République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Stabilité et instabilité des réseaux des files d'attentes à deux stations avec cinq classes

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse stochastique, Statistiques des processus et Applications

par

Lakhdari Adel

Soutenue le 02 Juin 2016 devant le jury composé de :

Mlle : Maref Fouzia	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Mr : Kadi Mokhtar	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
Mlle : Benziadi Fatima	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mme : Benzatout Ouahiba	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Encadreur

REMERCIEMENT [1]

Avant tout je remercie, le dieu qui ma donner la puissance et la volonté, la patiance pour accomplire ce travail.

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, d'un grand nombre de personnes, je souhaite ici les en remercier.

Je tien d'abord à remercier très chaleureusement mon encadreur de mémoire de fin d'études Mme **Ouahiba Benzatout**, pour ses précieux conseils et son orientation tout au long de mes recherches.

Tous les membres de jury d'avoir participé à la commission des examinateurs en vue d'une évaluation prompte et à sa juste valeur.

Je remercie mes chers parents qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.

Les conseils que j'apprent, la patience, la confiance qui je m'accompagner dans la réalisation de mon travail de recherche.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études. $\grave{A}$ ma familles et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je tien à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je dédie ce modeste travail à : mes parents.

Tous mes oncles et tantes, tous mes cousins et cousines.

Tous mes enseignants de département de mathématiques.

Tous mes camarades de promotion 2015 /2016.

1. Saida, 2016

Table des matières

0.1 Introduction

Ce travail est consacré à l'étude de la stabilité et l'instabilité des files d'attente dans le cas aléatoire, car ici nous traitons le cas déterministe et le cas probabiliste, il s'agit des systèmes composés de deux stations, chaque station est équipée d'un seul serveur fonctionnant avec la discipline avec non préemption et d'une file d'attente de longueur non bornée devant chaque station. Le cheminement d'un client d'une station à l'autre est représenté par une chaîne de Markov et aucune distinction n'est faite entre les caractéristiques probabilistes des clients, la loi de probabilité conditionnelle des X_i alors la propriété suivante :

$$\mathbb{P}\{X_{i+1}/X_1, X_2, ..., X_i\} = \mathbb{P}\{X_{i+1}/X_i\}$$

pour $i \geq 1$ quelconque, pour représenter le départ vers "l'extérieur" du réseau. Ainsi nous admettons des systèmes ouverts. Toujours dans le cas probabiliste, les temps de service à chaque file seront indépendants enter eux. Possède la propriété intéressante d'avoir une solution stationnaire. C'est pourquoi il est très souvent utilisé pour la modélisation des systèmes informatiques ou de télé comunication.

Le chapitre 1 est consacré à l'étude des chaînes de Markov qui ont large champ d'applications dans la modélisation de systémes réels et qui se caractérisent par la propriété de mémoire à court terme.

La file d'attente GI/GI/1 est analysée dans le chapitre 2. Le cadre naturel de l'étude est celui de marches aléatoires. La factorisation de Wiener-Hopf est démontrée et utilisée pour déterminer la loi du maximum d'une marche aléatoire. Cela permet d'obtenir la loi à l'équilibre des variables de cette file d'attente : temps d'attente, nombre de clients,...

Dans le chapitre 3, on prouve que la stabilité de réseau de files d'attente à 2-stations avec 5-classes de clients, fonctionnant sous une discipline de service (SBP) avec non préemption, dépend des distributions des interarrivées et des temps de service. En particulier, notre résultat montre que les conditions des moyennes d'interarrivées et de service ne sont pas suffisantes pour déterminer la stabilité d'un réseau de files d'attente, sous une discipline particulière. Nous montrons que quand toutes les distributions sont exponentielles, le réseau est instable dans le sens que, avec une probabilité 1, le nombre total des clients dans le réseau tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. Nous prouvons que le même réseau avec des interarrivées et des temps de service déterministes est stable. Finalement, nous prouvons que le même réseau, avec des interarrivées et des temps de service déterministe est instable quand il suit la discipline de service (SBP) avec préempotion.

Chapitre 1

Chaîne de Markov

1.1 Défintion et premières propriétés

Dans tout ce chapitre, E est un espace fini ou dénombrable, qui est muni de la tribu $\mathcal{P}(E)$. Une matrice stochastique sur E est une famille $(Q(x,y);\ x,y \in E)$ de nombres réels satisfaisant les deux conditions :

(i) $0 \leq Q(x,y)$ pour tous $x,y \in E$.

(ii) pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{y\in E} Q(x,y) = 1$.

Cette notion est équivalente à celle de probabilité de transition de E dans E : si on pose

$$\nu(x,A) = \sum_{y\in A} Q(x,y),\ x \in E,\ A \subset E.$$

On voit que ν est une probabilité de transition de E dans E, et inversement si on part d'une telle probabilité de transition ν, la formule $\mathrm{Q}(x,y) = \nu(x,y)$ définit une matrice stochastique sur E. Pour tout entier $n \geq 1$, on peut définit $Q_n = (Q)^n$: $Q_1 = Q$, et ensuite par récurrence,

$$Q_{n+1}(x,y) = \sum_{z\in E} Q_n(x,y)Q(z,y).$$

On vérifie que Q_n est encore une matrice stochastique sur E. On pose aussi

$$Q_0(x,y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}}.$$

Pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$, on notera Qf la fonction définie par

$$Qf(x) = \sum_{y\in E} Q(x,y)f(y).$$

Définition 1.1.1. *Soit Q une matrice stochastique sur E, et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus aléatoire à valeurs dans E. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition Q si pour tout entier $n \geq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} connaissant $(X_0, X_1, ..., X_n)$ est $Q(X_n, y)$. De manière équivalente, cela signifie que*

$$P(X_{n+1} = y/X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = Q(x_n, y),$$

pour tous $x_0, x_1, ..., x_n, y \subseteq E$ tel que $P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) > 0$.

Proposition 1.1.1. *Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov de matrice de transition Q ssi, pour tout $n \geq 0$ et pour tous $x_0, x_1, ..., x_n, y \subseteq E$,*

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2)\cdots Q(x_{n-1}, x_n).$$

En particulier, on a si $P(X_0 = x_0) > 0$,

$$P(X_n = x_n/X_0 = x_0) = Q(x_0, x_n).$$

Preuve . Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition Q la formule donnée est immédiate par récurrence sur n en écrivant :

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) &= P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) \\ &\times P(X_{n+1} = x_{n+1}/X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \end{aligned}$$

Inversement, si la formule donnée est vraie, on vérifie immédiatement que

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = y/X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) &= \frac{P(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)\cdots Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_n, y)}{P(X_0 = x_0)Q(x_0, x_1)\cdots Q(x_{n-1}, x_n)} \\ &= Q(x_n, y). \end{aligned}$$

La dernière asertion s'abtient en remarquant que

$$Q(x_0, x_n) = \sum_{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\in E} Q(x_0, x_1)Q(x_1, x_2)\cdots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Proposition 1.1.2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de transition Q.*

(i) Pour tout $n \geq 0$ et toute fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_0, X_1, ..., X_n] = \mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_n] = Qf(X_n).$$

Plus généralement, pour tout sous-ensemble fini $\{i_1, ..., i_k\}$ de $\{0, 1, ..., n-1\}$, on a

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_{i_1}, X_1, ..., X_{i_k}, X_n] = Qf(X_n).$$

(ii) Pour tous les entiers $n \geq 0$,$p \geq 0$ et pour tous $y_1, ..., y_p \in E$,

$$P(X_{n+1} = y_1, ..., X_{n+p} = y_p / X_0, ..., X_n) = Q(X_1 = y_1)Q(y_1, y_2) \cdots Q(y_{p-1}, y_p),$$

et donc

$$P(X_{n+p} = y_p / X_n) = Q_p(x_n, y_p).$$

Si on pose $Y_p = X_{n+p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ le processus $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est encore une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

Preuve . (i) D'après la définition,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_0, X_1, ..., X_n] = \sum_{y\in E} Q(x, y)f(y) = Qf(X_n).$$

Ensuite, si $\{i_1, ..., i_k\}$ est un sous-ensemble fini de $\{0, 1, ..., n-1\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_{i_1}, X_1, ..., X_{i_k}, X_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{n+1})/X_0, X_1, ..., X_n/X_{i_1}, X_1, ..., X_{i_k}, X_n] \\ &= \mathbb{E}[Qf(X_{n+1})/X_{i_1}, X_1, ..., X_{i_k}, X_n] \\ &= Qf(X_n).\end{aligned}$$

(ii) Il découle immédiatement de la proposition précédente

$$P(X_{n+1} = y_1, ..., X_{n+p} = y_p/X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) = Q(X_1 = y_1)Q(y_1, y_2)\cdots Q(y_{p-1}, y_p).$$

La formule pour $P(X_{n+p} = y_p/X_n)$ en découle en sommant sur les choix possibles de $y_1, ..., y_{p-1} \in E$. Enfin, pour la dernière assertion, on déduit de ce qui précède que

$$P(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, ..., Y_p = y_p) = P(X_n = y_0)Q(X_1 = y_1)Q(y_1, y_2) \cdots Q(y_{p-1}, y_p),$$

et on utilise la caractérisation donnée dans la proposition précédente.

1.2 La chaîne de Markov canonique

Proposition 1.2.1. *Soit Q une matrice stochastique sur E. On peut trouver un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ sur lequel il existe, pour tout $x \in E$, un processus $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une chaîne de Markov de transition Q, issue de $X_n^x = x$.*

Preuve . On peut prendre $\Omega' = [0, 1[$, muni la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. A partir de développement dyadique(propre) d'un réel $\omega \in [0, 1[$,

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(\omega)2^{-n-1},\ \varepsilon_n \in \{0, 1\}.$$

on construit une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. indépendantes de mème loi

$$P(\varepsilon_n = 1) = \varepsilon_n = 0) = 1/2.$$

Si φ est une injection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, les v.a. $\eta_{i,j} = \varepsilon_{\varphi(i,j)},\ i,j \in \mathbb{N}$ sont(évidemment) encore indépendantes et de même loi. En posont

$$U_i = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{i,j} 2^{-j-1},$$

on obtient une suite $U_0, U_1, U_2, ...$ de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1[$ (pour voir que U_i suit la loi uniforme, noter que $\sum_{n=0}^{p} \eta_{i,j} 2^{-j-1})$ a même loi que $\sum_{n=0}^{p} \varepsilon_n(\omega) 2^{-n-1}$, pour tout entier p, et faire tendre p vers ∞). Soit $y_1, y_2, ..., y_k, ...$ une énumération des éléments de E. Fixons aussi $x \in E$. On pose $X_0^x = x$ puis

$$X_1^x = y_k; si \sum_{1\le j\le k} Q(x, y_j) < U_1 \le \sum_{1\le j\le k} Q(x, y_j),$$

de sort qu'il est clair que $P(X_1^x = y) = Q(x, y)$ pour tout $y \in E$. On continue par récurrence en posant

$$X_{n+1}^x = y_k; si \sum_{1\le j\le k} Q(X_n^x, y_j) < U_{n+1} \le \sum_{1\le j\le k} Q(X_n^x, y_j).$$

En utilisant l'indépendance des v.a. U_i, on vérifie très facilement que pour tout $k \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1}^x = y_k \setminus X_0^x = x_0, ..., X_n^x = x_n) \\
&\quad = P(\sum_{1\le j\le k} Q(x_n, y_j) < U_{n+1} \le \sum_{1\le j\le k} Q(x_n, y_j) \setminus X_0^x = x_0, X_1^x = x_1, ..., X_n^x = x_n) \\
&\quad = P(\sum_{1\le j\le k} Q(x_n, y_j) < U_{n+1} \le \sum_{1\le j\le k} Q(x_n, y_j)) \\
&\quad = Q(x_n, y_k),
\end{aligned}
$$

de sorte que $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition Q.

Théorème 1.2.1. *soit Q une matrice stochastique sur E. Pour tout $x \in E$, il existe une unique probabilité, notée $\mathbb{P}_x$, sur $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ telle que sous $\mathbb{P}_x$, le processus des coordonnées $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de transition Q, et $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.*

Preuve . Soit $x \in E$. La proposition précédente permet de construire sur un espace de probabilité $(\Omega^{'}, \mathcal{F}^{'}, P^{'})$ un processus $(X_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une chaîne de Markov de transition Q telle que $X_0^x = x$. On définit alors $\mathbb{P}_x$ comme la mesure image de $P^{'}$ par l'appliction

$$\begin{aligned} \Omega' &\to \Omega. \\ \omega' &\to (X_n^x(\omega'))_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Cette application est mesurable grâce au lemme précédent. On a

$$\mathbb{P}_x(X_0 = x) = P'(X_0^x = x) = 1,$$

et de plus pour tous $x_1, x_2, ..., x_n \in E$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) &= P'(X_0^x = x_0, X_1^x = x_1, ..., X_n^x = x_n) \\ &= P'(X_0^x = x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n) \\ &= \mathbb{P}_x(X_0^x = x_0)Q(x_0, x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

ce qui montre que sous $\mathbb{P}_x$ le processus des coordonnées est une chaîne de Markov de transition Q. Pour l'unicité, on remarque que si $\mathbb{P}'_x$ est une autre mesure de probabilité satisfaisant la propriété du théorème, les mesures $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{P}'_x$ coincident sur les cylindres. Or les cylindres forment une classe stable par intersection finie et qui engendre la tribu $\mathcal{F}$.

Théorème 1.2.2. *(Propriété de Markov simple)*

Soitent F et G deux fonctions mesurables positives sur Ω et soit $n \geq 0$. Supposons que F est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x[F.G \circ \theta_n] = \mathbb{E}_x[F\mathbb{E}_{X_n}[G]].$$

De manière équivalente,

$$\mathbb{E}_x[G \circ \theta_n / \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[G],$$

ce qu'on peut traduire en disant que la loi conditionnelle de $\theta_n(\omega)$ connaissant $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est $\mathbb{P}_{X_n}$.

Remarque 1.2.1. *Cet énoncé se généralise aussitôt au cas où on romplace $\mathbb{E}_x$ par $\mathbb{E}_\mu$ pour n'importe quelle loi initiale μ. Il en sera de même pour l'énoncé suivant.*

Preuve .
Il suffit de montrer la première assertion, et pour cela de traiter le cas où

$$F = \mathbb{1}_{\{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n\}}$$

pour $x_0, x_1, ..., x_n \in E$. Considérons d'abord le cas où G est de même type :

$$G = \mathbb{1}_{\{X_0=y_0, X_1=y_1, \ldots, X_p=y_p\}}$$

où $p \geq 0$ et $y_0, ..., y_p \in E$. Dans ce cas, si $y \in E$,

$$\mathbb{E}_y[G] = \mathbb{1}_{\{y_0=y\}} Q(y_0 = y_1) \cdots Q(y_{p-1}, y_p)$$

et par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F.G \circ \theta_n] &= \mathbb{P}_x(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_n = x_n, X_n = y_0, X_{n+1} = y_{n+1}, ..., X_{n+p} = y_p) \\ &= \mathbb{1}_{\{x_0=x\}} Q(x_0 = x_1) \cdots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{1}_{\{y_0=x_n\}} Q(y_0 = y_1) \cdots Q(y_{p-1}, y_p) \end{aligned}$$

de sort qu'on obtient facilement le résultat. Un argument de classe monotone montre ensuite que le résultat reste vrai pour toute fonction $G = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, ce qui permet de conclure.

Théorème 1.2.3. *(Propriété de Markov forte)*
Soit T un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Soitent F et G deux fonctions mesurables positives sur Ω. Supposons que F est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} F.G \circ \theta_T] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} F \mathbb{E}_{X_T}[G]].$$

De manière équivalente,

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} G \circ \theta_T / \mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[G].$$

Remarque 1.2.2. *La v.a. X_T, définie sur l'ensemble $\mathcal{F}_T$-mesurable $\{T < \infty\}$, est $\mathcal{F}_T$-mesurable. La v.a. $\mathbb{E}_{X_T}[G]$, définie aussi sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, est la composée des applications $\omega \to X_T(\omega)$ et $x \to \mathbb{E}_x[G]$.*

Preuve . Pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T=n\}} F.G \circ \theta_T] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T=n\}} F.G \circ \theta_n] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T=n\}} F \mathbb{E}_{X_n}[G]],$$

d'aprés la propriété de Markov simple appliqée en observant que $\mathbb{1}_{\{T=n\}} F$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable parce que est $\mathcal{F}_T$-mesurable. Il suffit ensuite de sommer l'égalité obtenue sur toutes valeurs de $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 1.2.1. *Conditionnellement à l'évènement* $\{T_j < \infty\}$*, la suite translatée* $(X_{T_{j+r}})(r \geq 0)$ *est une chaîne de Markov, de matrice de transition* $\mathcal{P}$ *et d'état initial* j*. De plus, la suite translatée* $(X_{T_{j+r}})(r \geq 0)$ *est indépendante de la tribu* U_{T_j}*.*

Posons $\theta_{T_j}\{X_1 = j_1, ..., X_r = j_r\} = \{X_{T_{j+1}} = j_1, ..., X_{T_{j+r}} = j_r\}$. L'opérateur θ_{T_j} est un opérateur de transition, qui fait subir à chacun des indices des X_i une translation égale à T_j.

$$P\{\theta_{T_j}\{X_1 = j_1, ..., X_r = j_r\}/T_j < \infty\} = P\{X_1 = j_1, ..., X_r = j_r/X_0 = j\}.$$

Si B est évènement appartenant à U, on peut donner un sens à $\theta_{T_j}B$ à l'aide du processus canonique et montre que l'on a

$$P\{\theta_{T_j}B/T_j < \infty\} = P\{B/X_0 = j\}.$$

Nous nous contentons d'utiliser l'equation précédente pour les seuls évènements $\{N_j = k\}$, où k est un entier positif, fini ou infini et où N_j est le nombre de retours dans l'état j après l'instant 0, à savoir

$$N_j = \sum_{n \geq 1} I_{X_n = j}.$$

Le translaté $\theta_{T_j}\{N_j = k\}$ est obtenu en faisant subit à tous les évènements $\{N_n = j\}$ apparaissant dans la définition de N_j la translation θ_T. On a donc, avec

$$N'_j = \sum_{n \geq 1} I_{\{\theta_{T_j}\{X_n = j\}\}} = \sum_{n \geq 1} I_{\{X_{j+n} = j\}}.$$

La relation : $\theta_{T_j}\{N_j = k\} = \{N'_j = k\}$ La propriété de Markov forte, dans la forme précédente, permet d'écrire

$$P\{N'_j = k/T_j < \infty\} = P\{N_j = k/X_0 = j\}.$$

Or, N'_j est le nombre de retours en j, aprés une premier en j, soit $N_j = \sum_{1 \leq n \leq T_j} I_{\{X_n = j\}} + N'_j$. Comme il ne peut y avoir de retours en j strictement avant T_j, on a encore

$$N_j = \left\{ \begin{array}{lll} 1 + N'_j & , \text{ si} & T_j < \infty; \\ 0 & , \text{ sinon .} & \end{array} \right\}$$

D'où $P\{N_j = k + 1/T_j < \infty\} = P\{N_j = k/X_0 = j\} = P^j\{N_j = k\}$ pour k entier positif, fini ou infini. Prenons $\mu = \varepsilon_j$ comme loi de probabilité initiale, de sorte que $P = P^j = P^{\varepsilon_j}$. La probabilité $f_{j,i} = P^j\{T_j < \infty\}$ a été considérée en l'equation précédente. Comme $\{T_j < \infty\} = \{T_j > 1\}$, on en déduit, pour $0 \le k \le \infty$,

$$\begin{aligned} P^j\{N_j = k+1\} &= P^j\{N_j = k+1, N_j \ge 1\} \\ &= P^j\{N_j = k+1, T_j < \infty\} \\ &= P^j\{T_{j<\infty}\}P^j\{N_j = k+1/T_j < \infty\} \\ &= f_{j,j}P^j\{N_j = k\}. \end{aligned}$$

Comme $P^j\{N_j = 0\} = P^j\{N_j = \infty\} = 1 - f_{j,j}$, deux cas se présentent :
(1) ou bien $f_{j,j} = 1$, l'état j est récurrent et alors $P^j\{N_j = k\} = 0$ pour tout $k < \infty$, ce qui entraîne $P^j\{N_j = \infty\} = 1$;
(2) ou bien $a = f_{j,j} < 1$, l'état j est transient et $P^j\{N_j = k\} = a^k - a^{k+1}$ pour tout $k < \infty$. Cette dernière propriété entraîne que $P^j\{N_j = \infty\} = 1 - \sum_{k<\infty}(1-a)a^k = 0$.

