République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr Tahar Moulay Saïda
Laboratoire de Géométrie, Analyse, Contrôle et Applications

MEMOIRE DE MAGISTER

présenté
par
Boulal Abdelhamid

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse non Linéaire et Géométrie Riemannienne

Intitulé : " Les applications harmoniques et biharmoniques sur le produit tordu généralisé"

dirigé par
Dr. OUAKKAS Seddik

Soutenu le 10 Mai 2011 devant le jury composé de :

Président :	A. KANDOUCI,	Maître de conférences A,	Université de Saïda
Promoteur :	S. OUAKKAS,	Maître de conférences A,	Université de Saïda
Examinateurs :	M. DJAA,	Professeur,	Université de Saïda
	G. DJELLOULI,	Maître de conférences A,	Université de Saida
Invité :	R. NASRI,	Maître de conférences B,	Université de Saïda

Table des matières

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Monsieur **Seddik OUAKKAS**, qui a accepté sans de diriger ce mémoire.

Je le remercie de sa disponibilité, de sa patience et de son intérêt pour ce travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude en vers Monsieur **A. Kandouci** d'avoir accepter d'être le président de ce Jury.

Je remercie aussi Messieur **M. Djaa**, **G. Djellouli** et **R. Nasri** d'avoir accepter de faire partir de ce jury.

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les applications harmoniques et les applications biharmoniques entre variétés riemanniennes produit muni d'une métrique tordue généralisé, Plus particulièrement, nous caractérisons l'harmonicité et la biharmonicité de quelque applications à l'aide de la fonction de distorsion. Les résultats trouvés sont une généralisations des résultats connus dans le cas du produit tordu.(voir [3]-[4]-[19])

Rappelons qu'une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle énergie $E(\phi)$ définie par

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \mid d\phi \mid^2 dv_g, \tag{1}$$

c'est à dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (1)

$$\tau(\phi) = Tr_g \nabla d\phi = 0 \tag{2}$$

oú $\tau(\phi)$ est appelé le champ de tension de ϕ. Si $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ et $(y^\alpha)_{1 \leqslant \alpha \leqslant n}$ sont des coordonnées locales respectivement sur M et N, l'équation (2) devient :

$$\tau(\phi)^\alpha = \Delta\phi^\alpha + g^{ij} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial\phi^\beta \partial\phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \ 1 \leqslant \alpha \leqslant n \tag{3}$$

oú $\Delta\phi^\alpha = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\mid g \mid} g^{ij} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^j})$ est le Laplacien sur (M, g) et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ sont les symboles de Christoffel de (N, h). L'équation (3) montre en particulier que les applications harmoniques sont les solutions d'un système elliptique non linéaire du second ordre. On rencontre les applications harmonique aussi bien en géométrie qu'en physique oú elles sont utilisées comme modèles pour les cristaux liqudes.

Plus généralement, une application $\phi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ est dite biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle biénergie $E_2(\phi)$ définie par,

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \mid \tau(\phi) \mid^2 dv_g, \tag{4}$$

c'est dire si elle est solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à (4)

$$\tau_2(\phi) = -Tr_g (\nabla^\phi)^2 \tau(\phi) - Tr_g R^N(\tau(\phi), d\phi) d\phi = 0, \tag{5}$$

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. L'equation (5) montre que les applications biharmoniques sont solutions d'un système elliptique non linéaire d'ordre quatre.

Le mémoire présenté se compose de cinq chapitres .

Le premier chapitre d'écrit le cadre général où on définit quelques outils fondamentaux de la géométrie riemannienne, ces outils seront utiles pour la suite de ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la notion d'applications harmoniques et applications biharmoniques qui sont le but de ce travail dont on cite quelques propriétés.

Au troisième chapitre, l'étude porte sur les expressions explicites des opérateurs Laplacien et bilaplacien en introduisant la géométrie des variétés produit tordu, ces expressions sont données en fonction de la distorsion.

L'étude du produit tordu généralisé fait l'objet du quatrième chapitre, cette étude nous permet de trouver les formules générales de connexion, le tenseur de courbure et de la courbure de Ricci. Ces formules généralisent les résultats obtenus dans le cas du produit tordu.

Le point essentiel de ce travail est exposé dans le cinquième chapitre où on étudie l'harrmonicite et la biharmonicité de quelque applications définies sur des variété munies d'un produit tordu généralisé. Ces résultats nous ont permis de construire quelques exemples pour ce type d'applications et d'étudier en particulier le cas des applications conforme.

Chapitre 1

Généralités

1.0.1 Notations et définitions

Soit M une variété differentiable , notons par :
$C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur M .
$\mathcal{H}(M), \Gamma(M)$ lensemble des champs de vecteurs sur M.
$T_P M$ espace des vecteurs tangents a M ou point $p \in M$.
$\mathcal{H}^*(M) = \Omega(M)$ est l'ensemble des formes différentielles de degré 1 sur M ,(dual de $\mathcal{H}(M)$).
$T_p^{(r,s)}M = T_P M \otimes ... \otimes T_P M \otimes T_P^* M \otimes ... \otimes T_P^* M$ (r et s fois).
$T_p^{r,s}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{(r,s)}M$ le fibré vectoriel des tenseurs de type (r,s).
Γ_s^r l'espace des sections C^∞ de fibré $(T_p^{(r,s)}M, \pi, M)$, appellé espace des champs de tenseurs sur M.
$\Gamma_0^0 = C^\infty(M), \Gamma_0^1 = \mathcal{H}(M), \Gamma_1^0 = \mathcal{H}^*(M) = \Omega(M)$.
Relativement à une carte (U, x^i) au voisinage d'un poit $p \in M$, un vecteur $t \in T_p^{(r,s)}M$ (resp.un champs de tenseur $T \in \Gamma_s^r(M)$)s'ecrit :

$$t = t_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

$$T = T_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

où $t_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} \in \mathbb{R}$ et $T_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_s} \in C^\infty(M)$

1.1 Variété Riemannienne

1.1.1 Métrique Riemannienne

Dans cette section, on rappelle les propriétés d'une métrique Riemannienne g sur une variété différentiable M.

Définition 1.1.1. *Soit M une variété de dimension n et de classe C^∞. Une métrique Riemannienne est champ de tenseur g de type $(0,2)$:*

$$g : \mathcal{H}(M)^2 \longrightarrow C^\infty(M)$$

tel que pour tout $p \in M$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} g_p : T_pM \otimes T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_p, Y_p) & \longmapsto & g_p(X_p, Y_p) = g(X,Y)_p \end{array}$$

verifie :

1. $g_p(X_p, Y_p) = g(X,Y)_p$
2. g_p *induit une forme bilineaire non dégénéréé sur* T_pM.
3. $g_p(X_p, X_p) > 0$, *(g_p définie positive) pour tout* $X_p \neq 0$

où $X, Y \in \mathcal{H}(M)$.

Exemple 1.1.1. $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire canonique* $<,>_{\mathbb{R}^n}$, *noté* g_0. *Si* $A = (a_1, ..., a_n) \in T_x\mathbb{R}^n$ *et* $B = (b_1, ..., b_n) \in T_x\mathbb{R}^n(T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n)$, *alors :*

$$g_0(A, B) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

et

$$g_{ij}(x) = g_0(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Proposition 1.1.1. *Soit M une variété paracompacte. Si $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$ est un atlas de M, alors il existe :*

1. $(W_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in J}$ *un atlas de M localement fini et plus fin que* $(U_\alpha, \psi_\alpha)_{\alpha \in I}$.
2. $(f_\beta)_{\beta \in J}$ *une partition de l'unité subordonnée ou recouvrement* $(W_\beta)_\beta \in J$ *(support$(f_\beta) \subset W_\beta, \forall \beta \in J$).*

Théorème 1.1.1. *Toute variété paracompacte M, admet une métrique Riemannienne.*

Preuve : Soit $(U_p, \psi_p)_{p \in M}$ un atlas de M tel que pour tout $p \in M$, on $p \in U_p$. D'aprés la proposition 1.1.1

il existe un atlas localement fini $(W_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in J}$ plus fin que $(U_p, \psi_p)_{p \in M}$ et une partition de l'unité $(f_\beta)_{\beta \in J}$ tel que :

$$support(f_\beta) \subset W_\beta$$

soit $<,>_{\mathbb{R}^m}$ la métrique euclidiènne sur $\mathbb{R}^m$. On definit alors

$$g_B : \mathcal{H}(M)^2 \longrightarrow C^\infty(M)$$

par

$$g_B(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \begin{cases} f_\beta(p).\delta_{i,j} \ si \ p \in W_\beta \\ 0, \quad sinon \end{cases}$$

alors la métrique : $g : \mathcal{H}(M)^2 \longrightarrow C^\infty(M)$ sur M définie par :

$$g = \sum_{\beta \in J} g_\beta \tag{1.1}$$

□

Proposition 1.1.2. *Expression de la métrique dans un changement de coordonneés*
Soient (U, φ) *et* (V, ψ) *deux cartes autour de* $p \in U \subset M$ *de base locale de champs de vecteurs* $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n})$ *et* $(\frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n})$ *respectivement. Alors pour tout changement de coordonneés :*

$$x \longrightarrow y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$$

tel que $\varphi(p) = x = (x^1, ..., x^n)$*,et* $\psi(p) = y = (y^1, ..., y^n)$*,on a :*

$$g_{ij}(p) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x_i} . \frac{\partial y^l}{\partial x_j} \widetilde{g_{kl}}(p)$$

où $g_{ij}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ *et* $\widetilde{g_{kl}}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_l})$

Exemple 1.1.2. *Considérons la paramétrisation de la sphère* S^n*, issue de la projection stéréographique :*

$$\psi = \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

telle que :

$$\psi(x) = (\frac{2x_1}{\| x \|^2 + 1}, ..., \frac{2x_n}{\| x \|^2 + 1}, \frac{\| x \|^2 - 1}{\| x \|^2 + 1}) = (y_1, ..., y_n, y_{n+1})$$

en utilisant la proposition 1.1.2 on obtient :

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(\| x \|^2 + 1)^2}$$

Définition 1.1.2. *(Image directe de champ de vecteurs)*
Soit $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *un différomorphisme, on définit l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \phi_* : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M) \\ X & \longmapsto & \phi_*(X) = d\phi \circ X \circ \phi^{-1} \end{array}$$

tel que pour tout $f \in C^\infty(N)$

$$(\phi_*(X))(f) = X(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$$

Lemme 1.1.1. *Soit* $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *un différomorphisme, alors* ϕ_* *est un homomorphisme d'algebre de Lie :*

$$\phi_*[X, Y] = [\phi_*(X), \phi_*(Y)]$$

pour tout $X, Y \in \mathcal{H}(M)$.

1.1.2 Fibré vectoriel

Une fibré vectoriel est une variété différentiable, qui ressemble localement au produit cartésien d'un ouvert de M et d'un espace vectoriel. C'est une généralisation du produit cartésien $M \times F$, où M est une variété et F un espace vectoriel. M étant la base et F la fibre.

Définition 1.1.3. *Un fibré vectoriel de rang* r*, au-dessus d'une variété* M *est un triplet* (E, π, M) *tel que :*

1. $\pi : E \longrightarrow M$ *est une application surjective appelée projection canonique*
2. $E - \{x\} = \pi^{-1}(x)$ *est un espace vectoriel de dimension* r*, pour tout* $x \in E$
3. $\forall x \in M$ *il existe un ouvert* U*, voisinage de* x *et un difféomorphisme*

   $$\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^r$$

   tel que :

   $$\pi = P_1 \circ \varphi$$

   où

   $$P_1 : U \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U$$

   est la première projection

M *est dit base du fibré,* E_x *la fibre au-dessus de* x *et* E *l'espace total.*

Exemple 1.1.3. *le fibré tangent à une variété* M*.*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \longrightarrow & M \\ V_x & \longmapsto & \pi(V_x) = x \end{array}$$

la projection cannonique.

Définition 1.1.4. *Soit* (E, π, M) *un fibré vectoriel. Une section d'un fibré vectoriel* (E, π, M)*, est une application de calsse* C^∞

$$\sigma : M \longrightarrow E$$

tel que :

$$\pi \circ \sigma = id_M$$

L'ensemble de toutes les sections lisses d'un fibré (E, π, M) *est noté :* $\Gamma(E) = \Gamma(E, \pi, M)$
$\Gamma(E)$ *est un* $C^\infty(M) - module$*.*
Le produit d'une section $\sigma \in \Gamma(E)$ *et d'une fonction* $f \in C^\infty(M)$ *est donné par :*

$$(f\sigma)(x) = f(x).\sigma(x)$$

Définition 1.1.5. *Un morphisme entre deux fibré* $(E, \pi, M), (E,^{'}, \pi^{'}, M)$ *est un couple d'applications différentiables* (F, f) *tel que :*

1. *le diagramme suivent*

   $$\begin{tikzcd} F : E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & E,^{'} \arrow[d, "\pi^{'}"] \\ f : M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

   est commutatif .
2. $F : E_x \longrightarrow E^{'}_{f(x)}$ *est lineaire*
   si de plus les applications F *et* f *sont des difféomorphismes, alors le couple* (F, f) *set dit un isomorphisme de fibrés.*

Un fibré (E, π, M) *isomorphe à* $M \times \mathbb{R}^r$ *est dit fibré trivial.*

1.1.3 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.1.6. *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel au dessus de M. Une connexion sur (E, π, M) est une application :*

$$\begin{array}{rcl} \nabla : \mathcal{H}(M) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E) \\ (X, V) & \longmapsto & \nabla_X V \end{array}$$

tel que :

1. $\nabla_X(\lambda V + \mu W) = \lambda \nabla_X V + \mu \nabla_X W$,
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f.\nabla_X V$,
3. $\nabla_{fX+gY} Y = f.\nabla_X V + g.\nabla_Y V$

pour tout : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathcal{H}(M)$, $V, W \in \Gamma(E)$ *et* $f, g \in C^\infty(M)$.

Définition 1.1.7. *Une section $V \in \Gamma(E)$ est dite parallèle par rapport à ∇ si*

$$\nabla_X V = 0$$

$\forall X \in \mathcal{H}(M)$.

Définition 1.1.8. *Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion sur le fibré (TM, π, M). La torsion de ∇ est un champs de type $(1, 2)$ défini par :*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

La connexion ∇ est dite sans torsion si :

$$T(X, Y) = 0$$

pour tout $X, Y \in \mathcal{H}(M)$.
∇ est dite compatible avec une métrique g, si pour tout champs de vecteurs $X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$, on a :

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1.2}$$

c'est à dire :

$$\nabla_X g = 0$$

Théorème 1.1.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'application :*

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$$

donnée par la formule de Kozul :

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) = \quad & \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & +g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z])\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

est une connexion sur le fibré (TM, π, M), appelée connexion de Levi-Civita

Théorème 1.1.3. *Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors la connexion de levi-Civita est l'unique connexion compatible avec la métrique g et sans torsion.*

preuve : D'aprés la formulle de Kosul, nous avons :

$$g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y Z, Y) = \frac{1}{2}\{g(Z, [X, Y]) - g(Z, [Y, X]) = g(Z, [X, Y])\}$$

donc ∇ est de torsion nulle. De plus

$$g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) = \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + X(g(Z, Y))\} = X(g(Y, Z))$$

ce qui prouve que ∇ est compatible avec la metrique riemannienne g. □

1.1.4 Coefficients de Christoffel

Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension m et ∇ sa connexion de Levi-civita associeé. Si (U, φ) est une carte locale de M de base locale de champs de vecteurs associé $(\partial_1, \partial_2, ..., \partial_m)$. Alors d'apré la formule de Kozul, on obtent :

$$2g(\nabla_{\partial_i}, \partial_j, \partial_k) = \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_i, \partial_k) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j) \tag{1.4}$$

on pose :

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^s \partial_s$$

la formule (1.4) devient :

$$2g(\Gamma_{ij}^s \partial_s, \partial_k) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^s g_{sk} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

on déduit :

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{sk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{1.5}$$

où (g^{sk}) désigne la matrice inverse de (g_{sk})
Γ_{ij}^s sont appelés les cofficients de Christoffel.

Remarque 1.1.1. *:*

1. *L'egalité (1.5) prouve l'unicité de la connexion de Levi-civita .*
2. *Si la variété $(\mathbb{R}^n, g)$ est munie de la métrique euclidienne $g_{ij} = \delta_{ij}$ alors les coéfficients de Christoffel sont nulls :*

$$\Gamma_{ij}^s = 0$$

1.1.5 Image inverse d'un tenseur métrique

Soient (N,h) une variété riemannienne, M une variété différentiable et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞.

Proposition 1.1.3. *Si f est une immersion en tout point $x \in M$, alors*

$$\begin{array}{rcl} f^*h : T_xM \times T_xM & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & h_{f(x)}(d_xf(X), d_xf(Y)) \end{array}$$

est un tenseur métrique sur M, appelé image inverse de h par l'immersion f.

Expresion locale de la matrice de f^*h :

Soient $(U,\varphi) \in atl(M,x)$ et $(V,\psi) \in atl(N,x)$. Notons par $H = (h_{ij})_{ij}$ la matrice de h relativement à (V,ψ), $\widetilde{H} = (\widetilde{h_{ij}})_{ij}$ la matrice de f^*h relativement à (U,φ) et alors pour tout $X, Y \in TxM$ on a :

$$\begin{array}{rcl} f^*h(X,Y) & = & h_{f(x)}(d_xf(X), d_xf(Y)) \\ & = & < H_{f(x)}.D_xf.X, D_xf.Y > \\ & = & {}^t(D_xf.Y).H_{f(x)}.D_xf.X \\ & = & {}^tY.{}^tD_xf.H_{f(x)}.D_xf.X \\ & = & <^t D_xf.H_{f(x)}.D_xf.X, Y > \\ & = & < \widetilde{H}(x).X, Y > \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(x) &=^t D_xf.H(f(x)).D_xf \\ \widetilde{h_{ij}} &= \frac{\partial f^s}{\partial x_i}.h_{sk}\frac{\partial f^k}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{1.6}$$

avec $D_xf = (\frac{\partial f^j}{\partial x_i})_{ij} = (\frac{\partial \psi^j \circ f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i})_{ij}$

Conséquence :

Si M est une sous-variété régulière d'une variété Riemannienne (N,h) et $i : N \longrightarrow M$ désigne l'immersion canonique, alors pour tout $X, Y \in T_xM$, on a :

$$i^*h_x(d_xi(X), d_xi(Y)) = h_x(X,Y),$$

donc :

$$i^*h_x(X,Y) = h_x(X,Y)$$

1.2 Tenseur de courbure

Définition 1.2.1. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civita, alors l'application*

$$R : \mathcal{H}^3(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M)$$

définie par :

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_YZ - \nabla_Y\nabla_XZ - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{1.7}$$

est un champ de tenseur de type $(3,1)$ appelé tenseur de courbure.

Proposition 1.2.1. *Soient (M, g) une variété riemannienne et ∇ la connexion de Levi-Civta associée, alors la tenseur de courbure R est une application $C^\infty(M)-$ multilinaire et on a :*
- $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
- $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
- $g(R(X,Y)Z,W) + g(R(Z,X)Y,W) + g(R(Y,Z)X,W) = 0$
- $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

pour tout $X,Y,Z,W \in \mathcal{H}(M)$

1.2.1 Tenseur de courbure Riemannienne

Soient (M, g) une variété riemannienne et R son tenseur de courbure associé. On défint un tenseur de type $(0, 4)$, appelé aussi tenseur de courbure de Riemannienne par :

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

Si $(\partial_1, ..., \partial_m)$ désigne la base locale de champe de vecteurs, alors :

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_s) &= R_{ijks} \\ &= g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_s) \\ &= g(R^t_{ijk}\partial_t, \partial_s) \end{aligned}$$

d'où localement, on a :

$$R_{ijks} = g_{ts}.R^t_{ijk}$$

Proposition 1.2.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, localement on a :*

$$R_{ijks} = \sum_{s=1}^{m} g_{sp}[\partial_i\Gamma^s_{jk} - \partial_j\Gamma^s_{ik} + \sum_{r=1}^{m}(\Gamma^r_{jk}.\Gamma^s_{ir} - \Gamma^r_{ik}.\Gamma^s_{jr})] \quad (1.8)$$

1.2.2 Courbure sectionnelle

Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout $x \in M$, on pose :
$G_2(T_xM)$ l'ensemble des sous espace vectoriels de T_xM de dimension 2
$G_2(T_xM) = \{V(X,Y) \subset T_xM\}$, où $V(X,Y)$ est le sous espace de dimension 2 engendré par X et Y lineairement independant.

Définition 1.2.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $x \in M$, on définit :*

$$K_x : G_2(T_xM) \longrightarrow \mathbb{R}$$

par

$$K_x(V(X,Y)) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{|X|^2 . |Y|^2 - g_x(X,Y)^2}$$

où $|X|^2 = g_x(X,X)$. K_x est appellé courbure sectionnelle en x.

Remarque 1.2.1. *:*

1. $|X|^2 . |Y|^2 - g_x(X,Y)^2 = 0$ *si et seulement si* $X//Y$ *ie* $\exists\lambda \in \mathbb{R} : X = \lambda Y$

2. *Le signe de K_x dépend du signe de tenseur de courbure Riemannien $g(R(X,Y)Y,X)$.*
3. *$K_x(V(X,Y))$ désigne la courbure suivant l'espace tangent à 2 dimension (plan), d'où le nom sectionnelle, et elle ne dépend pas de la représentation $\{X,Y\}$ qui engendre $V(X,Y)$*

En effet

1) g_x est une forme bilineaire symetrique définie positive non dégénérée, donc le seul élément isotrope est 0 i.e $kerg_x = istrope(g_x) = \{0\}$ et

$$\begin{aligned} X+\lambda Y \neq 0 \quad ssi \quad & g_x(X+\lambda Y, X+\lambda Y) \neq 0 \\ ssi \quad & \lambda^2 \mid Y \mid^2 + 2\lambda g_x(X,Y) + \mid X \mid^2 \neq 0 \\ ssi \quad & \Delta' = g_x(X,Y)^2 - \mid Y \mid^2 . \mid X \mid^2 < 0 \end{aligned}$$

donc pour touts vecteurs $X, Y \in T_xM$ non lineairement dépendant, nous avons

$$\mid X \mid^2 . \mid Y \mid^2 - g_x(X,Y)^2 > 0.....(*)$$

2) d'aprés (*), nous déduisons que la signe de K_x dépend de signe de $g(R(X,Y)Y,X)$.

Proposition 1.2.3. *Soient $\{X,Y\}$ et $\{X',Y'\}$ deux familles libres de T_xM engendrant le même sous espace vectoriel $V(X,Y) = V(X',Y')$, alors :*

$$\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{\mid X \mid^2 . \mid Y \mid^2 - g_x(X,Y)^2} = \frac{g(R(X',Y')Y',X')}{\mid X' \mid^2 . \mid Y' \mid^2 - g_x(X',Y')^2}$$

Corollaire 1.2.1. *Pour tout $X \in M$, on a :*

$$K_x(V) = g_x(R(X,Y)Y,X)$$

où $\{X,Y\}$ est une base orthonormale par rapport g_x.

1.2.3 Tenseur de Ricci

Introduction : Soient E un espace préhilbertien de dimension m et $A : E \longrightarrow E$ une application lineaire, alors :

1. relativement à une base orthonormale $\{e_1, ..., e_m\}$ de E, on a :

$$TraceA = \sum_{i=1}^{m} < Ae_i, e_i >$$

2. Si $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base de E et $(a_{ij})_{ij}$ la matrice associeé à A, alors

$$TraceA = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

est indépendante de la base choisie :

$$Trace(P^{-1}AP) = TraceA.$$

3. Soit $X \in \mathcal{H}(M)$, alors :

$$\begin{array}{rcl} \omega_X : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ Y & \longmapsto & \omega_X(Y) = Trace(R(.,X)Y) \end{array}$$

ω_X est une forme lineaire sur $M(\omega_X \in \mathcal{H}^*(M))$, où

$$\begin{array}{rcl} R_x(.,X)Y : T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ V & \longmapsto & R(V,X_x)Y_x \end{array}$$

est une application linéaire.

Définition 1.2.3. *Le tenseur de Ricci est un tenseur de type (1,1) défini par*

$$\begin{array}{rcl} Ricc : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M) \\ X & \longmapsto & \sharp(\omega_X) \end{array}$$

et on a pour tout $X, Y \in \mathcal{H}(M)$:

$$g(Ricc(X), Y) = g(\sharp(\omega_X), Y) = \omega_X(Y) = Trace(R(.,X)Y)$$

Proposition 1.2.4. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, $x \in M$ et $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormale de T_xM, alors :*

$$Ricc_x(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X_x, e_i)e_i$$

(écriture indépendante de la base ortonormale).

Preuve :
pour tout $Y \in \mathcal{H}(M)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} g_x(Ricc_x(X), Y_x) & = & TraceR(.,X_x)Y_x \\ & = & \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, X_x)Y_x, e_i) \\ & = & \sum_{i=1}^{m} g(R(X_x, e_i)e_i, Y_x) \\ & = & g(\sum_{i=1}^{m} R(X_x, e_i)e_i, Y_x) \end{array}$$

d'où :

$$Ricc_x(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X_x, e_i)e_i$$

$\square$

Définition 1.2.4. *(Tenseur de courbure de Ricci)*
Soit (M,g) une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure de Ricci est défini par :

$$\begin{array}{rcl} Ricc : \mathcal{H}(M)\times\mathcal{H}(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & Ricci(X,Y) = TraceR(.,X)Y \end{array}$$

Proposition 1.2.5. *Soit $x \in M$ et $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormale de T_xM, alors :*

$$Ricc_x(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} g(R(X_x, e_i)e_i, Y_x)$$

Définition 1.2.5. *(Courbure scalaire)*
Soient (M,g) une variété Riemannienne, $x \in M$ et $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormale de T_xM, alors la courbure scalaire est définie par :

$$\sigma_x = \sigma(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

Remarque 1.2.2. *σ_x est indépendante du choix de la base orthonormale $\{e_1, ..., e_m\}$.*

En effet
Soit $\{\overline{e_1}, ..., \overline{e_m}\}$ une base orthonormale, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} g(R(\overline{e_i}, \overline{e_j})\overline{e_j}, \overline{e_i}) &= \sum_{j=1}^{m} TraceR(., \overline{e_j})\overline{e_j} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, \overline{e_j})\overline{e_j}, e_i) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} g(R(\overline{e_j}, e_i)e_i, \overline{e_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} TraceR(., e_i)e_i \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} g(R(e_j, e_i)e_i, e_j) \end{aligned}$$

Remarque 1.2.3. *Si (M,g) une variété Riemannienne, de courbure sectionnelle constante K, alors :*

$$\sigma(x) = m(m-1)K$$

est une fonction constante pour tout $x \in M$.

