appréciable, sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de mon travail de recherche et d'investigations.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants du département de mathématiques et en particulier ceux qui m'ont enseigné durant mon cursus universitaire.

Je remercie ma famille et surtout mes parents pour leur soutien moral, leurs encouragements et leur patience durant les étapes difficiles de ce travail.

Merci à toutes les personnes qui ont accepté de m'aider dans la relecture et la correction de ce mémoire.

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont soutenue de près ou de loin, tout au long de cette année et qui se reconnaîtront.

Enfin, mes remerciements s'adressent à tous ceux et celles qui m'ont aidé de près ou de loin, et qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

0.1	Introduction	6
1	Préliminaires	8
1.1	Notation	8
1.2	Définitions	9
1.3	Problème de Cauchy	10
1.4	Lemme de Gronwall	13
1.4.1	Inéquations différentielles	13
1.4.2	Inéquations intégrales	13
1.5	Existence et unicité	14
1.5.1	Unicité globale	15
1.5.2	Existence globale	15
1.5.3	Existence et unicité Globale	15
1.6	Théorème du point fixe	16
2	Résolution des EDO	17
2.1	Définition des EDO	17
2.2	Méthodes de résolution numérique et notations	19
2.3	Principe Générale des méthodes numériques	19
2.4	Propriétés des méthodes numériques	20
2.5	Principale méthodes numériques	21
2.6	Méthodes à un Pas	22
2.7	Exemples des méthodes à un pas	23
2.7.1	Méthodes d'Euler explicite et implicite	23
2.7.2	Méthode d'Euler amélioré	24

2.7.3	Méthode d'Euler-Cauchy	24
2.7.4	Méthode de Crank-Nicholson	24
2.7.5	Méthodes de Runge et Kutta	25
3	Étude De quelques méthodes numériques à Pas Multiples	27
3.1	Méthode à Pas Multiples	27
3.1.1	Méthode D'Adams-Bashforth	28
3.1.2	Méthode d'Adams-Moulton	32
3.2	Méthodes De prediction-corrction	34
3.2.1	Principe général	34
3.3	Méthode d'approximation de Picard	35
3.3.1	Description	35
3.4	Comparaison des méthodes	39

0.1 Introduction

Les mathématiques constituent un outil fondamental, elles sont un instrument irremplaçable de formation à la rigueur et au raisonnement ; elles développent l'intuition l'imagination, l'esprit et critique, elle sont aussi un langage international avec les autres sciences et jouent un rôle grandissant dans la conception et l'élaboration des objets de notre vie quotidienne.

C'est une discipline qui se nourrit de ses liens avec d'autres sciences et avec le monde réel, mais qui également s'enrichit d'elle-même.

Aujourd'hui, les mathématiques ont rétabli, et parfois crée des liens forts avec les autres sciences et avec de nombreux secteurs économiques. La frontière entre mathématiques pures et mathématiques appliquées est devenue floue. Les mathématiques les plus fondamentales servent à résoudre des problèmes de plus en plus difficiles. Ainsi, des domaines comme la géométrie algébrique et la théorie des nombres ont trouvé des applications inattendues en théorie du codage et en cryptographie. De même, les liens des mathématiques avec la finance se sont intensifiés pour évaluer, voir créer des produits financiers de plus en plus complexes en fonction des besoins et des demandes des acteurs économiques.

Ces liens mathématiques avec les autres disciplines se font grâce à des approches mathématiques qui ont joué un rôle primordial dans la recherche scientifique, car elles constituent des outils de compréhension du fonctionnement des systèmes naturels, et de prédiction de leur évolution. Notre intérêt de ce travail porte d'une manière subjective sur l'étude de quelques méthodes à pas multiples.

Ces méthodes nous conduisent progressivement à des méthodes plus complexes telles que les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4, qui permettent d'obtenir des résultats d'une grande précision. Nous considérons principalement les équations différentielles avec conditions initiales, mais nous ferons une brève incursion du côté des équations différentielles avec conditions aux limites (ou aux bords).

Nous prenons comme point de départ la formulation générale d'une équation différentielle d'ordre 1 avec condition initiale. La tâche consiste à déterminer une fonction $y(t)$ solution de :

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

La variable indépendante t représente très souvent (mais pas toujours) le temps (variable temporelle). La variable dépendante est notée y (variable spatiale) et dépend bien sûr de t . La fonction f est pour le moment une fonction quelconque de deux variables que nous supposons suffisamment différentiable. La condition $y(t_0) = y_0$ est la condition initiale et en quelque sorte l'état de la solution au moment où l'on commence à s'y intéresser. Il s'agit d'obtenir $y(t)$ pour $t \geq t_0$, si l'on cherche une solution analytique ou une approximation de $y(t)$, si l'on utilise des méthodes numériques.

Les méthodes à pas multiples ont été largement utilisées pour résoudre des problèmes différentiels durant la première partie du 20^{ème} siècle. Celle-ci présentait l'énorme avantage par rapport aux plusieurs méthodes de faire en sorte que les calculs soient réduits grâce à la réalisation de calculs précédents.

Ce mémoire est structuré de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notations ; définitions, théorème et outils, utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre sera consacré aux notions de base permettant l'étude des équations différentielles ordinaires (EDO) ainsi qu'aux méthodes numériques à un pas suivi d'exemples.

Le troisième chapitre traite des méthodes numériques à pas multiples.

Enfin nous achevons ce mémoire par une conclusion qui porte sur perspectives d'avenir.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Notation

Dans ce chapitre nous allons rappeler quelques notations et définition sur les équations différentielles suivent :

- \mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.
 - \mathbb{N} : Ensemble des nombres naturelles.
 - $|\cdot|$: Valeur absolue ou module.
 - $x^{(i)}$: i ème dérivée.
 - EDO :Equation différentielle ordinaire.
 - AB_{r+1} : la méthode d'Adams-Bashforth à $r + 1$ pas.
 - AM_{r+1} : la méthode d'Adams-Moulton à $r + 1$ pas.
 - $\|\cdot\|$: Une norme quelconque sur R^n)
 - RK : méthode de Runge-Kutta
 - PECE :La méthodes de prediction-corrction
-

1.2 Définitions

Définition 1.2.1. [1]

Équation différentielle ordinaire

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO est une relation entre la variable réelle t .

Une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$.

On prendra t dans un intervalle I de \mathbb{R} (I peut être \mathbb{R} tout entier).

La solution x en général sera à valeurs dans \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}^*$ où n sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.2. [1]

Équation différentielle normale

On appelle équation différentielle normale d'ordre n toute équation de la forme :

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.2)$$

Définition 1.2.3. Équation différentielle autonome

On appelle équation différentielle autonome d'ordre n toute équation de la forme :

$$x^{(n)} = f(x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad (1.3)$$

Autrement dit, f ne dépend pas explicitement de t . (la variable t n'apparaît pas dans l'équation)

Définition 1.2.4. Équation différentielle linéaire

Une EDO de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est de la forme :

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \quad (1.4)$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients dépendant au plus de t .

Définition 1.2.5. Équation différentielle d'ordre 1 : est dite équation différentielle d'ordre 1, car seule la dérivée d'ordre 1 de la variable dépendante $y(t)$ est présente. Si des dérivées de $y(t)$ d'ordre 2 apparaissaient dans l'équation différentielle, on aurait une équation d'ordre 2, et ainsi de suite.

Définition 1.2.6. Solution

On appelle solution (ou intégrale) d'une équation différentielle d'ordre n sur un certain intervalle I de \mathbb{R} , toute fonction x définie sur cet intervalle I , n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie cette équation différentielle sur I .

On notera en général cette solution (x, I) .