Ainsi

$$N_j = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & , \text{ si} & P^j\{T_j < \infty\} = 1; \\ 0 & , \text{ si} & P^j\{T_j < \infty\} < 1. \end{array} \right\}$$

On ne peut donc avoir $0 < P^j\{N_j = \infty\} < 1$. Enfin, comme $\mathbb{E}[N_j] = \mathbb{E}[\sum_{n\ge1} I_{\{X_n=j\}}] = \sum_{n\ge1} P^j\{X_n = j\} = \sum_{n\ge1} P^{(n)}_{j,j}$, on retrouve bien les critères de récurrence du théorème sous la forme : $\mathbb{E}[N_j] = \infty$ si j est récurrent, tandis que $\mathbb{E}[N_j] = f_{j,j}/(1 - f_{j,j}) < \infty$ si j est transient. Exprimons ces résultats dans un théorème.

Théorème 1.2.4. *Dans une chaîne de Markov homogène, il n'y a que deux sortes d'états : les états récurrentes et les états transients. Soient j un état transient et $a = f_{j,j} = P^j\{T_j < \infty\}$ la probabilité d'au moins un retour de la chaîne dans l'état j. Alors $a < 1$ et le nombre aléatoire N_j de retours de la chaîne dans l'état j suit la loi géométrique :*

$$P^j\{N_j = k\} = (1-a)a^k, \qquad (k \ge 0).$$

Proposition 1.2.2. *Soit j un état récurrent et $k \ne j$ tel que $j \to k$, alors $k \to j$, de sorte que k est aussi récurrent et dans la même classe que j. En particulier, une chaîne de Markov ne peut aller d'un état récurrent vers un état transient.*

Preuve .
Supposons que pour $n \ge 1$ on ait $P^{(n)}_{k,j} > 0$. Il s'agit de montrer que l'on a $P^{(m)}_{k,j} > 0$ pour un certain $m \ge 1$. Il suffit de démontrer la propriété pour $n = 1$, soit $P_{k,j} > 0$. Si l'on avait $P\{X_m = j/X_0 = k\} = P^{(m)}_{k,j} = 0$ pour tout $m \ge 1$, on aurait $P\{N_j = \infty/X_0 = k\} \le \sum_{m\ge1} P^{(m)}_{k,j} = 0$. De là, $P\{N_j = \infty/X_0 = j\} =$

$\sum_{l \neq k} p_{j,l} P\{N_j = \infty / X_0 = l\} \leq \sum_{l \neq k} P_{j,l} = 1 - p_{j,k} < 1$ et j ne serait pas récurrent, contrairement à l'hypothèse.

Proposition 1.2.3. *Soit R l'ensemble des états récurrents d'une chaîne de Markov finie. Alors, avec une probabilité égale à 1, la chaîne se trouve dans R au bout d'un temps fini.*

Corollaire 1.2.2. *Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$. Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $\mathbb{P}_x(X_T = y) = 1$. Alors sous $\mathbb{P}_x, \theta_T(\omega)$ est indépendant de $\mathcal{F}_T$ et de la loi $\mathbb{P}_y$*

Preuve .
Avec les notations du théorème, on a

$$\mathbb{E}_x[F.G(\theta_T(\omega))] = \mathbb{E}_x[F\mathbb{E}_y[G]] = \mathbb{E}_x[F]\mathbb{E}_y[G]$$

d'ou les assertions de l'énoncé.

1.3 La classification des états

Proposition 1.3.1. *Soit*

$$H_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$$

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}},$$

soit $x \in E$. On a :
(1) *Ou bien $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) = 1$, alors*

$$N_x = \infty, \quad \mathbb{P}_x - p.s$$

dans ce cas x est dit récurrent.
(2) *Ou bien $\mathbb{P}_x(H_x < \infty) < 1$, et alors*

$$N_x < \infty, \quad \mathbb{P}_x \quad p.s$$

et plus précisement $\mathbb{E}_x[N_x] = 1/\mathbb{P}_x(H_x = \infty) < \infty$; dans ce cas x est dit transitoire.

Preuve . Pour tout entier $k \geq 1$, la propriété de Markov forte montre que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_x \geq k+1) &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_x < \infty\}} \mathbb{1}_{\{N_x \geq k\}} \circ \theta_{H_x}] \\ &= \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_x < \infty\}}]\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{N_x \geq k\}}] \\ &= \mathbb{E}_x(H_x < \infty)\mathbb{P}_x(N_x \geq k). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(N_x \geq 1) = 1$, une rimmédiate donne $\mathbb{P}(N_x \geq k) = \mathbb{E}_x(H_x < \infty)^{k-1}$. Si $\mathbb{E}_x(H_x < \infty) = 1$ il en découle aussitôt que $\mathbb{P}(N_x = \infty) = 1$. Si $\mathbb{E}_x(H_x < \infty) < 1$, on trouve

$$\mathbb{E}_x[N_x] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_x \geq k) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(H_x = \infty)} < \infty.$$

Définition 1.3.1. *On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i, ou est conséquent de l'état i, s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P_{i,j}^{(n)} > 1$. On écrit : $i \to j$.*

Propriété 1.3.1. *La relation d'accessibilité entre état est réflexive et transitive.*

Preuve .
Comme $p_{i,j}^{(0)} = P\{X_0 = i/X_0 = i\} = 1$ pour tout état i, on a bien $i \to i$. Ensuite, si $i \to l$ et $l \to j$, alors $p_{i,j}^{(m)} > 0$ et $p_{i,j}^{(n)} > 0$ pour certains entiers $m, n \geq 0$. On en tire :

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k \in E} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)} \geq p_{i,l}^{(m)} p_{l,j}^{(n)} > 0, \text{ d'où } \quad i \to j.$$

Propriété 1.3.2. *Soitent i, j deux états ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) l'état j accessible à partir de l'état i, soit $i \to j$.

(b) le processus, partant de i, passe par j avec une probabilité strictement positive.

Preuve . D'abord, $(a) \Rightarrow (b)$ est évident. Montrons que $\overline{(a)} \Rightarrow \overline{(b)}$. Sous l'hypothèse $\overline{(a)}$, pour tout $n \geq 0$, on a : $p_{i,j}^{n} = 0$. Soit A l'évènement le processus passe par j. Alors $P\{A/X_0 = i\} = P\{\sum_{n \geq 0}\{X_n = j\}/X_0 = i\} = \sum_{n \geq 0} P\{X_n = j/X_0 = i\} = \sum_{n \geq 0} p_{i,j}^{(n)} = 0$; d'où la propriété $\overline{(b)}$.

Définition 1.3.2. *On dit que deux état communiquent et l'on écrit $i \to j$, si on a à la fois : $i \to j$ et $j \to i$.*

Définition 1.3.3. *La relation de communication entre états est une relation d'équivalence.*

Définition 1.3.4. *S'il n'y a qu'une seule classe pour la relation de communication, autrement dit, si tous les états communiquent entrs eux, la chaîne est dit irréductible.*

Définition 1.3.5. *La noyau potentiel de la chaîne est la fonction* $U : E \times E \to [0, \infty]$ *définie par*

$$U(x, y) = \mathbb{E}[N_y].$$

Proposition 1.3.2. *(i) Pour tous* $x, y \in E$*,*

$$U(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x, y),$$

(ii) $U(x, x) = \infty$ *si et seulement si* x *est récurrent.*
(iii) Pour tous $x, y \in E$*, avec* $x \neq y$*,*

$$U(x, y) = \mathbb{P}_x(H_y < \infty) U(y, y).$$

Preuve . La propriété (i) est obtenue en écrivant :

$$U(x, y) = \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x_n = y\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}_n(x, y).$$

La propriété (ii) est une conséquance immédiate de la proposition précédente et de la définition de U.
Enfin (iii) découle de le propriété de Markov forte :

$$\mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_x < \infty\}} N_y \circ \theta_{H_y}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_x < \infty\}} \mathbb{E}_y[N_y]] = \mathbb{P}_x(H_y < \infty) U(y, y).$$

Lemme 1.3.1. *Soit* $x \in R$ *et soit* y *un autre point de* E *tel que* $U(x, y) \geq 0$*. Alors* $y \in R$ *et* $\mathbb{P}_y(H_x < \infty) = 1$*, donc en particulier* $U(x, y) \geq 0$*.*

On note R l'ensemble des états (points) récurrents.
Preuve . Montrons d'abord que $\mathbb{P}_y(H_x < \infty) = 1$. Pour cela on écrit

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{P}_x(N_x < \infty) \quad & \geq \mathbb{P}_x(H_y < \infty, H_x \circ \theta_{H_y} = \infty) \\ & = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_y < \infty\}} \mathbb{1}_{\{H_x = \infty\}} \circ \theta_{H_y}] \\ & = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{H_y < \infty\}} \mathbb{P}_y(H_x = \infty)] \\ & = \mathbb{P}_x(H_y < \infty) \mathbb{P}_y(H_x = \infty) \end{aligned}$$

L'hypothèse $U(x, y) \geq 0$ entraîne $\mathbb{P}_x(H_y < \infty) > 0$. On conclus que $\mathbb{P}_x(H_y = \infty) = 0$. Ensuite, on peut trouver des entiers $n_1, n_2 \geq 1$ tels que $Q_{n_1}(x, y) > 0$, et $Q_{n_2}(y, x) > 0$.
Pour tout entier $p \geq 0$, on a alors

$$Q_{n_2 + p + n_1}(y, y) \geq Q_{n_2}(y, x) Q_p(x, x) Q_{n_1}(x, y),$$

et donc

$$U(y,y) \geq \sum_{p=0}^{\infty} Q_{n_2+p+n_1}(y,y) \geq Q_{n_2}(y,x)(\sum_{p=0}^{\infty} Q_p(x,x))Q_{n_1}(x,y) = \infty,$$

puisque $x \in R$ entraîne $\sum_{p=0}^{\infty} Q_p(x,x) = U(x,x) = \infty$.

Définition 1.3.6. *La chaîne est dite irréductible si $U(x,y) > 0$ pour tous $x, y \in E$*

Corollaire 1.3.1. *Si la chaîne est irréductible :*

(1) Ou bien tous les états sont récurrentes, il existe une seul classe de récurrence et on a pour tout $x \in E$

$$\mathbb{P}_x(N_y = \infty, \forall y \in E) = 1.$$

(2) Ou bien tous les états sont transitoires et alors, pour tout $x \in E$

$$\mathbb{P}_x(N_y < \infty, \forall y \in E) = 1.$$

Lorsque E est fini, seul le premier cas peut se produire.

Preuve . Puisque $U(x,y) > 0$ pour tous $x, y \in E$, on voit aussi qu'il y a une seule classe de récurrence.
Si E est fini et si on suppose que tous les états transitoires, on a

$$\mathbb{P}_x - p.s, \quad \sum_{y \in E} N_y < \infty,$$

ce qui est absurde puisque

$$\sum_{y \in E} N_y = \sum_{y \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{y \in E} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}} = \infty.$$

Une chaîne de Markov irréductible dont les états sont récurrents sera dite récurrente irréductible.

1.4 Récurrence positive, récrrence nulle

Théorème 1.4.1. *Supposons la chaîne récurrente irréductible. Alors la mesure invariante est unique à une constante multiplicative prés.*

Preuve . Soit μ une mesure invariante. On montre par récurrence que, pour tout entier $P \geq 0$, pour tous $x, y \in E$

$$\mu(y) \geq \mu(x)\mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{p\wedge(H_x-1)} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}]. \tag{1.1}$$

D'abord, si $y = x$, l'inégalité est immédiate. On suppose donc $y \neq x$. Si $p = 0$, l'inégalité (1.1) est triviale. On suppose que l'inégalité (1.1) est vraie à l'ordre p. Alors,

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \sum_{z\in E} \mu(z)Q(z,y) \\
&\geq \mu(x)\sum_{z\in E} \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{p\wedge(H_x-1)} \mathbb{1}_{\{X_k=z\}}]Q(z,y) \\
&= \mu(x)\sum_{z\in E}\sum_{k=0}^{p} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_k=Z,K\leq H_x-1\}}]Q(z,y) \\
&= \mu(x)\sum_{z\in E}\sum_{k=0}^{p} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_k=Z,K\leq H_x-1\}}\mathbb{1}_{\{X_{k+1}=y\}}] \\
&= \mu(x)\sum_{z\in E} \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{p\wedge(H_x-1)} \mathbb{1}_{\{X_{k+1}=y\}}] \\
&= \mu(x)\sum_{z\in E} \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{p+1\wedge H_x} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}],
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu à l'ordre $p + 1$, on a utilisé le fait que l'évènement $\{X_k = z, k \leq H_k - 1\}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable pour appliquer la propriété de Markov à l'instant k. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans (1.1) on trouve

$$\mu(y) \geq \mu(x)\mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}].$$

Fixons $x \in E$. La mesure

$$\nu_x(y) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{H_x-1} \mathbb{1}_{\{X_k=y\}}]$$

est invariante, on a $\mu(y) \geq \mu(x)\nu_x(y)$ pour tout $y \in E$. Donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\mu(x) = \sum_{z\in E} \mu(z)Q_n(z,x) \geq \sum_{z\in E} \mu(x)\nu_x(z)Q_n(z,x) = \mu(x)\nu_x(x) = \mu(x)$$

ce qui montre que l'égalité $\mu(x) = \mu(x)\nu_x(z)$ a lieu pour tout z tel que $Q_n(z,x) > 0$.
l'irréductibilité assure pour tout $z \in E$ on peut trouver un entier n tel que $Q_n(z,x) > 0$, et on conclut donc que $\mu = \mu(x)\nu_x$, ce qui termine la preuve.

Corollaire 1.4.1. *Supposons la chaîne récurrente irréductible. Alors :*

(i) Ou bien il existe une mesure de probabilité invariante μ, et on a pour tout $x \in E$

$$\mathbb{E}_x[H_x] = \frac{1}{\mu(x)}.$$

(ii) Ou bien toute mesure invariante a une masse totale infinie, et on a pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{E}_x[H_x] = \infty.$$

La chaîne est dite récurrente positive dans le cas (i) et récurrente nulle dans le cas (ii).

Proposition 1.4.1. *Supposons la chaîne est irréductible. S'il existe une mesure invariante finie, la chaîne est récurrente (et donc récurrente positive).*

Preuve . Soit γ une mesure invariante finie, et soit $y \in E$ tel que $\gamma(y) > 0$. Pour tout $x \in E$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x,y) = U(x,y) \leq U(y,y).$$

On multiplie les deux membres de cette inégalité par $\gamma(x)$ et on somme sur toutes les valeurs de $x \in E$. Il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma Q_n(y) \leq \gamma(E)U(y,y).$$

Puisque γ est invariante on a $\gamma Q_n(y) = \gamma(y) > 0$, pour tout $n \geq 0$. On conclut donc que

$$\gamma(E)U(y,y) = \infty.$$

Comme $\gamma(E) < \infty$, cela entraîne que $U(y,y) = \infty$. Donc y est récurrent et puisque la chaîne est irréductible elle est récurrente.

1.5 Mesures invariantes

Définition 1.5.1. *Soit μ une mesure positive sur E, telle que $\mu(x) < \infty$ pour tout $x \in E$ et μ n'est pas la mesure identiquement nulle. On dit que μ est invariante pour la matrice de transition Q si*

$$\forall y \in E, \quad \mu(y) = \sum_{x \in E} \mu(x) Q(x, y).$$

Définition 1.5.2. *Soit μ une mesure positive non triviale sur E, telle que $\mu(x) < \infty$ pour tout $x \in E$. On dit que μ est réversible si*

$$\forall x, y \in E, \quad \mu(x) Q(x, y) = \mu(y) Q(y, x).$$

Proposition 1.5.1. *Tout mesure réversible est invariante.*

Preuve . Si μ est réversible,

$$\sum_{x \in E} \mu(x) Q(x, y) = \sum_{x \in E} \mu(y) Q(y, x) = \mu(y).$$

En revanche, il existe des mesures invariantes qui ne sont pas réversibles : nous avons vu que la mesure de comptage est invariante pour toute marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$, cependant elle n'est réversible que si la loi de saut γ est symétrique $(\gamma(x) = \gamma(-x))$.

Définition 1.5.3. *Soit G un ensemble mesurable de $\mathcal{E}$.*
(1) G est dit irréductible si $\forall x \in E, P_x\{\tau_G \leq \infty\} \geq 0$.
(2) G est dit récurrente si $\forall x \in E, P_x(\limsup_n \{X_n \in G\}) = 1$ ou de façon équivalente $P_x\{\tau_G \leq \infty\} = 1$.

Remarque 1.5.1. *Un ensemble mesurable G récurrent est en particulier irréductible.*

Définition 1.5.4. *X est dit φ-irréductible s'il existe une mesure σ-finie φ définie sur $(E, \mathcal{E})$ telle que $\forall G \in \mathcal{E}$, si $\varphi\{G\} \geq 0$ alors G irréductible.*

1.5.1 Les mesures exessives

Définition 1.5.5. *Une mesure σ-finie est dite exessive pour P si $mP \leq m$.*
-On dit que m est exessive pour la chaîne X.
-Si m est une mesure positive infinie, en définit une mesure de probabilité $\mathbb{P}_m$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par :

$$\mathbb{P}_m(A) = \int_E \mathbb{P}_x(A) dm(x), \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

1.5.2 Les fonctions harmoniques

Définition 1.5.6. *Une fonction bornée $f \in \mathcal{E}$ est dite harmonique si $Pf = f$. Si $f \in \mathcal{E}_+$ et $Pf \leq f$ on dit que f est surharmonique.*

Définition 1.5.7. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ est dit harmonique (resp. surharmonique) si on a pour tout $x \in E$,*

$$f(x) = Qf(x) \qquad (\textit{resp.}\ \ f(x) \geq Qf(x)).$$

Plus généralement, si $F \subset E$, on dit que f est harmonique sur F (resp. surharmonique sur F) si la propriété $f(x) = Qf(x)$ (resp. $f(x) \geq Qf(x)$) est vraie pour F.

Proposition 1.5.2. *(i) La fonction f est harmonique (resp. surharmonique) ssi, pour tout $x \in E$, le processus $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (resp. surmartingale) sous $\mathbb{P}_x$ relativement à la filtration $\mathcal{F}_n$.*

(ii) Soit $F \subset E$ et $G = E \setminus F$.On note T_G le temps d'arrêt

$$T_G = \inf\{n \geq 0 : X_n \in G\}.$$

Alors si f est harmonique (resp. surharmonique) sur F, le processus $(f(X_{n\wedge T_G}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (resp. surmartingale) sous $\mathbb{P}_x$, pour tout $x \in F$.

Preuve . (i) supposons d'abord f harmonique. Alors, d'après la proposition précédente

$$\mathbb{E}_x[f(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)] = Qf(x_n) = f(x_n),$$

et en conséquence $\mathbb{E}_x[f(X_n)] = \mathbb{E}_x[f(X_0)] = f(x)$, donc $f(X_n) \in L^1$.
L'inversement, supposons que $f(X_n)$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$. Il vient immédiatement que

$$f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_0)] = \mathbb{E}_x[f(X_1)] = Qf(x).$$

Le cas d'une fonction surharmonique est traité de la même façon.
(ii) Traitons le cas d'une fonction harmonique. On écrit pour $x \in F$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_{(n+1)\wedge T_G}/\mathcal{F}_n)] &= \mathbb{E}_x[f(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{T_G>n\}}/\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}_x[f(X_{T_G}\mathbb{1}_{\{T_G\leq n\}})/\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{1}_{\{T_G>n\}}\mathbb{E}_x[f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n] + f(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_G\leq n\}} \\
&= \mathbb{1}_{\{T_G>n\}}Qf(X_n) + f(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_n>n\}} \\
&= \mathbb{1}_{\{T_G>n\}}f(X_n) + f(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_G>n\}} \\
&= f(X_{n\wedge T_G}).
\end{aligned}$$

On utilisé le fait que $f(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_G\leq n\}} = f(X_{T_G\wedge n}\mathbb{1}_{\{T_G\leq n\}})$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Théorème 1.5.1. *Soit F un sous-ensemble non vide de E et $G = E \setminus F$. Soit $g : G \to \mathbb{R}_+$ une fonction bornée.*

(i) La fonction

$$h(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_G<\infty\}}], \qquad x \in E$$

est harmonique sur F.

(ii) Supposons $T_G < \infty$, $\mathbb{P}_x$-p.s. pour tout $x \in F$. Alors la fonction h est l'unique fonction bornée sur E qui

-est harmonique sur E.

-coincide avec g sur G.