1.3 Opérateurs sur une variété Riemannienne

1.3.1 Les isomorphismes canoniques

Soit (M^m, g) une variété Riemannienne de dimension m, en tout point $x \in M, g_x$ est une forme billineaire symetrique non dégénéreé sur T_xM, alors on peut identifier T_xM et T_x^*M par l'insomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \sharp_x : T_x^*M & \longrightarrow & T_xM \\ \omega_x & \longmapsto & \sharp_x(\omega) \end{array}$$

tel que

$$g(\sharp_x(\omega_x), X_x) = \omega_x(X_x)$$

L'inverse de $\sharp$ et noté $\flat_x$ définit par :

$$\begin{array}{rcl} \flat_x : T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ X_x & \longmapsto & \flat_x(X_x) \end{array}$$

tel que

$$\flat(X_x)(Y_x) = g_x(X_x, Y_x)$$

On peut définir les opérateurs cannonique de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} \sharp_x : \mathcal{H}^*(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M) \\ \omega & \longmapsto & \sharp(\omega) \end{array}$$

tel que

$$(\sharp(\omega))_x = \sharp_x(\omega_x),$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \flat_x : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}^*(M) \\ X & \longmapsto & \flat(X) \end{array}$$

tel que

$$(\flat(X))_x = \flat_x(X_x)$$

$\forall x \in M$

Proposition 1.3.1. *Les opérateurs $\sharp$ et $\flat$ sont des isomorphismes, l'un est l'inverse de l'autre et ils vérifient les équations :*

$$\begin{array}{rcl} g(\sharp(\omega), X) & = & \omega(X) \\ \flat(X)(Y) & = & g(X, Y) \end{array}$$

$\forall X, Y \in \mathcal{H}(M)$ *et* $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$

Proposition 1.3.2. *Soit* (M^m, g) *une variété Riemannienne de dimension* m, *alors pour tous* $X \in \mathcal{H}(M)$ *et* $\omega \in \mathcal{H}^*(M)$ *on a localement :*

$$\sharp(\omega) = g^{ij}\omega_j \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.9}$$
$$\flat(X) = g_{ij}X^i dx^i. \tag{1.10}$$

Preuve :

Soient (U, φ) une carte locale sur M et $(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}), (resp\ (dx^1, ..., dx^m))$ une base locale de champ de vecteurs (resp des 1-formes différentielles) relativement à la carte (U, φ). Si :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_i dx^i \\ \sharp\omega &= (\sharp\omega)^j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ g &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

alors pour tout $j = 1, ..., m$ on a :

$$\begin{aligned} g(\sharp(\omega), \frac{\partial}{\partial x_j}) &= \omega(\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \omega_j \\ &= g_{ij}(\sharp(\omega))^i \end{aligned}$$

d'où

$$(\sharp(\omega))^i = g^{ij}\omega_j,$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}), il vient que :

$$\sharp(\omega) = g^{ij}\omega_j \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.11}$$

D'un calcul analogue on obtient :

$$\flat(X) = g_{ij}X^i dx^i \tag{1.12}$$

□

1.3.2 L'opérateur gradient sur une variété Riemannienne

Définition 1.3.1. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. L'opérateur gradient not grad est défini par :*

$$\begin{aligned} grad : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{H}(M) \\ f &\longmapsto gradf = \sharp(df) \end{aligned}$$

Où df *est la différentielle de la fonction* f

Proposition 1.3.3. *Expression du gradient en coordonneés locales*

$$gradf = g^{ij}.\frac{\partial f}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.13}$$

Preuve : Localement on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$$

En utiltisant la proposition 1.3.2, on obtient :

$$gradf = g^{ij}.\frac{\partial f}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i}$$

□

Propriétés 1.3.1. *Pour tout $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$, on a :*

1. $grad(f_1 + f_2) = gradf_1 + gradf_2$
2. $grad(f_1.f_2) = f_2 gradf_1 + f_1 gradf_2$
3. $(gradf_1)(f_2) = (gradf_2)(f_1)$

Preuve :

$$\begin{aligned} 1)grad(f_1+f_2) &= g^{ij}.\frac{\partial(f_1+f_2)}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (g^{ij}.\frac{\partial f_1}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i}) + (g^{ij}.\frac{\partial f_2}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= gradf_1 + gradf_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)grad(f_1.f_2) &= g^{ij}.\frac{\partial(f_1\times f_2)}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= g^{ij}.f_1\frac{\partial f_2}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i} + g^{ij}.f_2\frac{\partial f_1}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= f_2 gradf_1 + f_1 gradf_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3)(gradf_1)(f_2) &= g^{ij}.\frac{\partial f_1}{\partial x^j}.\frac{\partial}{\partial x^i}.(f_2) \\ &= g^{ij}.\frac{\partial f_1}{\partial x^j}.\frac{\partial f_2}{\partial x^j} \\ &= g^{ij}.\frac{\partial f_2}{\partial x^j}.\frac{\partial f_1}{\partial x^j} \\ &= (gradf_2)(f_1) \end{aligned}$$

□

1.3.3 L'opérateur divergence sur une variété Riemannienne

Définition 1.3.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne et ∇ sa connexion de Levi-civita associée. On définit l'opérateur divergence noté div par :*

$$\begin{array}{rcl} div : \mathcal{H}(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ X & \longmapsto & trace(\nabla X) \end{array}$$

localement on a

$$div(X) = trace(\nabla X) = dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X)$$

cette défintion est indépendante de la carte choisie.

Propriété 1.3.1. *Première expression de la divergence en coordonneés locales.*
Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $X = X^i.\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{H}(M)$, alors

$$divX = \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + X^j \Gamma^i_{ij} \tag{1.14}$$

preuve :

$$\begin{array}{rcl} divX & = & dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X) \\ & = & dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X^j \dfrac{\partial}{\partial x_j}) \\ & = & dx^i(\dfrac{\partial X^j}{\partial x_i} \dfrac{\partial}{\partial x_j} + X^j.\Gamma^i_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_k}) \\ & = & \dfrac{\partial X^i}{\partial x_i} + X^j \Gamma^i_{ij} \end{array}$$

□

Propriété 1.3.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors pour touts $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

1. $div(X + Y) = div(X) + div(Y)$
2. $div(fX) = fdiv(x) + X(f)$

Définition 1.3.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. On appellé forme volume naturelle associeé à la métrique g, la forme ω définie localement par :*

$$\omega = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$$

Remarque 1.3.1. *La forme volume ne dépend pas du choix de la carte.*

Exemple 1.3.1. 1. *On considère la variété $\mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne*

$$(g_{ij}) = dx^2 + dy^2$$

$$\omega = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge dx^2 = dx^1 \wedge dx^2$$

en coordonneés polaires :

$$g = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

et

$$\omega = r dr \wedge d\theta$$

2. *On considère la sphère S^2 muni de la métrique*

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

donc

$$\omega = \sqrt{det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = \mid \sin\theta \mid d\theta \wedge d\varphi$$

Proposition 1.3.4. *Deuxième expression locale de la divergence*
Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors pour tout $X \in \mathcal{H}(M)$, localement on a :

$$divX = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{det(g_{ij})} X^i) \tag{1.15}$$

Lemme 1.3.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors localement on a :*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\sqrt{det(g_{ij})}) = \sqrt{det(g_{ij})} \sum_{j=1}^{n} \Gamma^j_{jk} \tag{1.16}$$

Preuve du lemme 1.3.1 :
De la formule de Kozul, on obtient :

$$g_{kl}\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{kl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{li}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij}))$$

d'où :

$$\Gamma^k_{il} g_{kj} + \Gamma^k_{ij} g_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_i}(g_{lj}) \tag{1.17}$$

En utilisant l'expression explicite du déterminant et la formule (1.3.1) on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{det(g_{ij})}) &= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{det(g_{ij})}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\frac{\partial}{\partial x_k}(g_{1\sigma(1)}...g_{n\sigma(n)}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...\frac{\partial}{\partial x_k}g_{j\sigma(j)}...g_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...(\Gamma^s_{kj}g_{s\sigma(j)}+\Gamma^s_{k\sigma(j)}g_{sj})...g_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...(\Gamma^s_{kj}g_{s\sigma(j)})...g_{n\sigma(n)}+ \\
&\quad \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...(\Gamma^s_{k\sigma(j)}g_{sj})...g_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...(\Gamma^s_{kj}g_{s\sigma(j)}...g_{n\sigma(n)}+ \\
&\quad \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...(\Gamma^s_{kj}g_{s\sigma(j)}...g_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\Gamma^s_{kj}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...g_{s\sigma(j)}...g_{n\sigma(n)}+ \\
&\quad \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\Gamma^s_{kj}\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)g_{1\sigma(1)}...g_{s\sigma(j)}...g_{n\sigma(n)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(\Gamma^s_{kj}\delta^j_s det(g_{ij})+\Gamma^s_{kj}\delta^j_s det(g_{ij})) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{j=1}^{n}2\Gamma^s_{kj}\delta^j_s det(g_{ij}) \\
&= \sqrt{det(g_{ij})}\sum_{j=1}^{n}\Gamma^s_{kj}
\end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 1.3.4
Par défintion on a :

$$\begin{aligned}
div(X) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}X^j\Gamma^i_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}X^j\sum_{i=1}^{n}\Gamma^i_{ij}
\end{aligned}$$

en utilisant le Lemme 1.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} div(X) &= \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}(\sqrt{det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}X^j\sqrt{det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{n}\Gamma_{ij}^{i}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}(\sqrt{det(g_{ij})}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X^i}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{det(g_{ij})}X^i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{det(g_{ij})}X^i) \end{aligned}$$

en utilisant la convention d'einstein, on déduit que

$$div(X)=\frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{det(g_{ij})})$$

□

1.3.4 L'operateur Laplacien sur une variété Riemannienne

Définition 1.3.4. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, l'opérateur Laplacien sur M est défini par :*

$$\begin{aligned} \Delta : C^{\infty}(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M) \\ f &\longmapsto \Delta(f)=div(gradf) \end{aligned}$$

Propriétés 1.3.2. *Soit (M,g) une variété Riemannienne. pour tout $f_1,f_2\in C^{\infty}(M)$, on a :*

1. $\Delta(f_1+f_2)=\Delta f_1+\Delta f_2$
2. $\Delta(f_1.f_2)=f_2\Delta f_1+f_1\Delta f_2+2g(gradf_1,gradf_2)$

Preuve : 1)

$$\begin{aligned} \Delta(f_1+f_2) &= div(grad(f_1+f_2)) \\ &= div(grad(f_1)+div(grad(f_2)) \\ &= \Delta(f_1)+\Delta(f_2) \end{aligned}$$

2) En utilisant les propriétés des opérateurs *grad* et *div* et la formule $X(f)=g(gradf,X)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(f_1.f_2) &= div(grad(f_1.f_2)) \\ &= div(f_2gradf_1+f_1gradf_2) \\ &= div(f_2gradf_1)+div(f_1gradf_1) \\ &= f_2\Delta f_1+f_1\Delta f_2+2g(gradf_1,gradf_2) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.5. *(Première Expression locale du Laplacien)*
Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$, alors :

$$\Delta(f) = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) \tag{1.18}$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= div(grad(f)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(g^{im}\frac{\partial f}{\partial x_m}) + \Gamma_{ij}^i g^{im}\frac{\partial f}{\partial x_m} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(g^{im})\frac{\partial f}{\partial x_m} + \Gamma_{ij}^i g^{im}\frac{\partial f}{\partial x_m} + g^{im}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

de la formule :

$$g^{ip}g_{pk} = \delta_{ki}$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_s}(g^{ip})g_{pk} = -g^{ip}\frac{\partial}{\partial x_s}(g_{pk})$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_s}(g^{im}) &= -g^{ip}g^{km}\frac{\partial}{\partial x_s}(g_{pk}) \\
&= -g^{ip}(\Gamma_{sp}^t g_{tk} + \Gamma_{sk}^t g_{tp}) \\
&= -g^{ip}\Gamma_{sp}^m - g_{km}\Gamma_{sk}^i \\
&= -g^{ip}\Gamma_{ip}^m - g_{km}\Gamma_{ik}^i
\end{aligned} \tag{1.20}$$

en substituant (1.20) dans (1.19), on déduit :

$$\begin{aligned}
\Delta(f) &= -g^{ip}\Gamma_{ip}^m\frac{\partial f}{\partial x_m} - g^{km}\Gamma_{ik}^i\frac{\partial f}{\partial x_m} + g^{im}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m} + \Gamma_{ij}^i g^{jm}\frac{\partial f}{\partial x_m} \\
&= g^{ip}(g_{ip}g^{im}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m} - \Gamma_{ip}^m\frac{\partial f}{\partial x_m}) \\
&= g^{ip}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_m}\delta_{ip}^m - \Gamma_{ip}^m\frac{\partial f}{\partial x_m}) \\
&= g^{ip}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_p} - \Gamma_{ip}^m\frac{\partial f}{\partial x_m})
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.6. *Deuxième expression locale du Laplacien*
Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$, alors :

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{det(g_{ij})}\frac{\partial f}{\partial x_j}) \tag{1.21}$$

La preuve découle directement de la proposition 1.3.4.

Exemple 1.3.2. *$\mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et tout $X = (X^1, ..., X^n) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, alors :*

$$\begin{aligned} gard(f) &= (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \\ div(X) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X^i}{\partial x_i} \\ \Delta(f) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Exemple 1.3.3. *Soient S^2 la sphere muni de la métrique $g_{S^2} = d\theta + \sin^2\theta d\varphi$ en coordonnées sphérique et $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^∞, on a :*

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = \sin^2\theta$$

$$\Gamma_{11}^1 = 0,\ \Gamma_{11}^2 = 0,\ \Gamma_{22}^1 = -\cos\theta.\sin\theta,\ \Gamma_{22}^2 = 0$$

en utilisant la formul (1.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{aligned}$$

1.4 Le fibré Inverse

Définition 1.4.1. *Soient $(M, g), (N, h)$ deux variétés Riemanniennes et $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application différentiable. On note :*

$$\varphi^{-1}(TN) = \{(x, \upsilon)/x \in M, \upsilon \in T_{\varphi(x)}N\}$$

muni de la projection canonique :

$$\begin{aligned} \eta : \varphi^{-1}(TN) &\longrightarrow M \\ (x, \upsilon) &\longmapsto \eta(x, \upsilon) = x \end{aligned}$$

$\varphi^{-1}(TN)$ est appelé fibré inverse (ou pull-back) induit de TN par φ.

Définition 1.4.2. *Une variation de l'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est une famille*

$$\varphi_t : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N, \qquad \epsilon > 0$$

telle que :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi \\ \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} |_{t=0} = \upsilon(x) \in T_{\varphi(x)}N \end{cases}$$

Remarque 1.4.1.

$$\begin{array}{rcl}\sigma : M & \longrightarrow & \varphi^{-1}(TN)\\ x & \longmapsto & \dfrac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \mid_{t=0}\end{array}$$

est une section de $\varphi^{-1}(TN)$.
Inversement si N *une variété complete, alors pour tout* $V \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$, *il existe*

$$\varphi_t(x) = exp_{\varphi(x)}(tV_x)$$

tel que :

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \mid_{t=0} = V_x$$

Proposition 1.4.1. *Si* N *est une variété complete et* $\varphi : M \longrightarrow N$ *est une application* C^∞, *alors tout section* $\sigma \in \varphi^{-1}(TN)$ *est de la forme :*

$$\begin{array}{rcl}\sigma : M & \longrightarrow & \varphi^{-1}(TN)\\ x & \longmapsto & \dfrac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} \mid_{t=0} \in T_{\varphi(x)}N\end{array}$$

Définition 1.4.3. ***(Métrique sur le fibré inverse)***
La métrique sur le fibré inverse $\varphi^{-1}(TN)$ *est définie pour tout* $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}(TN))$ *par :*

$$< V, W >_x = h_{\varphi(x)}(V_x, W_x)$$

où $x \in M$

Définition 1.4.4. ***(Connexion sur le fibré inverse)***
Soient M, N *deux variétés différentiables,* ∇^N *une connexion linéaire sur* N *et* $\varphi : M \longrightarrow N$ *est une application* C^∞. *La connexion inverse est définie par :*

$$\begin{array}{rcl}\nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) & \longrightarrow & \Gamma(\varphi^{-1}(TN))\\ (X, V) & \longmapsto & \nabla^\varphi_X V\end{array}$$

tel que :

$$(\nabla^\varphi_X V)_x = (\nabla^N_{d\varphi(X)} \widetilde{V})_{\varphi(x)}$$

où $\widetilde{V} \in \mathcal{H}(N)$ *est un champ de vecteurs verifiant* $\widetilde{V} \circ \varphi = V$.
En coordonneés locales, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ *et* $\widetilde{V} = \widetilde{V}^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, *alors*

$$\begin{aligned}(\nabla^N_{d\varphi(X)} \widetilde{V})_{\varphi(x)} &= X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} . \frac{\partial \widetilde{V}^\alpha_{\varphi(x)}}{\partial y^\beta} . \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \widetilde{V}^\alpha_{\varphi(x)} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}\\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x_i} (\widetilde{V}^\alpha \circ \varphi)(x) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \widetilde{V}^\alpha_{\varphi(x)} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \qquad (1.22)\\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x_i} V^\alpha_x \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} . V^\alpha_x \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma}.\end{aligned}$$

L 'équation (1.22) montre que la connexion ∇^φ *est bien définie .*

Proposition 1.4.2. *Soient M, N deux variété différentiables,∇^N une connexion linéaire sur N et $\varphi : M \longrightarrow N$ est une application C^∞, alors pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a :*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) - d\varphi([X,Y]) = 0 \tag{1.23}$$

Définition 1.4.5. ***(Seconde forme fondamentale)***
Soient $(M, g), (N, h)$ deux variétés Riemanniennes et $\varphi : M \longrightarrow N$ est une application C^∞. La second forme fondamentale de φ est la dériveé covariant de la 1-fome $d\varphi$ noteé $\widetilde{\nabla} d\varphi$ et définie pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\widetilde{\nabla} d\varphi(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X d\varphi)(Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \tag{1.24}$$

Remarque 1.4.2. *De la formule (1.23), on déduit que la seconde formr fondamentale est sumétrique, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$\widetilde{\nabla} d\varphi(X,Y) = \widetilde{\nabla} d\varphi(Y,X)$$

Proposition 1.4.3. *Si $\varphi : M \longrightarrow N, \psi : N \longrightarrow P$ sont deux applications C^∞, alors :*

$$\widetilde{\nabla} d(\psi \circ \varphi) = d\psi(\widetilde{\nabla} d\varphi) + \widetilde{\nabla} d\psi(d\varphi, d\varphi)$$

Preuve : Des défintions de la connexion pull-back et la seconde forme fondamentale, on a pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla} d(\psi \circ \varphi)(X,Y) &= \widetilde{\nabla}^{\psi\circ\varphi}_X d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^P_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \nabla^\psi_{d\varphi(X)} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \widetilde{\nabla} d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \widetilde{\nabla} d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^N_{d\varphi(X)} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y)) \\
&= \widetilde{\nabla} d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\widetilde{\nabla} d\varphi(X,Y))
\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Application harmoniques et bi-harmoniques

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions d'applications harmoniques et biharmoniques entre variétés Riemanniennes.

2.1 Application harmoniques

Définition 2.1.1. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes de dimension m et n resppectivement. On appelle la densité de φ l'application*

$$e(\varphi) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie pour tout $x \in M$ par

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2} \mid d_x\varphi \mid^2$$

où $\mid d_x\varphi \mid$ est la norme de Hilbert Schmidt de la differentielle $d_x\varphi$ de φ au point x.
Si $\{e_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ est une base orthonormée de T_xM, on a

$$\begin{aligned} \mid d_x\varphi \mid^2 &= tr_g\varphi^*h \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)) \end{aligned}$$

Si $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ et $\{y^\alpha\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont les coordonneés locales autour de $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$ respectivement, alors

$$\mid d_x\varphi \mid^2 = g_x^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i} \mid_x . \frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j} \mid_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x))$$

L'énergie de l'application φ sur un domain compact D dans M est définie par

$$E(\varphi, D) = \int_D e(\varphi)\upsilon_g = \frac{1}{2}\int_D \mid d_x\varphi \mid^2 \upsilon_g$$

Une variation de l'application φ est une application de classe C^∞,

$$\begin{aligned} \phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow N \quad , \quad \epsilon > 0 \\ (x, t) &\longmapsto \varphi_t(x) \end{aligned}$$

telle que (φ_t) *est une famille des application de classe* C^∞ *sur* M, *et* $\varphi_0 = \varphi$.
Soit $\upsilon \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *définie par*

$$\begin{aligned} \upsilon(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) \mid_{t=0} \\ &= \phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} \in T_{\varphi(x)}N \end{aligned}$$

Définition 2.1.2. *Application harmonique.*
Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *de classe* C^∞ *est dit harmonique si*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D) \mid_{t=0} = 0$$

pour toute domaine compact D *dans* M *et tout variation* (φ_t) *à support inclue dans* D.

Proposition 2.1.1. *(Première variation d'energie).*
Soient $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *une application différentiable et* (φ_t) *une variation de* φ *à supports inclu dans* D. *Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D) \mid_{t=0} = -\int_D h(\upsilon, \tau(\varphi))\upsilon_g.$$

où $\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x) \mid_{t=0}$ *et* $\tau(\varphi) = tr_g\nabla d\varphi$ *est le champ de tension de l'application* φ.

Preuve : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\{\frac{d}{dt}\}$ base sur $(-\epsilon, \epsilon)$, alors $\{(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, et on a le crochet de Lie $[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0$, pour tout $i = 1, ..., m$ on a $d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = \upsilon$.
En effet, remarquons que

$$d\phi(e_i, 0) : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow TN$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \quad \text{formule de Leibnis} \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\frac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\frac{d}{dt})|_{t=0} \\ &= \upsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x,0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x,t)$. Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)\mid_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\varphi_t(e_i), \varphi_t(e_i))\upsilon_g \mid_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\upsilon_g \mid_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_D \frac{d}{dt}h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))\mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))\mid_{t=0} \upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{N}_{d\varphi(e_i)}\upsilon, d\varphi(e_i))\upsilon_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i))\upsilon_g
\end{aligned}$$

soit $\omega(*) = h(\upsilon, d\varphi(*))$, 1-forme sur M, alors

$$\begin{aligned}
div\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\
&= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= e_i(h(\upsilon, d\varphi(e_i))) - h(\upsilon, d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\upsilon, d\varphi(e_i)) + h(\upsilon, \tau(\varphi))
\end{aligned}$$

et comme $\int_D div\omega\upsilon_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)\mid_{t=0} = -\int_D h(\upsilon, \tau(\varphi))\upsilon_g$$

$\square$

Théorème 2.1.1. *Une application différentiable $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = 0$*

2.1.1 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 2.1.1. *Tout application constante $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ est harmonique*

Exemple 2.1.2. *Le seconde forme fondamentale de l'application identité $\boldsymbol{Id}_M : (M,g) \longrightarrow (M,g)$ est nulle, car $\boldsymbol{Id}_M$ est totalement géodésique, donc $\boldsymbol{Id}_M$ est harmonique.*

Exemple 2.1.3. *Soit (M,g) une variété riemannienne. Pour tout fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et*

(e_i) une base ortthonormée sur M on a

$$\begin{aligned}\tau(f) &= tr_g \nabla df \\ &= \nabla df(e_i, e_i) \\ &= \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^M_{e_i} e_i) \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f) \\ &= g(\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\ &= div(gradf) \\ &= \Delta(f)\end{aligned}$$

Exemple 2.1.4. *Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique g_0 et soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, g_0)$ une application différentiable, $\varphi(x) = (\varphi^1(x), ..., \varphi^n(x))$, d'aprés la formule (1.18) et comme ${}^{\mathbb{R}^n}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, on a*

$$\tau(\varphi) = g^{ij}(\frac{\varphi^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij}M)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi$$

c'est à dire,

$$\tau(\varphi) = (\Delta(\varphi^1), ..., \Delta(\varphi^n))$$

Exemple 2.1.5. *Soit $M = (a, b)$ un intervalle sur $\mathbb{R}$. Alors le courbe $\gamma : (a, b) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique si*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} +^N \Gamma^\alpha_{\beta\delta}\frac{d\gamma^\beta}{dt}\frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0$$

donc, γ est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.