Si I contient sa borne inférieure notée a (respectivement sa borne supérieure b), ce sont des dérivées à droite (respectivement à gauche) qui interviennent au point $t = a$ (respectivement $t = b$).

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Définition 1.2.7. Courbe intégrale-orbite

On appelle courbe intégrale l'ensemble des points $(t, x(t))$ où t parcourt I . Autrement dit, si x est à valeurs dans \mathbb{R}^n , la courbe intégrale est un ensemble de points de \mathbb{R}^{n+1} .

On appelle orbite, l'ensemble des points $x(t)$ où t parcourt I : c'est un ensemble de points de \mathbb{R}^n .

L'espace \mathbb{R}^n où les solutions prennent leurs valeurs s'appelle espace de phases.

1.3 Problème de Cauchy

La résolution d'équations différentielles est un problème très ancien. Les 1^{ère} équations différentielles ont animé, au cours du 17^{ème} siècle, les efforts de mathématiciens de l'époque : Euler, Leibniz, les frères Bernoulli, Clairaut ..., chacun cherchait à résoudre les équations différentielles obtenues lors des calculs de la solution à un problème donné. Des méthodes formelles ont été mises au point pour résoudre certaines formes d'équation mais il était clair que certaines resteraient impossibles à résoudre formellement.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On note $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^m

Définitions 1.3.1. [2]

Problème de Cauchy étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous forme normale

$$y' = f(t, y)$$

pour $(t, y(t)) \in U$, et un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy correspondant est la recherche des solutions x telles que

$$y(t_0) = y_0$$

Notation : On note le problème de Cauchy de la façon suivante :

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

Définitions 1.3.2. [2]

Une solution du problème de Cauchy (1.5) sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} avec la condition initiale $(t_0; y_0) \in U$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

1. pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$
2. pour tout $y'(t) = f(t, y(t))$.
3. $y(t_0) = y_0$

Théorème 1.3.1. [2] Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $(t_0; y_0) \in U$ et x une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et à valeurs dans \mathbb{R} . Une fonction y est solution de problème de cauchy (1.5) sur I si et seulement si

1. pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$,
2. y est continue sur I ,
3. pour tout $t \in I$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (1.6)$$

Remarque 1.3.1. 1. L'équation (1.6) est appelée équation intégrale du problème de Cauchy.

2. On peut prendre pour I un intervalle fermé et semi-fermé d'intérieur non vide.

Commençons par présenter un exemple d'équations différentielles avec condition initiale.

Exemple 1.3.1. Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{cases} y' = t, \\ y(t_0) = 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

Voilà certainement l'un des exemples les plus simples que l'on puisse imaginer. En intégrant de chaque côté, on obtient :

$$\int y'(t) dt = \int t dt$$

c'est-à-dire :

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + c$$

ou c est une constante. Cette dernière expression est la solution générale de l'équation différentielle en ce sens qu'elle satisfait $y'(t) = t$, quelle que soit la constante c . Pour déterminer la constante c , il suffit d'imposer la condition initiale :

$$y(0) = 1 = c$$

La solution particulière est alors :

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + 1$$

qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

Théorème 1.3.2. Soient $f \in \mathcal{C}(u; \mathbb{R}^n)$ où u est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, et $(t_0; x_0) \in U$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de $(t_0; x_0)$, c'est à dire qu'il existe un voisinage de $(t_0; x_0)$ dans U et $L > 0$ tel que pour tous $(t; x)$ et $(t; y)$ dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (1.8)$$

Remarques 1.3.1. – Dès que f est de classe C^1 elle est localement lipschitzienne (ce résultat découle du théorème des accroissements finis). C'est un résultat connu découlant du théorème des accroissements finis.

– A partir de maintenant, on considère un cas, légèrement plus particulier (pour simplifier les énoncés des propriétés), où f est définie sur $I \times J$, avec I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et J un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et non plus sur un domaine ouvert quelconque U inclus dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définitions 1.3.3. *Localment lipschitzien*

Soient $f \in \mathcal{C}(I \times J, \mathbb{R}^m)$ ou I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} et J est un ouvert d'un espace \mathbb{R}^m , et $(t_0; x_0) \in I \times J$. On dit que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à sa variable x si pour tout $(t_1; x_1) \in I \times J$, il existe un voisinage de ce point dans $I \times J$ et $L > 0$ tel que pour tous (t, x) et (t, y) dans ce voisinage.

La solution (1.5) dépend continûment des données du problème : f, t_0 , et u_0 .

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme de Gronwall dont on donne ici une forme particulière

1.4 Lemme de Gronwall

1.4.1 Inéquations différentielles

Lemme 1.4.1. *Gronwall- Inéquations différentielles* Supposons qu'une fonction x de classe, où I est un intervalle de \mathbb{R} , vérifie

$$x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t) \quad (1.9)$$

où a et b sont des fonctions continues de I dans \mathbb{R} . Alors, on a l'inégalité

$$x(t) \leq x(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right)b(s)ds \quad (1.10)$$

1.4.2 Inéquations intégrales

Lemme 1.4.2. *Gronwall- Inéquations intégrales*

Supposons qu'une fonction x continue de $I = [0, T]$ sur \mathbb{R}^+ , $T \in \mathbb{R}$ (attention on ne s'intéresse qu'aux fonctions à valeurs dans \mathbb{R}) vérifié :

$$x(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t a(s)x(s)ds \quad (1.11)$$

pour tout $t \in I$, où a est une fonction continue de I dans \mathbb{R}^+ et b une fonction continue de I dans \mathbb{R} . Alors, on a l'inégalité :

$$x(t) \leq b(t) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right)b(s)ds \quad (1.12)$$

pour tout $t \in [0; T]$.

1.5 Existence et unicité

L'objectif de cette section est d'étudier l'existence et l'unicité locale et globale des problèmes de Cauchy (c'est à dire une équation différentielle ordinaire pour laquelle on a donné une condition initiale) sans connaître explicitement les solutions.

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, nous n'aurons pas besoin de traiter les équations différentielles d'ordre n étant donné que l'on est capable de se ramener à l'ordre 1.

Par conséquent, nous ne donnerons les résultats que pour les EDO d'ordre 1, sous forme normale, autrement dit, du type :

$$y' = f(t, y)$$

où y est la fonction inconnue de la variable réelle à valeurs dans un espace \mathbb{R}^m , et sera une fonction donnée sur $I \times J$, ouvert, non vide de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$.

Dans certains résultats, on verra même que l'on peut prendre f définie de façon générale sur un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

Nous verrons qu'il faut faire des hypothèses de régularité sur la fonction f afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité des solutions.

Il est possible de montrer l'existence de solutions généralisées, c'est à dire de fonctions a priori seulement continues satisfaisant

$$y(t_0) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

pour des fonctions f discontinues. Le premier résultat est attribué à Carathéodory, on a d'ailleurs gardé son nom pour nommer ces solutions.

L'unicité des solutions quant à elle, pour une donnée initiale fixée nécessite une hypothèse plus forte que la continuité de f .

nous contenterons de considérer f lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Ce qui sera dée pleinement satisfaisant pour nous. Lors de la preuve de certaines propositions ou théorèmes, nous aurons besoin de résultats préliminaires importants et 'classiques' et plus particulièrement du lemme de Gronwall et du théorème de point fixe de Banach-Picard que nous rappelons dans cet section.

1.5.1 Unicité globale

Le résultat précédent donne seulement un résultat d'unicité local. On peut en déduire un résultat d'unicité globale grâce à l'énoncé suivant.

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L\|y - x\|. \quad (1.13)$$

1.5.2 Existence globale

Lorsque $J = \mathbb{R}^m$ et f est globalement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe $L > 0$ tel que pour tous (t, y) et (t, x) dans $I \times J$,

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L\|y - x\|. \quad (1.14)$$

il n'y a pas de risque de sortir de son domaine de définition ni du domaine de validité de sa constante de Lipschitz.