Preuve . (i) On remarque que si $x \in F$ on a $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$g(X_{T_G})\mathbb{1}_{\{T_G<\infty\}} = g(X_{T_G} \circ \theta_1)\mathbb{1}_{\{T_G \circ \theta_1<\infty\}}.$$

Autrement dit, si $U(\omega) = g(X_{T_G}(\omega))\mathbb{1}_{\{T_G(\omega)<\infty\}}$, on a $U = U \circ \theta_1$, $\mathbb{P}_x$-p.s Donc, pour $x \in F$, d'après le théorème précédente,

$$h(x) = \mathbb{E}_x[U] = \mathbb{E}_x[U\theta_1] = \mathbb{E}_x[E_{X_1}[U]] = \mathbb{E}_x[h(X_1)] = Qh(x)$$

ce qui montre que h est harmonique sur F.
(ii) Il est trivial que $h(x) = g(x)$ si $x \in G$. Soit h' une autre fonction harmonique sur F, bornée sur E et coincide avec g sur G. Si $x \in F$, d'après la proposition précédente, $Y_n = h'(X_{n\wedge T_G})$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$. Cette martingale est bornée, donc uniformément intégrable, et converge $\mathbb{P}_x$- p.s. vers $h'(X_{T_G}) = g(X_{T_G})$. On a donc

$$h'(x) = \mathbb{E}_x[Y_0] = \mathbb{E}_x[Y_\infty] = \mathbb{E}_x[g(X_{T_G})] = h(x).$$

1.6 Ensembles clos

Définition 1.6.1. *Un ensemble C d'état est dit clos (ou fermé), si pour tout $i \in C$ et tout $j \notin C$, on a : $p_{i,j} = 0$.*

Proposition 1.6.1. *Si C est un ensemble clos, alors aucun état n'apportenant pas à C n'est accessible à partir d'un état de C ; autrement dit, pour tout $i \in C$, et tout $j \notin C$ et tout $n \geq 1$ on a $p^n_{i,j} = 0$. En particulier, pour tout $i \in C$, on a : $\sum_{k\in C} p_{i,k} = 1$; ce qui montre que la restriction de la chaîne aux seuls états de C définit une chaîne de Markov homogène, ayant C comme ensemble d'états.*

Preuve . Pour $n \geq 2$, $i \in C$ et $j \in C$; on a :

$$p_{i,j}^n = \sum_{k \in C} p_{i,k} p_{k,j}^{n-1} + \sum_{k \in C} p_{i,k} p_{k,j}^{n-1}.$$

Dans la première somme, $p_{k,j}^{n-1}$ est nul, par récurrence ; dans la seconde somme, $p_{i,k}$ l'est, par définition. D'où $p_{k,j}^n = 0$ et aussi

$$p_{i,l}^n = 1.$$

Tout ensemble réduit à un état absorbant est clos. Tout ensemble d'états absorbants est aussi clos.

Proposition 1.6.2. *Tout ensemble clos est une réunion de classes indécomposable.*

Preuve . Soit i un état d'un ensemble clos C. d'après la proposition précédente, s'il existe $n \geq 1$ est un état j tel que $p_{i,l}^n > 0$ alors $j \in C$. Donc C contient tous les états j tels que $i \to j$ et par suite toute la classe indécomposable à laquelle appartient i.

Remarque 1.6.1. *La réciproque n'est pas vraie : une réunion de classes indécomposables n'est pas nécessairement close. Par exemple, avec* $E = \{0, 1, 2, ...\}$ *et le graphe associé* $0 \to 1 \to 2 \to ... \to n \to ...$*, chacun des états est transient et forme à lui seul une classe transient. Aucune de ces classes n'est pas close.*

En revanche, pour tout $n \geq 0$ l'ensemble $C_n = \{n, n+1, ...\}$, réunion de classes transientes, est néanmois clos.

Remarque 1.6.2. *Une classe indécomposable close peut être récurrente ou tarnsiente. Par exemple, dans la promenade au hasard sur* $\mathbb{Z}$ *il n'y a qu'une seule classe et elle est transiente.*

Proposition 1.6.3. *Toute classe récurrente est close.*

Preuve . Cette proposition résulte de la proposition précédente, où l'on a démontré que si i est récurrent et si $i \to j$ avec $j \neq i$, alors $j \to i$. soit C la clsse récurrente qui contient i et $j \notin C$. Si l'on avait $p_{i,j} > 0$, on aurait $i \to j$ et donc $j \to i$, par la proposition précédente. L'état j appartiendrait à C, une contradiction.

1.7 Comportement asymptotique

Théorème 1.7.1. *Supposons la chaîne récurrente irréductible, et soit μ une mesure invariant. Soient f et g deux fonctions positives sur E telles que $\int f d\mu < \infty$ et $0 < \int g d\mu < \infty$. Alors, pour tout $x \in E$ on a $\mathbb{P}_x$-p.s.*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n} g(X_k)} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\int f d\mu}{\int g d\mu}.$$

Corollaire 1.7.1. *Si la chaîne de Markov est irréductible et récurrente positive, et si μ désigne l'unique probabilité invariante, on a $\mathbb{P}_x$-p.s.*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Le corollaire découle immédiatement du théorème en prenant $g = 1$ dans l'énencé.

Preuve du théorème 7 : On définit les temps d'arrêt $T_0 = 0, T_1 = H_x$ et par récurrence
$$T_{n+1} = \inf\{k > T_n : X_k = x\}.$$
Le temps T_n est l'instant du n-ième retour en x de la chaîne. Puisque l'état x est récurrent, tous ces temps d'arrêt sont finis p.s. On pose aussi pour tout $k \geq 0$,

$$Z_k(f) = \sum_{n=T_k}^{T_{k=1}-1} f(X_n).$$

Lemme 1.7.1. *Les v.a. $Z_k(f)$, $k = 0, 1, 2, ...$, sont indépendantes et de même loi.*

Preuve . Soient $g_0, g_1, g_2, ...$, des fonctions masurables bornées sur $\mathbb{R}_+$. il suffit de montrer que, pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}_x[\prod_{i=0}^{k} g_i(Z_i(f))] = \prod_{i=0}^{k} \mathbb{E}_x[g_i(Z_0(f))].$$

On démontre cette identité par récurrence sur k. Pour $k = 0$ il n'y a rien à montrer. Pour passer de l'ordre $k-1$ à l'ordre k, on observe que :

1) Les v.a. $Z_0(f), Z_1(f), ..., Z_{k-1}(f)$ sont $\mathcal{F}_{T_k}$-mesurables.

2) La suite translatée $\theta_{T_k}(\omega)$ est indépendante de $\mathcal{F}_{T_k}$ et de loi $\mathbb{P}_x$.

3) On a $Z_k(f) = Z_0(f) \circ \theta_{T_k}$, par construction.

Il découle de tout ceci que

$$\mathbb{E}_x[\prod_{i=0}^{k} g_i(Z_i(f))] = \mathbb{E}_x[(\prod_{i=0}^{k-1} g_i(Z_i(f)))g_k(Z_0 = f \circ \theta_{T_k})] = \mathbb{E}_x[\prod_{i=0}^{k-1} g_i(Z_i(f))]\mathbb{E}_x[g_k(Z_0(f))],$$

d'où le résultat voulu à l'ordre k. Nous revenons à la preuve du théorème. Si ν_x désinge comme précédemment la mesure invariante construite dans le théorème précédente, on a $\mu = \mu(x)\nu_x$ puisque $\nu_x(x) = 1$ et que toutes les mesures invariantes sont proportionnelles.
On observer alors que

$$\mathbb{E}_x[(Z_0(f))] = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{H_x-1} \sum_{y \in E} f(y)\mathbb{1}_{\{X_k=y\}}] = \sum_{y \in E} \nu_x(y) = \frac{\int f d\mu}{\mu(x)}.$$

Le lemme précédente et la loi forte des grands nombres montrent ensuite que $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} Z_k(f) \longrightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(x)}.$$

Pour tout entier n, notons $n_x(n)$ le nombre de retours en x effectués par la chaîne avant l'instant n, de sorte que $T_{N_x(n)} \leq T_{N_x(n)+1}$. En écrivant

$$\frac{\sum_{k=0}^{T_{N_x(n)-1}} f(X_k)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{N_x(n)} = \frac{\sum_{k=0}^{T_{N_x(n)+1}-1} f(X_k)}{N_x(n)},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\sum_{j=0}^{N_x(n)-1} Z_j(f)}{N_x(n)} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} f(X_k)}{N_x(n)} leq \frac{\sum_{j=0}^{N_x(n)} Z_j(f)}{N_x(n)},$$

on déduit que $\mathbb{P}_x$ p.s.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_x(n)} f(X_k) \longrightarrow \frac{\int f d\mu}{\mu(x)}.$$

Il suffit ensuite d'utiliser le même résultat avec f remplacée par g pour finir la preuve.

1.8 L'a-périodicité

Théorème 1.8.1. *Supposons que X est φ-irréductible. Il existe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et une suite $G_1, G_2, ..., G_d$ d'ensembles mesurables de $\mathcal{E}$ tels que*

(a) $\forall x \in G_i, P(x, G_{(i+1)}) = 1, i = 1, ..., d$ où $(i+1) = i + 1[d]$

(b) l'ensemble $G = [\bigcup_{i=1}^{i=d} G_i]^c$ est φ-négligeable.

Si $\{d', G'_k, k = 1 \cdots, d'\}$ est une autre collection vérifiant (a) et (b), alors $d = d'$ et les familles $\{G_i, i = 1, \cdots, d\}$ et $\{G'_i, i = 1 \cdots, d'\}$ sont identiques à des ensembles négligeables près.

Visiblement, le nombre entier d caractérise la chaîne X, il est appelé la période de X. $(G_1, G_2, ..., G_d)$ est une cycle de langueur d.

Définition 1.8.1. *La chaîne de Markov $X = (x(n), n \in \mathbb{N})$ est dit a-périodique si $d = 1$.*

Définition 1.8.2. *Soit x un point récurrente, et*

$$L_x = \{n \geq 0 \quad : \quad Q(x, x) > 0\}.$$

La période de x, notée $d(x)$, est le PGCD de L_x.

Proposition 1.8.1. *Supposons la chaîne récurrente irréductible.*

(i) Tous les points ont même période, appelée la période de la chaîne et notée d.

(ii) Si $d = 1$ (la chaîne est alors dite apériodique), pour tous $x, y \in E$, il existe un entier n_0 tel que $Q_n(x, y) > 0$ pour tout $n \geq n_0$.

Preuve . (i) soient $x, y \in E$. Puisque la chaîne est irréductible, il existe deux entier n_1 et n_2 tels que $Q_{n_1}(x, y) > 0$ et $Q_{n_2}(x, y) > 0$. Mais alors, si $n \in L_x$, on a $n_1 + n + n_2 \in L_y$, ce que entraîne que $L_x - L_x \subset L_y - L_y$ et donc $d(y)$ divise $d(x)$. Par symétrie on a $d(y) = d(x)$.
(ii) clairement, il suffit traiter le cas où $y = x$. Puisque $d(x) = 1$, on peut trouver deux entiers $n_1, m_1 \geq 0$ tels que $1 = n_1 = m_1$ et

$$Q_{n_1}(x, x) > 0, \quad Q_{m_1}(x, x) > 0.$$

Si $m_1 = 0$, donc $n_1 = 1$ le résultat est évident $n_0 = 0$. Si $m_1 \geq 0$ alors, pour tout $j \in \{0, 1, ..., m_1 - 1\}$, on a

$$Q_{m_1^2+j}(x, x) = Q_{jn_1+(m_1-j)m_1}(x, x) > 0.$$

Il en découle que, si $n_0 = m_1^2$ on a pour tout entier $j \geq 0$,

$$Q_{n_0+j}(x, x) > 0.$$

Théorème 1.8.2. *Supposons la chaîne irréductible, récurrente positive et apériodique. Alors, si μ désigne l'unique probabilité invariante, on a pour tout $x \in E$,*

$$\sum_{x\in E} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(y)| \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve . La formule

$$\overline{Q}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = Q(x_1, y_1)Q(x_2, y_2)$$

définit une matrice stochastique sur le $E\times E$. On note $((X_n^1, X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, (\overline{P}_{(x_1,x_2)})_{(x_1,x_2)\in E\times E})$ la chaîne de Markov canonique associés. Remarquons Q est irréductible : si $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E \times E$, la propotion précédente (ii) permet de trouver deux entiers n_1 et n_2 tels que $Q_n(x_1, y_1) > 0$ pour tout $n \geq n_1$, et $Q_n(x_2, y_2) > 0$ pour tout $n \geq n_2$. Si $n \geq n_1 \vee n_2$, on a par définition $\overline{Q}_n((x_1, x_2), (y_1, y_2)) > 0$. De plus la mesure produit $\mu \otimes \mu$ est invariante pour $\overline{Q}$:

$$\begin{aligned}\sum_{(x_1,x_2)\in E\times E} \mu(x_1)\mu(x_2)Q(x_1, y_1)Q(x_2, y_2) &= \sum_{x_1\in E} \mu(x_1)Q(x_1, y_1) \sum_{x_2\in E} \mu(x_2)Q(x_2, y_2) \\ &= \mu(y_1)\mu(y_2).\end{aligned}$$

La proposition précédente permet de conclure que la chaîne (X_n^1, X_n^2) est récurrente positive. Observons maintenant que

$$\mathbb{P}_x(X_n = y)-\mu(y) = \overline{\mathbb{P}}_{\mu\otimes\delta_x}(X_n^2 = y)-\overline{\mathbb{P}}_{\mu\otimes\delta_x}(X_n^1 = y) = \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}}-\mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}}].$$

Introduisons le temps d'arrêt $T = \inf\{n \geq 0 : X_n^1 = X_n^2\}$. Alors, l'égalité précédente montre que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(y) &= \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T>n\}}(\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}} - \mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}})] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{z\in E} \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T=k,X_k^1=X_k^2=z\}}(\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}} - \mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}}].\end{aligned}$$

Mais, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$ et tout $z \in E$ la propriété de Markov entraîne que

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T=k,X_k^1=X_k^2=z\}}\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}}] &= \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T=k,X_k^1=X_k^2=z\}}Q_{n-k}(z, y) \\ &= \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T=k,X_k^1=X_k^2=z\}}\mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}}]\end{aligned}$$

et donc la deuxième terme de la somme dans l'égalité précédente est nul. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \mu(y)| &= \sum_{y\in E} |\overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T>n\}}(\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}} - \mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}})]| \\ &\leq \sum_{y\in E} \overline{\mathbb{E}}_{\mu\otimes\delta_x}[\mathbb{1}_{\{T>n\}}(\mathbb{1}_{\{X_n^2=y\}} + \mathbb{1}_{\{X_n^1=y\}})] \\ &= 2\overline{\mathbb{P}}_{\mu\otimes\delta_x}(T > n)\end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, grâce à la récurrence de la chaîne (X_n^1, X_n^2).

Définition 1.8.3. *Soit j un état de retour ; on appelle période de j, le p.g.c.d. de tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $p_{j,j}^{(n)} > 0$. On note $d(j)$ la période de j. Si $d(j) = d \geq 2$, on dit que j est périodique de période d ; si $d = 1$, on dit que j est apériodique. Si j est un état de non-retour, à savoir que, pour tout $n \geq 1$, on a $p_{j,j}^{(n)} = 0$, on pose $d(j) = +\infty$.*

Théorème 1.8.3. *Si i est périodique de période d finie et si $i \to j, j \neq i$, alors j est aussi périodique de période d. La périodicité est une propriété de classe.*

Preuve . Si $i \to j$, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{i,j}^{(n)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$.
Comme i est de période $d(i) = d$, il existe aussi un entier $s \geq 1$ tel que $p_{i,i}^{(s)} > 0$.
On a donc $p_{i,j}^{(m+s+n)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(s)} p_{i,j}^{(n)} > 0$. Comme $p_{i,i}^{(s)} > 0 \Rightarrow p_{i,i}^{(2s)} > 0$, on a aussi : $p_{j,j}^{(m+2s+n)} > 0$.
La période $d(j)$ de j divise donc à la fois $m + 2s + n$ *et* $m + s + n$, donc aussi leur différence s, et en particulier la période $d(i)$ de i. De la même façon, on montre que $d(i)$ divise $d(j)$. Ainsi $d(j) = d(i) = d$.

Théorème 1.8.4. *Soit C une classe indécomposable, de période $d \geq 2$. Il existe une partition de C en sous-classes $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{d-1}$ telles que les seules transitions possibles, dans la classe C soient la transitions allant d'un état de Γ_i à un état de Γ_{i+1} pour $i = 0, 1, ..., d-1$ avec la convention que les indices i sont près modulo d. Les sous-classes $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_{d-1}$ sont appelées les sous-classes cyclique de la classe indécomposable C.*

Ce théorème prend son importance, si la classe C est récurrente ; dans ce cas, tout conséquent d'un état de C, situé dans Γ_i, est encore un état de C, situé dans Γ_{i+1}, les indices étant pris modulo d. Le passage de Γ_i à Γ_{i+1} est obligatoire, seul reste aléatoire le choix de l'état dans Γ_{i+1}.

1.9 Lois de probabilité stationnaires

Dans ce paragraphe, il est commode de noter les loi de probabilité u sur l'ensemble E comme des vecteurs-lignes $u = (u_0, u_1, ...)$, où $u_i \geq 0$ et $\sum_i u_i = 1$.

Définition 1.9.1. *Soit u une loi de probabilité sur l'ensemble des états. Elle est dite stationnaire, si $u = u.\mathcal{P}$, ou, de façon équivalente, si pour tout $j \in E$, on a*

$$u_j = \sum_{i \in E} u_i p_{i,j}.$$

Supposons qu'il existe une loi de probabilité stationnaire u ; pour tout $n \geq 0$, on a aussi : $u = u.\mathcal{P}^n$. Il en résulte que si en prend u comme loi de probabilité initiale, soit $\mu^{(0)} = u$, alors la loi de probabilité de X_n, qui est donnée par $\mu^{(n)} = \mu^{(0)}.\mathcal{P}^n$, est indépendante de n et égale à $\mu^{(0)}$, soit $P\{X_n = i\} = P\{X_0 = i\} = \mu_i^{(0)}$. De façon générale, si l'on prend u comme loi de probabilité initiale, la chaîne de Markov devient un processus stationnaire, c'est-à-dire, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$, on a : $\mathcal{L}(X_n, ..., X_{n+k}) = \mathcal{L}(X_0, ..., X_k)$. En effet, $P\{X_n = i_0, ..., X_{n+k} = i_k\} = P\{X_n = i_0\}P\{X_{n+1} = i_1, ..., X_{n+k} = i_k/X_n = i_0\} = \mu_{i_0}^{(0)} p_{i_0,i_i} ... p_{i_{k-1},i_k} = P\{X_0 = i_0\}P\{X_1 = i_1, ..., X_k = i_k/X_0 = i_0\} = P\{X_0 = i_0, ..., X_k = i_k\}$. D'ou terminologie.

Remarque 1.9.1. *Il n'existe pas nécessairement de loi de probabilité stationnaire. Par exemple, avec $E = \mathbb{N}$ et le graphe associé*

$$0 \to 1 \to 2 \to ... \to i \to ...$$

le système $u_j = \sum_{i \geq 0} u_i p_{i,j} \qquad (i \geq 0)$ *se réduit à* $u_0 = 0, u_j = u_{j-1} \qquad (j \geq 1)$. *Les u_j sont donc identiquement nuls et u n'est pas une loi de probabilité sur E.*

Remarque 1.9.2. *Il pêut exister une infinité de lois de probabilité stationnaires. Par exemple, dans le modèle de la ruine du joueur, on vérifie que, pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, la loi $u = (\alpha, 0, ..., 0, 1 - \alpha)$ est une loi de probabilité stationnaire. Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions du système a été résolu dans le cas fini. Dans le cas infini dénombrable. La situation est plus complexe. Nous ne donnerons que quelques indictions. Traitons tout d'abord le cas fini.*
dans ce dernier cas, le fait que la matrice de transition est à coefficients réels positifs joue un role essentiel. Les résultats donnés ci-après reposent sur la théorie de Perron-Frobenuis des matrices à coefficients positifs. Les résultats utiles pour la présente étude sont donnés dans les compléments de ce chapitre.
Rapplons qu'une suite $(a_n) \qquad (n \geq 1)$ de nombres réels converge au sens de Cesaro vers a, si la suite des moyennes $((a_1 + a_2 + ... + a_n)/n) \qquad (n \geq 1)$ converge vers a, au sens ordinaire. On écrit indéfféremment

$$a_n \Rightarrow a, \qquad \qquad \lim_{n \to +\infty} c a_n = a.$$

Lemme 1.9.1. *Si le nombre des états est fini, alors $\mathcal{P}^n \to \Pi$. De plus, la matrice Π est stochastique et l'on a : $\Pi\mathcal{P} = \mathcal{P}\Pi = \Pi$ et $\Pi^2 = \Pi$.*

Preuve . soit E l'ensemble (fini) des états de la chaîne. La relation $\mathcal{P}^n \to \Pi$ signifie que pour tout couple d'états (i, j) on a : $(p_{i,j} + p_{i,j}^{(2)} + ... + p_{i,j}^{(n)})/n \to \pi_{i,j}$, où $\Pi = (\pi_{i,j}) \qquad ((i, j) \in E^2)$.

Maintenant, pour tout $i \in E$, on a : $\sum_{j\in E} \pi_{i,j} = \sum_{j\in E} \lim_n (p_{i,j} + p_{i,j}^{(2)} + ... + p_{i,j}^{(n)})/n = \lim_n \sum_{j\in E} (p_{i,j} + p_{i,j}^{(2)} + ... + p_{i,j}^{(n)})/n = \lim_n 1 = 1$. Ensuite, $\mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n.\mathcal{P} = \mathcal{P}.\mathcal{P}^n$. Le résultat s'en déduit en prenant la limite de ces deux expressions au sens de Cesaro.