Exemple 2.1.6. *Soit l'application de Hopf*

$$\begin{aligned}\phi : S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (s, a, d) &\longmapsto (\alpha(s), \psi(a, b))\end{aligned}$$

où $\psi(a, b) = ka + lb$ et $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.
Soient,

$$g_{S^3} = ds^2 + \cos^2 s da^2 + \sin^2 s db^2$$

la métrique Riemannienne sur S^3 et

$$h_{s^2} = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\psi^2$$

une métrique Riemannienne sur S^2. On a
$\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s}, e_2 = \frac{1}{\cos s}\frac{\partial}{\partial a}, e_3 = \frac{1}{\sin}\frac{\partial}{\partial b}\}$ *est une basee orthonormée sur S^3.*

$\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, f_2 = \frac{1}{\sin \alpha}\frac{\partial}{\partial \psi}\}$ *est une basee orthonormée sur S^2.*
$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}$
$d\phi(e_2) = \frac{k}{\cos s}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$d\phi(e_3) = \frac{l}{\sin s}\frac{\partial}{\partial \psi}$
$\nabla_{e_1} e_1 = 0$

$\nabla_{e_2}e_2 = \tan s \frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{e_3}e_3 = -\cot s \frac{\partial}{\partial s}$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \alpha}}\frac{\partial}{\partial \alpha} = 0$
$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi}}\frac{\partial}{\partial \psi} = -\sin\alpha\cos\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_1}d\phi(e_1) = \alpha''\frac{\partial}{\partial \alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_3}d\phi(e_3) = -\frac{k^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}$
$\nabla^{\phi}_{e_3}d\phi(e_3) = -\frac{l^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s}\frac{\partial}{\partial \alpha}$
où $\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$*. En remplacant dans l'expresion*

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3}\{\nabla^{\phi}_{e_i}d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i}e_i)\}$$

on obtient

$$\tau(\phi) = \big(\alpha''(s) + \alpha'(s)(\cot s - \tan s) - \sin\alpha\cos\alpha(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s})\big)\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

Exemple 2.1.7. *Soient N une variété Riemannienne et M une sous-variété de N. Si* $i : M \longrightarrow N$ *est l'inection canonique, alors la sous-variété M est minimale si et seulement si i est harmonique. En effet*

$$\nabla di = B$$

d'où, $\tau(i) = H$

Exemple 2.1.8. *Soient* (M, g) *et* (N, h) *des variétés Riemanniennes. Si* $\varphi : M \longrightarrow N$ *est une plongement régulier isométrique, c'est à dire,* φ *est une plongement régulier tel que pour tout* $p \in M, X, Y \in \Gamma(TM)$ *on a*

$$g_p(X_p, Y_p) = h_{\varphi(p)}(d\varphi(X), d\varphi(Y)).$$

Alors, $\varphi(M)$ *est une sous-variété de N, de plus* $\varphi(M)$ *est minimale si et seulemet si l'application* φ *est harmonique.*
En effet, si $\nabla^{\varphi(M)}$ *est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite por h sur* $\varphi(M)$*, et B désigne la deuxième forme fondamentale de* $\varphi(M)$ *sur N, alors*

$$\begin{aligned} B(d\varphi(X), d\varphi(Y)) &= (\nabla^N_{d\varphi(X)}d\varphi(Y))^{\perp} \\ &= \nabla^N_{d\varphi(X)}d\varphi(Y) - (\nabla^N_{d\varphi(X)}d\varphi(Y))^{\top} \\ &= \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - \nabla^{\varphi(M)}_{d\varphi(X)}d\varphi(Y) \\ &= \nabla^{\varphi}_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y) \\ &= \nabla d\varphi(X, Y), \quad X, Y \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

Soit (e_i) *une base orthonormée sur M, comme l'application* φ *est isométrique, on a* $(d\varphi(e_i))$ *une base orthonormée sur* $\varphi(M)$*, d'où*

$$\begin{aligned} H &= traceB \qquad (courbure\ moyenne) \\ &= B(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\ &= \tau(\varphi). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.9. *Soit M une variété Riemannienne et g la métrique Riemannienne induite sur la sphère unitté S^n par l'injection canonique $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\varphi : M \longrightarrow S^n$ une application de classe C^∞, posons $\psi = i \circ \varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, alors φ et harmonique si et seulement si*

$$\tau(\psi) = - \mid d\psi \mid^2 \psi$$

En effet,

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + tr\nabla di(d\varphi, d\varphi),$$

donc, φ et harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= tr\nabla di(d\varphi, d\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \end{aligned}$$

où (e_i) est une base orthonormée de $T_xM, x \in M$,

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^{m} g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\mathcal{N}_{\psi(x)} \qquad , \text{où } \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= -\sum_{i=1}^{m} \mid d\varphi \mid^2 \psi(x) \qquad , (\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)) \\ &= - \mid d\varphi \mid^2 \psi(x) \\ &= - \mid d\psi \mid^2 \psi(x) \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1. *La composée de deux applications harmoniques n'est pas en général une application harmonique. En particulier si ϕ est totalement géodésique c'est a dire $(\nabla d\psi = 0)$, alors $\psi \circ \phi$ et harmonique.*

Exemple 2.1.10. *Soit la application ,*

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, dx^2 + dy^2) \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= (\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et soit l'application,

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^n, dx^2 + dy^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dZ^2) \\ (x, y) &\longmapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \Delta(\psi) \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \psi}{dy^2} \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

alors les deux application φ et ψ sont harmoniques, mais la composée,

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, dZ^2) \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

n'est pas harmonique car $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$

2.2 Applications conformes

Nous rappelons d'abord la définition des applications conformes et quelques propriétés.

Définition 2.2.1. *Soient (M^n, g) et (N^n, h) deux variété riemanniennes, une application $\phi \in C^\infty(M^n, N^n)$ est dite conforme s'il existe une fonction $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^∞ telle que pour touts $X, Y \in \Gamma(TM)$:*

$$h(d\phi(X), d\phi(Y)) = \lambda^2 g(X, Y)$$

La fonction λ est appelée la dilatation de ϕ.

Remarque 2.2.1. *Il est immédiat que l'énergie d'une application conforme est égale à*

$$e(\phi) = \frac{1}{2} \mid d\phi \mid^2 = \frac{1}{2} n\lambda^2$$

et le champ de tension est donné par :

$$\tau(\phi) = (2 - n) d\phi(grad \ln \lambda)$$

Corollaire 2.2.1. *Soit $\phi : (M^n, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une submersion conforme, alors ϕ est harmonique si et seulement si $n = 2$ ou la dilatation λ est constante.*

pour la preuve (voir [23])

2.3 Applications biharmoniques

Soit $M = (M^m, g)$ et $N = (N^n, h)$ deux variétés Riemanniennes, et soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable. La bienergie de l'application φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2} \int_D \mid \tau(\varphi) \mid^2 \upsilon_g$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de l'application φ et υ_g est la forme volume sur M associée à la métrique g.

Définition 2.3.1. *L'application $\varphi : M \longrightarrow N$ est dite biharmonique si*

$$\frac{d}{dt} E_2(\varphi_t, D)_{|t=0}$$

pour tout domaine compact D dans M et pour toute variation (φ_t) à support inclu dans D.

Proposition 2.3.1. *(Première variation de la biénergie).*
Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable et $\{\varphi_t\}_{t\in I}, I =]-\epsilon, \epsilon[$, une variation de φ á support inclue dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \int_D h(\upsilon, \tau_2(\varphi))\upsilon_g$$

où $\upsilon(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\ |_{t=0}$ et

$$\tau_2(\varphi) = tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi$$

est le champ de bitension de l'application φ. Où, $tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)$ $tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)$ et R^N désigne le tenseur de courbure de la variété N.

Preuve : Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support inclu dans un domaine compact D de M, on a

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))\upsilon_g$$

et pour tout $(x, t) \in M\times]-\epsilon, \epsilon[$, on a

$$\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0))_{(x,t)} = \tau(\varphi_t)_x$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}h(\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))\ |_{t=0} = h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)) &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\{\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi((e_i, 0)) - d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i, 0))\} \\
&= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i, 0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i, 0)) \\
&= R((0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0))d\phi(e_i, 0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i, 0) \\
&\quad +\nabla^\phi_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]}d\phi(e_i, 0) - \nabla^\phi_{\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)}d\phi(0, \frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

comme $[(0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)] = 0$ et on pose $\nabla_{(e_i,0)}(e_i, 0) = (\nabla^M_{e_i}e_i, 0)$ en $(x, 0)$, donc

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)) = R((0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0))d\phi(e_i, 0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0, \frac{d}{dt})$$

d'où,

$$\begin{aligned}
h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)), \nabla d\phi((e_i, 0), (e_i, 0)))\ |_{t=0} &= h(R(\upsilon, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + h(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi)) \\
&= h(R(d\varphi(e_i), \tau(\varphi))\upsilon, d\varphi(e_i)) + e_i(h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi))) \\
&\quad -h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi)) \\
&= h(R(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \upsilon) + e_i(h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi))) \\
&\quad -e_i(h(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))) + h(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))
\end{aligned}$$

si on pose $\omega(.) = h(\nabla^\varphi_. \upsilon, \tau(\varphi))$ et $\eta(.) = h(\upsilon, \nabla^\varphi_. \tau(\varphi))$ deux 1-formes sur M, alors

$$\begin{array}{rcl} div\omega & = & e_i(\omega(e_i)) = e_i(h(\nabla^\varphi_{e_i}\upsilon, \tau(\varphi))) \\ div\eta & = & e_i(\eta(e_i)) = e_i(h(\upsilon, \nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi))) \end{array}$$

d'où,

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)_{|t=0} & = & \frac{1}{2}\int_D \frac{d}{dt}h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t)) \mid_{t=0} \upsilon_g \\ & = & \int_D \{h(tr_g R(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi, \upsilon) + h(tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi), \upsilon)\}\upsilon_g \\ & = & \int_D h(\tau_2(\varphi), \upsilon)\upsilon_g) \end{array}$$

□

La première variation de la biénergie nous permet de caractérise les applications biharmoniques

Théorème 2.3.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est biharmonique si et seulement si*

$$\tau_2(\varphi) = 0$$

Remarque 2.3.1. *Soit l'application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ et $(U, x^i), (V, y^\alpha)$ deux carte locales en p dans M et en $\varphi(p)$ dans N respectivement. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} \tau_2(\varphi) & = & g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i \partial x^j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha\tau^\beta}{\partial x^j \partial x^j} \overset{N}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha \frac{{}^2\varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \overset{N}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta} + \tau^\alpha \frac{\partial\varphi^\beta \partial \overset{N}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^i \partial x^j} \\ & & + \tau^\alpha \frac{\partial\tau^\beta \partial\tau^\rho}{\partial x^i \partial x^j} \overset{N}{\Gamma}{}^\upsilon_{\alpha\beta} \overset{N}{\Gamma}{}^\sigma_{\upsilon\rho} - \overset{M}{\Gamma}{}^k_{ij}\,(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^i} + \tau^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^K} \overset{N}{\Gamma}{}^\sigma_{\alpha\beta}) - \tau^\upsilon \frac{\partial\varphi^\alpha \partial\varphi^\beta}{\partial x^i \partial x^j} \overset{N}{R}{}^\sigma_{\beta\alpha\upsilon}\Big)\frac{\partial}{\partial y^\sigma} \circ \varphi, \end{array}$$

où

$$\tau^\alpha = \Delta(\varphi^\alpha) + g^{ij} \overset{N}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\delta} \frac{\partial\varphi^\beta \partial\varphi^\delta}{\partial x^i \partial x^j}$$

2) l'application φ et biharmonique si et seulement si $\tau(\varphi) \in ker J_\varphi$, où

$$\begin{array}{rcl} J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) & \longrightarrow & \Gamma(\varphi^{-1}(TN)) \\ V & \longmapsto & J_\varphi(V) = tr_g(\nabla^\varphi)^2 V + tr_g R^N(V, d\varphi)d\varphi \end{array}$$

2.3.1 Exemples d'applications biharmoniques

Exemple 2.3.1. *Tout application harmonique et biharmonique.*

Exemple 2.3.2. *Considérons l'application différentiable :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (M, g) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ p & \longmapsto & \varphi(p) = (\varphi^1(p), ..., \varphi^n(p)). \end{array}$$

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), ..., \tau_2(\varphi^n))$ donc φ biharmonique si et seulement si les applications $\varphi^i, i = 1, ..., n$ sont biharmoniques.

Exemple 2.3.3. *Le simple exemple d'une application biharmonique, les polynômes de degrés 3 et 2 sur* $\mathbb{R}$

Exemple 2.3.4. *Soit l'application :*

$$\varphi : (M, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h)$$

φ *et biharmonique si et seulement si :*

$$tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_h h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = 0$$

En effet, remarque que la sphèe unité $\mathbb{S}^n$ *à courbure constante égale à 1 d'ou d'après la formule :*

$$R(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

On a :

$$\begin{aligned} tr_g R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi &= tr_g\big(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi\big) \\ &= \mid d\varphi \mid^2 \tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \\ &= 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_g h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Exemple 2.3.5. *Soit* M^{n-1} *une hypersurface de la sphère unité* (S^n, h)*, alors l'injection canonique* $i : M^{n-1} \longrightarrow S^n$ *munie de la métrique induite* g *est biharmonique. En effet on a :*

$$\begin{aligned} \tau(i) &= tr_g \nabla di = tr_g B = H \\ \tau_2(i) &= tr_g(\nabla^i)^2 H + tr_g R^{S^n}(H, di)di \end{aligned}$$

est

$$H = (1-n)\mathcal{N}.$$

Alors, pour une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ *sur* M *avec* $(\nabla^M_{e_i} e_j)_x = 0, x \in M$ *on a :*

$$\begin{aligned} tr_g(\nabla^i)^2 H &= (1-n)\nabla^i_{e_i}\nabla^i_{e_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{S^n}_{\tilde{e}_i}\nabla^{S^n}_{\tilde{e}_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{S^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i \\ &= (1-n)((\nabla^{S^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^\perp + (\nabla^{S^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^\top) \\ &= (1-n)(H + \nabla^M_{e_i} e_i) = (1-n)H \end{aligned}$$

et, comme S^n *est courbure constante on a :*

$$\begin{aligned} tr_g R^{S^n}(H, di)di &= R^{S^n}(H, di(e_i))di(e_i) = R^{S^n}(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)H - h(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i \\ &= (n-1)H - (1-n)g(\mathcal{N}, e_i)e_i = (n-1)H \end{aligned}$$

d'où : $\tau_2(i) = 0$

Chapitre 3

Géométrie des variétés Produits

3.1 Variété Produit

Introduiction :
Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemannienne, le produit tordu $M \times_{f^2} N$ munie de la métrique $G_{f^2} = g + (fo\pi)^2 h$ ou f est une fonction positive sur M, appelée fonction de distorsion. La notion du produit tordu joue un rôle important dans le domaine de la géométrie différentielle et celui de la physique.
Dans ce chapitre, on s'interesse aux variétés riemannienne produits et les variétés produit tordus. On calcul les connexions, les Tenseurs de Torsion et de courbure, ainsi que l'opérateur Laplacien et bilaplacien .

• **Notion de Variété Produit.**

Définition 3.1.1. *Soient M et N deux variété de classe C^∞ le produit $M \times N$ munie de atlas W défini par*

$$W = \left\{ (U \times V, \varphi \times \phi) \;/\; (U, \varphi) \in atl(M), (V, \phi) \in atl(N) \right\}$$

est dit variété produit

Propriété 3.1.1. *Si M et N sont deux variété différentiables, alors*

1. *Les deux projections $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ sont des submersions.*

2. *Pour tout $(x, y) \in M \times N$ le sous-espace $M \times \{y\}$ et $\{x\} \times N$ sont deux sous-variétés de $M \times N$.*

3. *Pour tout $(x, y) \in M \times N$ on a :*

$$T_{(x,y)} M \times N \cong T_x M \times T_y N$$

.

4. *Soient X et Y deux champ de vecteurs sur M et N respectivement, le couple (X,Y) défini par*

$$\begin{array}{rcl}(X,Y): M\times N & \longrightarrow & TM\times TN\\ (x,y) & \longmapsto & (X_x, Y_y)\end{array}$$

est un champ de vecteur sur la variété produit $M\times N$

Remarque 3.1.1. *Les applications*

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{H}(M) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M\times N)\\ X & \longmapsto & \widetilde{X}=(X,0)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{H}(N) & \longrightarrow & \mathcal{H}(M\times N)\\ Y & \longmapsto & \widehat{Y}=(0,Y)\end{array}$$

définissent des relèvement de champs de vecteurs à $H(M\times N)$ tel que :

$$d_{(x,y)}\pi(\widetilde{X}) = X\circ\pi \quad et \quad d_{(x,y)}\eta(\widetilde{X}) = 0$$
$$d_{(x,y)}\eta(\widehat{Y}) = Y\circ\eta \quad et \quad d_{(x,y)}\pi(\widehat{Y}) = 0$$

Proposition 3.1.1. *Soient $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, $f\in C^\infty(M)$ et $g\in C^\infty(N)$ on a :*

1) $\widetilde{X_1}(f\circ\pi) = (X_1(f))\circ\pi \quad et \quad \widetilde{X_1}(g\circ\eta) = 0$

2) $\widehat{Y_1}(g\circ\eta) = (Y_1(g))\circ\eta \quad et \quad \widehat{Y_1}(f\circ\pi) = 0$

3) $\begin{cases}[\widetilde{X_1},\ \widetilde{X_2}] = ([X_1,\ X_2],0)\\ [\widehat{Y_1},\ \widehat{Y_2}] = (0,[Y_1,\ Y_2])\\ [\widetilde{X_1},\ \widehat{Y_1}] = 0\end{cases}$

4) $\widetilde{fX_1} = (f\circ\pi)\widetilde{X_1}$ *et* $\widehat{gY_1} = (g\circ\eta)\widehat{Y_1}$

Remarque 3.1.2. *Si $(\frac{\partial}{\partial x_1},......,\frac{\partial}{\partial x_m})$ et $(\frac{\partial}{\partial y_1},......,\frac{\partial}{\partial y_n})$ sont deux base locales des champs de vecteurs relativement aux cartes (U,φ) et (V,ψ) respectivement alors*

$$\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}}\cdots\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_m}},\widehat{\frac{\partial}{\partial y_1}}\cdots\widehat{\frac{\partial}{\partial y_n}}\right)$$

est la base locale de champ de vecteurs sur $M\times N$ relativement à la carte $(U\times V,\varphi\times\psi)\in atl(M\times N)$

Proposition 3.1.2. *Soient S_1, S_2 deux tenseurs de type $(0,r)$ ou $(1,r)$, alors $S_1 = S_2$, si et seulement si, pour tout $X_1, .., X_r \in \mathcal{H}(\mathcal{M})$ et $Y_1, .., Y_r \in \mathcal{H}(\mathcal{N})$, on a*

$$S_1(\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_r}) = S_2(\widetilde{X_1}, ..., \widetilde{X_r})$$

et

$$S_1(\widehat{Y_1}, ..., \widehat{Y_r}) = S_2(\widehat{Y_1}, ..., \widehat{Y_r})$$

La Connexion Lineaire

Proposition 3.1.3. *Soient $\nabla^M)$ et $\nabla^N)$ des connexions linéaires sur (M,g) et (N,h) respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire produit ∇ sur $M \times N$ telle que pour tous $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, on a*

$$\begin{aligned}
\nabla_{(X_1,Y_1)}(X_2,Y_2) &= \Big(\nabla^M_{X_1}X_2, 0\Big) + \Big(0, \nabla^N_{Y_1}Y_2\Big) \\
\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{X_2} &= \Big(\nabla^M_{X_1}X_2, 0\Big) \\
\nabla_{\widehat{Y_1}}\widehat{Y_2} &= \Big(0, \nabla^N_{Y_1}Y_2\Big) \\
\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2} &= \nabla_{\widehat{Y_1}}\widetilde{X_2} = 0
\end{aligned}$$

Le Tenseur de Torsion

Proposition 3.1.4. *Soient T_M et T_N deux tenseurs de torsions sur M et N respectivement, alors le tenseur de torsion sur $M \times N$ defini par*

$$T = \Big(T_M, 0\Big) + \Big(0, T_N\Big) = \Big(T_M, T_N\Big)$$

Preuve : Par application de la Proposition 3.1.2, si $X_1, X_2, \in H(M)$ et $Y_1, Y_2 \in H(N)$ on a :

$$\begin{aligned}
T(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= \nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{X_2} - \nabla_{\widetilde{X_2}}\widetilde{X_1} - [\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}] \\
&= \Big(\nabla^M_{X_1}X_2, 0\Big) - \Big(\nabla^M_{X_2}X_1, 0\Big) - \Big([X_1, X_2], 0\Big) \\
&= \Big(\nabla^M_{X_1}X_2 - \nabla^M_{X_2}X_1 - [X_1, X_2], 0\Big) \\
&= \Big(T_M(X_1, X_2), 0\Big) \\
&= (T_M, T_N)(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= \nabla_{\widehat{Y_1}}\widehat{Y_2} - \nabla_{\widehat{Y_2}}\widehat{Y_1} - [\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}] \\
&= \Big(0, T_N(Y_1, Y_2)\Big) \\
&= (T_M, T_N)(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}))
\end{aligned}$$

□

Le Tenseur De Courbure

Proposition 3.1.5. *Soient R_M et R_N sont deux tenseurs de courbures sur M et N respectivement, alors le tenseur de courbure sur $M \times N$ est donné par*

$$R = (R_M, R_N)$$

Preuve : Même démonstration que celle donnée dans la Proposition 3.1.4

Remarque 3.1.3. *De la proposition 3.1.4, on déduit que la variété $M \times N$ est sans torsion si et seulement si les variétés M et N sont sans torsion.*

3.1.1 Métrique Diagonale Produit

Définition 3.1.2. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement, alors la métrique Riemannienne produit sur $M \times N$ est definie par*

$$G = \pi^* g + \eta^* h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent la première et la deuxième projection canonique.

De la Définition 3.1.2, on déduit la propositin suivante

Proposition 3.1.6. *Pour tout $X_1, X_2 \in \mathcal{H}(M)$ et $Y_1, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ on a*

$$\begin{array}{rcl} G(X,Y) & = & g(X_1,Y_1) + h(X_2,Y_2) \\ G(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) & = & g(X_1, X_2) \\ G(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) & = & h(Y_1, Y_2) \\ G(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}) & = & 0 \end{array}$$

où $X = (X_1, Y_1)$ et $Y = (X_2, Y_2)$.

Proposition 3.1.7. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de connexion de Levi-Civita ∇^M et ∇^N respectivement, alors la connexion de levi-civita sur $M \times N$ associé à la metrique produit $G = \pi^* g + \eta^* h$ conicide avec la connexion définie dans la Proposition 3.1.3, i.e :*

$$\begin{cases} \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1} = (\nabla^M_{X_1} Y_1, 0) \\ \nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2} = (0, \nabla^N_{X_2} Y_2) \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} = \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0 \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$.

Preuve :
Utilusant la formule de koszul

$$\begin{aligned}
\bullet\ G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}) &= \frac{1}{2}\Big\{\widetilde{X_1}\Big(G(\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1})\Big)+\widetilde{Y_1}\Big(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Z_1})\Big)-\widetilde{Z_1}\Big(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\Big)\\
&\quad +G\Big(\widetilde{Z_1},[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]\Big)+G\Big(\widetilde{Y_1},[\widetilde{Z_1},\widetilde{X_1}]\Big)-G\Big(\widetilde{X_1},[\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}]\Big)\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\Big\{X_1(g(Y_1,Z_1))+Y_1(g(X_1,Z_1))-Z_1g(X_1,Y_1))\\
&\quad +g(Z_1,[X_1,Y_1])+g(Y_1,[Z_1,X_1])-g(X_1,[Y_1,Z_1])\Big\}\\
&= g\Big(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1\Big)\\
&= G\Big((\nabla^M_{X_1}Y_1,0),\widetilde{Z_1})\Big).\\
\bullet\ G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2}) &= 0.\\
\bullet\ G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},\widetilde{Z_1}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}) &= \frac{1}{2}\Big\{\widehat{X_2}\Big(G(\widehat{Y_2},\widehat{Z_2})\Big)+\widehat{Y_2}\Big(G(\widehat{X_2},\widehat{Z_2})\Big)-\widehat{Z_2}\Big(G(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\Big)\\
&\quad +G\Big(\widehat{Z_2},[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]\Big)+G\Big(\widehat{Y_2},[\widehat{Z_2},\widehat{X_2}]\Big)-G\Big(\widehat{X_2},[\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}]\Big)\Big\}\\
&= \frac{1}{2}\Big\{X_2\Big(h(Y_2,Z_2)\Big)+Y_2\Big(h(X_2,Z_2)\Big)-Z_2\Big(h(X_2,Y_2)\Big)\\
&\quad +h\Big(Z_2,[X_2,Y_2]\Big)+h\Big(Y_2,[Z_2,X_2]\Big)-h\Big(X_2,[Y_2,Z_2]\Big)\Big\}\\
&= h\Big(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2\Big)\\
&= G\Big((0,\nabla^N_{X_2}Y_2),\widehat{Z_2})\Big)\\
\bullet\ G\Big(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2},\widetilde{Z_1}\Big) &= G\Big(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}\Big)=G\Big(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}\Big)=G\Big(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2}\Big)=0
\end{aligned}$$

$\forall X_1,Y_1,Z_1\in H(M)\ et\ X_2,Y_2,Z_2\in H(N)$ $\square$

3.1.2 L'Opérateur Laplacien

1) Si $l_1 \in C^\infty(M)$ et $l_2 \in C^\infty(N)$, alors $l_1 \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$ et $l_2 \circ \eta \in C^\infty(M \times N)$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "l_1 \circ \pi"'] & M \arrow[d, "l_1"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "l_2 \circ \eta"'] & N \arrow[d, "l_2"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

2) Si

$$\begin{array}{rcl} \alpha : M \times N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \alpha(x, y) \end{array}$$

est une application de classe C^∞, alors

$$\begin{array}{rcl} \alpha_y : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha(x, y) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \alpha_x : N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \alpha(x, y) \end{array}$$

sont des applications C^∞.

On cherche à calculer le Laplacien des applications $l_1 \circ \pi$, $l_2 \circ \eta$, et α. On a le résultat suivant

Proposition 3.1.8.

$$\Delta(l_1 \circ \pi) = \Delta_M(l_1) \circ \pi$$

$$\Delta(l_2 \circ \eta) = \Delta_N(l_2) \circ \eta$$

$$(\Delta\alpha)(x, y) = (\Delta_M \alpha_y)(x) + (\Delta_N \alpha_x)(y)$$

Démonstration. Soient $(e_1, .., e_m)$ (resp $(e_{m+1}, .., e_{m+n})$) une base orthonormale locale de champs de vecteurs sur la variété Riemannienne (M, g) (resp (N, h)), alors $(\widetilde{e_1}, .., \widetilde{e_m}, \widehat{e_{m+1}}, .., \widehat{e_{m+n}})$

est une base orthonormale locale de la variété Riemannienne produit $(M \times N, G)$, et on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha) &= trace(\nabla d\alpha) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{\widetilde{e_i}} d\alpha)(\widetilde{e_i}) + \sum_{i=m+1}^{n+m}(\nabla_{\widehat{e_i}} d\alpha)(\widehat{e_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{e_i}(\widetilde{e_i}(\alpha)) - \sum_{i=1}^{m}(d\alpha(\nabla_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i}) + \sum_{i=1+m}^{n+m}(\widehat{e_i}(\widehat{e_i}(\alpha)) - \sum_{i=1}^{n+m}(d\alpha(\nabla_{\widehat{e_i}}\widehat{e_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big\{(e_i(e_i(\alpha_y)) - d\alpha_y(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big\} + \sum_{i=m+1}^{m+n}\Big\{(e_i(e_i(\alpha_x)) - d\alpha_x(\nabla^N_{e_i} e_i)\Big\} \\
&= \Delta_M(\alpha_y) + \Delta_N(\alpha_x)
\end{aligned}$$

□

3.2 Produit Tordu de Variétés Riemanniennes

Définition 3.2.1. *Soient (M, g)et (N, h) deux varietes riemanniennes de dimension m et n respectivement et $f \in C^\infty(M)$ une fonction strictement positive. La variété produit tordu $M \times_{f^2} N$ est definie comme étant la variété $M \times N$ munie de la métrique G_{f^2} telle que*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent les projections canoniques.