En reprenant la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz on peut donc construire, quels que soient a et b tels que $t_0 \in [a, b] \subset I$, une suite de solutions approchées (y^n) qui soit de Cauchy dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^m)$. On en déduit alors le résultat global suivant :

1.5.3 Existence et unicité Globale

Théorème 1.5.1. Existence et Unicité globale : On suppose $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ et globalement lipschitzienne par rapport à y . Alors, quel que soit $(t_0; x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe un unique $y \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^m)$ solution de (1.5).

Théorème 1.5.2. Existence et Unicité Globale (affine)

Si $b \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^m)$ et A est continue, définie sur I alors toutes les solutions maximales de $y'_0(t) = A(t)y + b(t)$; sont globales.

Les résultats précédents restent également valable lorsque y est à valeurs dans un ouvert d'un espace de Banach de dimension finie ou infinie. Par contre le résultat suivant n'est valable que lorsque y est à valeurs dans une espace de dimension finie. \mathbb{R}^m).

Théorème 1.5.3. Existence et unicité globale (dim finie)

Si f est uniformément bornée sur $I \times \mathbb{R}^m$, toutes les solutions maximales de $y' = f(t; y)$ sont globales.

1.6 Théorème du point fixe

Nous rappelons ici le théorème de point fixe de Banach-Picard seulement sur \mathbb{R} en sachant que le résultat est vrai pour un ensemble fermé non vide d'un espace de Banach E .

Théorème 1.6.1. du Point Fixe Banach-Picard

Soit F un fermé d'un espace de Banach E et f , une contraction définie sur F , c'est à dire : $f : F \rightarrow F$ et

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

Alors f possède un unique point fixe dans F (i.e. il existe un unique $x \in F$ tel que $f(x) = x$).

Remarque 1.6.1. Si F est convexe et f différentiable dans un voisinage de F il suffit pour qu'elle soit contractante que $\sup_{x \in F} \|f'\| < 1$.

Corollaire 1.6.1. Soit F un fermé d'un espace de Banach E et $f : F \rightarrow F$. S'il existe un $p \geq 1$ tel que l'itérée f^p soit une contraction, alors f possède un unique point fixe dans F .

Méthode des approximations successives pour résoudre l'équation $x = f(x)$: prendre x_0 arbitraire et $x_{n+1} = f(x_n)$.

Si la suite x_n converge et si f est continue, sa limite est solution de l'équation. Si f est contractante l'algorithme converge toujours vers l'unique solution de l'équation.

Chapitre 2

Résolution des EDO

Les équations différentielles ordinaires (EDO) apparaissent très souvent dans la modélisation de la physique et des sciences de l'ingénieur. dans les systèmes dynamiques

Trouver la solution d'une EDO ou d'un système d'EDO est ainsi un problème courant, souvent difficile ou même impossible à résoudre de façon analytique .

Il est alors nécessaire de recourir à des méthodes numériques pour résoudre d' équation différentielles

2.1 Définition des EDO

Soit une fonction $y(x)$ définie sur un intervalle de \mathbb{R} et de classe \mathbf{C}^p (continument dérivable d'ordre p) On appelle équation différentielle d'ordre p une équation de la forme :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0$$

On appelle forme canonique d'une EDO une expression du type :

$$y^{(p)} = f(x, y, y', \dots, y^{(p-1)}) = 0$$

Seul ce type d'équation sera considéré dans cette section. Toute équation différentielle canonique peut être écrite comme un système d'équation différentielle du premier ordre en introduisant $p-1$

fonction définie comme :

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \dots = \dots \\ y_p = y^{(p-1)}, \end{cases}$$

L'équation canonique se met alors sous la forme du système d'EDO d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \dots = \dots \\ y'_p = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_p), \end{cases}$$

Nous limiterons l'étude au cas simple d'équation différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Les problèmes différentiels de ce type sont appelés problèmes de Cauchy ou problèmes à valeurs initiales.

Si f est continue et si elle vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable

$$(\text{Il existe } L > 0 \text{ tel que } \forall x \in [a, b] \text{ et } \forall y_1, y_2 \text{ on ait : } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Alors le problème admet une solution unique y pour toute valeur initiale. On dit qu'il est "bien posé". On a vu, que certains problèmes différentiels bien posés du point de vue théorique peuvent s'avérer impossibles à résoudre numériquement car instables.

Numériquement, il faudra en effet considérer l'ensemble des solutions voisines de la solution exacte cherchée, solution voisine correspondant à de petites perturbations des conditions initiales. Si ces solutions ne s'écartent pas trop de la solution de référence exacte, on aura un problème stable et on pourra construire des approximations numériques convenables.

En généralisant l'écriture de l'équation au cas d'une fonction vectorielle, on pourra traiter des systèmes différentiels et des équations ou systèmes d'ordre supérieur à 1, par des extensions naturelles des techniques que nous présentons ci-dessous dans le cas de dimension 1 par souci de simplicité.

2.2 Méthodes de résolution numérique et notations

Discrétisation par découpage de l'intervalle de longueur L selon un pas constant h Échantillonnage de la solution aux instants $t_i = t_0 + ih$ pour $1 \leq i \leq n$. Solution numérique : $u_i =$ approximation de $y(t_i)$ À partir de la condition initiale $u_0 = y(t_0)$ imposée, faire une boucle sur les abscisses t_i pour calculer l'approximation u_{i+1} à $t_{i+1} \rightarrow$ approximer ainsi de proche en proche la solution sur l'intervalle L .

\Rightarrow accumulation des erreurs dans la boucle

À chaque pas de la boucle, pour calculer u_{i+1} , on peut s'appuyer :

- sur la dernière valeur calculée u_i : méthodes à un pas.
- sur plusieurs valeurs u_{i-k} ($k \geq 0$) antérieurement calculées méthodes à plusieurs pas (initialisation nécessaire par méthode à un pas).

2.3 Principe Générale des méthodes numériques

Pour obtenir une approximation numérique de la solution $y(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$ nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre finie de points x_i pour $i = 0, 1, \dots, n$ constituant les noeuds du maillage. La solution numérique discret obtenue aux points x_i est notée $y_i = y(x_i)$

L'écart entre deux abscisses, noté h est appelé pas de discrétisation. Ce pas, dans les méthodes les plus simples, est constant, mais il peut être judicieux de travailler avec un pas variable.

$$h_i = x_i - x_{i-1}.$$

Le choix du maillage et de la répartition des noeuds peuvent s'avérer crucial.

Les techniques de résolution des EDO sont basées sur :

- L'approximation géométrique de la fonction
- Les formules d'intégration numérique (rectangle, trapèze, simpson...)
- Les développements de Taylor au voisinage de x_i

2.4 Propriétés des méthodes numériques

Plusieurs notions mathématiques sont introduites lors de la résolution d'EDO au moyen de leurs équivalents discrétisés.

Les trois principales sont : **la convergence**, **la stabilité** et **la consistante**, permettant de relier la solution exacte des équation continues à la solution exacte discrétisées et des d'équations à la solution numérique obtenue.

– Consistance d'une méthode

La consistence est la propriété qui assure que la solution exacte de l'équation discrétisée tende vers la solution exacte de l'équation continue lorsque le pas de discrétisation h tend vers 0.

– Stabilité d'une méthode

C'est la propriété qui assure que la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées reste bornée. La stabilité indique si l'erreur augmente ou non au cours du calcul. Une méthode peut être stable sous condition (elle sera dite conditionnellement stable) ou toujours stable (elle sera dite inconditionnellement stable).