Lemme 1.9.2. *Si l'état j est transient, alors pour tout $i \in E$, on a $p_{i,j}^{(n)} \to 0$, d'où $p_{i,j}^{(n)} \to 0$.*

Preuve . D'après la propostion précédente, on sait que $p_{i,j}^{(n)} \to 0$, d'où $p_{i,j}^{(n)} \to 0$.

Remarque 1.9.3. *Le précédent lemme est encore vrai lorsque E est infini dénombrable.*

Lemme 1.9.3. *Supposons que la chaîne est irréductible et possède un nombre fini d'états. Alors, pour tout couple (i, j) d'état,*

$$\pi_{i,j} = \frac{1}{M_{j,j}} = \pi_j,$$

où $M_{j,j} = \mathbb{E}^j[T_j]$ est le temps de retour moyen de j en j.

Preuve . d'après le corollaire précédente, la matrice $M = (M_{i,j},\ (i, j) \in E^2)$ est à coefficients finis. Divisons les deux membres de l'identité $M + (\mathcal{P} + ... + \mathcal{P}^n)\Delta = nU + \mathcal{P}^n M$, établie dans le théorème précédente, par n et faisons relation $\pi_{i,j} M_{j,j} = 1$, ou encore $\pi_{i,j} = 1/M_{j,j} = \pi_j > 0$.

Lemme 1.9.4. *Ce lemme est encore vrai dans le cas infini, dénombrable, si le processus est irréductible et positif.*

Théorème 1.9.1. *Si la chaîne de Markov a un ensemble fini d'états, alors*

(1) (Existence) il existe au moins une loi de probabilité stationnaire ; de façon précisé, à toute loi de probabilité initiale $\pi^{(0)}$, on peut associé une loi de probabilité stationnaire donnée par : $u = \mu^{(0)}\Pi$.

(2) (Unicité) les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) la loi de probabilité est unique ;

(b) pour tout $(i, j) \in E^2$ on a : $\pi_{i,j} = \pi_j$;

(c) le processus n'admet qu'une seul classe récurrente.

Si l'une des trois propriétés est vérifiée, l'unique loi de probabilité stationnaire est donnée par $u_j = \pi_j, (j \in E)$; en autre, cette loi de probabilité est portée par l'unique classe récurrente, c'est-à-dire, en désignant par $\mathcal{C}$ cette classe, on a les équivalences : $j \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \pi_j > 0$ et $j \in \mathcal{C}^c \Leftrightarrow \pi_j = 0$.

Preuve . (1) Comme $\mathcal{P}^n \to \Pi$, d'après 3, il suffit de vérifier que $u = \mu^{(0)}\Pi$ est solution de $u = u.\mathcal{P}$. Or $u\mathcal{P} = (\mu^{(0)}\Pi).\mathcal{P} = \mu^{(0)}(\Pi\mathcal{P}) = \mu^{(0)}\Pi = u$.
(2) $(a) \Rightarrow (b)$. Supposons que la loi de probabilité stationnaire $u = \mu^{(0)}\Pi$ soit unique. Alors elle doit être indépendante de la loi de probabilité initiale $\mu^{(0)}$. En faisant successivement $\mu^{(0)} = (1, 0, ..., 0), ..., \mu^{(0)} = (0, ..., 0, 1)$, on voit que l'on a $u_j = \pi_{1,j} = \pi_{2,j} = ...$, d'où (b).
$(b) \Rightarrow (a)$.Soit u une loi de probabilié stationnaire ; pour tout $n \geq 0$, elle vérifie $u = u\mathcal{P}^n$, d'où en prenant la limite au sens de Cesaro, $u = u\Pi$. Utilisons maintenant l'hypothèse (b) : pour tout $j \in E$, on a : $u_j = \sum_{i\in E} u_i\pi_{i,j} = \sum_{i\in E} u_i\pi_j = (\sum_{i\in E} u_i)\pi_j = \pi_j$. La loi de probabilité u est unique et pour tout $j \in E$ on a :$u_j = \pi_j$.
$(c) \Rightarrow (b)$. Soit $\mathcal{C}$ l'unique classe récurrente et $\mathcal{T}$ la réunion des classes transientes. Trois cas sont à considérer :
(i) i arbitraire, $j \in \mathcal{T}$, alors $p_{i,j}^{(n)} \to= \pi_j$, d'après le lemme précédente.
(ii) $i, j \in \mathcal{C}$, alors $p_{i,j}^{(n)} \to \pi_j > 0$, car la restriction du processus à classe $\mathcal{C}$ est irréductible. On peut donc faire usage du lemme précédente.
(iii) $i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{C}$, alors $p_{i,j}^{(n)} \to \pi_j > 0$, en faisant usage de l'argument suivant. Comme

$$p_{i,j}^{(m+k)} = \sum_{l\in\mathcal{C}} p_{i,l}^{(m)} p_{l,j}^{(k)} + \sum_{l\in\mathcal{T}} p_{i,l}^{(m)} p_{l,j}^{(k)}$$

on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,j}^{(m+k)} = \sum_{l\in\mathcal{C}} p_{i,l}^{(m)}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{l,j}^{(k)}) + \sum_{l\in\mathcal{T}} p_{i,l}^{(m)}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{l,j}^{(k)}).$$

Fixons m et faisons tendre n vers l'infini. D'après le nombre de gauche de la précédente relation tend $\pi_{i,j}$ et la seconds expression entre parenthèses tend vers $\pi_j > 0$. Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$ sont des ensembles finis, donc aussi les sommes les concernant, On obtient :

$$\pi_{i,j} = (\sum_{l\in\mathcal{C}} p_{i,l}^{(m)})\pi_j + \sum_{l\in\mathcal{T}} p_{i,l}^{(m)})\pi_{l,j}.$$

Faisons alors tendre m vers l'infini. Comme, pour tout $l \in \mathcal{T}$, on a $p_{i,l}^{(m)} \to 0$ et que les sommes qui interviennent sont sur des ensembles finis, il vient

$$p_{i,j} = p_j > 0.$$

$(b) \Rightarrow (c)$. Démontrons $\overline{(c)} \Rightarrow \overline{(b)}$. Supposons que le processus admette au moins deux classes récurrentes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. En numérotant les états dans l'ordre $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{R} = E \setminus (\mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2)$, les matrices $\mathcal{P}^n$ tels que $(n \geq 0)$ et Π sont toutes de la forme :

$$\begin{array}{cccc} & \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{R} \\ \mathcal{C}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_2 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{R} & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

On voit que , pour la matrice Π ; les lignes d'indice dans $\mathcal{C}_1$ ne correspondent pas avec celles d'indices dans $\mathcal{C}_2$. On a donc $\overline{(b)}$.

Théorème 1.9.2. *Considérons une chaîne de Markov irréductible, dont l'ensemble E des états est fini. Alors il existe une seule loi de probabilité stationnaire u donnée, par tout $i \in E$, par*

$$u_i = \pi_i = \frac{1}{M_{i,i}}.$$

Remarque 1.9.4. *On peut démontrer l'unicité d'une loi de probabilité, dans le cas d'un processus à une infinité dénombrable d'états, à condition qu'il soit irréductible et positif (et non seulement récurrent).*

1.9.1 Ergodicité

Définition 1.9.2. *On dit q'un état est ergodique s'il est récurrent positif et apériodique.*

L'ergodicité est une propriété de classe, puisque c'est le cas pour récurrence, la positivité et la périodicité une classe contenant un état ergodique est dite classe ergodique. Si l'ensemble des états est fini, si le processus irréductible et si lui mème une seul classe donc il est fermé et a-périodique, alors cette classe est ergodique. On dit aussi que la processus est ergodique.

1.10 Temps d'atteinte

On a introduit le temps d'atteinte de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ dans l'état j, comme état la variable aléatoire

$$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}.$$

On a posé également $f_{i,j}^{(n)} = P\{T_j = n/X_n = j\}$, une probabilité que l'on note également $P^i\{T_j = n\}$, en prenant, comme loi initiale de la chaîne, la loi de probabilité singulière ε_i.
l'espérence mathématique de T_j par rapport à la loi P^i est notée $M_{i,j} = \mathbb{E}^i[T_j]$. C'est le temps d'atteinte moyen dans j à pertir de i. Rappellons que l'on a posé $f_{i,j} = \sum_{n\geq 1} f_{i,j}^{(n)}$, de sorte que si $f_{i,j} < 1$, il vient $M_{i,j} = \infty$ et $f_{i,j} = 1$, on a

$$\mathbb{E}^i[T_j] = \sum_{n\geq 1} n f_{i,j}^{(n)},$$

une quantité qui peut être finie ou infinie. La quantité $M_{i,i}$ est appellée temps de retour moyen dans i ; l'inverse $1/M_{i,i}$ est la fréquence moyenne de retour en i. (Si $M_{i,i} = \infty$, on pose $1/M_{i,i}$).

Définition 1.10.1. *On dit que l'état i est positif, si $M_{i,i} < \infty$ et qu'il est nul si $M_{i,i} = \infty$.*

Théorème 1.10.1. *(Critère de positivité)*
Soit i un état ; si $\limsup_{n\to+\infty} P_{i,i}^{(n)} > 0$, l'état i est positif ;
si $\limsup_{n\to+\infty} P_{i,i}^{(n)} = 0$, l'état est nul.

Notons que i est transient, on sait que $P_{i,i}^{(n)} \to 0$, d'après la proposition précédente. Donc tout état transient est nul.

Théorème 1.10.2. *La propriété de positivité (de nullité) est une propriété de classe.*

Preuve . Ce théorème est une conséquence du critère de positivité. En effet, si j est un état nul et si $j \to i$ avec $i \neq j$, il existe des entiers n_1, n_2 tels que pour tout $n \geq 0$, on ait $P_{j,i}^{(n_2)} > 0$ et $P_{i,j}^{(n_1)} > 0$ et $P_{j,j}^{(n_2+n+n_1)} > P_{j,i}^{(n_2)} P_{i,j}^{(n_1)} P_{i,i}^{(n)}$. Alors $\lim_n P_{j,j}^{(n)} = 0 \Rightarrow \lim_n P_{i,i}^{(n)} = 0$ et l'état i est nul aussi.
Si $M_{i,i}$ est fini, on a forcément $f_{i,i} = 1$. Donc tout état positif est récurrent. De même, si $f_{i,i} < 1$, on a $M_{i,i} = \infty$; d'où tout état transient est nul. Il y a donc des classes récurrentes positives, des classes récurrentes nulles et toutes les classes transientes sont nulles. En revanche, lorsque l'ensemble des états est fini. Il n'y a pas de classe récurrente nulle, ou encore il y a identité entre état positifs et récurrents, d'une part, et état nuls et transtients, d'autre part. On peut vérifier cette dernière propriété de façon suivante. Soit i un état récurrente et C la classe (forcément finie) qui le contient. Si C ne contient que i, on a $P_{i,i}^{(n)}$, pour tout $n \geq 0$ et i est forcément positif. Si C une classe récurrente nulle et si elle contient au mois deux états, prenons $i \in C$, $\ j \neq i$. Comme $P_{i,i}^{(n+m)} \geq P_{i,j}^{(n)} P_{j,i}^{(m)}$ on prenant m tel que $P_{j,i}^{(m)} > 0$, on en déduit $\lim_n P_{i,j}^{(n)} = 0$. De même $\lim_n P_{j,i}^{(n)} = 0$. Or $\sum_{i,j\in C} P_{i,j}^{(n)} = card(C)$, d'où $\lim_n \sum_{i,j\in C} P_{i,j}^{(n)} = card(C) > 0$, une contradiction.

Théorème 1.10.3. *Les temps d'atteinte moyens $M_{i,j}$ vérifient dans $[1, \infty]$ la relation*

$$M_{i,j} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{i,k} M_{k,j}. \tag{1.2}$$

Preuve . On suppose que la chaîne est en i à l'instant 0 et on fait un conditionnement par rapport à la variable X_1. Alors $M_{i,j} = \mathbb{E}^i[T_j] = \mathbb{E}^i[\mathbb{E}^i[T_j/X_1]] = p_{i,j}\mathbb{E}^i[T_j/X_1] + \sum_{k\neq j} p_{i,k}\mathbb{E}^i[T_j/X_1 = k] = p_{i,j}.1 + \sum_{k\neq j} p_{i,k}(1 + M_{k,j}) = 1 + \sum_{k\neq j} p_{i,k} M_{k,j}$.
On peut récrire (1.2) sous forme matricielle comme suit : posons $M = (M_{i,j})$, puis

notons M^δ la matrice obtenue de M en remplaçant les coefficients diagonaux par 0 et U la mtrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors (1.2) se écrit :

$$M = U + \mathcal{P}M^\delta.$$

Si la chaîne de Markov est irréductible et si seule classe dont elle est formée est positive, alors , par définition, tous les coefficients diagonaux $M_{i,i}$ sont finis. Notons Δ la mtrice digonale dont les coefficients diagonaux sont les $M_{i,i}$. On peut écrire $M^\delta = M - \Delta$; d'où

$$M = U + \mathcal{P}(M - \Delta). \tag{1.3}$$

Théorème 1.10.4. *Si la chaîne est irréductible et si seul classe dont elle est formée est positive, alors la matrice M est à coefficients finis.*

Preuve . En itérant (1.3), on obtient $M = U+\mathcal{P}M-\mathcal{P}\Delta = U+\mathcal{P}(U+\mathcal{P}M-\mathcal{P}\Delta)-\mathcal{P}\Delta$, d'où, puisque $\mathcal{P}U = U$, l'intération $M = 2U + \mathcal{P}^2M - (\mathcal{P} + \mathcal{P}^2)\Delta = \cdots = nU + \mathcal{P}^nM - (\mathcal{P} + \cdots + \mathcal{P}^n)\Delta$. Comme $(\mathcal{P} + \cdots + \mathcal{P}^n)\Delta$ est une matrice à coefficients finis, on en déduit :

$$M + (\mathcal{P} + \cdots + \mathcal{P}^n)\Delta = nU + \mathcal{P}^nM.$$

En prenant le coefficient diagonal en (i, i), on obtient, pour tout $n \geq 1$, l'identité : $M_{i,i} + (p_{i,i} + \cdots + p_{i,i}^{(n)})M_{i,i} = n + \sum_k p_{i,k}^{(n)})M_{k,i}$, ou encore, pour tout $n \geq 1$,

$$(1 + p_{i,i} + \cdots + p_{i,i}^{(n)})M_{i,i} = n + \sum_k p_{i,k}^{(n)})M_{k,i}. \tag{1.4}$$

Soit alors j un état différrent de i. Par hypothèse, $i \to j$ et donc il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\alpha = p_{i,j}^{(n_0)} > 0$. L'identité (1.4) pour $n = n_0$ donne : $\infty > (1 + p_{i,i} + \cdots + p_{i,i}^{(n)} M_{i,i} = n_0 + \sum_k p_{i,k}^{(n_n)})M_{k,i} \geq n_0 + \alpha M_{j,i}$. D'où $M_{j,i}$ est fini et comme i et j sont arbitraires, le théorème est démontré.

Corollaire 1.10.1. *Soit C une classe positive. Alors tous les coefficients $M_{j,i}$, pour i et j dans C, sont finis.*

Preuve . En effet, la classe est forcément récurrent ; elle est donc close et la restriction de la chaîne aux seuls état de C est irréductible et formée évidemment d'une seul classe positive.

Corollaire 1.10.2. *Si une chaîne est irréductible et a un nombre fini d'états, alors la matrice M est à coefficient finis.*

Preuve . La seule classe indécomposable dont la chaîne est formée et nécessairement récurrente, donc positive. Le précédent théorème s'applique.

Corollaire 1.10.3. *Si une chaîne est irréductible et a un nombre fini r d'états et si de plus sa matrice de transition $\mathcal{P}$ est bistochastique (i.e. la somme des coefficients par colonne vaut 1), alors les cefficients diagonaux $M_{i,i}$ de la matrice M sont tous égaux à r.*

Preuve . En effet, $M_{i,i} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,j} M_{k,j}$, d'où, en somment sur i, la relation

$$\sum_i M_{i,j} = r + \sum_{k \neq j} \sum_i p_{i,j} M_{k,j} = r + \sum_{k \neq j} M_{k,j},$$

d'où $M_{j,j} = r,$ *pour tout* $j = 1, ..., r.$

Définition 1.10.2. *(Loi de probabilité conditionnelle du temps d'atteinte) pour tout couple (i,j) d'états et tout $n \geq 1$, on pose :*

$$f_{i,j}^{(n)} = P\{T_j = n / X_0 = 0\}.$$

Ainsi, $f_{i,j}^{(n)}(n \geq 0)$ est la probabilité pour que le processus, partant de l'état i, atteigne l'état j, pour la première fois, à l'instant n. Pour couple d'états (i,j), on pose, par convention, $f_{i,j}^{(0)} = 0$.

Théorème 1.10.5. *Pour tout entier $n \geq 1$, on a l'identité :*

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{i,j}^{(k)} p_{i,j}^{(n-k)}.$$

Puisque $f_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$ (symbole de kronecker ,qui vaut 1 si $i = j$ et 0 autrement) cette identité est encore valable pour $n = 0$ et $i \neq j$.

Preuve . Le processus passe de i à j en n étapes si et seulement si s'il passe de i à j pour la première fois en k étapes $(0 \leq k \leq n)$ et s'il passe ensuite de j à j en les $(n-k)$ suivantes. Ces chemins, pour des k distincts, sont disjoints et la probabilité d'une chemin pour k fixé est $f_{i,j}^{(k)} p_{i,j}^{(n-k)}$.
Ce raisonnement intuitif peut être rendu rigoureux de la façon suivante. Comme, pour $n \geq 1$,

$$\{X_n = j\} = \sum_{k=1}^{n-1} \{T_j = k, X_n = j\} + \{T_j = n\}$$

on en déduit

$$\begin{aligned} P\{T_j = k, X_0 = i\} &= \sum_{k=1}^{n-1} P\{T_j = k, X_n = j/X_0 = i\} + f_{i,j}^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P\{T_j = k/X_0 = i\} P\{X_n = j/T_j = k, X_0 = i\} + f_{i,j}^{(n)}. \end{aligned}$$

Or, pour $1 \leq k \leq n-1$, l'évènemet $\{T_j = k, X_0 = i\}$ est de la forme $\{A, X_k = j\}$, où A appartient à $U_{k-1} \subset U_k$. Par conséquent ;

$$P\{X_n = j/T_j = k, X_0 = i\} = P\{X_n = j/A, X_k = j\} = p_{i,j}^{(n-k)}.$$

Comme $P\{X_n = j/X_0 = i\} = p_{i,j}^{(n)}$ et $P\{T_j = k/X_0 = i\} = f_{i,j}^{(k)}$, il en résulte

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)} + f_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n)}.$$

1.11 Retournement du temps

Théorème 1.11.1. *On suppose que P est irréductible et ayant une probabilité invariante π. Soit (X_n) une chaîne de Markov de loi initial π et de matrice de transition P. Alors la suite $(Y_n, n \leq N)$ est une chaîne de Markov de loi initial π et de matrice de transition $\widetilde{P}$ où*

$$\pi \widetilde{p}_{i,j} = \pi p_{i,j}.$$

Preuve . On vérifie facilement que $\widetilde{P}$ est bien une matrice stochastique et que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_N = i_N, ..., Y_0 = i_0) &= \mathbb{P}(X_0 = i_N, ..., X_N = i_0) \\ &= \pi_{i_{N-1}} p_{i_N i_{N-1}} p_{i_1 i_0} \\ &= \pi_{i_{N-1}} \widetilde{p}_{i_{N-1} i_N} p_{i_{N-1} i_{N-2}} ... p_{i_1 i_0} \\ &= \widetilde{p}_{i_{N-1} i_N} ... \widetilde{p}_{i_0 i_1} \pi_{i_0}. \end{aligned}$$

1.12 Chaîne de Harris

Définition 1.12.1. *Une chaîne de Markov $x = (x(n), n \in \mathbb{N})$ est dit récurrente au sens de Harris (CMRH) s'il existe une mesure φ σ-finie définie sur $(E, \mathcal{E})$ telle que :*
$\forall x \in E, \forall G \in \mathcal{E}$, G est récurrent chaque fois que $\varphi\{G\} \geq 0$. Dans ce cas , φ est appelée "mesure de récurrence de X".

Une mesure σ-finie notée μ et définie sur $(E, \mathcal{E})$ est dite invariante si

$$\forall G \in \mathcal{E}, \mu\{G\} = \int_E \mu(dx)P(x, G).$$

Comme l'inique le théorème ci-dessous, la notation de récurrence au sens de Harris est trés interessante car elle garantit l'existence d'une mesure invariante. Mais il n'est pas toujours facile d'expliciter la mesure de récurrence. Pour plus de détails sur la notation de récurrnce au sens de Harris.