Si $X, Y \in H(M \times N)$ on a

$$G_{f^2}\Big(X, Y\Big) = g\Big(d\pi(X), d\pi(Y)\Big) + (f \circ \pi)^2 h\Big(d\eta(X), d\eta(Y)\Big)$$

Remarque 3.2.1. *Relativement à des cartes locales $(U, x^i) \in atl(M)$ et $(V, y^i) \in atl(N)$, la matrice associée à G_{f^2} est donnée par*

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 \cdot h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} \cdot h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de levi-civita de $M \times_{f^2} N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit.

3.2.1 Connexion de Levi-Civita de la Variété Produit Tordu

Proposition 3.2.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes. Si ∇ désigne la connexion de Levi-Civita associé à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de*

Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ *asoociée à la variété produit tordu* $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ *est donnée par*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2} X_1(f^2)\Big(0, Y_2\Big) + \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2)\Big(0, X_2\Big) - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)\Big(grad(f^2), 0\Big)$$

pour tout $X_1, Y_1 \in H(M)$, $X_2, Y_2 \in H(N)$, $X = (X_1, X_2)$ *et* $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in H(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in H(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$ des champs de vecteurs sur $M \times_{f^2} N$. De la formule de Koszule on obtient

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= X(G_{f^2}(Y, Z)) + Y(G_{f^2}(X, Z)) - Z(G_{f^2}(X, Y)) \\
&\quad + G_{f^2}(Z, [X, Y]) + G_{f^2}(Y, [Z, X]) - G_{f^2}\Big(X, [Y, Z]\Big) \\
&= X(g(Y_1, Z_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi . h(Y_2, Z_2) \circ \eta) + \\
&\quad Y(g(X_1, Z_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi . h(X_2, Z_2) \circ \eta) - \\
&\quad Z(g(X_1, Y_1) \circ \pi + f^2 \circ \pi . h(X_2, Y_2) \circ \eta) \\
&\quad + g(Z_1, [X_1, Y_1]) \circ \pi + f^2 \circ \pi . h(Z_2, [X_2, Y_2]) \circ \eta \\
&\quad + g(Y_1, [Z_1, X_1]) \circ \pi + f^2 \circ \pi . h(Y_2, [Z_2, X_2]) \circ \eta \\
&\quad - g(X_1, [Y_1, Z_1]) \circ \pi - f^2 \circ \pi . h(X_2, [Y_2, Z_2]) \circ \eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla^M_{X_1} Y_1, Z_1) \circ \pi + 2f^2 \circ \pi . h(\nabla^N_{X_2} Y_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad + X_1(f^2) \circ \pi . h(Y_2, Z_2) \circ \eta + Y_1(f^2) \circ \pi . h(X_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad - Z_1(f^2) \circ \pi . h(X_2, Y_2) \circ \eta \\
&= 2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1} Y_1, \nabla^N_{X_2} Y_2), Z\Big) + h(X_1(f^2) \circ \pi . Y_2 + Y_1(f^2) \circ \pi . X_2, Z_2) \circ \eta \\
&\quad - g(h(X_2, Y_2) \circ \eta . grad(f^2), Z_1) \circ \pi \\
&= 2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1} Y_1, \nabla^N_{X_2} Y_2), Z\Big) + G_{f^2}\Big(\frac{X_1(f^2)}{f^2} \circ \pi . Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{f^2} \circ \pi . X_2, Z\Big) \\
&\quad - G_{f^2}(h(X_2, Y_2) \circ \eta . grad(f^2), Z)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2G_{f^2}\Big((\nabla^M_{X_1} Y_1, \nabla^N_{X_2} Y_2) + \Big(\frac{X_1(f^2)}{2f^2} \circ \pi . Y_2 + \frac{Y_1(f^2)}{2f^2} \circ \pi . X_2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(h(X_2, Y_2) \circ \eta . grad(f^2), Z\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

3.2.2 Tenseur de Courbure du Produit Tordu

Proposition 3.2.2. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Si R et $\widetilde{R}$ désignent les tenseurs de courbures de la variété Riemannienne produit $(M \times N, G)$ et de la variété Riemannienne produit $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ respectivement, alors*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(X, Y\Big) - R\Big(X, Y\Big) &= \frac{1}{2f^2}\Bigg\{\Big(\nabla^M_{Y_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) gradf^2, 0\Big) \wedge_{G_{f^2}} \Big(0, X_2\Big) \\
&\quad - \Big(\nabla^M_{X_1} gradf^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) gradf^2, 0\Big) \wedge_{G_{f^2}} \Big(0, Y_2\Big) \\
&\quad - \frac{1}{2f^2} |gradf^2|^2 \Big(0, X_2\Big) \wedge_{G_{f^2}} \Big(0, Y_2\Big)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

où

$$\Big(X \wedge_{G_{f^2}} Y\Big) Z = G_{f^2}\Big(Z, Y\Big) X - G_{f^2}\Big(Z, X\Big) Y$$

pour tout $X_1, Y_1 \in H(M)$, $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :
Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in H(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in H(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(X, Y\Big) Z &= \widetilde{R}\Big((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)\Big) Z \\
&= \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\Big) Z + \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}\Big) Z + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2}, \widetilde{Y_1}\Big) Z + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}\Big) Z
\end{aligned}
$$

Développant chaque terme de la dernière équation

1) $\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\Big) Z = \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\Big) \widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\Big) \widetilde{Z_2}$

$$
\begin{aligned}
a) \quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}\Big) \widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}} \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}]} \widetilde{Z_1} \\
&= \nabla^M_{X_1} \nabla^M_{Y_1} Z_1 - \nabla^M_{Y_1} \nabla^M_{X_1} Z_1 - \nabla^M_{[X_1, Y_1]} Z_1 \\
&= \Big(R_M(X_1, Y_1) Z_1, 0\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} - \frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} \\
&= \Bigg[\; X_1(Y_1(f^2)/2f^2) + \frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - Y_1(X_1(f^2)/2f^2) \\
&\quad -\frac{Y_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2} - \frac{[X_1,Y_1](f^2)}{2f^2}\;\Bigg]\widehat{Z_2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

de a) et b) on déduit que :

$$
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)Z = \Big(R_M(X_1,Y_1)Z_1, 0\Big) \tag{3.1}
$$

$$
2)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2}
$$

$$
\begin{aligned}
a)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla^M_{X_1}Z_1} \\
&= X_1(Z_1(f^2)/2f^2)\widehat{Y_2} + \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{4f^2}\widehat{Y_2} - \frac{1}{2f^2}\nabla^M_{X_1}Z_1(f^2)\widehat{Y_2} \\
&= \frac{1}{2f^2}\left[X_1(Z_1(f^2)) - \nabla^M_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1}(f^2) - \frac{Z_1(f^2)X_1(f^2)}{2f^2}\right]\widehat{Y_2} \\
&= \frac{1}{2f^2}\left[g\Big(\nabla^M_{X_1}gradf^2, Z_1\Big) - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}g\Big(gradf^2, Z_1\Big)\right]\widehat{Y_2} \\
&= g\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big], Z_1\right)\widehat{Y_2} \\
&= G_{f^2}\left(\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big], 0\Big), \Big(Z_1, 0\Big)\right)\Big(0, Y_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X_1}}(0,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0) - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2} \\
&= \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2 \\
&\quad -\frac{X_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla^N_{Y_2}Z_2 - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2\right] \\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{X_1}gradf^2 + \frac{X_1(f^2)}{2f^2}\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}gradf^2 \\
&= -\frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right] \\
&= -G_{f^2}\Big((0,Y_2),(0,Z_2)\Big)\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\right)
\end{aligned}
$$

de a) et b) on déduit

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z &= G_{f^2}\left(\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\Big),\Big(Z_1,0\Big)\right)\Big(0,Y_2\Big) \\
&\quad -G_{f^2}\left((0,Y_2),(0,Z_2)\right)\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{X_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z = -\frac{1}{2f^2}\left(\nabla^M_{X_1}gradf^2 - \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\right)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,Y_2\Big) \tag{3.2}
$$

3) $\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2}$

$$
\begin{aligned}
a)\quad \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{Z_1} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widetilde{Z_1} \\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{Y_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\widehat{X_2} - \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)[X_2,Y_2] \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[(0,\nabla^N_{X_2}Y_2) - \frac{h(Y_2,X_2))}{2}(gradf^2,0)\right] \\
&\quad -\frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left[\Big(0,\nabla^N_{Y_2}X_2\Big) - \frac{h(Y_2,X_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)\right] - \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\Big(0,[X_2,Y_2]\Big) \\
&= \frac{1}{2f^2}Z_1(f^2)\left(0,(\nabla^N_{X_2}Y_2) - \nabla^N_{Y_2}X_2) - [X_2,Y_2])\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b) \quad \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} - \widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} \\
&= \Big(0, R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) \\
&\quad -\frac{|gradf^2|^2}{4f^4}\Big[G_{f^2}\Big((0,Y_2),(0,Z_2)\Big)(0,X_2) - G_{f^2}\Big((0,X_2),(0,Z_2)\Big)(0,Y_2)\Big] \\
&= \Big(0, R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) - \frac{1}{4f^4}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,Y_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big((0,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\Big) \\
&= \Big(0,\nabla^N_{X_2}\nabla^N_{Y_2}Z_2\Big) - \frac{h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big) - \frac{h(Y_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big(gradf^2,0\Big) \\
&\quad -\frac{X_2(h(Y_2,Z_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big((0,\nabla^N_{X_2}Z_2) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}(gradf^2,0)\Big) \\
&= \Big(0,\nabla^N_{Y_2}\nabla^N_{X_2}Z_2\Big) - \frac{h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big) - \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big(gradf^2,0\Big) \\
&\quad -\frac{Y_2(h(X_2,Z_2))}{2}\Big(gradf^2,0\Big)
\end{aligned}
$$

$$
-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]}\widehat{Z_2} = -\Big(0,\nabla^N_{[X_2,Y_2]}Z_2\Big) + \frac{h([X_2,Y_2],Z_2)}{2}\Big(gradf^2,0\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\Big(gradf^2,0\Big) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,X_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,X_2) \\
\widetilde{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\Big(gradf^2,0\Big) &= \frac{gradf^2(f^2)}{2f^2}(0,Y_2) = \frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2(0,Y_2)
\end{aligned}
$$

$$
-h(X_2,\nabla^N_{Y_2}Z_2) - X_2(h(Y_2,Z_2)) + h(Y_2,\nabla^N_{X_2}Z_2) + Y_2(h(X_2,Z_2)) + h([X_2,Y_2],Z_2) = 0
$$

D'où

$$
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z = \Big(0,R_N(X_2,Y_2)Z_2\Big) - \frac{1}{4f^2}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,Y_2\Big) \tag{3.3}
$$

4) $\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z = \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1} + \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2}$

$$
\begin{aligned}
a)\quad \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widetilde{Z_1} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{Z_1}-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}(\nabla^M_{Y_1}Z_1,0)-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}-Y_1(\frac{Z_1(f^2)}{2f^2})\widehat{X_2}-\frac{Z_1(f^2)}{2f^2}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{X_2}\\
&= \left[\frac{\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)}{2f^2}+\frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^4}-\frac{Y_1(Z_1(f^2))}{2f^2}-\frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{4f^4}\right]\widehat{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[\nabla^M_{Y_1}Z_1(f^2)-Y_1(Z_1(f^2))+\frac{Y_1(f^2)Z_1(f^2)}{2f^2}\right]\widetilde{X_2}\\
&= \frac{1}{2f^2}\left[-g\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2,Z_1\Big)+\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}g\Big(gradf^2,Z_1\Big)\right]\widehat{X_2}\\
&= -G_{f^2}\left(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],Z_1\right)\Big(0,X_2\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad \widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)\widehat{Z_2} &= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{[\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2}\\
&= \widetilde{\nabla}_{\widehat{X_2}}\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\widehat{Z_2}-\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\Big((0,\nabla^N_{X_2}Z_2)-\frac{h(X_2,Z_2)}{2}gradf^2,0)\Big)\\
&= \frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\left[\nabla^N_{X_2}Z_2-\frac{h(X_2,Z_2)}{2}gradf^2\right]\\
&\quad -\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}\nabla^N_{X_2}Z_2+\frac{h(X_2,Z_2)}{2}\nabla^M_{Y_2}gradf^2\\
&= \frac{h(X_2,Z_2)}{2}\left[\nabla^M_{Y_2}gradf^2-\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\right]\\
&= G_{f^2}\Big((0,X_2),(0,Z_2)\Big)\Big(\frac{1}{2f^2}\Big[\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{Y_1(f^2)}{2f^2}gradf^2\Big],0\Big)
\end{aligned}
$$

De a) et b) on déduit

$$
\widetilde{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z=\frac{1}{2f^2}\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,X_2\Big) \tag{3.4}
$$

Des formules (1.5), (1.6), (1.7) et (1.8) on obtient

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}\Big(X,Y\Big)-R\Big(X,Y\Big) &= \frac{1}{2f^2}\Bigg\{\Big(\nabla^M_{Y_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,X_2\Big)\\
&\quad -\Big(\nabla^M_{X_1}gradf^2-\frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)gradf^2,0\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,Y_2\Big)\\
&\quad -\frac{1}{2f^2}|gradf^2|^2\Big(0,X_2\Big)\wedge_{G_{f^2}}\Big(0,Y_2\Big)\Bigg\}
\end{aligned}
$$

3.2.3 L'Opérateur Laplacien dans le Produit Tordu

Proposition 3.2.3. *Soient $(M.g),(N,h)$ deux variétés riemanniennes. Δ_M, Δ_N désignent les operateurs laplaciens sur M et N respectivement. Si*

$$\begin{array}{rcl} \alpha : M\times_{f^2} N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \alpha(x,y) \end{array}$$

est une application de classe C^∞, alors

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \Big(\Delta_M(\alpha_y),0\Big) + \Big(0,\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha_x)\Big) + n\Big(d\alpha_y(grad \ln f),0\Big)$$

où $\widetilde{\Delta}$ désigne l'operateur laplacien sur la variété produit tordu $M\times_{f^2} N$.

Pour simplifier, on écrit

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \Delta_M(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha) + n.d_M\alpha(grad \ln f)$$

Preuve : Soit $\{e_1,...e_m)\}$ (resp $\{b_{m+1}....b_{n+m}\}$) une base locale ortonormale sur M (resp N). On pose

$$h_i = \begin{cases} \widetilde{e_i} = (e_i,0), & si \quad i=1,...,m \\ \frac{1}{f}\widetilde{b}_{i-m} = \frac{1}{f}(0,b_{i-m}), & si \quad i=m+1,...,n+m. \end{cases}$$

Alors $\{(h_1,...,h_{m+n}\}$ est une base locale ortonormale sur la variété produit tordue $M\times_{f^2} N$. On a

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) \quad = \quad \sum_{i=1}^{m+n} h_i(h_i(\alpha) - (\nabla_{h_i}h_i)(\alpha).$$

Remarquons que $\widetilde{b_i}(f)=0$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(\alpha) &= \sum_{i=1}^{m}\Big\{\widetilde{e_i}(\widetilde{e_i}(\alpha)) - (\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e_i}}\widetilde{e_i})(\alpha)\Big\} + \sum_{i=m+1}^{m+n}\Big\{\frac{1}{f^2}\widetilde{b_i}(\widetilde{b_i}(\alpha)) - \frac{1}{f^2}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{b_i}}\widetilde{b_i})(\alpha)\Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\Big\{(e_i(e_i(\alpha_y)),0) - ((\nabla^M_{e_i}e_i)(\alpha_y),0)\Big\} + \frac{1}{f^2}\sum_{i=m+1}^{m+n}\Big\{(0,b_i(b_i(\alpha_x))) - (0,(\nabla^N_{b_i}b_i)(\alpha_x))\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2f^2}\sum_{i=m+1}^{m+n} h(b_i,b_i)((gradf^2)(\alpha_y),0) \\
&= (\Delta_M(\alpha_y),0) + \frac{1}{f^2}(0,\Delta_N(\alpha_x)) + \frac{n}{2f^2}((gradf^2)(\alpha_y),0) \\
&= \Big(\Delta_M(\alpha_y),0\Big) + \frac{1}{f^2}\Big(0,\Delta_N(\alpha_x)\Big) + \frac{n}{2f^2}\Big(d\alpha_y(gradf^2),0\Big) \\
&= \Big(\Delta_M(\alpha_y),0\Big) + \frac{1}{f^2}\Big(0,\Delta_N(\alpha_x)\Big) + n\Big(d\alpha_y(grad \ln f),0\Big)
\end{aligned}$$

De la Proposition 3.2.3, on déduit.

Corollaire 3.2.1.

– *α harmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} \bullet \quad \alpha_x, \alpha_y \text{ sont harmoniques ;} \\ \bullet \quad d\alpha_y(grad \ln f) = 0 \end{cases}$$

– *Si f est constante, alors α harmonique si et seulement si α_x et α_y sont harmoniques. i.e*

$$(\widetilde{\Delta}(\alpha) = 0) \Leftrightarrow (\Delta_M(\alpha) = 0 \quad et \quad \Delta_N(\alpha) = 0).$$

pour tout $x \in M$ et $y \in N$.

3.2.4 L'Opérateur Bilaplacien dans le Produit Tordu

Définition 3.2.2. *soit $(P, \hbar)$ une variété Riemannienne. L'Operateur Bilaplacien d'une application $\varphi : (P, \hbar) \to \mathbb{R}$ est defini par*

$$\Delta^2(\alpha) = \Delta\Big(\Delta(\alpha)\Big)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien sur la variété $(P, \hbar)$.

Proposition 3.2.4.

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2(\alpha) &= \widetilde{\Delta}\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big) \\ &= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Big[\Delta_M(\Delta_N(\alpha)) + \Delta_N(\Delta_M(\alpha))\Big] + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(\alpha)|grad \ln f|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{f^2} d\ln f\Big(grad\Delta_N(\alpha)\Big) + n\Big(\Delta_M + \frac{1}{f^2}\Delta_N\Big)\Big(d_M\alpha(grad \ln f)\Big) - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) \\ &\quad + nd\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(\alpha) + nd_M\alpha(grad \ln f)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2(\alpha) &= \widetilde{\Delta}\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big) \\ &= \underbrace{\Delta_M\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)}_{T_1} + \frac{1}{f^2}\underbrace{\Delta_N\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)}_{T_2} + n.\underbrace{d_M\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)\Big(grad \ln f\Big)}_{T_3} \end{aligned}$$

1) Calcul de T_1

$$\begin{aligned}
T_1 &= \Delta_M\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)\\
&= \Delta_M\Big(\Delta_M(\alpha)\Big) + \Delta_M\Big(\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Big) + n\Delta_M\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big)\\
&= \Delta_M^2(\alpha) + \Delta_M(\frac{1}{f^2})\Delta_N(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Delta_M\Big(\Delta_N(\alpha)\Big) + 2g\Big(grad\frac{1}{f^2}, grad\Delta_N(\alpha)\Big)\\
&\quad + n\Delta_M\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big)\\
&= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{4}{f^2}\Delta_N(\alpha)|grad\ln f|^2 - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) + \frac{1}{f^2}\Delta_M\Big(\Delta_N(\alpha)\Big)\\
&\quad - \frac{2}{f^2}d_M\ln f\Big(grad_M\Delta_N(\alpha)\Big) + n\Delta_M\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big)
\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}
grad\frac{1}{f^2} &= \frac{-2}{f^2}grad\ln f\\
\Delta_M(\frac{1}{f^2}) &= \frac{2}{f^2}\Big(2|grad\ln f|^2 - \Delta_M(\ln f)\Big)\\
|grad\ln f|^2 &= g(grad\ln f, grad\ln f).
\end{aligned}$$

2) Calcul de T_2

$$\begin{aligned}
T_2 &= \Delta_N\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)\\
&= \Delta_N\Big(\Delta_M(\alpha)\Big) + \Delta_N\Big(\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Big) + n\Delta_N\Big((d_M\alpha(grad\ln f)\Big)\\
&= \Delta_N\Big(\Delta_M(\alpha)\Big) + \frac{1}{f^2}\Delta_N^2(\alpha) + n\Delta_N\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{f^2}T_2 = \frac{1}{f^2}\Delta_N\Big(\Delta_M(\alpha)\Big) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{n}{f^2}\Delta_N\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big)$$

3) Calcul de T_3

$$\begin{aligned}
T_3 &= d_M\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big)\Big(grad\ln f\Big)\\
&= g\Big(grad\Big(\Delta_M(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha) + nd_M\alpha(grad\ln f)\Big), grad\ln f\Big)\\
&= g\Big(grad\Delta_M(\alpha), grad\ln f\Big) + g\Big(grad\frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha), grad\ln f\Big)\\
&\quad + ng\Big(grad(d_M\alpha(grad\ln f)), grad\ln f\Big)\\
&= d_M\ln f\Big(grad(\Delta_M(\alpha)\Big) + \frac{1}{f^2}d_M\ln f\Big(grad\Delta_N(\alpha)\Big)\\
&\quad - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)|grad\ln f|^2 + nd_M\ln f\Big(grad(d_M\alpha(grad\ln f))\Big)
\end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2(\alpha) &= \widetilde{\Delta}\Big(\widetilde{\Delta}(\alpha)\Big) \\
&= \Delta_M^2(\alpha) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(\alpha) + \frac{1}{f^2}\Big[\Delta_M(\Delta_N(\alpha)) + \Delta_N(\Delta_M(\alpha))\Big] + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(\alpha)|grad\ln f|^2 \\
&\quad + \frac{n-2}{f^2} d\ln f\Big(grad\Delta_N(\alpha)\Big) + n\Big(\Delta_M + \frac{1}{f^2}\Delta_N\Big)\Big(d_M\alpha(grad\ln f)\Big) - \frac{2}{f^2}\Delta_N(\alpha)\Delta_M(\ln f) \\
&\quad + nd\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(\alpha) + nd_M\alpha(grad\ln f)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

Applications I :

Soient $l_1 \in C^\infty(M)$ et $l_2 \in C^\infty(N)$ alors $l_1 \circ \pi \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$ et $l_2 \circ \eta \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$

$$\begin{tikzcd}
M \times_{f^2} N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "l_1 \circ \pi"'] & M \arrow[d, "l_1"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \times_{f^2} N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "l_2 \circ \eta"'] & N \arrow[d, "l_2"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.2.5.

$$\widetilde{\Delta}(l_1 \circ \pi) = \Delta_M(l_1) \circ \pi + n.dl_1(grad\ln f) \circ \pi \tag{3.5}$$

$$\widetilde{\Delta}(l_2 \circ \eta) = \frac{1}{f^2}\Delta_N(l_2) \circ \eta \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2(l_1 \circ \pi) &= \Delta_M^2(l_1) \circ \pi + n\Big[\Delta_M(dl_1(grad\ln f)) + d(\ln f)(grad\Delta_M(l_1) \circ \pi)\Big] \\
&\qquad + n^2 d\ln f\Big(grad(d_M l_1(grad\ln f))\Big) \qquad (3.7) \\
\widetilde{\Delta}^2(l_2 \circ \eta) &= \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(l_2) \circ \eta + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(l_2)|grad\ln f|^2 \\
&\qquad - \frac{2}{f^2}\Delta_N(l_2)\Delta_M(\ln f) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2.2. *Si l_1 et l_2 sont harmoniques, alors*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(l_1 \circ \pi) &= n.dl_1(grad\ln f) \circ \pi \\
\widetilde{\Delta}(l_2 \circ \eta) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2(l_1 \circ \pi) &= n.\Delta_M(dl_1(grad\ln f)) + n^2 d\ln f\Big(grad(d_M l_1(grad\ln f))\Big) \\
\widetilde{\Delta}^2(l_2 \circ \eta) &= 0.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2.3. *:*
1) si l_2 harmonique alors $l_2 \circ \eta$ harmonique (donc biharmonique)
2) si f est constante alors $l_1 \circ \pi$ harmonique (donc biharmonique)
3) si l_1 harmonique, alors $l_1 \circ \pi$ est biharmonique non harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned} &dl_1(grad \ln f) \neq 0, \\ &\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + nd\ln f\Big(grad(d_M l_1(grad \ln f))\Big) = 0. \end{aligned}$$

Applications II :
Soient $l_1 \in C^\infty(M)$ et $l_2 \in C^\infty(N)$, alors il existe $\alpha \in C^\infty(M \times_{f^2} N)$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \alpha : M \times_{f^2} N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \alpha(x, y) = l_1(x).l_2(y) \end{array}$$

Proposition 3.2.6.