Condition de stabilité

Considérons un problème à la valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = y_0, \end{cases} .$$

Si $\frac{df}{dy} < 0$: il existe un pas de discrétisation seuil h_{\max} à partir duquel une méthode explicite sera stable. La condition de stabilité s'écrit :

$$h < h_{\max} = \frac{2}{\max \frac{df}{dy}}$$

Si $\frac{df}{dy} > 0$

les méthodes explicites sont instables quelque soit le pas de discrétisation h . Les méthodes sont dites inconditionnellement instables.

Dans certains cas, la dérivée $\frac{df}{dy}$ peut changer de signe. Le comportement de la méthode est instable dans certains intervalles et stable dans d'autres.

Cas particulier d'une EDO linéaire

Dans le cas particulier d'une EDO linéaire, la solution numérique satisfait une équation récurrente linéaire à $p + 1$ niveaux

$$a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \dots + a_0 y_n = b_n$$

Soient r_1, r_2, \dots, r_p les racines complexes de l'équation caractéristique associée :

$$a_p r^p + a_{p-1} r^{p-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

La condition de stabilité s'écrit : $\forall i; |r_i| < 1$

– Ordre de précision d'une méthode

L'erreur de troncature ε est définie comme la différence entre la solution exacte \tilde{y} et l'approximation numérique obtenue y_n , soit : $\varepsilon_n = |\tilde{y}(x_n) - y_n| = \mathcal{O}(h^p)$. L'ordre de précision de la méthode est donnée par l'entier p .

– Convergence et taux de convergence d'une méthode

Une méthode est convergente si, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, la solution numérique tend vers la solution exacte de l'équation continue. Une méthode est convergente à l'ordre l si : $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| = \mathcal{O}(h^l)$.

Résultat théorique : Une méthode stable et consistante est convergente.

2.5 Principale méthodes numériques

Les principales méthodes de résolution numériques des EDO sont séparées deux grands types :

– Les méthodes à un pas :

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète y_{n+1} ou noeud x_{n+1} fait intervenir la valeur y_n obtenue à l'abscisse précédent. Les principales méthodes sont :

Méthodes d'Euler explicite et implicite.

Méthode d'Euler améliorée.

Méthode d'Euler cauchy.

Méthode de Crank Nicholson.

Méthodes de Runge et Kutta.

– les méthodes à pas multiples :

Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète y_{n+1} ou noeud x_{n+1} fait intervenir plusieurs valeurs $y_n, y_{n-1}, y_{n-2} \dots$ obtenue à l'abscisse précédent. Les principales méthodes sont :

Méthode : d'Adams bashforth, moulton

Méthodes : de prediction-corrction

Méthodes : d'approximation de Picard

2.6 Méthodes à un Pas

Nous allons commencer par décrire une méthode très simple mais fondamentale : nous mettrons à profit sa simplicité pour en analyser son erreur de discrétisation, sa consistance, sa convergence et sa stabilité, autant de notions clefs dans l'analyse numérique des équations différentielles.

L'objectif de ce section est de décrire un certain nombre de méthodes permettant de résoudre numériquement le problème de cauchy de condition initial $y(t_0) = y_0$ pour une équation différentielle.

$$y' = f(t, y)$$

Dans ces méthode à un pas la valeur approchée de y_{n+1} de la fonction inconnue fait intervenir x_n, y_n, h que l' on peut écrire sous la forme :

La formulation général des méthodes à un pas explicite est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n, h) \end{cases} \quad (2.2)$$

ou la fonction ϕ définit la méthode utilisée.

Exemple 2.6.1. : stabilité $\frac{dy}{dt} = -\lambda y \Rightarrow$ solution analytique $y = y_0 e^{\lambda t} \Rightarrow y_n = y_0 (e\lambda h)^n$

$u_{i+1} = u_i - \lambda h u_i \Rightarrow$ solution numérique $u_n = y_0 (1 - \lambda h)^n$ Si $\lambda > 0$, la solution exacte vérifie $y(\infty) = 0$, Mais pour l'approximation, un $\rightarrow 0 \Leftrightarrow |1 - \lambda h| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\lambda}$

Condition de stabilité : $h < 2/\lambda$ (pas h petit) Mais, si $h > 1/\lambda$, alors $(1 - \lambda h) < 0$: alternance de signe de la solution u_n .

la formulation général des méthodes à un pas implicite est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + \phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h) \end{cases} \quad (2.3)$$

L'obtention de la solution à chaque abscisse nécessite la résolution d'une équation. Ces méthodes sont obtenues en intégrant l'équation différentielle et en utilisant des formules d'intégration numérique pour le seconde membre. L'ordre du schéma est égal au degré de polynome pour lequel l'intégration est exact +1.

Résultats théoriques :

1. Si la fonction ϕ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable alors les méthodes explicite sont stable.
2. Les méthodes implicite sont toujours stable.
3. Les méthodes sont consistantes ssi $\forall x \in [a, b], \phi(x, y, 0) = f(x, y)$

Exemple 2.6.2. stabilité

$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \Rightarrow$ solution analytique $y = y_0 e^{\lambda t} \Rightarrow y_n = y_0 (e^{\lambda h})^n$ $u_{i+1} = u_i - \lambda h u_i \Rightarrow$ solution numérique $u_{i+1} = \frac{u_i}{1+\lambda h}$

$$u_n = \frac{u_i}{(1+\lambda h)^n}$$

Si $\lambda > 0, y(1) = 0$, et aussi $u_n \rightarrow 0 \forall \lambda > 0, \forall h > 0$ solution stable.

2.7 Exemples des méthodes à un pas

2.7.1 Méthodes d'Euler explicite et implicite

Afin de remédier au problème d'instabilité soulevé ci-dessous, on a souvent recours à une méthode de type explicite comme la suivante :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases} \quad (2.4)$$

La méthode peut s'interpréter de plusieurs manières :

1. Via les formules d'intégration numérique : la méthode est le résultat de l'application de la formule des rectangles basée au point x_n .

2. Géométriquement : la méthode revient à remplacer localement en chaque point x_n la courbe solution par sa tangente.
3. Via les développements de Taylor : la méthode provient du développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction y au voisinage de x_n

Méthode implicite, d'ordre 1, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \quad (2.5)$$

2.7.2 Méthode d'Euler amélioré

Méthode explicite dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+1}), \end{cases} \quad (2.6)$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en (x_n, y_n) par la valeur corrigée au milieu de l'intervalle $[x_n, x_{n+1}]$.

2.7.3 Méthode d'Euler-Cauchy

Méthode explicite dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) + f(x_{n+1} + \frac{h}{2}, y_{n+1})]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Géométriquement, la méthode consiste à remplacer dans la méthode d'Euler la pente de la tangente en (x_n, y_n) par la moyenne de cette pente avec la valeur corrigée en x_{n+1} .

2.7.4 Méthode de Crank-Nicholson

Méthode implicite, d'ordre 2, dont l'algorithme est :

$$\begin{cases} y_0(\text{donne}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) + f(x_{n+1} + \frac{h}{2}, y_{n+1})]. \end{cases} \quad (2.8)$$

Elle est obtenue en utilisant la formule d'intégration numérique des trapèzes.