Lemme 1.12.1. *supposons que X est φ-irréductible et que $\forall G \in \mathcal{E}$, G est récurrent chaque fois que $\varphi\{G\} \geq 0$. Alors, X est une CMRH.*

Preuve . φ est la mesure récurrence.

Théorème 1.12.1. *X est supposée φ-irréductible. Soit $n(x)$ une fonction mesurable définie de E dans $\mathbb{N}$. x est récurrente positive au sens de Harris s'il existe ensemble petit G, une fonction positive H non bornée en dehors de G et une constante strictement positive c tels que*

$$\forall x \in E, \quad \int_E P^{n(x)}(x, dx')H(x') \leq H(x) - n(x) + c\mathbb{1}_G(x).$$

Dans ce cas, $\forall x \in E, E_x(\tau_G) \leq H(x) + c$ où $\tau_G = \inf\{n \in \mathbb{N}, X(n) \in G\}$.

Preuve . Voir par exemple [22]

Définition 1.12.2. *Soit ϕ est une mesure σ-finie non nulle sur $(\Omega, \mathcal{A})$, X est ϕ récurrente ou récurrente au sens de Harris si*

$$\forall A \in \mathcal{E}, [\phi(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E, \quad \mathbb{P}_x(\limsup_n (X_n \in A)) = 1]$$

$$\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{E}, [\phi(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E, \quad \mathbb{P}_x((X_n < \infty)) = 1],$$

et $S_A = \inf\{n : X_n \in A\}$.

Théorème 1.12.2. *S'il existe un ensemble mesurable petit $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sup_{x \in G} \mathbb{E}_x(\tau_G(1)) \leq \infty$ où $\tau_G(1) = \inf\{n \in \mathbb{N} : X(n) \in G\}$, alors X est une chaîne de Markov récurrente positive au sens de Harris.*

Lemme 1.12.2. *Si $X = \{x_n\}_n$ est ϕ récurrente, il existe une mesure σ-finie positive non nulle m équivalente à M_ϕ est invariante par P, $(mP = m)$, où*

$$M_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_E \phi(dx)P(x, .),$$

m est l'unique mesure σ-finie à une constante multiplicative prés.

Lemme 1.12.3. *Pour $c \in]0,1[$, il existe deux fonctions mesurables strictement positive a_c et b_c telle que*

$$U_c \geq a_c \otimes b_c\nu.$$

Proposition 1.12.1. *Il existe une fonction $h_0 \in \mathcal{U}_+$, strictement positive et strictement inférieur à 1, et une mesure m_0 équivalente a ν telle que*

$$U_{h_0} \geq U_{h_0}(h_0) \otimes m_0.$$

Preuve . Si on remplace a_c par $\inf(\frac{1}{2}c, a_c)$ dans le lemme précédente, on va supposer que $c \geq 2a_c$. Soit $h_0 = a_c$; alors on a :

$$U_{h_0} \geq U_{h_0} I_{c-h_0} U_c \geq \frac{1}{2} c U_{h_0} U_c \geq \frac{1}{2} c U_{h_0}(h_0 \otimes b_c\nu)$$

et il reste de poser $m_0 = \frac{1}{2} c b_c \nu$, pour completer la preuve.

Théorème 1.12.3. *Les assertions suivantes sont équivalantes :*

(i) X est récurrente au sens de Harris avec une mesure invariante m.

(ii) Il existe une fonction positive $h_0 \in \mathcal{U}_+$ et une mesure non nulle m_0 telle que $U_{h_0}(h_0) = \mathbb{1}$ sur E et $U_{h_0} \geq \mathbb{1} \otimes m_0$.

(iii) Il existe une mesure positive non nulle m_1 telle que

$$P[S_A < \infty] = U_A(\mathbb{1}_A) = 1.$$

Preuve . Il est clair que (i) implique (iii), et (ii) implique (i). Il reste de montrer que (iii) implique (ii).
Si on a (iii), X est m_1-irréductible. Par la proposition 15, il existe une fonction positive $h_o \in \mathcal{U}_+$ et une mesure m_0 équivalente à m_1 telle que $U_{h_0} \geq U_{h_0}(h_0 \otimes m_0)$. Il faut montrer que $U_{h_0}(h_0) = \mathbb{1}$. Lorsque h_0 est strictement positive il y a un nombre $\alpha \in]0,1[$ telle que l'ensemble $A = \{h_0 \geq \alpha\}$ est m_1-mesurable. Puisque $h_0 \geq \alpha \mathbb{1}_A$, on a $U_{h_0}(h_0) \geq U_{\alpha \mathbb{1}_A}(\alpha \mathbb{1}_A)$; appliquant à les noyaux U_A et $U_{\alpha \mathbb{1}_A}$, on a

$$U_{\alpha \mathbb{1}_A} = \sum_{n \geq 0} (1-\alpha)^n (U_A I_A)^n U_A.$$

Il result que

$$U_{\alpha \mathbb{1}_A}(\alpha \mathbb{1}_A) = \alpha \sum_{n \geq 0} (1-\alpha)^n (U_A I_A)^{n+1} 1 = \alpha \sum_{n \geq 0} (1-\alpha)^n = 1.$$

Ce qui termine la preuve.

Théorème 1.12.4. *Une chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris admet, à une constant multiplicative prés, une unique mesure invariante μ. De plus, si φ est une mesure de récurrence, alors $\forall G \in \mathcal{E}$, $\mu\{G\} \geq 0$ si $\varphi\{G\} \geq 0$ où μ est une mesure de récurrence.*

Définition 1.12.3. *Supposons que X est une $CMRH$ et que sa mesure invariante μ est finie. Alors X est dite récurrente positive au sens de Harris. Si en plus X est a-périodique, elle est dite ergodique au sens de Harris.*

Dans ce cas, la mesure invariante est normalisable en une loi de probabilité μ appelée la loi stationnaire de X. L'énoncé de quelques autres propriétés intéréssantes des $CMRH$ terminera ce paragraphe.

Théorème 1.12.5. *Si X est ergodique au sens de Harris de distribution stationnaire μ, alors $\forall x \in E$, la distribution $P^n(x,.)$ de $X(n)$ converge en variation totale vers μ, En particulier.*

$$\forall x \in E,\ \forall G \in \mathcal{E},\ P^n(x,G) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(G).$$

Définition 1.12.4. *Si m est une mesure bornée, on dit que X est récurrente positive(ergodique). Si m est une mesure non bornée, on dit que X est récurrente nulle.*

Il est clair que la chaîne de Harris est irréductible.

Théorème 1.12.6. *Si X est récurrente positive au sens de Harris, alors pour tout fonction $f \in L^1(\mu)$*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X(k)) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(f) = \int f d\mu,\ P_x - p.s.\ \forall x \in E.$$

Théorème 1.12.7. *Soit X est φ-irréductible alors :*

(1) Ou bien $G = \sum_{k=0}^{\infty} P_n$ est un noyau propre(c'est-à-dire $\exists E_n \in \mathcal{E};\quad E_n \subset E_{n+1}.\ \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$, et $G(x, E_x)$ bornée.

(2) Ou bien $\exists E' \in \mathcal{E},\quad \varphi(CE') = 0$, E' absorbant, alors X est φ-récurrente.

Preuve . Soit h_0 est la fonction dans la proposition 15. Soit $U_{h_0}(h_0) = \mathbb{1}$ φ-p.s.

(1) Supposons que : $\mathbb{1} - U_{h_0}(h_0)$ n'est pas φ-négligeable, ce qui implique que

$$< h_0 m_0, \mathbb{1} - U_{h_0}(h_0) >= c > 0$$

puisque

$$U_{h_0} \geq U_{h_0}(h_0) \otimes m_0,$$

on a

$$(U_{h_0} I_{h_0})^2 \mathbb{1} = U_{h_0}(h_0) - U_{h_0} I_{h_0}(\mathbb{1} - U_{h_0}(h_0)) \leq (1-c)(U_{h_0}(h_0))$$

et $(U_{h_0}I_{h_0})^n\mathbb{1} \leq (1-c)^{n-1}(U_{h_0}(h_0))$ et on a $Gh_0 = h_0+\sum_{n\geq 0}(U_{h_0}I_{h_0})^nU_{h_0}(h_0)$, alors Gh_0 est une fonction bornée, ce qui implique (1).
(2) Dans l'autre cas, $U_{h_0}(h_0) = \mathbb{1}$ φ-p.s, l'ensemple $F = \{U_{h_0}(h_0) = \mathbb{1}\}$ telle que $\varphi(CF) = 0$, et on affirme qu'il est un ensemble absorbant. L'équation $U_{h_0} = P + PI_{1-h_0}U_{h_0}$ implique $1 - U_{h_0}(h_0) \geq P((\mathbb{1} - h_0)(1 - U_{h_0}(h_0)))(x)$; pour $x \in F$, premier membre de l'inégalité est nul, $P(x, .)$ est nul en dohors de l'ensemble $\{(\mathbb{1}-h_0)(1-U_{h_0}(h_0)) = 0\}$ qui est égal a F, puisque $h_0 < 1$ sur E, et $P(x, E) = 1$, parce que $U_{h_0}(h_0) = 1$. Et par conséquant $P(x, F)$, alors F est un ensemble absorbant.

Proposition 1.12.2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) Les fonctions harmoniques bornées sont constantes.
(ii) La σ-algèbre $\mathcal{I}$ trivial.
(iii) Tout ensemble soit récurrent, soit transient.

Proposition 1.12.3. *Si X est une chaîne de Harris, m est l'unique mesure σ-finie P exessive.*

Preuve . λ est une mesure σ-finie exessive et h_0 est une fonction, la mesure $h_0\lambda$ est σ-finie, la proposition 16 implique que

$$h_0\lambda \geq (h_0\lambda)U_{h_0}I_{h_0} \geq ... \geq (h_0\lambda)(U_{h_0}I_{h_0})^n \geq ...$$

on passe à la limite, par le lemme de Fatou

$$h_0\lambda \geq \lambda(h_0)(h_0m)$$

alors $\lambda(h_0) < \infty$, d'autre part $h_0\lambda$ n'est pas σ-finie, puisque $m(h_0) = 1$, ce qui termine la preuve.

Lemme 1.12.4. *soit $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_{X_n}[S_A < \infty]$ est supermartingale converge p.s. vers $\mathbb{1}_{R(A)}$ quand n tend vers l'infinie.*

Preuve . Pour tout ν on a $\mathbb{P}_\nu$ p.s.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_n}[S_A < \infty] &= \mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_{\{S_A\circ\theta_n<\infty\}}/\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_{\{n+S_A\circ\theta_n<\infty\}}/\mathcal{F}_n],\end{aligned}$$

l'ensemble $\{n+S_A\circ\theta_n < \infty\}$ converge vers $R(A)$ quand $n \to \infty$, alors l'expression ci-dessus converge vers $\mathbb{E}_\nu[\mathbb{1}_{R(A)}/\mathcal{F}_n]$ $\mathbb{P}_\nu$-p.s, tells que $R(A) \in \mathcal{F}$.

Proposition 1.12.4. *Soit X une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris*
(i) L'ensemble A est transient.
(ii) $\mathbb{P}[S_A < \infty] = 0$ p.s.
(iii) $m(A) = 0$.

Preuve . (i) implique (iii), on suppose que $m(A) = 0$, alors pour tout k, $\mathbb{E}_m[\mathbb{1}_A(X_n)] = km(A) = 0$. Mais si A est récurrent, le premier membre de l'égalité tend vers l'infini qui est impossible, donc (iii) implique (i). Si A est récurrent, on a $\mathbb{P}[S_A < \infty] = 1$, alors ($ii$) implique ($i$) supposons que $m(\{x, \mathbb{P}_x[S_A < \infty] > 0\}) > 0$. Il existe un réel $a > 0$ telle que $m(\{\mathbb{P}_x[S_A < \infty] > a\}) > 0$, puisque X est de Harris, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_{X_n}[S_A < \infty] \geq a > 0 \quad p.s$$

et par le lemme 9 on a $\mathbb{1}_{R(A)} > 0$ p.s, $\mathbb{P}_{X_n}[R(A)] = 1$ pour tout $x \in E$, l'ensemble A est récurrent, donc (i) implique (ii).

1.13 Récurrence au sens de Harris en temps continu

Presque toutes les définions et propriétés du paragraphe précédente sont vraies en temps continu. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{A}(t), t \geq 0)$ telle que $\mathcal{A} = \vee_{t\geq 0}\mathcal{A}(t)$, $X = (X(t), t \geq 0)$ un processus markovien par rapport à $(\mathcal{A}(t), t \geq 0)$ homogène défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ un espace métrique séparable complet et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. $(\mathbb{P}_x, x \in E)$ est la famille de probabilités sur $(E, \mathcal{E})$ telle que

$$\forall x \in E, \forall G \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}\{G/X(0) = 0\} = \mathbb{P}_x\{G\},$$

$$\{P^t(x, G), \quad t \in \mathbb{R}_+, x \in E, \quad G \in \mathcal{E}\}$$

est le semi-groupe de transition de X

$$\mathbb{P}^t(x, G) = \mathbb{P}_x\{X(t) \in G\}.$$

Une mesure non nulle μ définie sur $(E, \mathcal{E})$ est dite invariante pour X si elle est σ-finie et

$$\mu(G) = \int_E P^t(x, G)\mu(dx), \quad (t \in \mathbb{R}_+, \quad G \in \mathcal{E}).$$

Comme en temps discret, on note $\tau_G = \inf\{t \geq 0, \quad X(t) \in G\}$ le premier temps d'entrée dans $G \in \mathcal{E}$

Définition 1.13.1. *Supposons qu'il existe une mesure σ-finie φ sur $(E, \mathcal{E})$ telle que*

$$\forall G \in \mathcal{E}, \quad \varphi(G) \geq 0 \Rightarrow P_x\{\tau_G \leq \infty\} = 1, \quad \forall x \in E.$$

Le processus X est alors dit récurrent au sens de Harris dont φ est une mesure de récurrence.

Dans ce cas, X admet, à une constante multiplicative prés, une unique mesure invariante μ (voir par exemple [15]). X est dit récurrent positif au sens de Harris si en plus μ est finie. Elle est donc normalisable en une loi de probabilité appelée disribution stationnaire de X. Supposons que X est récurrent positif et soit μ sa loi stationnaire. Pour tout fonction mesurable f définie sur $(E, \mathcal{E})$, on définit

$$\mu(f) = \int_E f(x)\mu(dx)$$

lorsque l'intégrale a un sens. On a la propriété ergodique suivante :
si $\mu(|f|) \leq \infty$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(X(s))ds = \mu(f)$, P_x-p.s.$\forall x \in E$ (voir par exemple [1]).

Définition 1.13.2. *Un ensemble mesurable $G \in \mathcal{E}$ est dite petit pour le processus X s'il existe une mesure de probabilité a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ et une mesure μ_a non triviale sur $(E, \mathcal{E})$ telles que*

$$\forall x \in G,\ \forall G' \in \mathcal{E},\ \int_0^\infty P^t(x, G')a(dt) \geq \mu_a(G'). \tag{1.5}$$

Quand (1.5) a lieu, nous dirons que G est μ_a-petit. Le lemme suivant est est un critère de récurrence positive au sens de Harris.

Lemme 1.13.1. *Soit G un ensemble petit fermé de $\mathcal{E}$. On suppose que $\forall x \in E$, $P_x\{\tau_G \leq \infty\} = 1$ (G est récurrent) et que pour un $\delta \geq 0$, $\sup_{x\in G} E_x(\tau_G(\delta)) \leq \infty$ où $\tau_G(\delta) = \inf\{t \geq \delta,\ \ X(t) \in G\}$.*
Alors, x est récurrent positif au sens de Harris.

Preuve . Voir par exemple [23].

Chapitre 2

La file GI/GI/1 et la maximum d'une marche aléatoire

2.1 Résultats généraux sur la file GI/GI/1

Les clients arrivent aux instants $t_n,\ n \in \mathbb{N}$ et le client d'indice n requiert le service de temps σ_n. les suites des interarrivées $(\tau_n) = (t_{n+1} - t_n)$ des clients à la file d'attente et de leurs temps de services (σ_n) sont supposées être *i.i.d* et indépendantes ; τ_n est la durée entre les arrivées des clients d'indice n et $n+1$. Les arrivées multiples sont exclues et donc $\mathbb{P}(\tau_1 > 0) = 1$. La charge de la file sera notée

$$\rho = \frac{\mathbb{E}(\sigma)}{\mathbb{E}(\tau)} = \lambda \mathbb{E}(\sigma).$$

Pour $n \geq 1$, W_n est le temps d'attente du n-ième client quand le client d'indice 0 attend la quantité ω. À l'instant $t_n + W_n + \sigma_n$ le n-ième client quitte la file d'attente, l'instant de début de service du $(n+1)$-ième client est $t_{n+1} + W_{n+1}$ est donc égal au $\max(t_{n+1}, t_n + W_n + \sigma_n)$. La suite (W_n) vérifie donc la relation suivante :

$$W_0 = w, \qquad W_n = (W_{n-1} + \sigma_n - \tau_n)^+, \tag{2.1}$$

quand $n \geq 1$, avec $a^+ = \max(0, a)$ pour $a \in \mathbb{R}$.
En posant $X_n = \sigma_n - \tau_n$, S_n désigne la suite des sommes partielles associées, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $S_0 = 0$, $n \geq 1$. Les variables sans indice X, σ, τ utilisées sont des variables géniriques indépendantes de même loi que les variables X_0, σ_0, τ_0 respectivement, enfin $\mathcal{F}_n$ désigne la tribu engendrée par $X_1, ..., X_n$.

Proposition 2.1.1. 1. *Si $\rho < 1$, (W_n) est une chaîne de Markov ergodique au sens de Harris. Cette suite converge en loi vers une unique variable W telle que*

$$W \overset{loi}{=} (W+X)^+, \tag{2.2}$$

avec W et $X = \sigma - \tau$ indépendants. De plus $\mathbb{P}(W=0) > 0$ et W a même loi que la maximum de la chaîne aléatoire associée à (X_n),

$$W \overset{loi}{=} \sup_{n\geq 0} S_n.$$

2. *Si $\rho > 1$, la chaîne de Markov est transiente et $\mathbb{P}$-presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = \mathbb{E}(\sigma) - \mathbb{E}(\tau).$$

Preuve . Par récurrence sur la relation (2.1),

$$W_n = (W_{n-1} + W_n)^+,$$

il est clair que (W_n, W_{n-1}) sont des variables indépendantes, et donc que (W_n) a la propriété de Markov. En itérant (2.1), l'identité suivante s'obtient facilement par récurrence,

$$W_n = \sup_{2\leq k\leq n+1} (\sum_{i=k}^n X_i) \vee (w + \sum_{i=1}^n X_i). \tag{2.3}$$

Si $\mathbb{E}(\sigma - \tau) < 0$, la loi des grands nombres montre que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$ converge p.s. vers la moyenne de X_1, $\mathbb{E}(\sigma - \tau) < 0$. En particulier, $\mathbb{P}$-p.s. la quantité $w + S_n = w + \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ tend vers $-\infty$, donc ne contribue plus la borne supérieure (2.3) à partir d'un certain rang ; $\mathbb{P}$-presque sûrement, la variable W_n ne dépend plus de w pour n suffisamment grand.

Les hypothèses d'indépendance et d'équidistribution des suites de variables (σ_i) et (τ_i) donnent l'identité

$$(X_1, X_2, ..., X_n) \overset{loi}{=} (X_n, X_{n-1}, ..., X_1),$$

d'où, avec la relation (2.3),

$$W_n \overset{loi}{=} \sup_{0\leq k\leq n-1} S_k(w + S_n). \tag{2.4}$$

La suite (W_n) converge donc en loi vers $\sup\{S_n/n \geq 0\}$ qui est fini $\mathbb{P}$-p.s. puisque la marche aléatoire converge p.s. vers $-\infty$. La chaîne de Markov (W_n) a donc une probabilité invariante et toutes ces trajectoires se rejoignent indépendamment du point initial. La proposition 3.13 de [1] assure que (W_n) est une chaîne de Markov Harris ergodique. L'équation (2.2) est l'equation de mesure invariante de cette chaîne de Markov. Si $\mathbb{P}(W = 0) = 0$, l'équation (2.2) peut s'écrire

$$W \stackrel{loi}{=} W + X,$$

en prenant la transformée de Fourier, on obtient $\mathbb{E}(\exp(\xi X)) = 1$ pour $Re(\xi) = 0$, soit $X = 0$, $\mathbb{P}$-p.s., d'après l'unicité de la transformée de Fourier. En particulier $\mathbb{E}(X) = 0$, et donc $\rho = 1$, contradiction. La partie $a)$ est montrée.