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \Big(l_2 \Delta_M(l_1), 0\Big) + \Big(0, \frac{l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)\Big) + nl_2\Big(dl_1(grad \ln f), 0\Big)$$

En abreviation, on note

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = l_2\Big[\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f)\Big] + \frac{l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2(\alpha) &= \widetilde{\Delta}\Big(\widetilde{\Delta}(l_1.l_2)\Big) \\ &= l_2^2 \Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4}\Delta_N^2(l_2) \\ &\quad + \frac{2}{f^2}\Delta_N(l_2)\Big[\Delta_M(l_1) + (n-1).dl_1(grad \ln f) + l_1(2-n).|grad \ln f|^2 - l_1 \Delta_M(\ln f)\Big] \\ &\quad + n.l_2\Big[d\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f)\Big)\Big) + \Delta_M(dl_1(grad \ln f))\Big] \end{aligned}$$

Preuve :
D'après le Proposition 3.2.3

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \Big(\Delta_M(\alpha_y), 0\Big) + \Big(0, \frac{1}{f^2}\Delta_N(\alpha_x)\Big) + n\Big(d\alpha_y(grad \ln f), 0\Big)$$

pour $\alpha(x, y) = l_1(x)l_2(y)$ on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}(\alpha) &= \widetilde{\Delta}(l_1.l_2) \\ &= \Big(\Delta_M(l_1.l_2), 0\Big) + \Big(0, \frac{1}{f^2}\Delta_N(l_1.l_2)\Big) + n\Big(d(l_1.l_2)(grad \ln f), 0\Big) \\ &= \Big(l_2.\Delta_M(l_1), 0\Big) + \Big(0, \frac{l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)\Big) + n.l_2\Big(d(l_1)(grad \ln f), 0\Big) \\ &= l_2\Big[\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f)\Big] + \frac{l_1}{f^2}\Delta_N(l_2) \end{aligned}$$

avec

$$grad(l_1.l_2) = l_2.gradl_1 + l_1.gradl_2$$

$$\begin{aligned}
\Delta_M(l_1.l_2) &= l_2.\Delta_M(l_1) + \underbrace{l_1\Delta_M(l_2)}_{=0} + \underbrace{2g(gradl_1, gradl_2)}_{=0} \\
&= l_2.\Delta_M(l_1) \\
\Delta_N(l_1.l_2) &= l_1.\Delta_N(l_2) + l_2\,\underbrace{\Delta_N(l_1)}_{=0} + \underbrace{2h(gradl_1, gradl_2)}_{=0} \\
&= l_1.\Delta_N(l_2)
\end{aligned}$$

et D'après le Proposition 3.2.4

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2(l_1.l_2) &= \widetilde{\Delta}\Big(\widetilde{\Delta}(l_1.l_2)\Big) \\
&= \Delta_M^2(l_1.l_2) + \frac{1}{f^4}\Delta_N^2(l_1.l_2) + \frac{1}{f^2}\Big[\Delta_M(\Delta_N(l_1.l_2)) + \Delta_N(\Delta_M(l_1.l_2))\Big] \\
&\quad + \frac{n-2}{f^2}d\ln f\Big(grad\Delta_N(l_1.l_2)\Big) + \frac{4-2n}{f^2}\Delta_N(l_1.l_2)|grad\ln f|^2 \\
&\quad - \frac{2}{f^2}\Delta_N(l_1.l_2)\Delta_M(\ln f) + n\Big(\Delta_M + \frac{1}{f^2}\Delta_N\Big)\Big(d_M(l_1.l_2)(grad\ln f)\Big) \\
&\quad + nd\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1.l_2) + nd_M l_1.l_2(grad\ln f)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

avec

$$\Delta_M(\Delta_N(l_1.l_2)) + \Delta_N(\Delta_M(l_1.l_2)) = 2\Delta_M(l_1).\Delta_N(l_2)$$

$$\begin{aligned}
d\ln f\Big(grad\Delta_N(l_1.l_2)\Big) &= g(grad\ln f, grad\Delta_N(l_1.l_2)) \\
&= \Delta_N(l_2).g(grad\ln f, grad(l_1)) + l_1 g(grad\ln f, grad(\Delta_N(l_2))) \\
&= \Delta_N(l_2).dl_1(grad\ln f)
\end{aligned}$$

$$\Delta_M(d_M(l_1.l_2)(grad\ln f)) = l_2.\Delta_M(dl_1(grad\ln f))$$

$$\Delta_N(d_M(l_1.l_2)(grad\ln f)) = \Delta_N(l_2).dl_1(grad\ln f)$$

$$d\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1.l_2)+nd_M(l_1.l_2)(grad\ln f)\Big)\Big) = l_2 d\ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1)+n.dl_1(grad\ln f)\Big)\Big)$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2(l_1.l_2) &= l_2^2.\Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4}.\Delta_N^2(l_2) + \frac{2}{f^2}\Delta_M(l_1)\Delta_N(l_2) \\
&\quad + \frac{n-2}{f^2} dl_1(grad \ln f).\Delta_N(l_2) + \frac{(4-2n)l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)|grad \ln f|^2 \\
&\quad - \frac{2l_1}{f^2}\Delta_N(l_2)\Delta_M(\ln f) + nl_2.\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + \frac{n}{f^2}\Delta_N(l_2).dl_1(grad \ln f) \\
&\quad + n(l_2).d \ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1) + ndl_1(grad \ln f)\Big)\Big) \\
&= l_2^2\Delta_M^2(l_1) + \frac{l_1^2}{f^4}\Delta_N^2(l_2) \\
&\quad + \frac{2}{f^2}\Delta_N(l_2)\Big[\Delta_M(l_1) + (n-1).dl_1(grad \ln f) + l_1(2-n).|grad \ln f|^2 - l_1\Delta_M(\ln f)\Big] \\
&\quad + n.l_2\Big[d \ln f\Big(grad\Big(\Delta_M(l_1) + n.dl_1(grad \ln f)\Big)\Big) + \Delta_M(dl_1(grad \ln f))\Big]
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 3.2.4. *Si l_1 et l_2 sont harmoniques, alors*

$$\widetilde{\Delta}(l_1.l_2) = nl_2.dl_1(grad \ln f)$$

$$\widetilde{\Delta}^2(l_1.l_2) = nl_2.\Big[\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + nd \ln f\Big(grad(dl_1(grad \ln f))\Big)\Big]$$

Corollaire 3.2.5. *:*
1) Si l_1 et l_2 sont harmoniques alors $\alpha = l_1.l_2$ est biharmonique non harmonique si et seulement si

$$l_2.dl_1(grad \ln f) \neq 0,$$
$$\Delta_M(dl_1(grad \ln f)) + nd \ln f\Big(grad(dl_1(grad \ln f))\Big) = 0.$$

2) si f est constante alors $\alpha = l_1.l_2$ harmonique (donc biharmonique)

Chapitre 4

Variété Produit Tordu Généralisé

4.1 Métrique Riemannienne du Produit Tordu Généralisé

Définition 4.1.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement et f une fonction strictement positive de classe C^∞ sur $M \times N$, la métrique Riemannienne produit tordu généralisé sur $M \times_f N$ est definie par*

$$G_f = \pi^* g + (f)^2 \eta^* h$$

avec

$$G_f(X, Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y))$$

4.2 Connexion de levi-civita de la variété Produit Tordu Généralisé

Proposition 4.2.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variété Riemannienne. Si $\overline{\nabla}$ désigne la connexion de levi-civit associé à la variété $(M \times_f N, G_f)$, alors pour tout $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$, $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$ on a :*

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + X(\ln f)(0, Y_2) + Y(\ln f)(0, X_2) \\
&\quad -\frac{1}{2} h(X_2, Y_2)(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2)
\end{aligned}$$

où $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

Preuve :

Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathcal{H}(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$. De la formule de koszul on obtient

$$\begin{aligned}
2G_f(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= X(G_f(Y,Z)) + Y(G_f(X,Z)) - Z(G_f(X,Y)) \\
&\quad + G_f(Z,[X,Y]) + G_f(Y,[Z,X]) - G_f\Big(X,[Y,Z]) \\
&= X(g(Y_1,Z_1)\circ\pi + f^2.h(Y_2,Z_2)\circ\eta) + \\
&\quad Y(g(X_1,Z_1)\circ\pi + f^2.h(X_2,Z_2)\circ\eta) - \\
&\quad Z(g(X_1,Y_1)\circ\pi + f^2.h(X_2,Y_2)\circ\eta) \\
&\quad + g(Z_1,[X_1,Y_1])\circ\pi + f^2.h(Z_2,[X_2,Y_2])\circ\eta \\
&\quad + g(Y_1,[Z_1,X_1])\circ\pi + f^2.h(Y_2,[Z_2,X_2])\circ\eta \\
&\quad - g(X_1,[Y_1,Z_1])\circ\pi - f^2.h(X_2,[Y_2,Z_2])\circ\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2G_f(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= X_1(g(Y_1,Z_1)\circ\pi) + f^2.X_2(h(Y_2,Z_2)\circ\eta) + X(f^2).h(Y_2,Z_2) \\
&\quad + Y_1(g(X_1,Z_1)\circ\pi) + f^2.Y_2(h(X_2,Z_2)\circ\eta) + Y(f^2).h(X_2,Z_2) \\
&= -Z_1(g(Y_1,X_1)\circ\pi) - f^2.Z_2(h(Y_2,X_2)\circ\eta) - Z(f^2).h(Y_2,X_2) \\
&\quad + g(Z_1,[X_1,Y_1])\circ\pi + f^2.h(Z_2,[X_2,Y_2])\circ\eta \\
&\quad + g(Y_1,[Z_1,X_1])\circ\pi + f^2.h(Y_2,[Z_2,X_2])\circ\eta \\
&\quad - g(X_1,[Y_1,Z_1])\circ\pi - f^2.h(X_2,[Y_2,Z_2])\circ\eta \\
&= 2g(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1)\circ\pi + 2f^2.h(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2)\circ\eta \\
&\quad + X(f^2).h(Y_2,Z_2) + Y(f^2).h(X_2,Z_2) - Z(f^2).h(Y_2,X_2)
\end{aligned}$$

Grâces au formules suivantes,

$$X(f^2).h(Y_2,Z_2) = 2X(\ln f)G_f((0,Y_2),Z) \tag{4.1}$$

$$Y(f^2).h(X_2,Z_2) = 2Y(\ln f)G_f((0,X_2),Z) \tag{4.2}$$

$$Z(f^2).h(X_2,Y_2) = h(X_2,Y_2)G_f((grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2), Z) \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
G_f(\nabla^{M\times N}_X Y, Z) &= G_f((\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2),(Z_1,Z_2)) \\
&= g(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1)\circ\pi + f^2.h(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2)\circ\eta
\end{aligned} \tag{4.4}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
G_f(\overline{\nabla}_X Y, Z) &= G_f(\nabla^{M\times N}_X Y, Z) + G_f(X(\ln f).(0,Y_2),Z) + G_f(Y(\ln f).(0,X_2),Z) \\
&\quad - G_f(\frac{1}{2}h(X_2,Y_2).(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2), Z) \\
&= G_f\Big(\nabla^{M\times N}_X Y + X(\ln f).(0,Y_2) + Y(\ln f).(0,X_2) \\
&\quad - \frac{1}{2}h(X_2,Y_2).(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2), Z\Big)
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 4.2.1. *D'aprés la proposition 4.2.1 on a :*

1. *Si* $f : (x, y) \in M \times N \longmapsto f(x, y)) = f(x)$, *alors*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X_1(\ln f)\Big(0, Y_2\Big) + Y_1(\ln f)\Big(0, X_2\Big) - \frac{1}{2}h(X_2, Y_2)\Big(grad_M(f^2), 0\Big)$$

On retrouve la formule de la connexion de Levi-Civita du produit tordu.

2. *Si* $f : (x, y) \in M \times N \longmapsto f(x, y)) = f(y)$, *alors*

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + X_2(\ln f)\Big(0, Y_2\Big) + Y_2(\ln f)\Big(0, X_2\Big) - \frac{1}{2}h(X_2, Y_2)\Big(0, \frac{1}{f^2} grad_N(f^2)\Big) \\ &= (\nabla^M_{X_1} Y_1, \widehat{\nabla}_{X_2} Y_2)\end{aligned}$$

On retrouve la formule de la connexion de Levi-Civita du produit des variété Riemannienne (M, g) *et* $(N, f^2 h)$, *avec*

$$\widehat{\nabla}_{X_2} Y_2 = \nabla^N_{X_2} Y_2 + X_2(\ln f) Y_2 + Y_2(\ln f) X_2 - h(X_2, Y_2) grad_N \ln f$$

formule de la connexion de Levi-Civita de la déformation conforme de la métrique h *par la fonction* f^2

Lemme 4.2.1. *Pour tout* $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, *on a :*

1. $\overline{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^M_{X_1} Y_1, 0)$.
2. $\overline{\nabla}_{(X_1,0)}(0, Y_2) = X_1(\ln f)(0, Y_2)$.
3. $\overline{\nabla}_{(0,X_2)}(Y_1, 0) = Y_1(\ln f)(0, X_2)$
4. $\overline{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0 \nabla^N_{X_2} Y_2) + X_2(\ln f)(0, Y_2) + Y_2(\ln f)(0, X_2) - \frac{1}{2}h(X_2, Y_2)(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad f^2)$

Proposition 4.2.2. *Pour tout* $X_1, Y_1 \in \mathcal{H}(M)$ *et* $X_2, Y_2 \in \mathcal{H}(N)$, *on a :*

$$\begin{aligned}\overline{R}((X_1, 0), (Y_1, 0))(Z_1, 0) &= \overline{\nabla}_{(X_1,0)} \overline{\nabla}_{(Y_1,0)}(Z_1, 0) - \overline{\nabla}_{(Y_1,0)} \overline{\nabla}_{(X_1,0)}(Z_1, 0) - \overline{\nabla}_{([X_1,Y_1],0)}(Z_1, 0) \\ &= (\nabla^M_{X_1} \nabla^M_{Y_1} Z_1, 0) - (\nabla^M_{Y_1} \nabla^M_{X_1} Z_1, 0) - (\nabla^M_{[X_1,Y_1]} Z_1, 0) \\ &= (R^M(X_1, Y_1) Z_1, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{R}((X_1, 0), (Y_1, 0))(0, Z_2) &= \overline{\nabla}_{(X_1,0)} \overline{\nabla}_{(Y_1,0)}(0, Z_2) - \overline{\nabla}_{(Y_1,0)} \overline{\nabla}_{(X_1,0)}(0, Z_2) - \overline{\nabla}_{([X_1,Y_1],0)}(0, Z_2) \\ &= \overline{\nabla}_{(X_1,0)} Y_1(\ln f)(0, Z_2) - \overline{\nabla}_{(Y_1,0)} X_1(\ln f)(0, Z_2) - [X_1, Y_1](\ln f)(0, Z_2) \\ &= Y_1(\ln f) \overline{\nabla}_{(X_1,0)}(0, Z_2) - X_1(\ln f) \overline{\nabla}_{(Y_1,0)}(0, Z_2) \\ &= Y_1(\ln f) X_1(\ln f)(0, Z_2) - X_1(\ln f) Y_1(\ln f)(0, Z_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}((X_1,0),(0,Y_2))(Z_1,0) &= \overline{\nabla}_{(X_1,0)}\overline{\nabla}_{(0,Y_2)}(Z_1,0) - \overline{\nabla}_{(0,Y_2)}\overline{\nabla}_{(X_1,0)}(Z_1,0)\\
&= \overline{\nabla}_{(X_1,0)}Z_1(\ln f)(0,Y_2) - \overline{\nabla}_{(0,Y_2)}(\nabla^M_{X_1}Z_1,0)\\
&= X_1(Z_1(\ln f))(0,Y_2) + Z_1(\ln f)\overline{\nabla}_{(X_1,0)}(0,Y_2) - \overline{\nabla}_{(0,Y_2)}(\nabla^M_{X_1}Z_1,0)\\
&= X_1(Z_1(\ln f))(0,Y_2) + X_1(\ln f)Z_1(\ln f)(0,Y_2) - \nabla^M_{X_1}Z_1(\ln f)(0,Y_2)\\
&= \{X_1(Z_1(\ln f)) + X_1(\ln f)Z_1(\ln f) - (\nabla^M_{X_1}Z_1)(\ln f)\}(0,Y_2)\\
&= \{X_1(g(Z_1, grad_M \ln f)) + X_1(\ln f)g(Z_1, grad_M \ln f)\\
&- (\nabla^M_{X_1}Z_1)(\ln f)\}(0,Y_2)\\
&= \{g(Z_1, \nabla^M_{X_1}grad_M \ln f) + X_1(\ln f)g(Z_1, grad_M \ln f)\}(0,Y_2)\\
&= G_f\Big((\nabla^M_{X_1}grad_M \ln f + X_1(\ln f)grad_M \ln f, 0), Z\Big)(0,Y_2)
\end{aligned}$$

4.3 Tenseur de Courbure du Produit Tordu Généralisé

Proposition 4.3.1. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. Si R et $\overline{R}$ désignent les tenseurs de courbures de la variété Riemannienne produit $(M \times N, G)$ et de la variété Riemannienne produit $(M \times_f N, G_f)$ respectivement, alors*

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y) - R(X,Y) &= (\nabla^M_{Y_1}grad_M \ln f + Y_1(\ln f)grad_M \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0,X_2)\\
&- (\nabla^M_{X_1}grad_M \ln f + X_1(\ln f)grad_M \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0,Y_2)\\
&+ \frac{1}{f^2}\Bigg[(0, \nabla^N_{Y_2}grad_N \ln f - Y_2(\ln f)grad_N \ln f) \wedge_{G_f} (0,X_2)\\
&- (0, \nabla^N_{X_2}grad_N \ln f - X_2(\ln f)grad_N \ln f) \wedge_{G_f} (0,Y_2)\\
&- (f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 + \mid grad_N \ln f \mid^2)(0,X_2) \wedge_{G_f} (0,Y_2)\Bigg]\\
&+ \Big[X_1(\star_N(\ln f)) + X_2(\star_M(\ln f))\Big](0,Y_2) - \Big[Y_1(\star_N(\ln f)) + Y_2(\star_M(\ln f))\Big](0,X_2)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Preuve :
Soient $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathcal{H}(M)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathcal{H}(N)$, on pose $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ et $Z = (Z_1, Z_2)$

$$\begin{aligned}
\overline{R}\Big(X,Y\Big)Z &= \overline{R}\Big((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\Big)Z\\
&= \overline{R}\Big(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}\Big)Z + \overline{R}\Big(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2}\Big)Z + \overline{R}\Big(\widehat{X_2},\widetilde{Y_1}\Big)Z + \overline{R}\Big(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}\Big)Z
\end{aligned}$$

En développant chaque membre on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widetilde{Z_1} &= \overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widetilde{Z_1} - \overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Z_1} - \overline{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widetilde{Z_1} \\
&= (\nabla^M_{X_1}\nabla^M_{Y_1}Z_1, 0) - (\nabla^M_{Y_1}\nabla^M_{X_1}Z_1, 0) - (\nabla^M_{[X_1,Y_1]}Z_1, 0) \\
&= (R^M(X_1,Y_1)Z_1, 0)
\end{aligned}$$

$$\overline{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widehat{Z_2} = \overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2} - \overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} - \overline{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\widehat{Z_2} &= \overline{\nabla}_{X_1}(Y_1(\ln f)\widehat{Z_2}) \\
&= X_1(Y_1(\ln f))\widehat{Z_2} + X_1(\ln f)Y_1(\ln f)\widehat{Z_2}
\end{aligned}$$

et par conséquant

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widetilde{Y_1}}\overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\widehat{Z_2} &= \overline{\nabla}_{Y_1}(X_1(\ln f)\widehat{Z_2}) \\
&= Y_1(X_1(\ln f))\widehat{Z_2} + Y_1(\ln f)X_1(\ln f)\widehat{Z_2}
\end{aligned}$$

et

$$\overline{\nabla}_{[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]}\widehat{Z_2} = [X_1,Y_1]\widehat{Z_2}$$

d'ou

$$\overline{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\widehat{Z_2} = 0$$

on déduit alors que

$$\overline{R}(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})Z = (R^M(X_1,Y_1)Z_1, 0)$$

de même façon on obtient ,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} &= g(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, Z_1)(0, Y_2) \\
&= G_f\Big((\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, 0), Z\Big)(0, Y_2)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\widetilde{X_1},\widehat{Y_2})\widehat{Z_2} &= -f^2 h(Y_2,Z_2)(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, 0) \\
&\quad + X_1(Z_2(\ln f))(0, Y_2) \\
&= -G_f(\widehat{Y_2}, Z)(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, 0) \\
&\quad + X_1(Z_2(\ln f))(0, Y_2)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widetilde{X_1}}\overline{\nabla}_{\widehat{Y_2}}\widehat{Z_2} &= X_1(\ln f)\Big[(0, \nabla^N_{Y_2}Z_2 + Z_2(\ln f))\widehat{Y_2} + Y_2(\ln f)\widehat{Z_2} - h(Y_2,Z_2)(0, grad_N \ln f)\Big] \\
&\quad + X_1(Y_2(\ln f)))\widehat{Z_2} + X_1(Z_2(\ln f)))\widehat{Y_2} - \frac{1}{2}h(Y_2,Z_2)(\nabla^M_{X_1} grad_M f^2, 0)
\end{aligned}$$

on déduit alors que

$$\overline{R}(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2})Z = -((\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0, Y_2))Z + X_1(Z_2(\ln f))\widehat{Y_2}$$

De même façon

$$\overline{R}(\widehat{X_2}, \widetilde{Y_1})Z = ((\nabla^M_{Y_1} grad_M \ln f + Y_1(\ln f) grad_M \ln f, 0) \wedge_{G_f} (0, X_2))Z - Y_1(Z_2(\ln f))\widehat{X_2}$$

et

$$\overline{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widetilde{Z_1} = X_2(Z_1(\ln f))\widehat{Y_2} - Y_2(Z_1(\ln f))\widehat{X_2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})\widehat{Z_2} = {} & (0, R^N(X_2, Y_2)Z_2) - h(Y_2, Z_2)(0, \nabla^N_{X_2} grad_N \ln f) + h(X_2, Z_2)(0, \nabla^N_{Y_2} grad_N \ln f) \\
& + h(X_2(\ln f)Y_2 - Y_2(\ln f)X_2, Z_2)(0, grad_N \ln f) \\
& - h(\nabla^N_{Y_2} grad_N \ln f - Y_2(\ln f) grad_N \ln f, Z_2)(0, X_2) \\
& + h(\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f - X_2(\ln f) grad_N \ln f, Z_2)(0, Y_2) \\
& - (f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 + \mid grad_N \ln f \mid^2)[h(Y_2, Z_2)(0, X_2) - h(X_2, Z_2)(0, Y_2)]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\widehat{X_2}} \overline{\nabla}_{\widehat{Y_2}} \widehat{Z_2} = {} & (0, \nabla^N_{X_2} \nabla^N_{Y_2} Z_2) + X_2(\ln f)(0, \nabla^N_{Y_2} Z_2) + Y_2(\ln f)(0, \nabla^N_{X_2} Z_2) + Z_2(\ln f)(0, \nabla^N_{X_2} Y_2) \\
& - \frac{1}{2} h(Y_2, Z_2)\Big[(0, 2\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f) - X_2(\ln f)(grad_M f^2, 0)\Big] \\
& \Big[(\nabla^N_{X_2} Z_2)(\ln f) + 2Y_2(\ln f)Z_2(\ln f) - (f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 + \mid grad_N \ln f \mid^2) h(Y_2, Z_2)\Big]\widehat{X_2} \\
& - \frac{1}{2}\Big[h(\nabla^N_{Y_2} Z_2, X_2) + Y_2(\ln f) h(X_2, Z_2) + Z_2(\ln f) h(X_2, Y_2) \\
& + X_2(h(Y_2, Z_2))\Big](grad_M f^2, 2 grad_N \ln f) + \Big[Z_2(\ln f)X_2(\ln f) + X_2(Z_2(\ln f))\Big]\widehat{Y_2} \\
& + \Big[Y_2(\ln f)X_2(\ln f) + X_2(Y_2(\ln f))\Big]\widehat{Y_2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\overline{\nabla}_{[\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}]} \widehat{Z_2} &= -(0, \nabla^N_{[X_2, Y_2]} Z_2) - [X_2, Y_2](\ln f)\widehat{Z_2} - Z_2(\ln f)(0, [X_2, Y_2]) \\
& \quad + \frac{1}{2} h([X_2, Y_2], Z_2)(grad_M f^2, 2 grad_N \ln f)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2})Z = {} & (0, R^N(X_2, Y_2)Z_2) + X_2(Z_1(\ln f))(0, Y_2) - Y_2(Z_1(\ln f)(0, X_2) \\
& \frac{1}{f^2}\Big[(0, \nabla^N_{Y_2} grad_N \ln f - Y_2(\ln f) grad_N \ln f) \wedge_{G_f} (0, X_2) \\
& - (0, \nabla^N_{X_2} grad_N \ln f - X_2(\ln f) grad_N \ln f) \wedge_{G_f} (0, Y_2) \\
& - (f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 + \mid grad_N \ln f \mid^2)(0, X_2) \wedge_{G_f} (0, Y_2)\Big]
\end{aligned}$$