Méthode des trapèzes

On veut calculer $\int_a^b f(x)dx$. On décompose l'intervalle $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

On prend $i = 1$ et on remplace f par son interpolé linéaire aux points $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})(f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i h_{i+1}}{2} f(x) + \frac{1}{2}(h_n f(x_0) + h_n f(x_n))$$

et dans le cas d'une subdivision régulière ($h_i = h, \forall i = 1, \dots, n$) :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}(f(x_0) + f(x_n)) \right]$$

2.7.5 Méthodes de Runge et Kutta

Dans les méthodes de résolution des problèmes à valeurs initiales, le processus de calcul est un processus fini. On avance de n pas, à partir du temps initial jusqu'au temps final et on s'arrête. chaque valeur est donc calculée une fois pour toutes. sauf technique plus complexe d'adaptation de maillage. il n'y a pas de réitération pour améliorer le résultat. Il faudra donc utiliser des méthodes suffisamment précises. ceci explique le recours à des méthodes d'ordre élevé. Les méthodes de Runge et Kutta sont les généralisations de la méthode d'Euler à des ordres supérieurs à 1. elle s'obtiennent à partir de formules d'intégration numériques plus précises que la formule de rectangles considérons tout d'abord l'utilisation de la formule des trapèzes. Elle conduit à la méthode

$$\begin{cases} y_0(\text{donné}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n + \frac{h}{2}y_n) + f(x_{n+1} + \frac{h}{2}y_{n+1})]. \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette méthode est une méthode implicite. Le calcul de la nouvelle valeur y_{n+1} nécessite la résolution d'une équation. Si l'on veut obtenir une méthode explicite du même ordre, on peut

procéder de la manière suivante :

$$\begin{cases} y_0(\text{donné}) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n + \frac{h}{2}, y_n) + f(x_{n+1} + \frac{h}{2}, y_{n+1})]. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ceci peut s'interpréter comme une itération de point fixe (limitée ici à un pas) pour résoudre l'équation du schéma implicite des trapèze. on obtient ainsi la méthode de Runge et Kutta d'ordre 2 noté RK2,

De même l'utilisation de la formule d'intégration de Simpson est à la base de la formule de Runge et Kutta d'ordre 4, noté RK4, c'est l'une des formules les plus utilisées. elle s'écrit :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ k_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarque 2.7.1. On démontre, sous des hypothèses de régularité sur f , que les méthodes de Runge-Kutta sont stables. Etant stables et consistantes, elles sont convergentes suivant un principe général déjà mentionné pour les méthodes à un pas.

Conclusion : La méthode de Crank-Nicholson est d'ordre 2 et stable (au sens ci-dessus) pour tout choix de h .

Ceci explique qu'elle soit souvent retenue. Dans la pratique, même une méthode d'ordre 2 se révèle assez souvent insusante car nécessitant trop de pas de temps pour atteindre une précision donnée

Il est alors nécessaire d'utiliser une méthode d'ordre supérieur : les plus courantes sont celles de Runge-Kutta qui reposent sur des méthodes d'intégration numérique d'ordre supérieur.

Chapitre 3

Étude De quelques méthodes numériques à Pas Multiples

Avec la méthodes RK, on essaie de gagner en précision grâce à des étapes intermédiaires. celle-ci alourdissent les calculs en augmentant le nombre d'évaluation de f pour les méthodes explicites, en augmentant la taille du système non-linéaire à résoudre pour les méthodes implicites. les méthodes à pas multiples utilisent les valeurs des pas précédentes pour essayer de mieux prévoir la valeur à calculer.

3.1 Méthode à Pas Multiples

Les méthodes à un pas utilisent seulement la valeur approchée y_n de $y(t_n)$ pour calculer une valeur approchée y_{n+1} de $y(t_{n+1})$. Les méthodes à pas multiples utilisent aussi l'information obtenue aux temps précédents $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-r}$.

Nous décrivons ici les méthodes d'Adams qui consistent à remplacer $f(t, y(t))$ par un polynôme d'interpolation aux points $t_{n-r}, t_{n-r+1}, \dots, t_{n-1}, t_n, (t_{n+1})$, dans le calcul de

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Si P_n est le polynôme en question, les valeurs approchées y_n seront obtenues par l'équation approchée

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_n(t) dt. \quad (3.1)$$

Les formules seront implicites ou explicites selon que t_{n+1} est l'un des points d'interpolation ou non.

Méthode D'Adams

Principe :

les erreurs augmentent avec l'intégration, les points les plus proches de la valeur initiale ont tendance à être plus fiables. Pour calculer u_{i+1} , on peut s'appuyer non seulement sur la dernière valeur estimée u_i , mais sur les m précédentes.

- si le calcul invoque la pente au point recherché $f(t_{i+1}, u_{i+1})$ la méthode est implicite ADAMS MOULTON
- sinon elle est explicite : ADAMS-BASHFORTH . Dans les deux cas, il faut initialiser le calcul par une méthode à un pas sur les m premiers points.

Le calcul réutilise les évaluations antérieures du second membre \implies stocker ces valeurs pour économiser les calculs.

3.1.1 Méthode D'Adams-Bashforth

Description

On ne suppose plus ici que le pas h_n soit nécessairement constant. Si z est une solution exacte de l'équation, on écrit :

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, z(t)) dt. \quad (3.2)$$

Supposons que pour $0 \leq i \leq r$ on ait déjà calculé les points $z(t_{n-i})$ et les pentes

$$f_{n-1} = f(t_{n-1}, z(t_{n-1})).$$

L'idée de la méthode est d'approximer la fonction $f(t, z(t))$ sur $[t_n, t_{n+1}]$ par son polynôme d'interpolation aux points $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-r}$. Considérons donc le polynôme $p_{n,r}(t)$ qui interpole les points (t_{n-i}, f_{n-1}) pour $0 \leq i \leq r$:

$$p_{n,r}(t) = \sum_{0 \leq i \leq r} f_{n-1} L_{n,i,r}(t), \deg(p_{n,r}) = r, \quad (3.3)$$

ou $L_{n,i,r} = \prod_{0 \leq j \leq r, j \neq i} \frac{t - t_{n-j}}{t_{n-i} - t_{n-j}}$. on écrit maintenant :

$$\begin{aligned}
z(t_{n+1}) &= z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, z(t)) dt. \\
&\simeq z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt. \\
&= z(t_n) + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n,i}
\end{aligned}$$

avec

$$b_{n,i,r} = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(t) dt.$$

L'algorithm de la méthode d'Adams-Bashforth à $r+1$ pas (en abrégé AB_{r+1}) va donc s'écrire :

$$\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n-1,i}, & n \geq r; \\
t_{n+1} = t_n + h_n \\
f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})
\end{cases} \quad (3.4)$$

L'intérêt de cette méthode provient de sa relative simplicité et du fait qu'une seule évaluation de la fonction f est nécessaire à chaque étape (contrairement aux méthodes de Runge-Kutta qui en réclamaient plusieurs). Il va en résulter un gain assez important sur le temps de calcul.

Exemple 3.1.1.

$r = 0$: On a $p_{n,0}(t) = \text{constante} = f_n$, d'où AB_1 : $y_{n+1} = y_n + h_n f_n$. Il s'agit de la méthode d'Euler

$r = 1$: le polynôme $P_{n,r}$ est la fonction affine qui interpole (t_n, f_n) et (t_{n-1}, f_{n-1}) d'où la formules

$$\begin{aligned}
p_{n,1}(t) &= f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}(t - t_n) \\
\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,1}(t) dt &= f_n h_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \left[\frac{1}{2} (t - t_n)^2 \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\
&= b_n \left(f_n + \frac{h_n}{2h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right)
\end{aligned}$$

L'algorithm s'écrit donc

$$\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + h_n \left(f_n + \frac{h_n}{2h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right), \\
t_{n+1} = t_n + h_n \\
f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})
\end{cases} \quad (3.5)$$

Dans le cas ou le pas $h_n = h$ est constant, la formule de récurrence se réduit à

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}\right)$$

– De manière générale, lorsque le pas est constant les coefficients $b_{n,i,r}$ ne dépendent pas de n car la méthode est invariante par translation. Pour les petites valeurs de r

Remarque 3.1.1. On a toujours $\sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} = 1$ car pour $f_n = \dots = f_{n-r} = 1$ on a $p_{n,r}(t) \equiv 1$ par conséquent

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt = h_n = h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} \cdot 1 \quad (3.6)$$

comme on le verra plus loin, la quantité β_r intervient dans le calcul de la constante de stabilité S .