Si $\rho > 1$, l'identité (2.3) montre que $W_n \geq w + \sum_1^n X_i$ en utilisant encore la loi des grands nombres, $\mathbb{P}$-p.s.,

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{W_n}{n} \geq \mathbb{E}(\sigma) - \mathbb{E}(\tau) > 0$$

En particulier, $\mathbb{P}$-p.s. $W_n > 0$ à partir d'un certain rang (aléatoire) n_0, en sommant la relation (2.1) entre n_0 et n, il vient

$$W_n = W_{n_0} + \sum_{n_0+1}^{n} X_i,$$

d'où la dernière de la proposition.

Si $\rho < 1$ et $G(x) = \mathbb{P}(W \leq x)$, l'équation ci-dessous est la version analytique de (2.2)

$$G(x) = 0, x < 0 \quad et \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} G(x-y)X(dy), x \geq 0, \tag{2.5}$$

où $X(dy)$ est la distribution de $X = \sigma - \tau$. Une technique d'analyse complexe peut être utilisée pour résoudre (2.5), voir par exemple Gakhov [14]. Ce type d'approche présente toute fois l'inconvénient de perdre l'interprétation probabliste de (2.5). Une technique de marches aléatoires sera introduite pour traiter cette équation.
Le critique $\rho = 1$ n'est pas pris en considération dans la proposition précédente. Dans le cas où les services et les interarrivées sont i.i.d. et indépendants, la proposition ci-dessous montre que cette file d'attente est en fait instable prouvu que les variables σ ou τ ne soient pas constantes. La différences avec les cas $\rho > 1$ réside dans le taux d'explosion de la file : quand $\rho > 1$, le temps d'attente du n-ième client croît linéairement en n ; dans le cas critique, la croissance est seulement de l'ordre $\sqrt{n}$.

Proposition 2.1.2. *(File $GI/GI/1$: la cas critique.) Si $\rho = 1$ et σ et τ sont de carré intégrable et si l'une des deux variables est non dégénérée, la suite $(W_n/\sqrt{n})$ converge en loi vers la valeur absolue d'une variable gaussienne centrée de même variance que $\sigma - \tau$.*

Preuve . Comme W_0, la relation (2.4) montre que W_n a même loi que

$$V_n = \sup_{0 \le k \le n} S_k.$$

Si $\eta = \sqrt{\mathbb{E}((\sigma-\tau)^2)}$, pour $n \ge 0$ on définit la fonction continue $Y_n(t)$ sur $[0,1]$ valant $S_k/(\eta\sqrt{n})$ au point k/n pour $k = 0, ..., n$ et linéaire entre ces points,

$$Y_n(t) = \frac{1}{\eta\sqrt{n}}(S_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}), \qquad t \in [0,1],$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t. Les maxima de la fonction $t \to Y_n(t)$ sont nécessairement atteints aux points k/n, $k = 0, ..., n$, on en déduit l'égalité

$$\frac{V_n}{\eta\sqrt{n}} = \sup_{0 \le s \le 1} Y_n(s).$$

Le théorème de Donsker, voir Billingsey [4] par exemple, établit la convergence en distribution de la suite des processus $(Y_n(t))$ vers un mouvement brownien $(B(t))$. Si $C[0,1]$ est l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme, la fonctionnelle

$$g \longrightarrow \sup_{0 \le s \le 1} g(s),$$

est continue bornée sur $C[0,1]$. Par conséquent, pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, la fonctionnelle

$$g \longrightarrow f(\sup_{0 \le s \le 1} g(s)),$$

est continue bornée sur $C[0,1]$, ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(f(\sup_{0 \le s \le 1} Y_n(s))) = \mathbb{E}(f(\sup_{0 \le s \le 1} B(s))).$$

La variable $\sup_{0 \le s \le 1} Y_n(s)$ converge en loi vers $\sup_{0 \le s \le 1} B(s)$ qui a même loi que $|B(1)|$, voir Rogers et Williams [28] par exemple.

2.2 Factorisation de Wiener-Hopf

Cette section est consacrée à un résultat classique de marche aléatoire qui permet d'exprimer la loi stationnaire du temps d'attente. L'approche probabiliste exposée ici est due à Feller, nous suivons principalement la présentation due à Neveu [19].

Le petit lemme élémentaire suivant traduit la propriété de Markov forte d'une marche aléatoire.

Lemme 2.2.1. *Si $\nu : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt relativement à la filtration (F_n) tel que $\mathbb{P}(\nu < \infty) > 0$, sachant l'évènement $\{\nu < \infty\}$, la suite $(S_{\nu+n} - S_\nu)$ est indépendante du couple (S_ν, ν) et a même loi que la marche aléatoire initiale (S_n).*

Preuve . En effet, si $p \in \mathbb{N}$ et f, g sont deux fonctions boréliennes positives définies respectivement sur les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(f(S_{\nu+n} + S_\nu)g(S_\nu)\mathbb{1}_{\{\nu=p\}}) = \mathbb{E}(f(S_{p+n} - S_p)g(S_p)\mathbb{1}_{\{\nu=p\}}).$$

La variable $g(S_p)\mathbb{1}_{\{\nu=p\}}$ est $\mathcal{F}_p$-mesurable et $f(S_{p+n} + S_p)$ ne dépend que des X_k, $k \geq p+1$, l'indépendance des (X_n) donne l'égalité

$$\mathbb{E}(f(S_{\nu+n} + S_\nu)g(S_\nu)\mathbb{1}_{\{\nu=p\}}) = \mathbb{E}(f(S_n)\mathbb{E}(g(S_\nu)\mathbb{1}_{\{\nu=p\}}),$$

et donc le lemme.

Théorème 2.2.1. *(Factorisation de Wiener-Hopf). Pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$, il existe deux uniques fonctions $\phi_+(u, .)$ et $\phi_-(u, .)$ vérifiant les conditions suivantes :*

a) pour $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\xi) = 0$,

$$\frac{1}{1 - u\mathbb{E}(e^{-\xi X})} = \phi_+(u, \xi)\phi_-(u, \xi); \tag{2.6}$$

b) les fonctions $\phi_+(u, .)$ et $\phi_-(u, .)$ sont respectivement harmonique dans le demi-plan droit $\{Re(\xi) > 0\}$ et dans le demi-plan gauche $\{Re(\xi) < 0\}$ et continues bornées ainsi que leur inverse dans la fermeture de ce domaine ; de plus,

$$\lim_{Re(\xi)\to+\infty} \phi_+(u, \xi) = 1.$$

Preuve . La variable ν_- désigne le temps d'atteinte du demi-axe négatif, $\nu_- = \inf\{k > 0 / S_k \leq 0\}$, avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Il est clair que ν_- est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

L'indépendance et l'équidistribution des (X_n) donnent l'identité

$$\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi S_n}) = \sum_{n\geq 0} u^n (\mathbb{E}(e^{-\xi X}))^n = \frac{1}{1-u\mathbb{E}(e^{-\xi X})},$$

en séparant les ν_- premiers termes de la somme précédente, il vient

$$\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi S_n}) = \mathbb{E}(\sum_{0\leq n<\nu_-} u^n e^{-\xi S_n}) + \mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}} \sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi(S_{n+\nu_-}-S_{\nu_-})})).$$

Le lemme 11 montre que les variables (ν_-, S_{ν_-}) et la suite $(S_{n+\nu_-} - S_{\nu_-})$ sont indépendantes et $(S_{n+\nu_-} - S_{\nu_-})$ a même loi que (S_n). Le dernièr terme de l'égalité précédente vaut donc

$$\mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}})\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^{\nu_-} e^{-\xi}),$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{1-u\mathbb{E}(e^{-\xi X_0})} = \frac{\mathbb{E}(\sum_{0\leq n<\nu_-} u^n e^{-\xi S_n})}{1-\mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}}}. \tag{2.7}$$

En posant

$$\phi_-(u,\xi) = \frac{1}{1-\mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}}},$$

comme $S_{\nu_-} \leq 0$ et $\nu_- \geq 1$, il est clair que

$$0 < 1-|u| \leq |1-\mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}})| \leq 1+|u|;$$

la fonction $\phi_-(u,.)$ est par conséquent continue sur $\{Re(\xi)\leq 0\}$, harmonique sur $\{Re(\xi)\leq 0\}$ et bornée sur $\{Re(\xi)\leq 0\}$ ainsi que son inverse.
L'équation (2.7) suggère de pose

$$\phi_+(u,\xi) = \mathbb{E}(\sum_{0\leq n<\nu_-} u^n e^{-\xi S_n}),$$

par définition de ν_-, cette fonction s'exprime comme

$$\phi_+(u,\xi) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(u^n e^{-\xi S_n} \mathbb{1}_{\{S_1>0,\ldots,S_{n-1}>0,S_n>0\}}).$$

Il reste de à montrer que ϕ_+ possède les bonnes propriétés sur $\{Re(\xi)\leq 0\}$. Le vecteur $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ayant même loi que $(X_n, X_{n-1}, ..., X_1)$, on a l'égalité

$$(S_n, \mathbb{1}_{\{S_1>0,\ldots,S_{n-1}>0,S_n>0\}}) \stackrel{loi}{=} (S_n, \mathbb{1}_{\{S_n>S_1,S_n>S_{n-1},\ldots,S_n>0\}});$$

la fonction $\phi_-(u,.)$ peut donc s'écrire comme

$$\phi_+(u,\xi) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}(u^n e^{-\xi S_n} \mathbb{1}_{\{S_n>S_1, S_n>S_{n-1},\ldots,S_n>0\}}).$$

Si ν_+ désigne le premier temps de record de la marche aléatoire (S_n),

$$\nu_+ = \inf\{k > 0/S_k > S_{k-1}, \ldots, S_k > S_1, S_k > S_0 = 0\},$$

la condition initiale $S_0 = 0$ montre que ν_+ est aussi temps d'atteinte du demi- plan strictement positif $\nu_+ = \inf\{k > 0/S_k > 0\}$. La fonction ϕ_+ peut donc découper de la façon suivante :

$$\phi_+(u,\xi) = \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}} \sum_{n\geq \nu_+} u^{n-\nu_+} e^{-\xi(S_n - S_{\nu_+})} \mathbb{1}_{\{S_n>S_1, S_n>S_{n-1},\ldots,S_n>0\}}). \tag{2.8}$$

La somme dans l'équation (2.8) porte sur tous les instants où la marche aléatoire attient un record. Pour $n > \nu_+$, l'inégalité $S_n > S_{\nu_+}$ entraîne $S_n > S_k$ pour tout $k \leq \nu_+$; les instants records de la marche aléatoire (S_n) après l'instant $n = \nu_+$ sont donc aussi les instants de records associés à la marche aléatoire translatée $(S_{n+\nu_+} - S_{\nu_+})$, d'où

$$\begin{aligned}&\phi_+(u,\xi) = 1+\\ &\mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}} \sum_{n\geq \nu_+} u^{n-\nu_+} e^{-\xi(S_n - S_{\nu_+})} \mathbb{1}_{\{S_n - S_{\nu_+} > S_{n-1} - S_{\nu_+},\ldots,S_n - S_{\nu_+} > S_{\nu_+ +1} - S_{\nu_+},\ldots,S_n - S_{\nu_+} > 0\}}).\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le lemme 11, il vient

$$\begin{aligned}\phi_+(u,\xi) &= 1 + \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}}) \mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi S_n} \mathbb{1}_{\{S_n>S_{n-1},\ldots,S_n>S_1,S_n>0\}})\\ &= 1 + \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}}) \phi_+(u,\xi).\end{aligned}$$

La représentation de $\phi_+(u,.)$ est donc analogue à celle $\phi_-(u,.)$,

$$\phi_+(u,\xi) = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}})},$$

en particulier cette fonction et son inverse sont holomorphes sur $\{Re(\xi) < 0\}$ et continues bornées sur $\{Re(\xi) \geq 0\}$. Comme $S_{\nu_+} > 0$ si $\nu_+ < +\infty$, on en déduit

$$\lim_{Re(\xi)\to+\infty} \phi_+(u,\xi) = 1.$$

La preuve de l'existence de deux fonctions vérifiant $a)$ et $b)$ est donc achevée.

Unicité. Si ψ_+, ψ_- sont deux autres fonctions vérifiant a) et b), la relation (2.6) donne pour $|u| < 1$ et $Re(\xi) = 0$,

$$\frac{\psi_+(u,\xi)}{\phi_+(u,\xi)} = \frac{\phi_-(u,\xi)}{\psi_-(u,\xi)},$$

La fonction H définie par

$$H(\xi) = \begin{cases} \frac{\psi_+(u,\xi)}{\phi_+(u,\xi)} & \text{si } Re(\xi) \geq 0, \\ \frac{\phi_-(u,\xi)}{\psi_-(u,\xi)} & \text{si } Re(\xi) \leq 0, \end{cases}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{Re(\xi) = 0\}$ et continue sur , donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, en utilisant le théorème de Morera par exemple (voir Rudin [29]). Cette fonction étant bornée, le théorème de Liouville montre que H est une fonction constante, or

$$\lim_{Re(\xi)\to+\infty} H(\xi) = \lim_{Re(\xi)\to+\infty} \frac{\psi_+(u,\xi)}{\phi_+(u,\xi)} = 1,$$

ainsi $H \equiv 1$, soit $\psi_+ \equiv \phi_+$ et $\psi_- \equiv \phi_-$. La preuve du théorème est terminée.
Dans la preuve du théorème précédent, la propostion suivante a été montrée au passage.

Proposition 2.2.1. *Pour $|u| < 1$, les fonctions $\phi_+(u,.)$ et $\phi_-(u,.)$ de la décomposition du théorème précédent s'expriment sous la forme*

$$\phi_+(u,\xi) = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}})} = \mathbb{E}(\sum_{0 \leq n < \nu_-} u^n e^{-\xi S_n}),$$

pour $Re(\xi) \geq 0$, et

$$\phi_-(u,\xi) = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}})}$$

pour $Re(\xi) \leq 0$, avec

$$\nu_+ = \inf\{k > 0 / S_k > 0\} \quad et \quad \nu_- = \inf\{k > 0 / S_k \leq 0\}.$$

Par conséquent, pour $|u| < 1$ et $Re(\xi) = 0$,

$$\frac{1}{1 - u\mathbb{E}(e^{-\xi X_0})} = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}})} \times \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_-} e^{-\xi S_{\nu_-}})}. \tag{2.9}$$

La décomposition qui été obtenue en ϕ_+ et ϕ_- ou encore en ν_+ et ν_- n'est pas complètement symétrique. Les instants où la marche atteint 0 ont été arbitrairement au "$-$" de la décompostion, ce qui entraîne que $S_{\nu_+} \leq 0$ si ν_- est fini et S_{ν_-} si ν_+ est fini, d'où la condition

$$\lim_{Re(\xi)\to+\infty} \phi_+(u,\xi) = 1.$$

Cette différence n'intervient pas si la loi de X ne charge pas les points ; dans ce cas, la décomposition est symétrique.

Le lemme de Spitzer. La proposition précédente donne une interprétation probabiliste des deux fonctions ϕ_+ et ϕ_- de la décomposition de Wiener-Hopf. On peut aussi obtenir cette décomposition de la façon suivante : pour $|u| < 1$ et $\xi \in \mathcal{C}$ tel que $Re(\xi) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - u\mathbb{E}(e^{-\xi X})} &= \exp(-\log(1 - u\mathbb{E}(\exp(-\xi X)))) \\ &= \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \mathbb{E}(\exp(-\xi X))^n) \\ &= \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \mathbb{E}(\exp(-\xi S_n))),\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - u\mathbb{E}(e^{-\xi X})} &= \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \mathbb{E}(\exp(-\xi S_n) \mathbb{1}_{\{S_n > 0\}})) \\ &\times \exp(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n} \mathbb{E}(\exp(-\xi S_n) \mathbb{1}_{\{S_n \leq 0\}})).\end{aligned}$$

Si on définit respectivement ψ_+ et ψ_- comme les deux fonctions du membre droit de l'identité précédente, elles satisfont clairement les conditions du théorème 27. On obtient donc un autre expression probabiliste des fonctions ϕ_+ et ϕ_-. Pour les questions abordées dans ce chapitre, cette représentation sera cependant peu utile : l'expression des $\exp(-\xi X)\mathbb{1}_{\{S_n > 0\}})$ n'est, en général, pas facile à obtenir ; cela ne permet donc pas l'expliciter la décomposition. Et réciproquement, si la décomposition est connue, cette formulation donne peu d'informations sur la marche aléatoire. La représentation de la proposition 21 permet d'obtenir les loi jointes respectives de (ν_+, S_{ν_+}) et (ν_-, S_{ν_-}).

2.3 Application à la file GI/GI/1

La loi maximum d'une marche aléatoire est aussi la loi du temps stationnaire de file GI/GI/1 d'après la proposition 19. Cette loi s'exprime à l'aide de la décomposition de Wiener-Hopf.

Proposition 2.3.1. *Si $W_0 = 0$, la loi de la suite (W_n) des temps d'attente des clients d'une file GI/GI/1 vérifie pour $|u| < 1$ et $Re(\xi) \geq 0$,*

$$(1-u)\sum_{n\geq 0} u^n \mathbb{E}(e^{-\xi W_n}) = \frac{\phi_+(u,\xi)}{\phi_+(u,0)}, \tag{2.10}$$

où $\phi_+(u,.)$ est la fonction définie sur le demi-plan droit de la factorisation de Wiener-Hopf de la variable $X = \sigma_1 - \tau_1$. En particulier, sous la condition $\rho < 1$, la transformée de Laplace de la loi stationnaire du temps d'attente est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{-\xi W}) = \lim_{u\to 1} \frac{\phi_+(u,\xi)}{\phi_+(u,0)},$$

pour $Re(\xi) \geq 0$.

Preuve . La suite (W_n) définie par (2.1) est une fonctionnelle de la marche aléatoire (S_n). On décompose de la même façon que dans la preuve précédente,

$$\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi W_n} = \sum_{0\leq n<\nu_1} u^n e^{-\xi W_n} + u^{\nu_-} \sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi W_{\nu_-+n}}. \tag{2.11}$$

pour $n < \nu_-$, par définition de ν_-, $S_k > 0$ pour tout $k \leq n$, et d'après la relation (2.1)

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 = S_0,\ W_1 = (X_1)^+ = S_1,\ W_2 = (S_1 + X_2)^+ = S_2, ..., \\ W_n &= (S_{n-1} + X_n)^+ = S_n, \end{aligned}$$

pour $n < \nu_-$; de plus

$$W_{\nu_-} = (S_{\nu_- - 1} + X_{\nu_-})^+ = (S_{\nu_-})^+ = 0,$$

le client d'indice ν_- est le premier client après 0 à ne pas attendre. Le premier terme du membre de droite de l'égalité (2.11) peut s'écrire

$$\sum_{0\leq n<\nu_1} u^n e^{-\xi S_n}.$$

La suite (W_{ν_-+n}) vérifie $W_{\nu_-} = 0$ et pour $n \geq 0$,

$$W_{\nu_-+n+1} = (W_{\nu_-+n1} + X_{\nu_-+n+1})^+,$$

qui n'est autre que la relation (2.1) pour la suite translatée (X_{ν_-+n}). La suite (W_{ν_-+n}) est donc la suite (W_n) associée à (X_{ν_-+n}). Le lemme 11 montre que (W_{ν_-+n}) a même loi que (W_n) et est indépendant de ν. En prenant l'espérance de l'identité (2.11), il vient

$$\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi W_n}) = \mathbb{E}(\sum_{0\leq n<\nu_-} u^n e^{-\xi S_n}) + \mathbb{E}(u^{\nu_-})\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi W_n}),$$

par conséquent,

$$\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} u^n e^{-\xi W_n}) = \frac{\mathbb{E}(\sum_{0\leq n<\nu_1} u^n e^{-\xi S_n})}{1-\mathbb{E}(u^{\nu_-})}.$$

La représentation de ϕ_+ de la proposition 21 donne

$$\phi_+(u,0) = \frac{1-\mathbb{E}(u^{\nu_-})}{1-u},$$

et égale l'égalité (2.10).
Sous l'hypothèse $\rho < 1$, d'après la proposition 19, la suite (W_n) converge en loi vers W, soit

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(e^{-\xi W_n}) = \mathbb{E}(e^{-\xi W}),$$

pour tout ξ tel que $Re(\xi) \geq 0$; il est facile d'en déduire la relation suivante :

$$\lim_{u\to 1}(1-u)\sum_{n\geq 0} u^n \mathbb{E}(e^{-\xi W_n}) = \mathbb{E}(e^{-\xi W}),$$

la proposition est établie.

2.4 Les cycles d'occupation

Au cours de la preuve de la proposition 21, il a été montré que si ν_- est fini, ν_- est l'indice du premier client après 0 qui n'attend pas. La variable t_{ν_-} est par conséquent la durée du premier cycle d'occupation de la file d'attente et à $t = t_{\nu_-}$, un nouveau cycle d'occupation commence. La charge totale traitée pendant cette première période vaut $\sum_1^{\nu_-} \sigma_i$ et la quantité $-S_{\nu_-} = t_{\nu_-} - \sum_1^{\nu_-} \sigma_i$ n'est autre que le temps de liberté du serveur pendant le premier cycle d'occupation.