$\square$

4.4 Courbure de Ricci du Variété Produit Tordu Généralisé

Proposition 4.4.1. *La courbure de Ricci d'une variété Produit Tordu Généralise* $(M \times_f N, G_f)$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned}
Ric(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}) &= Ric^M(X_1, Y_1) - ng(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, Y_1)\\
Ric(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}) &= -nX_1(Y_2(\ln f))\\
Ric(\widehat{X_2}, \widetilde{Y_1}) &= h(X_2, grad_N(Y_1(\ln f))) - nX_2(Y_1(\ln f))\\
Ric(\widehat{X_2}, \widehat{Y_2}) &= Ric^N(X_2, Y_2) + (2-n)h(\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f - X_2(\ln f) grad_N \ln f, Y_2)\\
&\quad + h(X_2, Y_2)\Big[(2-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 + nf^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f) - f^2 \Delta_M(\ln f)\Big]
\end{aligned}$$

telle que $X, Y \in \mathcal{H}(M \times N)$

Preuve :
En utilisant la proposition 4.3.1, et la définition de la courbure de Ricci, on a

$$\begin{aligned}
Ric(\widetilde{X_1}, \widetilde{Y_1}) &= G_f(R(\widetilde{E_i}, \widetilde{X_1})\widetilde{Y_1}, \widetilde{E_i}) + \frac{1}{f^2} G_f(R(\widehat{F_i}, \widetilde{X_1})\widetilde{Y_1}, \widehat{F_i})\\
&= G_f((R^M(E_i, X_1)Y_1, 0), \widetilde{E_i}) - \frac{1}{f^2} g(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, Y_1) G_f(\widehat{F_i}, \widehat{F_i})\\
&= g(R_M(E_i, X_1)Y_1, E_i) - ng(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, Y_1)\\
&= Ric^M(X_1, Y_1) - ng(\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, Y_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ric(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}) &= G_f(R(\widetilde{E_i}, \widetilde{X_1})\widehat{Y_2}, \widetilde{E_i}) + \frac{1}{f^2} G_f(R(\widehat{F_i}, \widetilde{X_1})\widehat{Y_2}, \widehat{F_i})\\
&= \frac{1}{f^2} h(Y_2, F_i) G_f((\nabla^M_{X_1} grad_M \ln f + X_1(\ln f) grad_M \ln f, 0), \widehat{F_i})\\
&- \frac{1}{f^2} X_1(Y_2(\ln f)) G_f(\widehat{F_i}, \widehat{F_i})\\
&= -nX_1(Y_2(\ln f))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Ric(\widehat{X_2}, \widetilde{Y_1}) &= G_f(R(\widetilde{E_i}, \widehat{X_2})\widetilde{Y_1}, \widetilde{E_i}) + \frac{1}{f^2} G_f(R(\widehat{F_i}, \widehat{X_2})\widetilde{Y_1}, \widehat{F_i})\\
&= g(\nabla^M_{E_i} grad_M \ln f + E_i(\ln f) grad_M \ln f, Y_1) G_f(\widehat{X_2}, \widetilde{E_i})\\
&\frac{1}{f^2} F_i(Y_1(\ln f)) G_f(\widehat{X_2}, \widehat{F_i}) - \frac{1}{f^2} X_2(Y_1(\ln f)) G_f(\widehat{F_i}, \widehat{F_i})\\
&= F_i(Y_1(\ln f)) h(X_2, F_i) - nX_2(Y_1(\ln f))\\
&= h(X_2, grad_N(Y_1(\ln f))) - nX_2(Y_1(\ln f))
\end{aligned}$$

$$Ric(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}) = G_f(R(\widetilde{E_i},\widehat{X_2})\widehat{Y_2},\widetilde{E_i}) + \frac{1}{f^2}G_f(R(\widehat{F_i},\widehat{X_2})\widehat{Y_2},\widehat{F_i})$$

$$\begin{aligned} G_f(R(\widetilde{E_i},\widehat{X_2})\widehat{Y_2},\widetilde{E_i}) &= -f^2 h(X_2,Y_2)G_f((\nabla^M_{E_i} grad_M \ln f + E_i(\ln f) grad_M \ln f, 0)) \\ &+ E_i(Y_2(\ln f))G_f(\widehat{X_2},\widetilde{E_i}) \\ &= -f^2 h(X_2,Y_2)\Big[\Delta_M(\ln f) + \mid grad_M \ln f \mid^2\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f^2}G_f(R(\widehat{F_i},\widehat{X_2})\widehat{Y_2},\widehat{F_i}) &= Ric^N(X_2,Y_2) + (2-n)h(Y_2, \nabla^N_{X_2} grad_N \ln f - X_2(\ln f) grad_N \ln f) \\ &+ h(X_2,Y_2)\Big[(2-n)\mid grad_N \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f) + nf^2 \mid grad_M \ln f \mid^2\Big] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_f((0,\nabla^N_{F_i} grad_N \ln f),\widehat{F_i}) &= f^2\Delta_N(\ln f) \\ h(f_i,Y_2)G_f((0,\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f),\widehat{F_i}) &= f^2 h(\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f, Y_2) \\ h(F_i,Y_2)G_f(\widehat{X_2},\widehat{F_i}) &= f^2 h(X_2,Y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(F_i(\ln f)X_2 - X_2(\ln f)F_i, Y_2)G_f((0, grad_N \ln f),\widehat{F_i}) = f^2\Big[&\mid grad_N \ln f \mid^2 h(X_2,Y_2) \\ &- X_2(\ln f)Y_2(\ln f)\Big] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(\nabla^N_{F_i} grad_N \ln f - F_i(\ln f) grad_N \ln f, Y_2)G_f(\widehat{F_i},\widehat{X_2}) = f^2\Big[&h(\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f, Y_2) \\ &- X_2(\ln f)Y_2(\ln f)\Big] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} Ric(\widehat{X_2},\widehat{Y_2}) &= Ric^N(X_2,Y_2) + (2-n)h(\nabla^N_{X_2} grad_N \ln f - X_2(\ln f) grad_N \ln f, Y_2) \\ &+ h(X_2,Y_2)\Big[(2-n)\mid grad_N \ln f \mid^2 + nf^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f) - f^2\Delta_M(\ln f)\Big] \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 5

Les applications harmoniques et biharmoniques sur les variétés produit tordu généralisé

Dons ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'harmonicité et la biharmonicité de quelques applications définies sur des variétés muni d'un métrique tordue généralisée .

Dons un premier lieu, nous allons calculer le champ de tension des ces applications afin de déterminer la condition d'harmonicité.

5.1 Les applications harmoniques sur les variétés produit tordu généralisé

Soient $(M,g),(N,h)$ et (P,k) trois variétés Riemanniennes de dimensions m,n *et* s respectivement.

Comme premières applications, nous allons traiter le cas où la variété d'arrivée est munie d'une métrique tordue généralisée.

5.1.1 L'harmonicité de l'application $\phi : (M,g) \longrightarrow (N \times_f P, G_f)$

Soit ϕ une application définie par

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M,g) & \longrightarrow & (N \times_f P, G_f) \\ x & \longmapsto & (\varphi(x), \psi(x)) \end{array}$$

avec $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ et $\psi : (M,g) \longrightarrow (P,k)$ deux applications régulières et $G_f = h + f^2 k$ la métrique définie sur $N \times_f P$ avec $f \in C^\infty(N \times P)$.

Proposition 5.1.1. *Le champ de tension de ϕ est donné par la formule suivante.*

$$\begin{aligned} \tau(\phi) &= \Big(\tau(\varphi), \tau(\psi)\Big) + 2\Big(0, d\psi(grad_M(\ln f \circ \phi))\Big) \\ &\quad - e(\psi)\Big(grad_N f^2 \circ \varphi, \frac{1}{f^2} grad_P f^2 \circ \psi\Big) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Preuve :
Soit $(e_i)_i$ une base ortonormale sur M, telle que pour tout $i, j = 1...m$, on a $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ en un point $x_0 \in M$.

En calculant en ce point et par définition du champ de tension, nous avons

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= tr_g \nabla d\phi \\
&= \nabla_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i) \\
&= \overline{\nabla}_{(d\varphi(e_i), d\psi(e_i))}(d\varphi(e_i), d\psi(e_i)) - \Big(d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i), d\psi(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big) \\
&= \nabla_{(d\varphi(e_i), d\psi(e_i))}(d\varphi(e_i), d\psi(e_i)) + 2(d\varphi(e_i), d\psi(e_i))(\ln f)(0, d\psi(e_i)) \\
&- e(\psi)\Big(grad_N f^2 \circ \varphi, \frac{1}{f^2} grad_P f^2 \circ \psi\Big) - \Big(d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i), d\psi(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big) \\
&= \Big(\tau(\varphi), \tau(\psi)\Big) + 2\Big(0, d\psi(grad_M(\ln f \circ \phi))\Big) \\
&- e(\psi)\Big(grad_N f^2 \circ \varphi, \frac{1}{f^2} grad_P f^2 \circ \psi\Big)
\end{aligned}$$

□

De la proposition 5.1.1, on déduit la remarque suivante

Remarque 5.1.1. *Si la fonction de la distortion est constante, alors le champ de tension de ϕ est donné par :*

$$\tau(\phi) = \Big(\tau(\varphi), \tau(\psi)\Big)$$

donc ϕ est harmonique (resp biharmonique) si et seulement si φ et ψ sont harmoniques (resp biharmoniques).

Dons le cas où ϕ est l'inclusion, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 5.1.2. *Le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{aligned}
\phi : (M, g) &\longrightarrow (M \times_f N, G_f) \\
x &\longmapsto (\varphi(x), y_0) \quad \textit{avec } y_0 \textit{ fixe sur } N
\end{aligned}$$

est donné par :

$$\tau(\phi) = (\tau(\varphi), 0)$$

Donc ϕ est harmonique (resp biharmonique) si et seulement si φ est harmonique (resp biharmonique)

Preuve :
Appliquant la proposition 5.1.1, pour ψ est constante remarquons que

$$d\psi(grad_M(\ln f \circ \phi)) = 0 \quad et \quad e(\psi) = 0$$

on a

$$\tau(\phi) = (\tau(\varphi), 0).$$

□

De même, nous avons

Proposition 5.1.3. *Le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (N,h) & \longrightarrow & (M \times_f N, G_f) \\ y & \longmapsto & (x_0, \psi(y)) \end{array}$$

est donné par :

$$\tau(\phi) = (0, \tau(\psi)) + 2\Big(0, d\psi(grad_N(\ln f \circ \psi))\Big) - e(\psi)\Big(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2 \circ \psi\Big)$$

Preuve : Grâce à la proposition 5.1.1, pour φ est constante remarquons que

$$grad_M(\ln f \circ \varphi) = 0 \quad et \quad \tau(\varphi) = 0$$

on a

$$\tau(\phi) = (0, \tau(\psi)) + 2\Big(0, d\psi(grad_M(\ln f \circ \psi))\Big) - e(\psi)\Big(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2 \circ \psi\Big)$$

□

Remarque 5.1.2. *D'aprés la proposition 5.1.3, Si $\psi = Id_N$ on a $e(\psi) = \frac{n}{2}$. Par suite, le champ de tension de ϕ est donné par*

$$\tau(\phi) = -\frac{n}{2}(grad_M f^2, 0) + (2-n)(0, grad_N \ln f)$$

On peut présenter quelques cas particuliers comme suit

1. *Si la dimension de la variété N égal à 2 on a $\tau(\phi) = -(grad_M f^2, 0)$, donc ϕ harmonique si et seulement si f dépend seulement de y.*
2. *Si $f \in C^\infty(M)$ on a $\tau(\phi) = -\frac{n}{2}(grad_M f^2, 0)$.*
3. *Si $f \in C^\infty(N)$ on a $\tau(\phi) = (2-n)(0, grad_N \ln f)$,donc ϕ harmonique si et seulement si $dim N = 2$.*

De plus, si φ est une application conforme, nous montrons le résultat suivant.

Proposition 5.1.4. *Soit φ une application conforme de la dilatation λ, alors le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M,g) & \longrightarrow & (M \times_f M, G_f) \\ x & \longmapsto & (\varphi(x), \varphi(x)) \end{array}$$

est donné par

$$\begin{aligned} \tau(\phi) = {} & (2-m)\Big(d\varphi(grad \ln \lambda), d\varphi(grad \ln \lambda)\Big) + 2(0, d\varphi(grad \ln f \circ \varphi)) \\ & - \frac{m}{2}\lambda^2\Big(grad f^2, \frac{1}{f^2} grad f^2\Big) \circ \varphi \end{aligned}$$

En effet, φ est une application conforme de dilatation λ, donc le champ de tension est donné par

$$\tau(\varphi) = (2-m)d\varphi(grad \ln \lambda)$$

d'aprés la formule (5.1) du proposition 5.1.1. nous obtenons

$$\begin{aligned}\tau(\phi) &= (2-m)\Big(d\varphi(grad \ln \lambda), d\varphi(grad \ln \lambda)\Big) + 2(0, d\varphi(grad \ln f \circ \varphi)) \\ &- \frac{m}{2}\lambda^2\Big(gradf^2, \frac{1}{f^2}gradf^2\Big) \circ \varphi\end{aligned} \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.3. *Si f est une fonction constante, alors le champ de tension de ϕ est donné par*

$$\tau(\phi) = (2-m)\Big(d\varphi(grad \ln \lambda), d\varphi(grad \ln \lambda)\Big)$$

Corollaire 5.1.1. *L'application ϕ est harmonique si et seulement si la dilatation λ est constante où la dimension de la variété M est égale à 2.*

D'une manière analogue, nous étudions le cas ou la variété de départ est munie d'une métrique tordue généralisé.

5.1.2 L'harmonicité de l'application $\phi : (M \times_f N, G_f) \longrightarrow (P, k)$

Soit ϕ une application définie par.

$$\begin{aligned}\phi : (M \times_f N, G_f) &\longrightarrow (P, k) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y)\end{aligned}$$

On note ϕ_N l'application définie par :

$$\begin{aligned}\phi_N : (N, h) &\longrightarrow (P, k) \\ y &\longmapsto \phi_N(y) = \phi(x, y)\end{aligned}$$

et ϕ_M définie comme

$$\begin{aligned}\phi_M : (M, g) &\longrightarrow (P, k) \\ x &\longmapsto \phi_M(x) = \phi(x, y).\end{aligned}$$

Pour $X \in \mathcal{H}(M), Y \in \mathcal{H}(N)$, on a $\begin{cases} d\phi(X, 0) = d\phi_M(X) \\ d\phi(0, Y) = d\phi_N(Y) \end{cases}$.

En calculant le champ de tension de cette application, nous avons trouvé le résultat suivant.

Proposition 5.1.5. *Le champ de tension de l'application ϕ est donné par*

$$\tau(\phi) = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{1}{f^2}\Big(\tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f)\Big) \tag{5.3}$$

$$\tag{5.4}$$

Preuve :
Soit $(E_i)_i$ (resp$(F_j)_j$) une base orthonormale locale de champ de vecteur sur la variété (M,g) (resp(N,h)), alors $(U_1 ... U_{m+n})$ est une base orthonormale locale de la variété produit tordu généralisé. où $U_i = (E_i, 0)$ si $i = 1, ..., m$ et $U_i = \frac{1}{f}(0, F_i)$ si $i = m+1, ..., m+n$. Par définition, nous avons.

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= tr_{G_f} \nabla d\phi \\
&= \nabla d\phi(U_i, U_i) \\
&= \underbrace{\Big(\nabla_{(E_i,0)} d\phi(E_i, 0) - d\phi(\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i, 0))\Big)}_{T_1} \\
&\quad + \underbrace{\Big(\frac{1}{f}\nabla_{(0,F_i)} \frac{1}{f} d\phi(0, F_i) - d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)} \frac{1}{f}(0, F_i))\Big)}_{T_2}
\end{aligned}$$

En développant terme à terme cette équation, nous avons :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \nabla_{(E_i,0)} d\phi(E_i, 0) - d\phi(\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i, 0)) \\
&= \nabla^P_{d\phi_M(E_i)} d\phi_M(E_i) - d\phi(\nabla^M_{E_i} E_i, 0) \\
&= \nabla^P_{d\phi_M(E_i)} d\phi_M(E_i) - d\phi_M(\nabla^M_{E_i} E_i) \\
&= \tau(\phi_M)
\end{aligned}$$

et

$$T_2 = \underbrace{\frac{1}{f}\nabla_{(0,F_i)} \frac{1}{f} d\phi(0, F_i)}_{T_{2-1}} - \underbrace{d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)} \frac{1}{f}(0, F_i))}_{T_{2-2}}.$$

Remarquons que,

$$\begin{aligned}
T_{2-1} &= \frac{1}{f}\Big[F_i(\frac{1}{f}) d\phi(0, F_i) + \frac{1}{f}\nabla_{(0,F_i)} d\phi(0, F_i)\Big] \\
&= \frac{1}{f}\Big[-\frac{1}{f^2}F_i(f) d\phi_N(F_i) + \frac{1}{f}\nabla_{d\phi_N(F_i)} d\phi_N(F_i)\Big] \\
&= -\frac{1}{f^2} d\phi_N(grad_N \ln f) + \frac{1}{f^2}\nabla_{d\phi_N(F_i)} d\phi_N(F_i)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T_{2-2} &= d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)} \frac{1}{f}(0, F_i)) \\
&= \frac{1}{f} d\phi\Big(F_i(\frac{1}{f})(0, F_i) + \frac{1}{f}(0, \nabla^N_{F_i} F_i) + \frac{2}{f}F_i(\ln f)(0, F_i) - \frac{n}{2f}(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2)\Big) \\
&= d\phi\Big(-\frac{1}{f^2}(0, grad_N \ln f) + \frac{1}{f^2}(0, \nabla^N_{F_i} F_i) + \frac{2}{f^2}(0, grad_N \ln f) - \frac{n}{2f^2}(grad_M f^2, \frac{1}{f^2} grad_N f^2)\Big) \\
&= \frac{1}{f^2} d\phi_N(\nabla^N_{F_i} F_i) - n d\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{1-n}{f^2} d\phi_N(grad_N \ln f).
\end{aligned}$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} T_2 &= T_{2-1} - T_{2-2} \\ &= \frac{1}{f^2}\tau(\phi_N) + nd\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{n-2}{f^2} d\phi_N(grad_N \ln f) \end{aligned}$$

Finalement, nous déduisons que :

$$\tau(\phi) = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{1}{f^2}\Big(\tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f)\Big) \tag{5.5}$$

□

Remarque 5.1.4. *:*

1. *Si f est une fonction de clase C^∞ sur M on a*

$$\tau(\phi) = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{1}{f^2}\tau(\phi_N).$$

2. *Si f est une fonction de clase C^∞ sur N on a*

$$\tau(\phi) = \tau(\phi_M) + \frac{1}{f^2}\Big(\tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f)\Big).$$

Comme applications, nous allons calculer les champs de tension de la première et de la deuxième projection.

Proposition 5.1.6. *Le champ de tension de la deuxieme projection η définie par :*

$$\begin{aligned} \eta : (M \times_f N, G_f) &\longrightarrow (N, h) \\ (x, y) &\longmapsto \eta(x, y) = y \end{aligned}$$

est donné par :

$$\tau(\eta) = \frac{n-2}{f^2} grad_N \ln f$$

Preuve :

En utilisant la formule (5.5), et remarquons que pour $\phi = \eta$, ϕ_M est constant et $\phi_N = Id_N$, donc

$$\tau(\eta) = \frac{n-2}{f^2} grad_N \ln f$$

□

Corollaire 5.1.2. *La deuxieme projection est harmonique (resp biharmonique) si et seulement si $dimN = 2$ où $f \in C^\infty(M)$.*

Proposition 5.1.7. *Le champ de tension de la première projection π définie par*

$$\begin{array}{rcl} \pi : (M \times_f NG_f) & \longrightarrow & (M, g) \\ (x, y) & \longmapsto & \pi(x, y) = x \end{array}$$

est donné par :

$$\tau(\pi) = n.grad_M \ln f$$

la démonstration est analogue à celle de la proposition 5.1.6.

Corollaire 5.1.3. *La premieré projection est harmonique si et seulement si $f \in C^\infty(N)$.*

De plus, si ϕ est une application à variables séparables, alors on arrive au résultat suivant

Proposition 5.1.8. *Soit ϕ est une application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f NG_f) & \longrightarrow & (P, k) \\ & \longmapsto & \phi(x, y) = l_1(x).l_2(y) \end{array}$$

avec l_1, l_2 Vérifie

$$\begin{tikzcd} M \times_{f^2} N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "l_1 \circ \pi"'] & M \arrow[d, "l_1"] \\ & P \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times_{f^2} N \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "l_2 \circ \eta"'] & N \arrow[d, "l_2"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Un calcul simple nous permet de déterminer le champ de tension des application ϕ , $l_1 \circ \pi$ et $l_2 \circ \eta$. Plus précisément, nous avons

$$\tau(\phi) = l_2\Big(\tau(l_1) + ndl_1(grad_M \ln f)\Big) + \frac{l_1}{f^2}\Big(\tau(l_2) + (n-2)dl_2(grad_N \ln f)\Big)$$

$$\tau(l_1 \circ \pi) = \tau(l_1) \circ \pi + ndl_1(grad_M \ln f) \circ \pi$$

$$\tau(l_2 \circ \eta) = \frac{1}{f^2}\Big(\tau(l_2) \circ \eta + (n-2)dl_2(grad_N \ln f) \circ \eta\Big)$$

Preuve :

D'aprés la formule (5.3) de la proposition 5.1.5, ϕ est une application à variables séparables $\phi = l_1.l_2$, alors

$$\begin{array}{ll} \tau(\phi_M) = l_2\tau(l_1) & d\phi)M(grad_M \ln f) = l_2 dl_1(grad_M \ln f) \\ \tau(\phi_N) = l_1\tau(l_2) & d\phi)N(grad_M \ln f) = l_1 dl_2(grad_M \ln f) \end{array}$$

donc

$$\tau(\phi) = l_2\Big(\tau(l_1) + ndl_1(grad_M \ln f)\Big) + \frac{l_1}{f^2}\Big(\tau(l_2) + (n-2)dl_2(grad_N \ln f)\Big)$$

Comme cas particulier, nous obtenons le corollaire suivant

Corollaire 5.1.4. *:*

1. *Si l_1 est harmonique, alors $l_1 \circ \pi$ harmonique si et seulement si f est de clace C^∞ sur N.*
2. *Si l_2 est harmonique, alors $l_2 \circ \eta$ harmonique si et seulement si f est de clace C^∞ sur M où $dimN = 2$.*

Dans le cas où l'application ϕ dépend seulement de la première variable, nous montrons le résultat suivant

Proposition 5.1.9. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (P, k)$ une application régulière, le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (P, k) \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}$$

est donné par

$$\tau(\phi) = \tau(\varphi) + n.d\varphi(grad_M \ln f).$$

De plus, Si φ est une application conforme de la dilatation λ, alors on a :

$$\tau(\phi) = (2 - m)d\varphi(grad_M \ln \lambda) + n.d\varphi(grad_M \ln f)$$

Preuve :
Grâce la l'équation (5.3) de la proposition 5.1.5 si $\phi(x, y) = \varphi(x)$ donc
$\phi_M = \varphi$ et ϕ_N est constante alors $\tau(\phi_N) = 0$, $d\phi_N(grad_N \ln f) = 0$ d'où

$$\tau(\phi) = \tau(\varphi) + n.d\varphi(grad_M \ln f).$$

Si φ est conforme de dilatation λ, alors $\tau(\varphi) = (2 - m)d\varphi(grad_M \ln \lambda)$, donc

$$\tau(\phi) = d\varphi(grad_M \ln(\lambda^{2-m}.f^n))$$

$\square$

Corollaire 5.1.5. *Si φ est une application conforme de la dilatation λ, alors ϕ est harmonique si et seulement si $f^n.\lambda^{2-m}$ dépend seulement de y*

De même, si ϕ dépend seulement de la deuxième variable, on a :

Proposition 5.1.10. *Soit $\psi : (N, h) \longrightarrow (P, k)$ une application defférentiable, le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (P, k) \\ (x, y) & \longmapsto & \psi(y) \end{array}$$

est donné par

$$\tau(\phi) = \frac{1}{f^2}\Big(\tau(\psi) + (n - 2).d\psi(grad_N \ln f)\Big)$$

Si ψ est une application conforme de la dilatation μ on a :

$$\tau(\phi) = \frac{(n - 2)}{f^2}\Big(d\psi(grad_N \ln f) - d\psi(grad_N \ln \mu)\Big)$$

Preuve :
D'apres la formule (5.3) de la proposition 5.1.5 si $\phi(x,y) = \psi(y)$ donc
$\phi_N = \psi$ et ϕ_M est constante, alors $\tau(\phi_M) = 0$, $d\phi_M(grad_N \ln f) = 0$ d'où

$$\tau(\phi) = \frac{1}{f^2}(\tau(\psi) + (n-2).d\psi(grad_N \ln f).$$

Si ψ est conforme de dilatation μ, alors $\tau(\psi) = (2-n)d\varphi(grad_N \ln \mu)$, donc

$$\tau(\phi) = d\psi(grad_M \ln(\frac{f}{\mu}))$$

□

Corollaire 5.1.6. *:*
Si ψ est une application conforme de la dilatation μ, alors ϕ est harmonique si et seulement si $(\frac{f}{\lambda})^{n-2}$ dépend seulement de x.

Exemple 5.1.1. *Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times_f (\mathbb{R}^n - \{0\}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n - \{0\}) \qquad n \geq 3 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x}{\mid x \mid^2}. \end{array}$$

On sait que l'application $\varphi : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{x}{\mid x \mid^2}$$

est une application conforme de la dilation $\lambda = \frac{1}{|x|^2}$.
Il suit que ϕ est harmonique si et seulement si

$$f^n = \alpha(y) \mid x \mid^{2(2-n)}$$

Enfin comme cas général, nous allons étudier l'harmonicité des applications qui agissent entre deux variétés où chacune est munie d'une métrique tordue généralisée.