Erreur de consistance et ordre la méthode AB_{r+1}

soit z une solution exacte du problème de Cauchy. L'erreur de consistance est donnée par

$$\begin{aligned} e_n &= z(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= z(t_{n+1}) - \left(z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt \right) \\ e_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (z'(t) - p_{n,r}(t)) dt \end{aligned}$$

où $p_{n,r}$ est précisément le polynôme d'interpolation de la fonction $z'(t) = f(t, z(t))$ aux points t_{n-i} , $0 \leq i \leq r$. D'après le théorème de la moyenne, il existe un point $\theta \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$e_n = h_n(z'(\theta) - p_{n,r}(\theta))$$

La formule donnant l'erreur d'interpolation implique

$$z'(\theta) - p_{n,r}(\theta) = \frac{1}{(r+1)!} z^{(r+2)}(\xi) \Pi_{n,r}(\xi)$$

où $\xi \in]t_{n-r}, t_{n+1}[$ est point intermédiaire entre θ et les points t_{n-i} et ou

$$\Pi_{n,r} = \prod_{0 \leq i \leq r} (t, t_{n-i})$$

Si $\xi \in]t_{n-j}, t_{n-j+1}[$, $0 \leq j \leq r$ on a l'inégalité $|\xi - t_{n-i}| \leq (1 + |j - i|)h_{\max}$

$$\begin{aligned} |\pi_{n,r}(\xi)| &\leq h_{\max}^{r+1}(1+j)\dots(1+1)1(1+1)\dots(1+r-j) \\ &= h_{\max}^{r+1}(1+j)!(r-j+1)! \leq h_{\max}^{r+1}(r+1)! \end{aligned}$$

en majorant 2 par $j+2, \dots, (r-j+1)$ par $(r+1)$

On déduit par conséquent :

$$|z'(\theta) - p_{n,r}(\theta)| z^{(r+2)}(\xi) |h_{\max}^{r+1}$$

ce qui donne la majoration cherchée de l'erreur de consistance

$$|en| z^{(r+2)}(\xi) |h_{\max}^{r+1} \leq ch_n h_{\max}^{r+1}$$

avec

$$c = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |z^{(r+2)}(t)|.$$

La méthode d'adams-bashforth à $r+1$ pas est donc d'ordre $r+1$ (le lecteur pourra vérifier à titre d'exercice que l'ordre n'est pas $\geq r+2$ en considérant le cas de la fonction $f(t, y) = t^{r+1}$)

Phase d'initialisation - De ce qui précède, il résulte qu'on choisira une méthode de runge-kutta d'ordre $r+1$ (ou r à la rigueur) pour initialiser les premières valeurs $y_1, \dots, y_r, f_0, \dots, f_r$.

Stabilité de la méthode AB_{r+1}

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. [7] on suppose que $f(t, y)$ est lipschitzienne en y et que les sommes $\sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}|$ sont majorées indépendamment de n par une constante alors la méthode d'adams-Bashforth à $r+1$ pas est stable, avec constante de stabilité

$$s = \exp(\beta_r k T)$$

Démonstration

Soit \tilde{y}_n la suite récurrente perturbée telle que

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} \tilde{f}_{n-i} + \varepsilon_n, \\ \tilde{f}_{n-i} = f(t_{n-i}, \tilde{y}_{n-i}). \end{cases}$$

Posson

$$\theta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{y}_i, y_i|.$$

on a

$$|\tilde{f}_{n-i}, f_{n-i}| \leq k|\tilde{y}_{n-i}, y_{n-i}| \leq k\theta_n$$

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_{n-i}, y_{n-i}| &\leq \theta_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}| \cdot k\theta_n + |\varepsilon_n| \\ &\leq (1 + \beta_r k h_n) \theta_n + |\varepsilon_n| \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \max_{0 \leq i \leq n} (|\tilde{y}_{i+1}, y_{i+1}|, \theta_n), \text{ onduit.} \\ \theta_{n+1} &\leq (1 + \beta_r k h_n) \theta_n + |\varepsilon_n| \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique alors

$$\theta_n \leq ((\beta_r k (t_N - t_r)))(\theta_r) + \sum_{r \leq n \leq N} |\varepsilon_n|$$

Ce qui entraîne bien la stabilité, avec constante $S = \exp(\beta_r k t)$. On voit que la constante β_r croît assez vite quand r augmente. La stabilité devient donc de moins en moins bonne quand le nombre de pas augmente. Cette stabilité médiocre est un des inconvénients les plus sérieux de la méthode d'Adams-Bashforth lorsque r est grand. En pratique, on se limitera le plus souvent aux cas $r = 1$ ou $r = 2$.

3.1.2 Méthode d'Adams-Moulton

Description

L'idée en est la même que celle de la méthode d'Adams-Bashforth, mais on approxime ici $f(t, z(t))$ par son polynôme d'interpolation aux points $t_{n+1}, t_n, \dots, t_{n-r}$; le point t_{n+1} est donc pris en plus. On considère le polynôme $p_{n,r}^*(t)$ de degré $r+1$ qui interpole les points (t_{n-i}, f_{n-i}) pour $-1 \leq i \leq r$:

$$p_{n,r}^*(t) = \sum_{-1 \leq i \leq r} f_{n-i} L_{n,i,r}^*(t)$$

d'ou

$$L_{n,i,r}^*(t) = \prod_{-1 \leq j \leq r} \frac{t - t_{n,j}}{t - t_{n,i}}$$

On obtient donc

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h_n \sum_{-1 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i}$$

avec

$$b_{n,i,r}^* = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}^*(t) dt$$

L'algorithme correspondant AM_{R+1} s'écrit

$$y_{n+1} - h_n b_{n,-1,r}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i}$$

On observe ici que y_{n+1} n'est pas donnée explicitement en fonction des quantités y_n, f_{n-i} antérieurement calculées ; mais seulement comme solution d'une équation dont la résolution n'est pas a priori immédiate. Pour cette raison, on dit que la méthode d'Adams-Moulton est une méthode implicite (La méthode d'Adams-Bashforth est dite par opposition explicite). Pour résoudre l'équation ci-dessus, on aura recours en général à une méthode itérative. Notons u_n la quantité (explicite)

$$u_n = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i}$$

Le point y_{n+1} cherché est la solution x de l'équation

$$x = h_n b_{n,-1,r}^* f(t_{n+1}, x)$$

On va donc calculer la suite itérée $x_{p+1} = \varphi(x_p)$ ou

$$\varphi(x_p) = u_n + h_n b_{n,-1,r}^* f(t_{n+1}, x)$$

Comme

$$\varphi(x_p) = h_n b_{n,-1,r}^* f'(t_{n+1}, x)$$

l'application φ va être contractante (avec une petite constante de Lipschitz) lorsque h_n est assez petit. Si est k -lipschizienne en y , il suffit que :

$$h_n < \frac{1}{|b_{n,-1,r}^*|^k}$$

pour avoir convergence. la solution est alors unique d'après le théorème du point fixe, et l'algorithme itératif s'écrit on choisera une valeur initial x_0 qui soit une approximation de (la meilleure possible).

par exemple la valeur donnée par la méthode d'Adams-Bashforth : $x_0 = y_n h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n-i}$.
On arrête l'itération pour $|x_{p+1} - x_p| \leq 10^{-10}$.