Sous l'hypothèse $\rho < 1$, les périodes d'occupation sont $\mathbb{P}$-presque sûrment finies. Le deuxième cycle d'occupation est une fonction de la suite $(\sigma_{n\wedge\nu_+}, \tau_{n\wedge\nu_+})$ qui est indépendante de la suite finie $(\sigma_{n\wedge\nu_-}, \tau_{n\wedge\nu_-}$ d'après le lemme 11. Les cycles d'occupation sont donc indépendants et équidistribués. De la proposition 21, on déduit le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Sous la condition $\rho < 1$, la transformée de Laplace de la durée I d'une période de vacances est donnée par*

$$\mathbb{E}(e^{-\xi I}) = \lim_{u\to 1} 1 - \frac{1}{\phi_-(u,-\xi)},$$

pour $Re(\xi) \geq 0$, et la fonction génératrice du nombre de clients servis pendant une période d'occupation par

$$\mathbb{E}(u^{\nu_-}) = 1 - \frac{1}{\phi_-(u,0)}.$$

2.5 Le nombre de clients

Si $\rho < 1$ et le temps d'attente W_0 du client 0 suit la loi du temps d'attente stationnaire W, la relation

$$W \overset{loi}{=} (W + X)^+$$

montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le temps d'attente W_n du n-ième client a même loi que W. La variable Z_n désigne le nombre de clients à l'arrivée du n-ième client. Clairement, si $1 \leq k \leq n$, le n-ième client trouve au moins k clients dans la file d'attente à son arrivée si le client arrivé à t_{n-k} n'est pas encore partie, ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n \geq k) &= \mathbb{P}(t_{n-k} + W_{n-k} + \sigma_{n-k+1} > t_n) \\
&= \mathbb{P}(W_{n-k} + \sigma_{n-k+1} - \tau_{n-k+1} > \sum_{i=n-k+2}^{n} \tau_i);
\end{aligned}$$

les variables $W_{n_k},\ \sigma_{n-k+1},\ \tau_i,\ \ n-k+1 \leq i \leq n$, étant indépendantes, on en déduit l'égalité

$$\mathbb{P}(Z_n \geq k) = \mathbb{P}(W_0 + \sigma_0 - \tau_0 > \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i).$$

Si $k \geq 2$, la variable $t_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau_i$ est $\mathbb{P}$-p.s. strictement positive, par conséquent,

$$\mathbb{P}(Z_n \geq k) = \mathbb{P}(W_0 + \sigma_0 - \tau_0)^+ > t_{k-1}) = \mathbb{P}(W > t_{k-1}),$$

d'après la relation (2.2). L'égalité précédente montre que la variable Z_n converge en loi quand n tend vers l'infini, d'où l'identité

$$\mathbb{P}(Q \geq k) = \mathbb{P}(W > t_{k-1}),$$

où Q est la loi asymptotique des (Q_n) ; cette relation est aussi vraie pour $k = 1$ puisque $\{Q \geq 1\} = \{W > 1\}$.

Proposition 2.5.1. *Sous la condition $\rho < 1$, si Q est le nombre de clients dans la file d'attente à l'équilibre que trouve un client à son arrivée, alors pour $k \geq 1$,*

$$\mathbb{P}(Q \geq k) = \mathbb{P}(W > t_{k-1}), \tag{2.12}$$

où t_{k-1} est la somme de $(k-1)$ variables indépendantes de même loi que τ et W est une variable aléatoire indépendante de t_{k-1} distribuée suivant la loi du temps d'attente stationnaire.

La distribution de la loi du temps d'attente à l'équilibre donne la distribution du nombre de clients que trouve un client à son arrivée.

2.6 La charge de la file d'attente

La charge $V(t)$ de la file d'attente à l'instant t est la somme des services restant à effectuer par le service à ce instant. C'est aussi le temps qu'il faudrait attendre pour que la file se vide s'il n'y avait plus d'arrivées après t.
La charge juste avant l'arrivée d'un client est par conséquent le temps d'attente de ce client, pour $n \in \mathbb{N}$, $V(t_n^-) = W_n$; W_n est la charge vue par un client qui arrive et $V(t)$ est la charge vue par un observateur extérieur.
L'indépendance du temps d'attente et de la valeur du service d'un client pour la discipline FIFO parmet de récrire la formule de Takàcs de la façon suivante :

$$\mathbb{E}(e^{-\xi V}) = 1 - \lambda\mathbb{E}(\sigma) + \lambda\mathbb{E}(e^{-\xi W})\frac{1-\mathbb{E}(e^{-\xi\sigma})}{\xi}, \tag{2.13}$$

pour $Re(\xi) \geq 0$. La loi du temps d'attente à l'équilibre donne la loi de la charge stationnaire.

2.7 Représentations de la loi de W

La condition $\rho < 1$ est supposée être satisfait dans cette partie.
1. La représentation de ϕ_+ de la proposition 21, pour $|u| < 1$ et $Re(\xi) \geq 0$,

$$\phi_+(u,\xi) = \mathbb{E}(\sum_{0 \leq n < \nu_-} u^n e^{-\xi S_n}),$$

et la proposition 22 donnent

$$\mathbb{E}(e^{-\xi W}) = \lim_{u \to 1} \mathbb{E}(\sum_{0 \leq n < \nu_-} u^n e^{-\xi W_n}) \frac{1-u}{1-\mathbb{E}(u^{\nu_-})};$$

comme $W_n = S_n$ pour $0 \leq n < \nu_-$, il vient

$$\mathbb{E}(e^{-\xi W}) = \frac{\mathbb{E}(\sum_{0 \leq n < \nu_-} e^{-\xi W_n})}{\mathbb{E}(\nu_-)}.$$

La variable ν_- est le temps de retour à 0 de la chaîne de Markov (W_n), l'équation ci-dessus n'est que la représentation habituelle de la mesure invariante d'une chaîne de Markov.
2. Une autre expression de la fonction ϕ_+ est donnée par la proposition 21,

$$\phi_+(u, \xi) = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}})},$$

la proposition 22 montre que si pour $Re(\xi) > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-\xi W}) = \lim_{u \to 1} \frac{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+})}{1 - \mathbb{E}(u^{\nu_+} e^{-\xi S_{\nu_+}})} = \frac{1 - \mathbb{P}(\nu_+ < +\infty)}{1 - \mathbb{E}(e^{-\xi S_{\nu_+}} \mathbb{1}_{\{\nu_+ < +\infty\}})},$$

en particulier, comme S_{ν_+} si $\nu_+ < +\infty$, en faisant tendre $Re(\xi)$ vers l'infini, il vient

$$\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(\nu_+ = +\infty). \tag{2.14}$$

Si $\alpha = \mathbb{P}(\nu_+ < +\infty)$, on obient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-\xi W}) &= \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha \mathbb{E}(e^{-\xi S_{\nu_+}} \mid \nu_+ < +\infty)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n (1 - \alpha) \mathbb{E}(e^{-\xi S_{\nu_+}} \mid \nu_+ < +\infty)^n, \end{aligned} \tag{2.15}$$

autrement dit, la proposition suivante est vérifiée.

Proposition 2.7.1. *Si (Z_i) est une suite i.i.d de variables aléatoires indépendantes, distribuées comme S_{ν_+} sachant l'évènement $\{\nu_+ < +\infty\}$, le temps d'attente stationnaire W a même que*

$$\sum_{i=1}^{G} Z_i,$$

où G est une variable géométrique de paramètre $\mathbb{P}(\nu_+ < +\infty)$ indépendante de la loi suite (Z_i).

L'identité précédente est facile à obtenir directement. La proposition 19 montre que la loi de W est celle du maximum de la marche aléatoire (S_n) associée à $\sigma - \tau$ partant de 0.

Si la marche aléatoire passe au-dessus de 0, i.e. sur l'évènement $\{\nu_+ < +\infty\}$, partant de $t = \nu_+$ à la position S_{ν_+}, la marche repart comme de $t = 0$ en 0, indépendamment du passé (lemme 11). Partant de cette position, si la marche passe encore au-dessous de 0, le maximum sera au moins égal à la somme de deux variables indépendantes distribuées comme S_{ν_+} sachant l'évènemet $\{\nu_+ < +\infty\}$, et ainsi de suite. Le maximum s'écrit donc comme une somme géométrique de variables indépendantes de même loi que S_{ν_+} sachant $\{\nu_+ < +\infty\}$. Le paramètre de la variable géométrique étant $\mathbb{P}(\nu_+ < +\infty)$, d'où la représentation précédente de la loi de W.

Chapitre 3

Stabilité et instabilité d'un réseau à deux stations et cinq files d'attente

3.1 Le modèle d'un réseau de file d'attente et résultats principaux

On considère le modèle de file d'attente à deux stations et cinq files d'attente suivante :

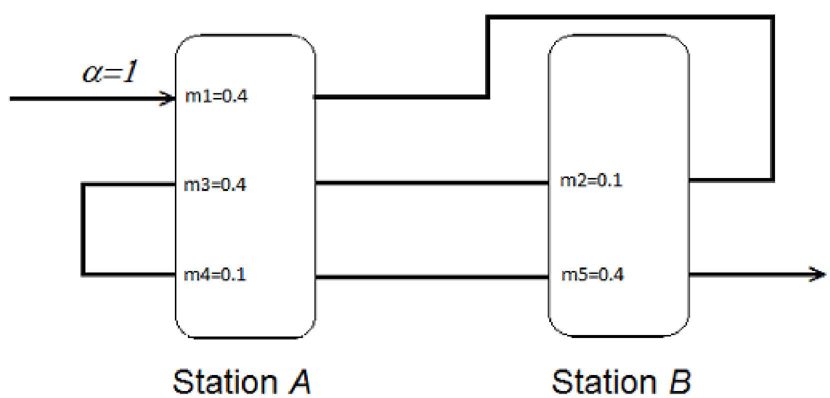

FIGURE 3.1 – Le réseau de Lu-kumar.

Les clients arrivent de l'extérieur et suivent l'itinéraire suivant : $(1, A) \rightarrow (2, B) \rightarrow (3, A) \rightarrow (4, A) \rightarrow (5, B)$ formant ainsi 5 files d'attente ou bien classes.

La file 1 est l'ensemble des clients venant de l'extérieur et attendant leurs tours devant $A, ...,$ la classe 5 est l'ensemble des clients qui attendant devant B avant de quitter le réseau. Nous désignons par m_k la moyenne de temps de service consacré au client qui se trouve dans la classe k, est une suite de variables aléatoires $i.i.d.$ les temps des interarrivées des clients venant de l'extérieur sont également supposés égaux à α_1 ou des variables aléatoires $i.i.d.$ de moyenne $\frac{1}{\alpha_1}$. Nous supposons de plus que les temps de services sont mutuellement indépendantes. Elles sont des constantes ou bien des variables exponentielles. Nous référons au réseau associé comme réseau déterministe ou réseau exponentiel. Maintenant, nous discutons la discipline de service. Quand la station A ou B termine le service d'un client, elle doit sélectionner la classe à servir. Nous supposons que notre réseau suit la discipline (SBP), abréviation de non-idling static buffer priority, $\pi = \{(A : (1, 3, 4), (B : (2, 5))\}$. Sous cette discipline, les ordres de priorité dans les stations A et B sont respectivement $1, 3, 4$ et $5, 2$. Le terme "nonidling policy" signifie que les stations n'ont pas le droit de prendre un temps de repos, sauf s'il n'y a pas de clients. Cette discipline est bien définie à condition qu'aucun client d'une classe prioritaire n'arrive au moment où la station sert un client d'une classe inférieure. Nous somme amenés à considèrer des modèles avec non-préemption et avec préemption. Sous la discipline de service avec non-préemption, le service n'interrompe pas le service d'un client d'une classe inférieur pour servir un client de la classe prioritaire. Dans le cas contraire, la discipline est appelée discipline avec préemption. La section 3.2 est consacrée au réseau déterministe sous la discipline (SBP) avec sans préemption et dans la section 3.3, on étudie le réseau exponentiel sous la même discipline mais sans préemption. Dans la suit, $Z_k(t)$ représente le nombre de clients (ou bien langueur de la file) dans la classe k à l'instant t, et $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t), Z_4(t), Z_5(t))$ est le vecteur correspondant, on note par $|Z(t)|$ le nombre totale des services dans le réseau à l'instant t.

3.2 Le réseau déterministe

On considère un réseau déterministe qui suit la discipline (SBP) avec non préemption. L'état du système à l'instant t est donc complètement déterminée par le vecteur $(Z_1, ..., Z_5, a)$.

Théorème 3.2.1. *pour un réseau déterministe qui suit la discipline de service* (SBP)*, sans préemption, commençons par un état quelconque, il existe un temps fini à lequel le réseau entre dans un a-orbit, avec* $0 < a < 0.1$.

Lemme 3.2.1. *Commençons par un état initial* $(0, 0, 0, 1, 0; a)$ *avec* $0 < a < 0.1$*, la trajectoire du réseau retourne à cette état initial aprés une minute.*

Preuve . la preuve est suivi de simplifié et examiné la suite des états qui sont visité par le réseau à la première minute.

Temps	Etat
0	$(0,0,0,1,0;a)$
a	$(1,0,0,1,0;1)$
0.1	$(1,0,0,0,1;a+0.9)$
0.5	$(0,1,0,0,0;a+0.5)$
0.6	$(0,0,1,0,0;a+0.4)$
1.0	$(0,0,0,1,0;a)$

Définition 3.2.1. *(1) Un état $(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, a)$ est dit régulier s'il existe $t \geq 1$ tel que*

$$Z(t) = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, a).$$

(2) Un état de type 1 est un état de la forme $(0,0,0,n,0;a)$ avec $n \geq 0$ et $0 \leq a \leq 1$.
(3) Un état de type 2 est un état de la forme $(0,1,0,n,0;a)$ avec $n \geq 0$ et $0 \leq a \leq 1$.

Lemme 3.2.2. *(1) Pour un état régulier de type 1, on a $n \geq 1$, $0 \leq a \leq 0.1$.*
(2) Pour un état régulier de type 2, on a $0 \leq a \leq 0.6$.

Lemme 3.2.3. *Commençons par un état régulier de type 1, le réseau entre dans un a-orbite pendant $(n-1)$ minutes.*

Preuve . si $n = 1$, la preuve est suit notre définition d'un a-orbite. Pour $n \geq 2$ la preuve est suit l'observation la suite des états suivantes :

Temps	Etat
0	$(0,0,0,n,0;a)$
a	$(1,0,0,n,0;1)$
0.1	$(1,0,0,n-1,1;a+0.9)$
0.5	$(0,1,0,n-1,0;a+0.5)$
0.6	$(0,0,1,n-2,1;a+0.4)$
1.0	$(0,0,0,n-1,0;a)$

Lemme 3.2.4. *À partir de tout état initial (régulier), on peut atteindre soit un état de type 1, soit un état de type 2.*

Preuve . D'abord, nous posons $r = \inf\{t \geq 0 : Z_1(t) = 0\}$, c'est-à-dire le premier instant où la classe 1 est vide. Il est clair que r est fini quelque soit l'état initial, et que $Z_1(t) \leq 1$ pour tout $t \geq r$. Pour voir ça, comme le service dans la classe 1 a une priorité plus élèvé, et les temps des services sont rapide que le taux d'arrivées, il existe un temps fini à lequel $Z_1(t) = 0$, aprés que la classe 1 est dirigé à la première fois, toutes les clients dans la classe 1 prenons sont services pendant 0.4 minutes aprés qu'ils arrivent. Puisque on une arrivée toute minute, la classe 1 n'admet pas plus qu'un seul client, aprés qu'il dirige à la première fois. Maintenant, on pose $t_1 = \inf\{t \geq r : Z_2(t) + Z_5(t) = 0\}$, c'est-à-dire t_1 est le premier instant aprés r où la station B se vide. Par le lemme de l'appendice, t_1 est fini. De plus, à partire de la condition au-dessus, nous avons $Z(t_1) = (1, 0, m, n, 0; a)$ ou $Z(t_1) = (0, 0, m, n, 0; a)$, où m et n sont des entiers positifs et $0 \leq a \leq 1$. On note qu'à la date t_1, le client en service à la station A a peut être déjà entamé son service. On distingue trois cas :

1 *cas*. Un client de la classe 1 ou la classe 3 est en service au temps t_1.
Dans ce cas, aucun client de la classe 4 ne peut être servi en raison de la discipline $A(1, 3, 4)$. On note par t_2 le premier instant aprés t_1 où un client de la classe 4 a doit d'être servi. Ainsi, $Z_5(t) = 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. D'autre part, juste avant t_2, si la station A a servi le client de la classe 1 alors l'état du système est $Z(t_2) = (0, 1, 0, n, 0; a)$, et les clients des classes 2 et 4 entament au même temps leurs services, donc c'est un état de type 2, et si la station A a servi le client de la classe 3, ainsi, on a $Z_2(t_2) = 0$, et l'état du système est $Z(t_2) = (0, 0, 0, n, 0; a)$ avec $n \geq 1$ et $0 \leq a \leq 0.1$, on a bien un état de type 1 à l'instant t_2. En générale pour que $Z(t_2)$ est un état régulier, on a $0 \leq a \leq 0.6$.

2 *cas*. À l'instant t_1 la classe 4 en service et $Z_1(t_1) = Z_3(t_1) = 0$. Alors nous avons $Z(t_1) = (0, 0, 0, n, 0; a)$ avec $n \geq 1$ et $0 \leq a \leq 0.1$, et nous somme dans un état régulier de type 1, le client de la classe 4 a déjà entamé le passage par la station A à la date t_0. Grace au fait que $Z_4(t_0) = Z_4(t_1) = n$, il est facile de voir que $Z(t_0) = (0, 0, 0, n, 0; a)$, c'est bien un état régulier de type 1. Sinon, $Z(t_0) = (0, 0, 0, n, 1; a)$ avec $n \geq 1$ et $0 \leq a \leq 0.1$, dans ce cas la classe 5 a un temps de service partiellement resté inférieure à 0.1 minutes, alors la forme de cette état comme un état de type 1.

3 *cas*. À l'instant t_1 la classe 4 est dans le service, et $Z_1(t_1) = 1$ ou $Z_3(t_1) \geq 0$. Si $Z_1(t_1) = 1$, et si t_2 est le temps où le client de la classe 4 termine son service, alors $t_2 \leq t_1 + 0.1$, et nous avons $Z(t_2) = (1, 0, m, n - 1, 1; a)$ avec $a \geq 0.9$. À ce moment, les clients des classes 1 et 5 entament le service. Aprés 0.4 minutes, l'état est $Z(t_2 + 0.4) = (1, 0, m, n - 1, 1; a)$. Si $m = 0$, le réseau dans état régulier de type 2. Si $m \geq 0$, alors 0.1 minutes plus tars, le client de la classe 2 rentre dans la classe 3 laissant la station B vide . Dans ce cas le réseau dans un état de la forme du cas 1 avec un client de classe 3 en service. D'autre part, si $Z_1(t_1) = 0$, alors en $t_2 \leq t_1 + 0.1$, nous avons, soit $Z(t_2) = (1, 0, m, n - 1, 1; a)$ avec $a \geq 0.9$, soit $Z(t_2) = (0, 0, m, n - 1, 1; a)$ avec $m \geq 0$. Le dernier cas a été déjà discuté ci-dessus.
Dans le dernier cas, en $t_2 + 0.4$, nous serons dans un état régulier de type 1 (s'il

n y a aucune arrivée et $m = 1$) ou nous serons retourné dans le cas 1.

Preuve du théorème 28 : La preuve du théorème 28 d'écoule des lemmes précédents. Prenant ces lemmes ensemble, on montre que le réseau entame une a-orbite à partir de tout état initial.

3.3 Réseau exponentiel

Le résultat principal de cette section est suivant :

Théorème 3.3.1. *Pour le réseau exponentiel qui suit la discipline de service* (SBP) *sans préemption, à partir de tout état initial,* $|Z(t)| \to \infty$ *quand* $t \to \infty$ *avec probabilité* 1.