5.1.3 L'harmonicité de l'application $\phi : (M \times_f N, G_f) \longrightarrow (P \times_\alpha B, Q_\alpha)$

Soit ϕ une application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (P \times_\alpha B, Q_\alpha) \\ (x,y) & \longmapsto & (\varphi(x), \psi(y)) \end{array}$$

telle que $\varphi : (M,g) \longrightarrow (P,k)$ et $\psi : (N,h) \longrightarrow (B,q)$ sont deux applications régulières et $G_f = g + f^2 h$ la métrique sur $M \times_f N$ avec $f \in C^\infty(M \times N)$ et $Q_\alpha = k + \alpha^2 q$ la métrique sur $P \times_\alpha B$. avec $\alpha \in C^\infty(P \times B)$

Proposition 5.1.11. *Le champ de tension de l'application ϕ est donné par*

$$\begin{aligned}\tau(\phi) &= (\tau(\varphi) + n(d\varphi(grad_M \ln f), 0) \\ &+ \frac{1}{f^2}\Big[(0, \tau(\psi)) + (n-2)(0, d\psi(grad_N \ln f)) \\ &+ 2(0, d\psi(grad_N(\ln\alpha \circ \psi))) - e(\psi)(grad_P \alpha^2, \frac{1}{\alpha^2} grad_B \alpha^2)\Big]\end{aligned} \tag{5.6}$$

Preuve :

Soient $(E_i)_i$ (resp$(F_j)_j$) une base orthonormale locale de champ de vecteur sur la variété (M,g) (resp(N,h)), est $\overline{\nabla}$(resp$\widetilde{\nabla}$) désigne la connexion sur la variété (M,g) (resp(N,h))

$$\begin{aligned}\tau(\phi) &= tr_{G_f} \nabla d\phi \\ &= \underbrace{\Big(\nabla^{\phi}_{(E_i,0)} d\phi(E_i,0) - d\phi(\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0))\Big)}_{D_1} \\ &\quad + \underbrace{\Big(\frac{1}{f}\nabla^{\phi}_{(0,F_i)}\frac{1}{f} d\phi(0,F_i) - d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)}\frac{1}{f}(0,F_i))\Big)}_{D_2}\end{aligned}$$

En développant les termes de cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}D_1 &= \nabla_{(E_i,0)} d\phi(E_i,0) - d\phi(\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0)) \\ &= \widetilde{\nabla}_{(d\varphi(E_i),0)}(d\varphi(E_i),0) - d\phi(\nabla^M_{E_i}E_i, 0) \\ &= (\nabla^P_{d\varphi(E_i)} d\varphi(E_i), 0) - (d\varphi(\nabla^M_{E_i}E_i), 0) \\ &= (\tau(\varphi), 0)\end{aligned}$$

et

$$D_2 = \underbrace{\frac{1}{f}\nabla_{(0,F_i)}\frac{1}{f} d\phi(0,F_i)}_{D_{2-1}} - \underbrace{d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)}\frac{1}{f}(0,F_i))}_{D_{2-2}}$$

$$\begin{aligned}D_{2-1} &= \frac{1}{f}\Big[F_i(\frac{1}{f}) d\phi(0,F_i) + \frac{1}{f}\widetilde{\nabla}_{(0,d\psi(F_i))}(0, d\psi(F_i))\Big] \\ &= -\frac{1}{f^2}(0, d\psi(grad_N \ln f)) + \frac{1}{f^2}\Big[(0, \nabla^B_{d\psi(F_i)} d\psi(F_i)) + 2d\psi(F_i)(\ln\alpha)(0, d\psi(F_i)) \\ &- \frac{1}{2} q(d\psi(F_i), d\psi(F_i))(grad_P \alpha^2, \frac{1}{\alpha^2} grad_B \alpha^2)\Big] \\ &= -\frac{1}{f^2}(0, d\psi(grad_N \ln f)) + \frac{1}{f^2}\Big[(0, \nabla^B_{d\psi(F_i)} d\psi(F_i)) + 2(0, d\psi(grad_N(\ln\alpha \circ \psi))) \\ &- e(\psi)(grad_P \alpha^2, \frac{1}{\alpha^2} grad_B \alpha^2)\Big]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_{2-2} &= d\phi(\frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)}\frac{1}{f}(0,F_i)) \\
&= d\phi(\frac{1}{f}\Big[F_i(\frac{1}{f})(0,F_i) + \frac{1}{f}\overline{\nabla}_{(0,F_i)}(0,F_i))\Big] \\
&= \frac{1}{f^2}d\phi\Big((0, grad_N \ln f) + (0, \nabla^N_{F_i}F_i) - \frac{n}{2}(grad_M f^2, \frac{1}{f^2}grad_N f^2)\Big) \\
&= \frac{1}{f^2}\Big[(0, d\psi(\nabla^N_{F_i}F_i)) + (1-n)(0, d\psi(grad_N \ln f))\Big] - n(d\varphi(grad_M \ln f), 0)
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
D_2 &= D_{2-1} - D_{2-2} \\
&= \frac{1}{f^2}\Big[(0,\tau(\psi)) + (n-2)(0, d\psi(grad_N \ln f)) - e(\psi)(grad_P\alpha^2, \frac{1}{\alpha^2}grad_B\alpha^2) \\
&+ 2(0, d\psi(grad_N(\ln\alpha\circ\psi)))\Big] + n(d\varphi(grad_M \ln f), 0)
\end{aligned}$$

Finalement, il suit que :

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= (\tau(\varphi), 0) + n(d\varphi(grad_M \ln f), 0) \\
&+ \frac{1}{f^2}\Big[(0,\tau(\psi)) + (n-2)(0, d\psi(grad_N \ln f)) \\
&+ 2(0, d\psi(grad_N(\ln\alpha\circ\psi))) - e(\psi)(grad_P\alpha^2, \frac{1}{\alpha^2}grad_B\alpha^2)\Big]
\end{aligned}$$

□

Dons le cas particulier où φ et ψ sont les applications identités, nous obtenons

Proposition 5.1.12. *Le champ de tension de l'application ϕ définie par :*

$$\begin{array}{rcl}
\phi = Id_{f,\alpha} : (M\times_f N, G_f) & \longrightarrow & (M\times_\alpha N, G_\alpha) \\
(x,y) & \longmapsto & (x,y)
\end{array}$$

$$\tau(\phi) = n\Big(grad_M \ln f - \frac{1}{2f^2}grad_M\alpha^2, 0\Big) + \frac{n-2}{f^2}\Big(0, grad_N \ln(\frac{f}{\alpha})\Big) \tag{5.7}$$

En effet si φ et ψ sont les applications identités, alors d'apres la formule (5.6) de la proposition 5.1.11 on a

$$\begin{aligned}
\tau(\phi) &= n(grad_M \ln f, 0) + \frac{1}{f^2}\big[(n-2)(0, grad_N \ln f) + 2(0, grad_N \ln\alpha) \\
&\quad -\frac{n}{2}(grad_M\alpha^2, 0) - n(0, grad_N \ln\alpha)\big] \\
&= n(grad_M(f^2-\alpha^2), 0) + \frac{n-2}{f^2}(0, grad_N \ln\frac{f}{\alpha})
\end{aligned}$$

Box

De l'équation (5.7), nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.7. *L'application $\phi = Id_{f,\alpha}$ est harmonique si et seulement si* $\begin{cases} f^2 - \alpha^2 = \beta_1(y) \\ \wedge \\ \frac{f}{\alpha} = \beta_2(x) \end{cases}$

Proposition 5.1.13. *Si φ et ψ sont deux applications harmoniques, alors les champs de tensions des applications*

$$\begin{array}{rcl} \phi_1 : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (M \times N, G) \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi(x), \psi(y)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \phi_2 : (M \times N, G) & \longrightarrow & (M \times_\alpha N, G_\alpha) \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi(x), \psi(y)) \end{array}$$

sont donnés par

$$\tau(\phi_1) = n(d\varphi(grad_M \ln f), 0) + \frac{(n-2)}{f^2}(0, d\psi(grad_N \ln f))$$

$$\tau(\phi_2) = 2(0, d\psi(grad_N(\ln \alpha \circ \psi))) - e(\psi)(grad_M \alpha^2, \frac{1}{\alpha^2} grad_N \alpha^2)$$

Proposition 5.1.14. *Soit φ (respψ) une application conforme de la dilation λ (resp μ), alors le champ de tension de l'application ϕ définie par*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (P \times B, Q) \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi(x), \psi(y)) \end{array}$$

est donné par

$$\begin{aligned} \tau(\phi) = & ((2-m)d\varphi(grad_M \ln \lambda) + nd(\varphi(grad_M \ln f)), 0) \\ & + \frac{2-n}{f^2}\Big[(0, d\psi(grad_N ln \frac{\mu}{f}))\Big]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

preuve :

φ ,ψ sont deux applications conformes de la dilation λ, μ respectivement, alors

$$\begin{array}{rcl} \tau(\varphi) & = & (2-m)d\varphi(grad_M \ln \lambda) \\ \tau(\psi) & = & (2-n)d\psi(grad_N \ln \lambda) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \tau(\phi) & = & (2-m)(d\varphi(grad_M \ln \lambda), 0) + n(d\varphi(grad_M \ln f), 0) \\ & & \frac{1}{f^2}((0, d\psi(grad_N \ln \mu)) + (0, d\psi grad_N \ln f)) \\ & = & (d\varphi(grad_M \ln(\lambda^{2-m}.f^n)), o) + \frac{2-n}{f^2}(0, d\psi(grad_N \ln(\frac{\mu}{f}))) \end{array}$$

$\square$

Corollaire 5.1.8. *ϕ est harmonique si et seulement si* $\begin{cases} f^n\lambda^{2-m} = \alpha(y) \\ \wedge \\ \frac{\mu}{f} = \beta(x) \end{cases}$ *ce que donne la condition suivante*

$$\alpha(y)\beta(x)^n = \lambda^{2-m}\mu^n$$

Comme exemple, nous avons.

Exemple 5.1.2. *Soit l'application*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times_f (\mathbb{R}^n - \{0\}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \\ (x, y) & \longmapsto & (\frac{x}{\mid x \mid^2}, \frac{y}{\mid y \mid^2}) \end{array}$$

donc ϕ est harmonique si et seulement si

$$\beta(x) = \mid x \mid^{\frac{2(2-m)}{n}} \ , \ \alpha(y) = \frac{1}{\mid y \mid^{2n}}$$

Maintenant, nous allons passer à l'étudie de la biharmonicite de ces applications, cette étude passe par le calcul du champ de bitension de chaque application

5.2 Les applications biharmoniques sur les variétés produit tordu généralisé

Comme premier résultat, nous montre le théorème suivant.

Théorème 5.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n. Les champs de tention et de bitension de l'application ϕ define par :*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M, g) & \longrightarrow & (M \times_f M, G_f) \\ x & \longmapsto & (x, x) \end{array}$$

$$(i)\tau(\phi) = -\frac{m}{2}(gradf^2, 0) + (4 - m)(0, grad \ln f)$$

$$\begin{aligned} (ii)\tau_2(\phi) = mf^2 \Big[& (grad(\Delta(\ln f)) + 2Rici(grad \ln f)) + (6 - m)\Delta(\ln f) grad \ln f, 0) \\ & + \frac{5}{2}(0, grad(\mid grad \ln f \mid^2)) + \frac{4 - mf^2}{2}(grad(\mid grad \ln f \mid^2), 0)\Big] \\ & + (m - 4)\Big[(0, grad(\Delta(\ln f)) + 2Rici(grad \ln f)) - 4\Delta(\ln f) grad \ln f) \\ & + \frac{m - 9}{2}(0, grad(\mid grad \ln f \mid^2)) + (4 - m) \mid grad \ln f \mid^2 (0, grad \ln f)\Big] \\ & - f^2 \mid grad \ln f \mid^2 \Big[(m^2(2f^2 - 1) + 2m - 8)(grad \ln f, 0) + 2m(m - 6)(0, grad \ln f)\Big] \end{aligned} \tag{5.9}$$

preuve :
(i) D'aprés la proposition 5.1.1, le champ de tension est donné par

$$\tau(\phi) = -\frac{m}{2}(gradf^2, 0) + (4-m)(0, grad\ln f)$$

(ii) soit (E_i) une base orthonormale sur la variété M , par définition du champ de bitension nous avons

$$\tau_2(\phi) = -tr_g(\nabla^{\phi})^2\tau(\phi) - tr_g\bar{R}(\tau(\phi), d\phi)d\phi, \tag{5.10}$$

un premier calcul donne

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{E_i}(gradf^2, 0) = f^2\Big[&2E_i(\ln f)(grad\ln f, 0) + (\nabla_{E_i}grad\ln f, 0)\\ &+ \mid grad\ln f\mid^2 (0, E_i)\Big]\end{aligned}\tag{5.11}$$

et

$$\begin{aligned}\nabla^{\phi}_{E_i}(0, grad\ln f) = {}& E_i(\ln f)[(0, grad\ln f) - f^2(grad\ln f, 0)]\\ &+ (0, \nabla_{E_i}grad\ln f) + \mid grad\ln f\mid^2 (0, E_i)\end{aligned}\tag{5.12}$$

posons

$$V = 2E_i(\ln f)(grad\ln f, 0) + (\nabla_{E_i}grad\ln f, 0) + \mid grad\ln f\mid^2 (0, E_i)$$

et

$$W = E_i(\ln f)[(0, grad\ln f) - f^2(grad\ln f, 0)] + (0, \nabla_{E_i}grad\ln f) + \mid grad\ln f\mid^2 (0, E_i)$$

d'où,

$$\begin{aligned}\bar{V} = \nabla^{\phi}_{E_i}f^2V = f^2\Big[&(grad(\Delta(\ln f)) + Rici(grad\ln f), 0) + 2\Delta(\ln f)(grad\ln f, 0)\\ &+ 2(grad(\mid grad\ln f\mid^2), 0) + \frac{3}{2}(0, grad(\mid grad\ln f\mid^2))\\ &+ \mid grad\ln f\mid^2 [(7-m)(0, grad\ln f) + (4-mf^2)(grad\ln f, 0)\Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{W} = \nabla^{\phi}_{E_i}W = {}& 3(0, grad(\mid grad\ln f\mid^2)) + (0, grad(\Delta(\ln f)) + Rici(grad\ln f))\\ &+ (5-m)\mid grad\ln f\mid^2 (0, grad\ln f) - f^2\Delta(\ln f)(grad\ln f, 0)\\ &+ f^2\mid grad\ln f\mid^2 \Big[(3-m)(grad\ln f, 0) + (0, grad\ln f) + \frac{1}{2}(grad(\mid grad\ln f\mid^2), 0)\Big].\end{aligned}$$

Finalement

$$tr_g(\nabla^{\phi})^2\tau(\phi) = -m\bar{V} + (4-m)\bar{W}. \tag{5.13}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\overline{R}((gradf^2, 0), (E_i, E_i))(E_i, E_i) = {}& f^2(Rici(grad\ln f), 0)\\ &- f^2(0, grad(\mid grad\ln f\mid^2) + \mid grad\ln f\mid^2 grad\ln f)\\ &+ mf^2(\frac{1}{2}grad(\mid grad\ln f\mid^2) + \mid grad\ln f\mid^2 grad\ln f, 0)\end{aligned}\tag{5.14}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{R}((0, grad\ln f), (E_i, E_i))(E_i, E_i) &= (0, Rici(grad\ln f)) \\ &+ f^2(\frac{1}{2}grad(\mid grad\ln f\mid^2) + \mid grad\ln f\mid^2 grad\ln f, 0) \\ &- 4\Delta(\ln f)(0, grad\ln f) + \frac{3-m}{2}(0, grad(\mid grad\ln f\mid^2)) \\ &+ ((1-m)f^2 - 1)\mid grad\ln f\mid^2 (0, grad\ln f)\end{aligned} \tag{5.15}$$

En substituant les équations (5.13),(5.14) et (5.15) dans l'équation (5.10), on obtient l'équation (5.9) □

Proposition 5.2.1. *Soient $(M, g), (N, h)$ deux variétés Riemanniennes de dimension m, n respectivement. Le champ de bitension de l'inclusion $\bar{\phi}$ définie par :*

$$\begin{aligned}\bar{\phi} : (N, h) &\longrightarrow (M\times_f N, G_f) \\ y &\longmapsto (x_0, y)\end{aligned}$$

est :

$$\begin{aligned}\tau_2(\bar{\phi}) = &-\frac{n^2 f^4}{2}(grad_M(\mid grad_M\ln f\mid^2), 0) + (n-2)(0, grad_N(\Delta_N(\ln f)) + 2Rici(grad_N\ln f)) \\ &- f^2\Big[2n^2f^2\mid grad_M\ln f\mid^2 - 4\Delta_N(\ln f) + (n^2-4n-4)\mid grad_N\ln f\mid^2\Big](grad_M\ln f, 0) \\ &+ \Big[(2-n)^2\mid grad_N\ln f\mid^2 - 2(2-n)\Delta_N(\ln f) + 2n(n-4)f^2\mid grad_M\ln f\mid^2\Big](0, grad_N\ln f) \\ &+ nf^2\Big[(0, grad_N(\mid grad_M\ln f\mid^2) + (grad_M\ln f)(\star(\ln f))(0, \star)\Big] \\ &+ \frac{(n-2)(6-n)}{2}(0, grad_N(\mid grad_N\ln f\mid^2)\end{aligned}$$

preuve :
D'apre la remarque 5.1.2, on a :

$$\tau(\bar{\phi}) = -nf^2(grad_M\ln f, 0) + (2-n)(0, grad_N\ln f).$$

Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une bas orthonormale sur N telle que pour tout $i, j = 1, ..., n$, on a $\nabla_{F_i}F_j = 0$ en un point $y_0 \in N$.En calculant en ce points, on a.

$$\tau_2(\bar{\phi}) = -tr_h(\nabla^{\bar{\phi}})^2\tau(\bar{\phi}) - tr_h\overline{R}(\tau(\bar{\phi}), d\bar{\phi})d\bar{\phi}.$$

Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned}\nabla^{\bar{\phi}}_{F_i}\tau(\bar{\phi}) = &-nf^2\Big[2F_i(\ln f)(grad_M\ln f, 0) + \mid grad_M\ln f\mid^2 (0, F_i)\Big] \\ &+ (2-n)\Big[(0, \nabla^N_{F_i}grad_N\ln f) + \mid grad_N\ln f\mid^2 (0, F_i) \\ &- f^2F_i(\ln f)(grad_M\ln f, 0)\Big]\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
tr_h(\nabla^{\bar{\phi}})^2\tau(\bar{\phi}) = -nf^2\Big[&(0, grad_N(\mid grad_M \ln f \mid^2) + (6-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 grad_N \ln f) \\
&+ (2-n)\big(0, tr_h(\nabla^N)^2 grad_N \ln f + 2grad_N(\mid grad_N \ln f \mid^2)\big) \\
&+ (2-n)\Big[(2-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta(\ln f)\Big](0, grad_N \ln f) \\
&- f^2\Big[4\Delta_N(\ln f) - (nf)^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - (n^2-4n-4) \mid grad_N \ln f \mid^2\Big].
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\overline{R}((f^2 grad \ln f, 0), (0, F_i))(0, F_i) = &-nf^4(\frac{1}{2} grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2) + \mid grad_M \ln f \mid^2 grad_M \ln f, 0) \\
&+ f^2 grad_M \ln f(F_i(\ln f))(0, F_i)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{R}((0, grad \ln f), (0, F_i))(0, F_i) = &(0, Ricci^N(grad_N \ln f) + \frac{2-n}{2} grad_N(\mid grad_N \ln f \mid^2)) \\
&+ \Big[(1-n)f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f)\Big](0, grad_N \ln f)
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.2. *D'aprés la proposition 5.2.1 et si la dimension de la variété N est égale à 2, on a :*

$$\tau(\bar{\phi}) = -2f^2(grad_M \ln f, 0)$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_2(\bar{\phi}) = &-2f^4(grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2), 0) + 8f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 (0, grad_N \ln f) \\
&- f^2\Big[8f^2 \mid grad_M \ln f \mid^2 - 4\Delta_N(\ln f) - 8 \mid grad_N \ln f \mid^2\Big](grad_M \ln f, 0) \\
&+ 2f^2(0, grad(\mid grad_M \ln f \mid^2))
\end{aligned}$$

Remarque 5.2.1. *:*

1. *Si la fonction de la distorsion $f \in C^\infty(M)$, alors le champs de tension et de bitension est donné par :*

$$\tau(\bar{\phi}) = -nf^2(grad_M \ln f, 0)$$

et

$$\tau_2(\bar{\phi}) = -2f^4\big(grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2) - 4 \mid grad_M \ln f \mid^2 grad_M \ln f, 0\big).$$

2. *Si $f \in C^\infty(N)$ on a :*

$$\tau(\bar{\phi}) = (2-n)(0, grad_N \ln f)$$

$$\begin{aligned}
\tau_2(\bar{\phi}) = &(n-2)\big(0, grad_N(\Delta(\ln f)) + 2Ricci(grad_N \ln f)\big) \\
&+ (n-2)\Big[(2-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - 2\Delta_N(\ln f)\Big](0, grad_N \ln f) \\
&+ \frac{(n-2)(6-n)}{2}(0, grad_N(\mid grad_N \ln f \mid^2))
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Regardons maintenant le cas où la variété de départ est munie d'une métrique tordue généralisée

5.2.1 L'biharmonicité de l'application $\phi : (M \times_f N, G_f) \longrightarrow (P, k)$

En utilisant la proposition 5.1.5 on a :

$$\tau(\phi) = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f) + \frac{1}{f^2}\Big(\tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f)\Big)$$

Pour étudier la biharmonicite de cette application, nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 5.2.1. *Pour tout* $\lambda \in C^\infty(M \times N)$ *et* $\sigma \in \Gamma(\phi^{-1}TP)$ *on a :*

$$\begin{aligned} J_\phi(\lambda\sigma) &= \lambda J_{\phi_M}(\sigma) + \Delta_M(\lambda)\sigma + 2\nabla^{\phi_M}_{grad_M \lambda}\sigma \\ &+ n\Big[(grad_M \ln f)(\lambda)\sigma + \lambda\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}\sigma\Big] \\ &+ \frac{1}{f^2}\Big[\lambda J_{\phi_N}(\sigma) + \Delta_N(\lambda)\sigma + 2\nabla^{\phi_N}_{grad_N \lambda}\sigma\Big] \\ &+ \frac{n-2}{f^2}\Big[(grad_N \ln f)(\lambda)\sigma + \lambda\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}\sigma\Big] \end{aligned} \tag{5.17}$$

preuve :

Soient $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, (resp $(F_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$) une bas orthonormale sur M, (resp N)

$$J_\phi(\lambda\sigma) = tr_{G_f}(\nabla^\phi)^2(\lambda\sigma) + trG_f R^p(\lambda\sigma, d\phi)d\phi$$

$$\begin{aligned} tr_{G_f}(\nabla^\phi)^2(\lambda\sigma) &= \Big[\nabla^\phi_{(E_i,0)}\nabla^\phi_{(E_i,0)}\lambda\sigma - \nabla^\phi_{\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0)}\lambda\sigma\Big] \\ &+\Big[\frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\lambda\sigma - \nabla^\phi_{\overline{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_j)}\frac{1}{f}(0,F_j)}\lambda\sigma\Big] \end{aligned}$$

or

$$\nabla^\phi_{(E_i,0)}\nabla^\phi_{(E_i,0)}\lambda\sigma = \Delta_M(\lambda)\sigma + 2\nabla^{\phi_M}_{grad_M\lambda}\sigma + \lambda\nabla^{\phi_M}_{E_i}\nabla^{\phi_M}_{E_i}\sigma$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\lambda\sigma = \frac{1}{f^2}\Big[&\Delta_N(\ln f)\sigma - (grad_N \ln f)(\lambda)\sigma - \lambda\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}\sigma \\ &+ 2\nabla^{\phi_N}_{grad_N\lambda}\sigma + \lambda\nabla^{\phi_N}_{F_j}\nabla^{\phi_N}_{F_j}\sigma\Big], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\nabla^\phi_{\overline{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_j)}\frac{1}{f}(0,F_j)}\lambda\sigma = \frac{n-1}{f^2}&\Big[(grad_N \ln f)(\lambda)\sigma + \lambda\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}\sigma\Big] \\ &+ n\Big[(grad_M \ln f)(\lambda)\sigma + \lambda\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}\sigma\Big], \end{aligned}$$

et

$$-\overline{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_j)}\frac{1}{f}(0,F_j) = \frac{1-n}{f^2}(0, grad_N \ln f) - n(grad_M, 0)$$

par définition du tenseur de courbure, on a,

$$trG_f R^p(\lambda\sigma, d\phi)d\phi = \lambda trgR^p(\sigma, d\phi_M)d\phi_M + \frac{\lambda}{f^2}trhR^p(\sigma, d\phi_N)d\phi_N.$$

□

Proposition 5.2.3. *Le champ de bitension de l'application ϕ est donné par :*

$$\begin{aligned}
\tau_2(\phi) &= \tau_2(\phi_M) - nJ_{\phi_M}(d\phi_M(grad_M \ln f)) - n\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}V \\
&+ \frac{1}{f^4}\Big[\tau_2(\phi_N) - (n-2)J_{\phi_N}(d\phi_N(grad_N \ln f)) - (n-6)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}W \\
&- \big(2(4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - 2\Delta_N(\ln f)\big)W\Big] \\
&- \frac{1}{f^2}\Big[J_{\phi_N}(V) + (n-2)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}V + J_{\phi_M}(W) + (n-4)\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}W \\
&+ \big(2(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - 2\Delta_M(\ln f)\big)W\Big]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

avec $V = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f)$ et $W = \tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f)$.

preuve :
posons

$$V = \tau(\phi_M) + nd\phi_M(grad_M \ln f)$$

et

$$W = \tau(\phi_N) + (n-2)d\phi_N(grad_N \ln f).$$

En utilisant la formule du champ de tension de l'application ϕ de la proposition 5.1.5, le lemme 5.2.1 et le fait que

$$\tau_2(\phi) = -J_\phi(\tau(\phi))$$

nous avons

$$\begin{aligned}
J_\phi(V) \quad &= \quad \tau_2(\phi_M) + nJ_{\phi_M}(d\phi_M(grad_M \ln f)) - n\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}V \\
&+ \frac{1}{f^2}J_{\phi_N}(V) - \frac{n-2}{f^2}\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}V
\end{aligned}$$

est pour $\lambda = \frac{1}{f^2}$ et $\sigma = W$,

$$\begin{aligned}
J_\phi(\frac{1}{f^2}W) = &\frac{1}{f^4}\Big[\tau_2(\phi_N) + (n-2)J_{\phi_N}(d\phi_N(grad_N \ln f)) - (n-6)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}W \\
&- 2\big((4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f)\big)W\Big] \\
&+ \frac{1}{f^2}\Big[J_{\phi_M}(W) - (n-4)\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}W\Big] \\
&- \frac{2}{f^2}\Big[(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_M(\ln f)\Big]W
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.2.2. *D'aprés la proposition 5.2.3 en prenant $f \in C^\infty(M)$, alors le champ bi-tension de ϕ est égal à :*

$$\begin{aligned}\tau_2(\phi) = \tau_2(\phi_M) + \frac{1}{f^4}\tau_2(\phi_N) - nJ_{\phi_M}(d\phi_M(grad_M \ln f)) - n\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}V - \frac{n-4}{f^2}\nabla^{\phi_M}_{grad_M \ln f}\tau(\phi_N)\\ - \frac{1}{f^2}\Big[J_{\phi_N}(V) + J_{\phi_M}(\tau(\phi_N)) + \big(2(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - 2\Delta_M(\ln f)\big)\tau(\phi_N)\Big]\end{aligned}$$

♦ *Si $f \in C^\infty(N)$, alors le champ bitension de ϕ est donné par :*

$$\begin{aligned}\tau_2(\phi) &= \tau_2(\phi_M) - \frac{1}{f^2}\Big[J_{\phi_M}(W) + J_{\phi_N}(\tau(\phi_M)) + (n-2)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}\tau(\phi_M)\Big]\\ &+ \frac{1}{f^4}\Big[\tau_2(\phi_N) - (n-2)J_{\phi_N}(d\phi_N(grad_N \ln f)) - (n-6)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f}W\\ &- (2(4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - 2\Delta_N(\ln f))W\Big]\end{aligned}$$

Proposition 5.2.4. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (P, k)$ une application régulière, alors le champ de bitension de l'application ϕ définie par*

$$\begin{aligned}\phi : (M \times_f N, G_f) &\longrightarrow (P, K)\\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = \varphi(x)\end{aligned}$$

est donné par :

$$\tau_2(\phi) = \tau_2(\varphi) - nJ_\varphi(d\varphi(grad_M \ln f)) - n\nabla^\varphi_{grad_M \ln f}V$$

Si φ est une application conforme de la dilation λ, on a :

$$\tau_2(\phi) = -J_\varphi(d\varphi(grad_M \ln(\lambda^{2-m}f^n))) - n\nabla^\varphi_{grad_M \ln f}d\varphi(grad_M \ln(\lambda^{2-m}f^n)) \tag{5.19}$$

En ce qui concerne la preuve on utilise le lemme précédent.