3.2 Méthodes De prediction-corrction

3.2.1 Principe général

On se donne une méthode dite de prédiction (ou prédicteur), fournissant (explicitement) une première valeur approchée py_{n+1} à atteindre :

$py_{n+1} =$ prédiction de y_{n+1}

$fy_{n+1} = (t_{n+1}, py_{n+1}) =$ prédiction de f_{n+1}

En substituant la valeur pf_{n+1} ainsi trouver à f_{n+1} dans la formule d'Adams-Moulton, on obtient alors une nouvelle valeur corrigée ey_{n+1} qui est retenue en vue des calculs ultérieurs. De façon précise, une méthode PECE (prédiction, évaluation, correction, évaluation) à $r+1$ pas va s'écrire de la manière suivant : $y_{n-r}, f_{n-r}, \dots, y_n, f_n$ étant déjà calculée, on pose

{	prédiction,	on utilise à cette fin la méthode d'Adams-Bashforth de même ordre pour calculer la va
	évaluation,	grâce à cette approximation on calcule la valeur $\hat{f}_{n+1} = f(t_{n+1}, \hat{x}_{n+1})$
	correction,	en utilise \hat{f}_{n+1} en lieu et place de f_{n+1} pour valeur calculer x_{n+1}
	évaluation,	on calcule $f_{n+1} = f(t_{n+1}, \hat{x}_{n+1})$,

Nous avons utilisé ici la méthode d'Adams-Moulton comme correcteur, mais cela pourrait être a priori n'importe quelle autre méthode implicite Ici encore, le démarrage de l'algorithme PECE nécessite le calcul préalable des points y_n, \dots, y_r et des pentes f_0, \dots, f_r à l'aide d'une méthode à un pas. On peut estimer que le coût en temps de calcul d'une méthode PECE est environ le double de celui d'une méthode d'Adams-Bashforth d'ordre égal (mais on verra que la stabilité est beaucoup meilleure). Ce temps de calcul est généralement inférieur à celui des méthodes de Runge-Kutta sophistiquées (d'ordre ≥ 3)

3.3 Méthode d'approximation de Picard

3.3.1 Description

La méthode des itérations successives de Picard a été introduite par Emile Picard en 1891, elle est utilisée pour prouver l'existence et l'unicité de la solution des systèmes d'équations différentielles. L'idée d'Emile Picard est d'écrire une équation différentielle ordinaire du 1^{ère} ordre comme d'une formule de point fixe. En partant d'une fonction arbitraire, il itère l'équation pour former des approximations successives [10].

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u), \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (3.7)$$

La méthode de Picard démarre avec l'analyse de l'équation intégrale de Volterra :

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds \quad (3.8)$$

Supposons que $f(t, u)$ satisfait les conditions de Lipschitz dans une autre $t = 0$ et $u = u_0$

$$\forall |t| \leq \delta_0, \forall |u - u_0| \leq \delta_0 : |f(t, u) - f(t, \tilde{u})| \leq K|u - \tilde{u}|, K \text{ constante de Lipschitz}$$

Nous commençons avec la fonction $u(t_0) = u_0$ et nous aurons la relation itérative suivante :

$$u^{n+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u_n(s)) ds \quad (3.9)$$

Pour un système différentiel du 1^{ère} ordre du type :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(t, u, v), \\ \frac{dv}{dt} = g(t, u, v), \end{cases}$$

avec $u(t_0) = u_0$ et $v(t_0) = v_0$ Nous avons le système itératif suivant :

$$\begin{cases} u^{n+1}(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u_n(s), v_n(s)) ds, \\ v^{n+1}(t) = v_0 + \int_0^t g(s, u_n(s), v_n(s)) ds, \end{cases}$$

Si t_0 est assez petit, la nouvelle approximation u^{n+1} appartient à la même boule $|u - \tilde{u}| \leq \delta_0$, pour toute $|t| \leq t_0$ est une contraction dans le sens où on a :

$$\left| \int_0^t f(s, u(s)) ds - \int_0^t f(s, \tilde{u}(s)) ds \right| \leq \varphi \sup |u(t) - \tilde{u}(t)| \quad (3.10)$$

ou $\varphi = k, t_0 < 1$, afin que $t_0 < \frac{1}{k}$ après théorème de point fixe de Banach, il existe alors une unique solution $u(t)$. L'erreur de l'approximation de la solution $u^{(n)}(t)$ est estimée par :

$$E_n = \|u - u^{(n)}\| \leq \frac{Mkt_0^{n+1}}{(n+1)!} \text{ avec } t_0 < \frac{1}{k}, M = \sup_{t \leq t_0, |u - u_0| \leq \delta_0} |f(t, u)|$$

Soit D un cylindre fermé contenu dans l'ouvert U de la forme

$$D = [t_0; t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0; \beta)$$

ou $\overline{B}(y_0; \beta)$ est la boule fermée de \mathbb{R}^m définie par

$$\overline{B}(y_0) = \{z \in \mathbb{R}^m, \|z - y_0\| \leq \beta\}$$

Supposons f continue sur U , elle est alors continue sur D , or D est fermé borné, donc f est bornée

$$M = \max_{(t,y)} \|f(t, y)\|$$

Supposons que y soit une solution du problème de Cauchy (1.5) au point $(t_0; y_0)$ sur un intervalle $I = [t_0; a[$. On a en particulier, pour tout $t \in I$, $(t; y(t)) \in U$. On peut choisir a assez proche de t_0 tel que pour tout $t \in [t_0; a[$, $(t; y(t)) \in D$ (graphe de y dans D). Il résulte alors de l'équation (1.6) que pour tout $t \in [t_0; a[$:

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq M|t - t_0| \end{aligned}$$

Lemme 3.3.1. Si

$$\overline{B}(y_0) = \{z \in \mathbb{R}^m, \|z - y_0\| \leq \beta\}, \beta > 0$$

est un cylindre fermé contenu dans l'ouvert U et

$$M = \max_{(t,y)} \|f(t, y)\|$$

Toute solution y du problème de Cauchy en $(t_0; y_0)$ définie sur l'intervalle $I = [t_0; a[$ quand elle existe vérifie pour tout $t \in I$

$$\|y(t) - y_0\| \leq M|t - t_0|$$

à condition d'avoir $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$ On considère l'ensemble

$\mathfrak{f} = \{z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m), z : I \rightarrow \mathbb{R}^m, I = [t_0, a]$ un intervalle quelconque tel que

$a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$, pour tout $(t, z(t)) \in D$ et $\|z(t) - y_0\| \leq M(t - t_0)\}$ D'après le lemme (3.4.1).

Toute solution du problème de Cauchy en $(t_0; y_0)$ qui est définie sur un intervalle $I = [t_0, a]$ tel que $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$ appartient à \mathfrak{f}

D'autre part, on considère l'opérateur

$$T : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{f}$$

$$z \mapsto T_z = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$$

Cet opérateur est bien défini, en effet,

1. $z \in F$ implique $z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)$ et donc l'application $t \mapsto (t, z(t))$ est continue. Par conséquent $T_z = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds$
2. Pour tout $z \in F, T_z \in z \in F$ car :
 - T_z est définie sur $I = [t_0, a]$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$
 - $T_z f \in \{z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^m)\}$

Remarque 3.3.1. $y \in F$ est solution du problème de Cauchy sur $(t_0; y_0)$ si et seulement si $T_y = y$.