Théorème 5.2.2. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (P^m, k)$ $(m \geqslant 3)$ une application conforme de la dilatation λ, alors ϕ est biharmonique si et seulement si la dilatation λ et la fonction de distorsion f satisfaient*

$$\begin{aligned}grad(\Delta \ln \lambda^{2-m}f^n) + 2Ricci^M(grad \ln \lambda^{2-m}f^n) + 2n(2-m)\nabla_{grad \ln f}grad \ln \lambda\\ +4n\nabla_{grad \ln \lambda}grad \ln f + \frac{n^2}{2}grad(\mid grad \ln f \mid^2) + \frac{(6-m)(2-m)}{2}grad(\mid grad \ln \lambda \mid^2)\\ +\big[(2-m)^2 \mid grad \ln \lambda \mid^2 - n^2 \mid grad \ln f \mid^2 + 2\Delta(\ln \lambda^{2-m}f^n)\big]grad \ln \lambda\\ +2n\big[(2-m) \mid grad \ln \lambda \mid^2 + nd \ln f(grad \ln \lambda)\big]grad \ln f = 0.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Pour la démonstration du Théorème 5.2.2, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 5.2.2. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application conforme de la dilatation λ, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\begin{aligned}h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) = \lambda^2 df(grad \ln \lambda)g(X, Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y)\\ + \lambda^2[X(\ln \lambda)Y(f) - X(f)Y(\ln \lambda)]\end{aligned} \tag{5.21}$$

Preuve du Lemme 5.2.2.
pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a

$$\begin{aligned}
h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) - h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) &= X(\lambda^2 g(gradf, Y)) - h(d\varphi(gradf), \nabla_X d\varphi(Y)) \\
&- Y(\lambda^2 g(gradf, X)) + h(d\varphi(gradf), \nabla_Y d\varphi(X)) \\
&= X(\lambda^2) g(gradf, Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) \\
&+ \lambda^2 g(gradf, \nabla_X Y) - Y(\lambda^2) g(gradf, X) \\
&- \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) - \lambda^2 g(gradf, \nabla_Y X) \\
&- \lambda^2 g(gradf, [X, Y])
\end{aligned}$$

d'ou,

$$h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) \;=\; h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) + 2\lambda^2 [X(\ln\lambda) Y(f) - Y(\ln\lambda) X(f)]$$

comme

$$\begin{aligned}
h(\nabla_Y d\varphi(gradf), d\varphi(X)) &= h(\nabla d\varphi(gradf, Y), d\varphi(X)) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) \\
&= h(\nabla_{gradf} d\varphi(Y), d\varphi(X)) - \lambda^2 g(\nabla_{gradf} Y, X) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) \\
&= gradf(\lambda^2 g(X, Y)) - h(d\varphi(Y), \nabla_{gradf} d\varphi(X)) \\
&- \lambda^2 g(\nabla_{gradf} Y, X) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) \\
&= 2\lambda^2 df(grad\lambda) g(X, Y) + \lambda^2 g(\nabla_{gradf} X, Y) + \lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) \\
&- h(d\varphi(Y), \nabla d\varphi(X, gradf)) - \lambda^2 g(Y, \nabla_{gradf} X) \\
&= 2\lambda^2 df(grad\lambda) g(X, Y) + 2\lambda^2 g(\nabla_Y gradf, X) - h(d\varphi(Y), \nabla_X d\varphi(gradf))
\end{aligned}$$

il suit que,

$$\begin{aligned}
h(\nabla_X d\varphi(gradf), d\varphi(Y)) \;&=\; \lambda^2 df(grad\ln\lambda) g(X, Y) + \lambda^2 g(\nabla_X gradf, Y) \\
&\quad + \lambda^2 [X(\ln\lambda) Y(f) - X(f) Y(\ln\lambda)]
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 5.2.2. □

Lemme 5.2.3. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application conforme de la dilatation λ alors pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, nous avons*

$$h(< \nabla d\varphi, \nabla df >, d\varphi(X)) = 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - \lambda^2 \Delta(f) g(grad\ln\lambda, X) \qquad (5.22)$$

où

$$< \nabla d\varphi, \nabla df > = \nabla d\varphi(e_i, e_j) \nabla df(e_i, ej)$$

$(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *étant une base orthonormale sur M.*

Preuve du Lemme 5.2.3.
pour tout $X \in \Gamma(TM)$, nous avons

$$\begin{aligned}
< \nabla d\varphi, \nabla df > \;&=\; \nabla d\varphi(e_i, e_j) \nabla df(e_i, ej) \\
&=\; \nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i} gradf)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T &= h(\nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i} gradf), d\varphi(X)) \\
&= h(\nabla_{e_i} d\varphi(\nabla_{e_i} gradf), d\varphi(X)) - h(d\varphi(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} gradf), d\varphi(X)) \\
&= e_i(\lambda^2 g(\nabla_{e_i} gradf, X)) - \lambda^2 g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} gradf, X) - h(d\varphi(\nabla_{e_i} gradf), \nabla_{e_i} d\varphi(X)) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) + \lambda^2 g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} gradf, X) + \lambda^2 g(\nabla_{e_i} gradf, \nabla_{e_i} X) \\
&- h(d\varphi(\nabla_{e_i} gradf), \nabla d\varphi(e_i, X)) - \lambda^2 g(\nabla_{e_i} gradf, \nabla_{e_i} X) - \lambda^2 g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} gradf, X) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - X(\lambda^2\Delta(f)) + h(\nabla_X d\varphi(\nabla_{e_i} gradf), d\varphi(e_i)) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - X(\lambda^2\Delta(f)) + h(\nabla d\varphi(X, \nabla_{e_i} gradf), d\varphi(e_i)) + \lambda^2 g(\nabla_X\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - X(\lambda^2\Delta(f)) + \lambda^2 g(\nabla_X\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\
&+ h(\nabla_{\nabla_{e_i} gradf} d\varphi(X), d\varphi(e_i)) - \lambda^2 g(\nabla_{\nabla_{e_i} gradf} X, e_i) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - X(\lambda^2\Delta(f)) + \lambda^2 g(\nabla_X\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\
&+ \nabla_{e_i} gradf(\lambda^2 g(X, e_i)) - h(d\varphi(X), \nabla_{\nabla_{e_i} gradf} d\varphi(e_i)) - \lambda^2 g(\nabla_{\nabla_{e_i} gradf} X, e_i) \\
&= 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - X(\lambda^2\Delta(f)) + \lambda^2 g(\nabla_X\nabla_{e_i} gradf, e_i) \\
&- h(d\varphi(X), \nabla d\varphi(e_i, \nabla_{e_i} gradf)) + \nabla_{e_i} gradf(\lambda^2) g(X, e_i) \\
2T &= 4\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - 2\lambda^2\Delta(f) g(grad\ln\lambda, X)
\end{aligned}
$$

donc

$$T = 2\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda} gradf, X) - \lambda^2\Delta(f) g(grad\ln\lambda, X) \tag{5.23}$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 5.2.3. □

Preuve de Théorème 5.2.2.

D'aprés la formule 5.19, le champ de bitension de l'application ϕ,égale $\tau_2(\phi) = -J_\varphi(d\varphi(grad_M \ln(\mu))) - n\nabla^\varphi_{grad_M \ln f} d\varphi(grad_M \ln(\mu))$ où $\mu = \lambda^{2-m} f^n$ donc ϕ biharmonique si et seulement si

$$k(\tau_2(\phi), d\phi(X)) = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(T(M \times N))$

$$
\begin{aligned}
k(\tau_2(\phi), d\phi(X)) \quad &= \quad k(J_\varphi(d\varphi(grad_M \ln(\mu))), d\phi(X)) \\
&\quad + nk(\nabla^\varphi_{grad_M \ln f} d\varphi(grad_M \ln(\mu)), d\phi(X))
\end{aligned}
$$

d'aprés la formule [voir la [23]. la formule (2.47)]

$$
\begin{aligned}
J_\varphi(d\varphi(grad_M \ln(\mu))) \quad &= \quad d\varphi(grad\Delta(\ln\mu)) + 2d\varphi(Ricci^M(grad\ln\mu)) \\
&\quad + \nabla_{grad\ln\mu}\tau(\varphi) + 2 < \nabla d\varphi, \nabla d\ln\mu >
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
k(\tau_2(\phi), d\phi(X)) = &\underbrace{k(d\varphi(grad\Delta(\ln\mu)), d\phi(X))}_{T_1} + 2\underbrace{k(d\varphi(Ricci^M(grad\ln\mu)), d\phi(X))}_{T_2} \\
&+ \underbrace{k(\nabla_{grad\ln\mu}\tau(\varphi), d\phi(X))}_{T_3} + \underbrace{2k(< \nabla d\varphi, \nabla d\ln\mu >, d\phi(X))}_{T_4} \\
&+ \underbrace{nk(\nabla^\varphi_{grad_M \ln f} d\varphi(grad_M \ln(\mu)), d\phi(X))}_{T_5}
\end{aligned}
$$

donc

$$\begin{aligned} T_1 &= \lambda^2 g(grad\Delta(\ln\mu), X_1) \\ &= \lambda^2 g(grad\Delta(\ln\lambda^{2-m}f^n), X_1) \end{aligned}$$

et

$$T_2 = 2\lambda^2 g(Ricci^M(grad\ln\lambda^{2-m}f^n), X_1)$$

En utilisant l'égalité (5.21) du lemme 5.2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} T_3 &= k(\nabla_{grad\ln\mu}\tau(\varphi), d\phi(X)) \\ &= (2-m)k(\nabla_{grad\ln\mu}d\varphi(grad\ln\lambda), d\phi(X)) \\ &= \lambda^2(2-m) \mid grad\ln\lambda\mid^2 g(grad\ln\mu, X_1) + n(2-m)g(\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda) \\ &\quad + \frac{(2-m)^2}{2}g(grad(\mid grad\ln\lambda\mid^2), X_1). \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité (5.22) du lemme 5.2.3, nous déduisons que

$$\begin{aligned} T_4 &= 2k(<\nabla d\varphi, \nabla d\ln\mu>, d\phi(X)) \\ &= 4n\lambda^2 g(\nabla_{grad\ln\lambda}grad\ln f, X_1) + 2(2-m)\lambda^2 g(grad(\mid grad\ln\lambda\mid^2), X_1) \\ &\quad -2\lambda^2\Delta(\ln\mu)g(grad\ln\lambda, X_1) \end{aligned}$$

Enfin, l'équation (5.21) du lemme 5.2.2 nous donne :

$$\begin{aligned} T_5 = \lambda^2\Big[&n[(2-m)\mid dgrad\ln\lambda\mid^2 + 2d\ln f(grad\ln\lambda)]g(grad\ln f, X_1) + \frac{n^2}{2}g(grad(\mid grad\ln f\mid^2), X_1) \\ &n(2-m)g(\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda, X_1) - n^2\mid grad\ln f\mid^2 g(grad\ln\lambda, X_1), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &grad(\Delta\ln\lambda^{2-m}f^n) + 2Ricci^M(grad\ln\lambda^{2-m}f^n) + 2n(2-m)\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda \\ &+4n\nabla_{grad\ln\lambda}grad\ln f + \frac{n^2}{2}grad(\mid grad\ln f\mid^2) + \frac{(6-m)(2-m)}{2}grad(\mid grad\ln\lambda\mid^2) \\ &+\big[(2-m)^2\mid grad\ln\lambda\mid^2 - n^2\mid grad\ln f\mid^2 + 2\Delta(\ln\lambda^{2-m}f^n)\big]grad\ln\lambda \\ &+2n\big[(2-m)\mid grad\ln\lambda\mid^2 + nd\ln f(grad\ln\lambda)\big]grad\ln f = 0 \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 5.2.2. □

Corollaire 5.2.1. *D'aprés le Théoréme 5.2.2, Si φ est une application biharmonique non harmonique. Donc ϕ biharmonique si et seulement si la dilatation λ et la fonction de distorsion f vérifient l'équation suivante*

$$\begin{aligned} &grad(\Delta\ln f) + 2Ricci^M(grad\ln f) + 2(2-m)\nabla_{grad\ln f}grad\ln\lambda \\ &+2(2-m)\mid grad\ln\lambda\mid^2 grad\ln f - 2\Delta(\ln f)grad\ln\lambda \\ &+2nd\ln f(grad\ln\lambda)grad\ln f - n\mid grad\ln f\mid^2 grad\ln\lambda \\ &+4\nabla_{grad\ln\lambda}grad\ln f + \frac{n}{2}grad(\mid grad\ln f\mid^2) = 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Exemple 5.2.1. *Nous considérons l'inversion* $\varphi : \mathbb{R}^m - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$ *définie par*

$$\varphi(x) = \frac{x}{\mid x \mid^2}$$

L'inversion φ *est conforme de dilatation* λ, *égale à*

$$\lambda(x) = \frac{1}{\mid x \mid^2} = \frac{1}{r^2}$$

φ *est biharmonique non harmonique si et seulement si* $m = 4$ *(voir [23])*

Dons la suite, on prend m=4, alors

$$\begin{array}{rcl} \phi : (\mathbb{R}^4 - \{0\}) \times_f N^n & \longrightarrow & (\mathbb{R}^4 - \{0\}) \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x}{\mid x \mid^2} \end{array}$$

telle que $\ln f$ *est radiale* $\ln f = \alpha(r)$ *et* $\alpha \in C^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$, f *depend seulement de* x

$$\begin{array}{rcl} grad \ln f & = & \alpha' \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \mid grad \ln f \mid^2 & = & (\alpha')^2 \\ grad(\mid grad \ln f \mid^2) & = & 2\alpha'\alpha'' \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \Delta \ln f & = & \alpha'' + \dfrac{3}{r}\alpha' \\ grad(\Delta \ln f) & = & (\alpha''' + \dfrac{3}{r}\alpha'' - \dfrac{3}{r^2}\alpha')\dfrac{\partial}{\partial r} \end{array}$$

posons $\ln \lambda = \beta(r)$.

Donc ϕ *biharmonique si et seulement si* α *satisfait l'equation différentielle ordinaire suivente.*

$$\alpha''' + n\alpha'\alpha'' - \frac{1}{r}\alpha'' - \frac{15}{r}\alpha' - \frac{2n}{r}(\alpha')^2 = 0 \tag{5.25}$$

Finalement ϕ *biharmonique si et seulement si*

$$f(x) = |x|^{-\frac{4}{n}}$$

Proposition 5.2.5. *Soit* $\psi : (N, h) \longrightarrow (P, k)$ *une application régulière, alors le champ de bitension de l'application* ϕ *définie par*

$$\begin{array}{rcl} \phi : (M \times_f N, G_f) & \longrightarrow & (P, K) \\ (x, y) & \longmapsto & \phi(x, y) = \psi(y) \end{array}$$

est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \tau_2(\phi) & = & +\dfrac{1}{f^4}\Big[\tau_2(\psi) - (n-2)J_\psi(d\psi(grad_N \ln f)) - (n-6)\nabla^\psi_{grad_N \ln f} W \\ & & -\big(2(4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - 2\Delta_N(\ln f)\big)W\Big] \\ & & -\dfrac{2}{f^2}\Big[(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_M(\ln f)\Big]W \end{array}$$

Si ψ est une application conforme de la dilation μ, on a

$$\tau_2(\phi) = -\frac{n-2}{f^4}\Big[J_\psi(d\psi(grad_N(\ln\frac{f}{\mu}))) + (n-6)\nabla^{\phi_N}_{grad_N \ln f} d\psi(grad_N(\ln\frac{f}{\mu}))$$
$$+ \big(2(4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - 2\Delta_N(\ln f)\big) d\psi(grad_N(\ln\frac{f}{\mu}))\Big]$$
$$- \frac{2(n-2)}{f^2}\Big[(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_M(\ln f)\Big] d\psi(grad_N(\ln\frac{f}{\mu}))$$

Proposition 5.2.6. *Le champ de tension et le champ de bitension de la de la deuxième projection η sont donnés par :*

$$\tau(\eta) = \frac{n-2}{f^2} grad_N \ln f$$

et

$$\tau_2(\eta) = -\frac{n-2}{f^4}\Big[grad_N(\Delta_N(\ln f)) + 2Ricci(grad_N)\ln f + \frac{n-6}{2} grad_N(\mid grad_N \ln f \mid^2)$$
$$+ \big((4-n) \mid grad_N \ln f \mid^2 - \Delta_N(\ln f)\big) grad_N \ln f\Big]$$
$$- \frac{2(n-2)}{f^2}\Big[(2-n) \mid grad_M \ln f \mid^2 - \Delta_M(\ln f)\Big] grad_N \ln f$$

Proposition 5.2.7. *De même pour la première projection π, nous avons*

$$\begin{aligned} \tau(\pi) &= n.grad_M \ln f \\ \tau_2(\pi) &= -\frac{n^2}{2} grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2) - n.grad_M(\Delta_M(\ln f)) - 2n.Ricci(grad_M \ln f) \end{aligned}$$

En effet

D'aprés la propostion 5.2.4 le champ de bitension de l'application ϕ est donné par

$$\tau_2(\phi) = \tau(\varphi) - nJ_\varphi(grad_M \ln f) - n\nabla^\varphi_{grad_M \ln f} V.$$

Si $\varphi = \pi$ on a

$$\begin{aligned} \tau_2(\pi) &= -nJ_\pi(grad_M \ln f) - n^2\nabla_{grad_M \ln f} grad_M \ln f \\ &= -\frac{n^2}{2} grad_M(|grad_M \ln f|^2) - ngrad_M(\Delta(\ln f)) - 2nRicc^M(grad_M \ln f) \end{aligned}$$

Proposition 5.2.8. *Le champ de bitension de l'application définie par :*

$$\begin{aligned} \phi : (M \times_f N, G_f) &\longrightarrow (M \times N, G) \\ (x, y) &\longmapsto (x, \psi(y)) \end{aligned}$$

avec ψ est harmonique, est donné par

$$\begin{aligned} \tau_2(\phi) = &-\Big(ngrad_M(\Delta(\ln f)) + 2nRicci^M(grad_M \ln f) + \frac{n^2}{2} grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2), 0\Big) \\ &+ \frac{n-2}{f^4}\Big(0, J_\psi(d\psi(grad_N \ln f)) - (n-6)\nabla^\psi_{grad_N \ln f} d\psi(grad_N \ln f)\Big) \\ &+ \frac{2(n-2)}{f^4}\Big[\Delta_N(\ln f) + f^2\Delta_M(\ln f) + (n-4) \mid grad_N \ln f \mid^2 \\ &+ (n-2) \mid grad_M \ln f \mid^2\Big](0, d\psi(grad_N \ln f)) \end{aligned} \tag{5.26}$$

preuve :
En effet, le champ de tension de ϕ est donné par

$$\tau(\phi) = n(grad_M \ln f, 0) + \frac{n-2}{f^2}(0, d\psi(grad_N \ln f)).$$

Soit $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$,(resp $(F_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$) une base orthonormale sur M,(resp N). Par définition, nous avons

$$J_\phi(\tau(\phi)) \quad = \quad -tr_{G_f}(\nabla^\phi)^2(\tau(\phi)) - trG_f\widetilde{R}(\tau(\phi), d\phi)d\phi$$

$$\begin{aligned} tr_{G_f}(\nabla^\phi)^2(\tau(\phi)) &= \Big[\nabla^\phi_{(E_i,0)}\nabla^\phi_{(E_i,0)}\tau(\phi) - \nabla^\phi_{\overline{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0)}\lambda\sigma\Big] \\ &+ \Big[\frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\frac{1}{f}\nabla^\phi_{(0,F_j)}\tau(\phi) - \nabla^\phi_{\overline{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_j)}\frac{1}{f}(0,F_j)}\tau(\phi)\Big] \\ &= \Big(ntr_g(\nabla^M)^2 grad_M \ln f + \frac{n^2}{2}grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2), 0\Big) \\ &+ \frac{n-2}{f^4}\Big(0, tr_h(\nabla^\psi)^2 d\psi(grad_N \ln f) + (n-6)\nabla^\psi_{grad_N \ln f} d\psi(grad_N \ln f)\Big) \\ &- \frac{2(n-2)}{f^4}\Big[\Delta_N(\ln f) + f^2\Delta_M(\ln f) + (n-4) \mid grad_N \ln f \mid^2 \\ &+ (n-2) \mid grad_M \ln f \mid^2 \Big](0, d\psi(grad_N \ln f)) \end{aligned}$$

et par définition du tenseur de courbure de la variété prduit, on a :

$$trG_f\widetilde{R}(\tau(\phi), d\phi)d\phi = n(Ricci^M(grad_M \ln f), 0) + \frac{n-2}{f^4}(0, tr_h R^N(d\psi(grad_N \ln f)))$$

□

Corollaire 5.2.2. *D'aprés la formule (5.26), si la variété N est une surface ($dimN = 2$), alors le champ de bitension de l'application ϕ est donné par*

$$\tau_2(\phi) = -2\Big(grad_M(\Delta(\ln f)) + 2Ricci^M(grad_M \ln f) + grad_M(\mid grad_M \ln f \mid^2), 0\Big) \tag{5.27}$$

Exemple 5.2.2. *Soit la application ϕ défine par*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n - \{0\} \times_f N^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \times N^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, \psi(y)) \end{aligned}$$

le champ de tension et le champ de bitension sont donnés par les équations suivantes

$$\tau(\phi) = 2(grad \ln f, 0)$$
$$\tau_2(\phi) = 2(grad(\Delta(\ln f)) + grad(\mid gard \ln f \mid^2))$$

d'où ϕ biharmonique non harmonique si et sulemet si $\begin{cases} \Delta(\ln f) + \mid gard \ln f \mid^2 = \alpha(y) \\ grad \ln f \neq 0 \end{cases}$.

Si $\ln f$ est radiale $\ln f = \alpha(r)$ où $r = |x|$, alors ϕ est biharmonique non harmonique si et sulemet si

$$f(x) = |x|^{2(2-n)}$$

Bibliographie

[1] P. Baird, Harmonic maps between Riemannain manifolds. Clarendon Press Oxford 2003.

[2] P. Baird, A. Fardoun, S. Ouakkas, Conformal and semi-conformal biharmonic maps, Annals of global analysis and geometry, Voll 34,(2008),403-414

[3] A. Balmus, Biharmonic Maps and Submanifoldss, Bucharest. Differential Geometry Dinamical Systems Monogrphs, 2009

[4] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Biharmonic maps between warped product manifolds. Journal of Geometry and Physics 57 (2007) 449Ű466.ScienceDirect.

[5] P, Dombrowski, On thee Geometry of Tangent Bundle, J. Rrine Angew. Math .210(1962),70-80.

[6] M. P .Do Carmo, Riemannian Geometry, Boston,(1993).

[7] J. Eells, J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. AmerJ.maths. 86(1964).

[8] J. Eells, L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 16(1978), 1-68.

[9] J.Eells, L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc .20(1988),385-524.

[10] B. Fuglede, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 28 (1978) 107-144.

[11] S. Gudmundsson. An Introduction to Riemannian Geometry. Lund University, 20 Decemer 2001.

[12] T. Ishihara, Harmonic sections of tangent bundles. J. Math. Tokushima Univ .13(1979),23-27.

[13] S. Kobayashi and K. Nomizu, Fondation of Differential Geometry, Vol. I. II. Intersciense, New York-London 1963.

[14] J. M. Lee, Differentiel Geometry Analysis and physics, Universitext (2000).

[15] P. Malliavin, Géometry differentielle intrinseque, Collection Enseignement des SClences, 14, Hermann paris 1972.

[16] T. Masson, Géométrie Différentiel, Groupes et Algèbres de Lie, Fibrés et connexion. Version du 10 Novembere 2003.

[17] P. W.Michor, Topic in Differentiel Geometry, The University of Vienna 2001.

[18] J. Milnor, Morse Theory, Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, Princeton 1963.

[19] A. Mohamed Cherif, Application harmonique et Biharmonique sur lrs variété produits. Memoire de Magister,Université de Mascara 2010.

[20] R. NASRI. Sur la Courbure des variété Riemanniennes produits. Sciences et Technologie $A - N°24$, Décember. (2006), pp. 15-20.

[21] C. Oniciuc, Pseudo-Riemannian metrics on tangent bundle and harmonic problems, Bull. Belg. Soc .7(2000),443-454.

[22] S. Ouakkas, Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications,

[23] S. Ouakkas, Géométrie conforme associée aux applications biharmoniques et Théorèmes de Liouville, Thése de Doctorat,2008, Unversité de Sidi Belabbes.

[24] S .Ouakkas, Nasri, M.Djaa, 1. On the f-harmonic and f-biharmonic maps, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 10, Number 1, 2010, Pages 11-27 Mars 2010.

[25] F. Paulin, Géométrie différentielle élémentaire, Ecole Normale Supereiure, 2006-2007.

[26] S. Y. Perktas, E. Kilic. Biharmonic maps between doubly warped product manifolds. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. 15, No. 2, 2010.

[27] P. Petersen, Riemanniann Geometry (Second Edition), 1-70.Mathematics Subject Classification (2000) springer

[28] P. Pansu. Géométrie différentielle. 27 octobre 2005.

[29] S. Sternberg. Semi-Riemann Geometry and General Relativity . September 24,2003,185-192.

[30] M. svnsson, Polynomyial Harmonic Morphisms, Examensarbete 20 poäng Lunds Universitet Novembre 1998.

[31] L. Todjihounde, On the biharmonic maps, Journal of Applied Mathematics and Decsion Sciences, November 2006.

[32] K. Zegga, Morphismes Harmoniques, Mémoire de magister, Université de Mascara 2008.