Lemme 3.3.2. Supposons f continue sur U et qu'il existe un cylindre fermé $D = [t_0; t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0; \beta)$ contenu dans U sur lequel $f(t; y)$ soit lipschisienne en y de rapport H , autrement dit pour tout $(t; y_1) \in D$, pour tout $(t; y_2) \in D$

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq H\|y_1 - y_2\|,$$

dans ces conditions, si y_1 et y_2 sont deux fonctions quelconques de F définies sur un même intervalle $I = [t_0, a]$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in I$

$$\|T^n y_2(t) - T^n y_1(t)\| \leq 2MH^n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec $M = \sup_{(t,y) \in D} \|f(t, y)\|$

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses du lemme (3.4.1), supposons que y soit une solution du problème de Cauchy (1.5) au point $(t_0; y_0)$, définie sur $I = [t_0, a]$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. Dans ce cas, si y_1 est une fonction quelconque de F définie sur I , alors la suite $(T^n y_1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers y .*

Corollaire 3.3.1. *(Unicité Locale) Sous les hypothèses du lemme (3.4.1), si le problème de Cauchy (1.5) en $(t_0; y_0)$ admet une solution sur $I = [t_0, a]$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$ alors cette solution est unique sur I .*

Théorème 3.3.1. *(Existence locale) Sous les hypothèses du Lemme (3.4.1), soit y_1 une fonction quelconque de F définie sur un intervalle $I = [t_0, a]$, avec $a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\}$. La suite $(T^n y_1)_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge uniformément vers une fonction $y \in F$ qui est solution du problème de Cauchy en $(t_0; y_0)$ sur I .*

Théorème 3.3.2. *(Cauchy-Lipschitz-Picard), existence et unicité locale Soit $y' = f(t; y)$ une équation différentielle, dans laquelle f est définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $(t_0; y_0)$ un point quelconque dans U . Supposons f lipschitzienne en y sur un cylindre D de la forme*

$$D = [t_0; t_0 + \alpha] \times \overline{B}(y_0; \beta) \subset U$$

et posons :

$$M = \sup_{(t,y) \in D} \|f(t, y)\|; a \leq t_0 + \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\} \text{ La suite } (T^n y_1)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Sous ces conditions, l'équation donnée admet dans chaque intervalle $[t_0; a[$ une solution unique y telle que $y(t_0) = y_0$. Autrement dit, toute solution du problème de Cauchy au point $(t_0; y_0)$ coïncide avec y sur l'intervalle $[t_0; a[$.

Remarque 3.3.2. 1. *Les résultats de ces deux derniers paragraphes se transposent d'eux-mêmes au cas des solutions du problème de Cauchy sur des intervalles situés à gauche de t_0 .*

2. **ATTENTION :** *la continuité de f au voisinage de $(t_0; y_0)$ ne suffit pas à avoir l'unicité des solutions de Cauchy au point $(t_0; y_0)$.*

3. *D'autres démonstrations du Théorème (3.4.2) sont possibles :*

- *en utilisant la méthode d'approximation d'Euler et le Lemme de Gronwall, ou bien*
- *en utilisant le théorème du point fixe pour une application $T^n : F \rightarrow F$ strictement contractante.*

3.4 Comparaison des méthodes

Les méthodes les plus couramment utilisées sont celles de Runge-Kutta d'ordre 4 et les méthodes de prédicteur-correcteur d'Adams d'ordre 4. Les codes les plus modernes utilisent de plus un contrôle du pas ainsi qu'un contrôle de l'ordre à chaque étape, adaptant ainsi le pas et l'ordre à la précision requise et aux irrégularités éventuelles de la solution. Des algorithmes multiples assez sophistiqués utilisant ces idées ont été développés en particulier par Gear et fournissent actuellement les méthodes les plus performantes. Signalons que, pour des problèmes mal conditionnés (dits raides), on doit utiliser des méthodes moins performantes mais plus stables : les plus efficaces sont celles des différentiations rétrogrades que nous ne développerons pas ici.

Elles sont évidemment complètement implicites (les itérations éventuelles sont menées jusqu'à la convergence). En ce qui concerne un choix entre les méthodes de Runge-Kutta et celles d'Adams, signalons les avantages et les inconvénients de chacune des méthodes : de Runge-Kutta : c'est une méthode explicite, relativement stable et précise, facile à implémenter et aisément adaptable à un pas variable (donc contrôle de pas aisé). De plus, elle est "self-starting", c'est-à-dire qu'une seule valeur $y^0 \simeq y(0)$ suffit pour l'initier.

Elle présente cependant deux désavantages importants : chaque itération requiert 4 évaluations de fonctions (pour atteindre l'ordre 4). De plus, on n'a aucun contrôle effectif de l'erreur locale ce qui rend difficile un bon contrôle du pas. On peut pallier ce dernier point en couplant deux méthodes, mais ceci augmente encore le coût.

Adams : pour une précision d'ordre 4, une seule évaluation de fonction est nécessaire à chaque pas dans la méthode explicite, ce qui est bien sûr remarquable. On perd en stabilité par rapport à Runge-Kutta, mais on peut stabiliser en utilisant un correcteur. Ceci augmente le coût mais permet aussi, par comparaison, une estimation de l'erreur locale.

Les difficultés viennent d'une part de l'initiation : pour les méthodes à 4 pas, 4 valeurs sont nécessaires pour initier la méthode. On peut les obtenir par une méthode de Runge-Kutta appliquée plusieurs fois. On peut aussi prendre une méthode à nombre de pas variables en commençant par un pas et montant progressivement à 4. Il faut alors faire un contrôle sérieux de l'erreur.

Un autre désavantage est que le fait de changer de pas apporte un surcoût important par la nécessité de recalculer les coefficients de la formule. Ceux que nous avons donnés (les $b_{i,r}$)

correspondent à un pas constant. Ils sont extrêmement plus compliqués si les $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-r}$ correspondent à des accroissements variables. On préfère alors modifier l'ordre (i.e. le nombre de pas) ce qui donne un surcoût de calcul très réduit. On prend alors le risque d'augmenter l'instabilité...

Conclusion

En guise de conclusion, nous dirons que la résolution numérique des EDO, a favorisé l'émergence des méthodes de plus en plus efficaces surtout avec l'effort des logiciens informaticiens. L'écriture d'un bon programme de résolution de systèmes différentiels passe par la bonne compréhension des algorithmes élémentaires développés dans les paragraphes précédents. On peut à partir de là écrire des algorithmes performants adaptés aux situations particulières des utilisateurs en retenant les idées générales suivantes :

- Les méthodes implicites sont plus stables mais plus coûteuses que les explicites.*
- Augmenter l'ordre augmente aussi l'instabilité.*
- un contrôle du pas est généralement nécessaire, mais augmente considérablement le coût du calcul.*
- les problèmes raides (mal conditionnés) doivent être abordés avec beaucoup de circonspection et des algorithmes spécifiques.*

Comme perspective d'avenir, on souhaite traiter d'autres problèmes en utilisant d'autres méthodes plus performantes et moins coûteuses.

Bibliographie

- [1] Takéo, Takahashi Takahashi : *Analyse Numérique*. Polycopié rédigé par Michel Pierre et Antoine Henrot, (2013-2014), 97-112.
 - [2] André. Fortin : *Analyse numérique pour ingénieurs*, 341-347.
 - [3] Dunford : Jean, Marie Mounier : *Analyse Mp. 1000 exercices co cour et rrigés*, 463-479.
 - [4] L. Pujo-Menjouet : *Equations Différentielles Ordinaires et Partielles*, 21.28.
 - [5] C. Basdevant : *Équations différentielles étude théorique et schémas numériques*, 12.31.
 - [6] J.D. Lambert : *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley, 65/367
 - [7] jean-marie monier : *les méthodes et exercices de mathématiquesb pcsi-ptsi*. John Wiley, 65/367
 - [8] Mazen Saad : *Analyse numérique, 2011-2012*, 1 60/70
 - [9] Eric Goncalvès da Silva : *Mèthodes et Analyse Numèriques*, 47/60
 - [10] Jean-Antoine Désidéri, INRIA : *INTRODUCTION À L'ANALYSE NUMÉRIQUE*, 30/40
-