La preuve de ce théorème est basé sur le théorème suivant :

Théorème 3.3.2. *On considère le réseau exponentiel qui suit la discipline de service* (SBP) *avec non-préemption. Soit* n *un entier trés grand. On suppose que* $Z(0) = (0, z_2, 0, n, z_5)$ *avec un client de la classe* 4 *qui entame un service au temps* 0 *et un client de la classe* 2 *non en service au temps* 0_+. *Alors pour tout* $0 < \theta < 1$, *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* n *suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_4(T_4) \geq \frac{(1-m_1)m_5}{1-m_1-m_3}\theta n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon\sqrt{n}), \tag{3.1}$$

où

$$T_2 = \inf\{t > 1 : Z_3(t) = Z_4(t) = Z_5(t) = 0\}, \tag{3.2}$$

et

$$T_4 = \inf\{t > T_2 : \begin{array}{l} \textit{un client de la classe 4 entame} \\ \textit{le service au temps } t \textit{ un client de la classe 2} \\ n'\textit{est pas en service en } t_+\}. \end{array} \tag{3.3}$$

De plus, pour tout n *suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{|Z(t)| \geq \frac{n}{4}, \forall t \in [0, T_4]\} \geq 1 - \exp(-\epsilon\sqrt{n}).$$

Pour la décomposition de ce théorème, nous avons besoin des résultats auxiliaires suivants :

3.3.1 Le cycle inférieur

Le but de cette sous section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.3.3. *On suppose que $Z(0) = (0, z_2, 0, n, z_5)$ avec un client de la classe 4 qui entame un service au temps 0 et un client de la classe 2 non en service au temps 0_+. Alors pour tout $0 < \theta_1 < 1$, il existe un $\epsilon_1 > 0$ et T_2 un temps Markov (comme défini dans 29 avec $Z(T_2) = (Z_1(T_2), Z_2(T_2), 0, 0, 0)$) tels que pour tout n suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_1(T_2) + Z_2(T_2) \geq \theta_1 m_5 n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon\sqrt{n}).$$

Nous présentons maintenant un nombre de définitions nécessaires pour la preuve du théorème 31.

3.3.2 Période d'occupation de la classe 5 et périodes impures

Nous allons subdiviser la période $(0, T_2)$ de la façon suivante. À la date $\sigma_1 = 0$, par hypothèse, la classe 4 entame son service et la classe 2 n'est pas en service. Par conséquent, la classe 5 est aussi en servive à la date σ_1 ou bien entame son service au plus tard à l'instant ou elle reçoit le premier client de la classe 4. Nous allons attendre le premier instant ou la classe 5 se vide et la classe 2 entame son service. Cet instant est noté par τ_1 et est défini par

$$\tau_1 = \inf\{t \geq \sigma_1 : Z_2(t) \geq 1, Z_5(t) = 0\}.$$

La date τ_1 peut coincide avec la fin d'un cycle d'occupation de la classe 5, (si à la date de cette fin, la classe 2 est non vide) ou bien est un instant qui se trouve dans un intervalle de temps ou la classe 5 est vide et le premier client vient de rentrer dans la classe 2. On laisse le réseau fonctionner et on guette le premier retour à la situation initiale, c'est-à-dire la classe 4 entame un service et la classe 2 n'est pas en service. Si cet instant est fini, on laisse encore le réseau fonctionner pour retourner la situation de la date τ_1. Par récurrence, si τ_1 est défini, on pose

$$\begin{aligned}\sigma_{i+1} = \inf\{t \geq \tau_i : \ & \text{un client de la classe 4 entame le service au temps } t \\ & \text{la classe 2 n'est pas en service au temps } t_+\},\end{aligned}$$

$$\tau_{i+1} = \inf\{t \geq \sigma_{i+1} : Z_2(t) \geq 1, Z_5(t) = 0\}.$$

L'instant σ_{i+1} peut être infini, lorsque après τ_i, la classe 4 reste bloquée ou bien à chaque fois ou elle entame un service, la classe 2 est en service. Si $\sigma_{i+1} < \infty$, alors nécessairement, les classes 1 et 3 sont vides à cet instant, Durant $[\sigma_i, \tau_i)$ la station B soit serve le client de la classe 5 soit reste chômage ; n'existe pas des services allons de la classe 2 à la classe 3, alors la classe 3 reste vide pendant cet période ; si la classe 4 est vide à l'instant τ_i, c'est la fin du cycle inférieur

$$r = \inf\{i \geq 0, Z_4(\tau_i) = 0\}. \tag{3.4}$$

Il est clair que $T_2 \in (\sigma_r, \tau_r]$, r est le plus petit indice de i tel que $\tau_i \geq T_2$. On résume ces résultats dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *(a) Pour chaque i, la classe 3 est vide durant $[\sigma_i, \tau_i)$.*
(b) Durant l'intervalle $[\sigma_i, \tau_i)$, la station B sert les clients de la classe 5 ou reste inactive. Dans le dernier cas, la classe 2 est nécessairement vide.
(c) Pour tout $i < r$, la classe 4 est en service durant l'intervalle $[\tau_i, \sigma_i)$.

On dit que l'intervalle $[\sigma_i, \tau_i)$ la i-ème période d'occupation de la classe 5, et $[\tau_i, \sigma_{i+1})$ la i-ème période impure pour $i = 1, 2, ...$, si $i < r$ la i-ème période d'occupation est incomplète, si $i = r$, on dit qu'il est la dernière période d'occupation. Il est clair que toutes ces temps aléatoires dépend de paramètre n en générale dépend de l'état initiale $Z(0)$. Quand le réseau dans la période d'occupation de la classe 5, les services de la classe 4 en moyenne sont plus rapide que les services de la classe 5, encore avec interromption pour servir les clients de la classe 1 avec un priorité plus élèvé.

Lemme 3.3.1. *On suppose qu'à l'instant t, un client de la classe 4 entame un service et la classe 2 non en service. À l'instant t', ce client de la classe 4 termine son service. Ensuite, soit $t'' \geq t'$ le premier instant où la classe 1 est vide, aprés que la classe 4 ait terminé un service. On pose $u_1 = t'' - t'$. Alors*

$$\mathbb{E}[u_1] = \frac{m_4}{1 - m_1} < m_5.$$

De plus, u_1 est indépendant les évènements qui ont lieu avant t.

Preuve . Soit $[\sigma_i, \tau_i)$ une période d'occupation de la classe 5. À l'instant $\sigma_i = t$, la classe 4 entame son service. Si M_4 le temps de ce service, alors à l'instant $t' = t + M_4$, la classe 4 termine ce service.
Le prochain service de la classe 4 a lieu à la date t''. Soit $u_1 = t'' - t = s_1 + v_1$ avec $s_1 = t' - t$, $v_1 = t'' - t'$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_1) \; &= \mathbb{E}(s_1 + \mathbb{E}(v_1)) \\ &= m_4 + \mathbb{E}(v_1), \end{aligned}$$

on a

$$\mathbb{E}(u_i) = \mathbb{E}(v_i) + m_4. \tag{3.5}$$

Soit N_i ; le nombre de clients arrivés vers la classe 1 durant $[t, t']$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N_i) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[N_i/s_i]) \\ &= \mathbb{E}(\alpha_1 s_i) \\ &= \mathbb{E}(s_i) = m_4.\end{aligned}$$

Utilisons la même procédure aprés de conditionné par N_i, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(v_i) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[v_i/N_i]) \\ &= \mathbb{E}[\frac{m_1}{1-m_1}N_i] \\ &= \frac{m_1}{1-m_1}\mathbb{E}[N_i] \\ &= \frac{m_1}{1-m_1}m_4.\end{aligned}$$

En utilisons dans la dexième ligne la formule de temps moyenne d'observation en zéro à partir de l'état N (voir par exemple e.g.Krlin et Taylor [18], p149) Par conséquant,

$$\mathbb{E}(u_i) = \frac{m_4}{1-m_1}.$$

Finalement, quand un client de la classe 4 entame un service, nécessairement, les classes 1 et 3 sont vides. Le fait que les lois exponentilles sont sans mémoire et vu l'indépendance des temps de service, les interarrivées sont *i.i.d.*
Le lemme 16 affirme que dans une période d'occupation de la classe 5, les inter-arrivées vers la classe 5 sont plus courte en moyenne que les temps de service. Maintenant, nous sommes en mesure de montrer que r est fini.

Lemme 3.3.2. *Il existe une constante* $0 < c < 1$ *telle que pour tout* $i \geq 1$*,*

$$\mathbb{P}\{r \geq i\} \leq c^i.$$

Preuve . Nous notons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{r > i\} &= \mathbb{P}\{r > i-1,\ \tau_i < \infty,\ Z_4(\tau_i) > 0\} \\ &= \mathbb{P}\{r > i-1\}\mathbb{P}\{\tau_i < \infty,\ Z_4(\tau_i) > 0/r > i-1\}.\end{aligned}$$

Sur les évènements $\{r > i-1\}$,$\{\sigma_i < \infty\}$ le réseau commence une nouvelle période d'occupation en σ_i avec l'état $Z(\sigma_i)$. Considérons un processus de vie de mort sur $\{1, 2, 3, ...\}$ avec un taux de naissance $\frac{1-m_1}{m_4}$ qui est plus grand au taux de mort $\frac{1}{m_5}$, alors par le lemme 16, le nombre de clients $Z_5(t)$ durant la période d'occupation $[\sigma_i, \tau_i)$ peut être vu comme un processus de vie et de mort.
Au début du période d'occupation, un des clients de classe 5 est en service ou bien

la station B est vide. Dans ce dernier cas, le client arrivera à la classe 5 quand le premier client dans la période termine son service dans la classe 4. Dans l'un et l'autre cas, nous supposons, sans perte de généralité que $Z_5(t)$ (processus de vie et de mort) commence d'un état qui est supérieur ou égal à 1. Comme

$$\{\tau_i < \infty, Z_4(t) > 0\} \subset \{ \begin{array}{l} \text{Le processus de naissance et de mort} \\ \text{est jamais atteidre l'état } 0\}, \end{array}$$

et

$$\mathbb{P}\{\text{le processus de vie et de mort est jamais atteindre l'état } 0\} = c$$

alors

$$\mathbb{P}\{r > i\} \leq \mathbb{P}\{r > i-1\}c.$$

Pour tout i. Ce qui achève la preuve.
Comme conséquance du lemme, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.1. *(a)* $\mathbb{P}\{r < \infty\} = 1$.
(b) $\mathbb{P}\{T_2 < \infty\} = 1$.

Preuve . La partie (a) vient du lemme 17. De la partie (a), nous avons $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = 1$. Il s'ensuit que $\mathbb{P}\{T_2 < \infty\}$, ce qui implique (b).
Maintenant, nous montrons que le nombre de clients dans les classes 4 et 5 à l'instant σ_r est proche de n avec une grande probabilité.

Théorème 3.3.4. *Pour tout $0 < \theta_2 < 1$, il existe un ϵ_2 tel que pour tout n suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_4(\sigma_r) + Z_5(\sigma_r) \geq \theta_2 n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_2\sqrt{n}).$$

La preuve du théorème sera donnée à la fin de la sous-section. Pour la facilité, nous devons examiner en détails comment les clients quittent la classe 5. Nous appelons un écoulement un travail effectué par la classe 5 durant $[0, \sigma_r]$.
Maintenant, nous contrôlons le nombre d'écoulement pendant la période impure $[\tau_i, \sigma_{i+1})$. Par définition, la classe 5 est nécessairement vide au début d'une période impure $[\tau_i, \sigma_{i+1})$. Par conséquent, durant toute la période impure, le nombre d'écoulements est majoré par le nombre de services de la classe 4 durant cette période. Il est possible que le premier travail de la classe 4 durant la période impure soit entamé avant cette période impure.

Lemme 3.3.3. *Soit q_i le nombre de clients de la classe 4 qui entament le service au cours de la i-ème période impure. Il existe une constante c avec $0 < c < 0$ telle que pour $i = 1, ...,$*

$$\mathbb{P}\{q_i > 2j\} \leq c^j, \text{ pour } j = 0, 1, ... \tag{3.6}$$

Preuve . On fixe une période impure $[\tau_i, \sigma_{i+1})$. Quand un client de la classe 4 entame le service au temps $t \in [\tau_i, \sigma_{i+1})$, un client de la classe 2 doit être en service. Sinon, la période impure se termine à l'instant $t < \sigma_{i+1}$. Ceci est contradictoire avec la définition de σ_{i+1}.
On considère maintenant la suite des évènements suivants à partir de l'instant t.

1. Le client de la classe 4 termine le service entamé avant le client de la classe 2.
2. Un deuxième client de la classe 4 entame le service.
3. Le client de la classe 2 termine le service et devient un client de la classe 3.
4. Un client de classe 5 entame le service.
5. Un deuxième client de la classe 4 termine le service.
6. Le client de classe 3 entame le service.
7. Le client de la classe 3 termine le service et devient un client de la classe 4. À cet instant, le troisième client de la classe 4 entame le service tandis que le client de la classe 5 est toujours en service terminant ainsi la période impure.

Pour que ces évènements aient lieu, il suffit qu'il ait pas d'arrivées d'extérieur vers la classe 1 pendant la période empure entière.
Soit ζ_k le temps en lequel le k-ème client de la classe 4 entame le service au cours de cette période impure.
Soit A_k l'intersection de la suite d'évènement $(1-7$ ce-dessus). Si A_k se produit, la période impure se termine avec $(k+1)$ clients de la classe 4 ayant entamé des services. Anisi,

$$\{q_i > 2j\} = \{\zeta_{2j+1} < \sigma_{i+1}\} \subset \{\zeta_{2j-1} < \sigma_{i+1}\} \cap A^c_{2j-1},$$

où A^c_k est le complémentaire de A_k.
En utilisant la propriété de sans mémoire de la distribution exponentielle, on montre que la probabilité $\mathbb{P}\{A_k/\zeta_k < \sigma_{i+1}\}$ est strictement supérieure à 0. En notant cette probabilité différente de zéro par $1-c$, nous avons $c = \mathbb{P}\{A^c_k/\zeta_k < \sigma_{i+1}\} < 1$. On note que cette probabilité c dépend seulement des paramètres de réseau, c'est-à-dire la moyenne des interarrivées et les temps de services. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{q_i > 2j\} &= \mathbb{P}\{\zeta_{2j+1} < \sigma_{i+1}\} \\
&\leq \mathbb{P}\{\zeta_{2j-1} < \sigma_{i+1}\}.\mathbb{P}\{A^c_{2j-1}/\zeta_{2j-1} < \sigma_{i+1}\} \\
&= \mathbb{P}\{\zeta_{2j+1} < \sigma_{i+1}\}c \\
&\dots \\
&\leq \mathbb{P}\{\zeta_1 < \sigma_{i+1}\}c^j \\
&\leq c^j,
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.6).
En suite, nous voulons contrôler le nombre d'écoulemments qui se produisent durant la i-ème période d'occupation pour $i < r$.

Lemme 3.3.4. *Il existe un ϵ_3 tel que pour tout n suffisamment grand, pour chaque*

$$i = 1, 2, ...,$$

$$\mathbb{P}\{\textit{le nombre des écoulements durant } [\sigma_i, \tau_i) \textit{ excéde } \sqrt{n}, i < r\} \leq \exp(-\epsilon_3\sqrt{n}).$$

Preuve . Durant $[\sigma_i, \tau_i)$, le processus de la longueur de la file de la classe 5 est identique au processus de la longueur de file d'attente dans une file d'attente $G/G/1$ avec des temps d'interarrivées donnés par le lemme 16, les temps d'interarrivées sont $i.i.d$ de moyenne $m_4/(1 - m_1) < m_5$. À l'instant σ_i, ou bien la station B sert un client de la classe 5, ou bien elle est vide. dans le dernier cas, la classe 2 est nécessairement vide, le premier client de la classe 4 termine son service durant la période d'occupation et il passe à la classe 5 et commencera le service durant la période d'occupation. D'autre cas, appliquons le lemme 30 à la date d'arrivée du premier client vers la classe 5 durant la période d'occupation, on obtient le résultat suivant.

Preuve du théorème 32 : Soit $\delta = 1 - \theta_2$. Alors $\delta > 0$ et

$$\mathbb{P}\{Z_4(\sigma_r)+Z_5(\sigma_r) \geq \theta_2 n\} \geq 1-\mathbb{P}\{\text{plus de } \delta.n \text{ écoulements de la classe 5 dans } [0, \sigma_r]\}$$

Soit

$$A = \{\text{plus de } \delta.n \text{ écoulements durant } [0, \sigma_r]\}.$$

Pour calculer la probabilité de A, Nous avans

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap \{r \geq \sqrt{n}\}) + \mathbb{P}(A \cap \{r < \sqrt{n}\}) \\
&\leq \mathbb{P}(\{r \geq \sqrt{n}\}) + \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{[\sqrt{n}]}\{\text{plus de } \delta\sqrt{n} \text{ écoulements durant}[\sigma_i, \sigma_{i+1}), i < r\}) \\
&\leq \mathbb{P}'(\{r \geq \sqrt{n}\}) + (\sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]}\mathbb{P}\{\text{plus de } \delta\sqrt{n} \text{ écoulements durant}[\sigma_i, \sigma_{i+1}), i < r\}) \\
&\leq \exp(-\epsilon_4\sqrt{n}) + [\sqrt{n}]\exp(-\epsilon_5\sqrt{n}) \\
&\leq \exp(-\epsilon_2\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

Dans la seconde ligne (en parlant du bas) de la preuve, le premier terme vient directement du lemme 17, avec un ϵ_4 approprié. Le deuxième terme dans la même ligne vient des lemmes 18 et 19 aussi avec un ϵ_5 approprié. L'inégalité finale est valable pour un certain $\epsilon_2 > 0$ si n est suffisamment grand.

3.3.3 Cycle intermédiaire

Nous allons étudier le cycle intermédiaire $[\sigma_i, T_2]$ entre les cycles inférieur et supérieur. On commence par estimer la durée $T_2 - \sigma_r$.

Lemme 3.3.5. *Soient σ_r et T_2 des temps de Markov définis en (3.4) et (3.2) respectivement. Alors pour tout $0 < \theta_3 < 1$, il existe un $\epsilon_6 > 0$ tel que pour n suffisamment drand,*

$$\mathbb{P}\{T_2 - \sigma_r < \theta_3 m_5 n\} \leq \exp(-\epsilon_6 \sqrt{n}).$$

Preuve . Par la définition de T_2, tout les clients présents dans les classes 4 et 5 à l'instant σ_r quittent le réseau aprés $T_2 - \sigma_r$ minutes. D'aprés le théorème 32, nous avons pour tout $0 < \theta_2 < 1$, la classe 5 doit servir les $\theta_2 n$ clients sauf sur un ensemble exponentiellement petit. Ainsi, $T_2 - \sigma_r$ est la somme d'au moins $\theta_2 n$ variables aléatoires exponentielles $i.i.d$ de moyenne m_5. En appliquant le lemme 29 et en utilisant le théorème 32, nous avons, pour tout $\alpha > 0$, il existe un $\epsilon_7 > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{T_2 - \sigma_r < \theta_2 m_5 n - \alpha n\} &\leq \exp(-\epsilon_7 n) + \exp(-\epsilon_2 \sqrt{n}) \\
\mathbb{P}\{T_2 - \sigma_r < \theta_3 m_5 n\} &\leq \exp(-\epsilon_7 n) + \exp(-\epsilon_2 \sqrt{n}) \\
\mathbb{P}\{T_2 - \sigma_r < \theta_3 m_5 n\} &\leq \exp(-\epsilon_6 \sqrt{n})
\end{aligned}$$

où nous avons posé $\theta_3 = \theta_2 - \alpha/m_5$ pour obtenir le deuxième expression ci-dessus. Comme α peut être arbitrairement petit, nous pouvons obtenir l'inégalité pour tout $0 < \theta_3 < 1$. Maintenant, comme nous avons une minoration sur le temps d'occupation de la classe 5, nous pouvons obtenir une minoration sur le nombre de clients qui doivent être dans les classes 1 et 2 au temps T_2. C'est le théorème 31, qui est le résultat principal pour le cycle inférieur.

Preuve du théorème 31 : Soit $E_1(.)$ le processus de comptage pour les arrivées externes de la classe 1 et soit Y_n le temps de la (n)-ième arrivée durant $[\sigma_r, T_2]$. Nous choisissons $\alpha > 0$. En appliquant le lemme 21 nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{E_1[\sigma_r, T_2] < \theta_3 m_5 n - \alpha n\} \leq \mathbb{P}\{E_1[\sigma_r, T_2] < \theta_3 m_5 n - \alpha n / T_2 - \sigma_r \geq \theta_3 m_5 n\} \\
+ \exp(-\epsilon_6 \sqrt{n}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ensuite, nous appliquons le lemme 29 à la dernière inégalité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{E_1[\sigma_r, T_2] < \theta_3 m_5 n - \alpha n / T_2 - \sigma_r\} &= \mathbb{P}\{Y_{[\theta_3 m_5 n - \alpha n]} > T_2 - \sigma_r / T_2 - \sigma_r \geq \theta_3 m_5 n\} \\
&\leq \mathbb{P}\{Y_{[\theta_3 m_5 n - \alpha n]} > \theta_3 m_5 n\} \\
&\leq \mathbb{P}\{Y_{[\theta_3 m_5 n - \alpha n]} > \alpha n + \theta_3 m_5 n - \alpha n\} \\
&\leq \mathbb{P}\{Y_{[\theta_3 m_5 n - \alpha n]} > [\alpha n + \theta_3 m_5 n] - \alpha n\} \\
&\leq \exp(-\epsilon_8 n).
\end{aligned}$$

Maintenant, en posant $\theta_1 = \theta_3 - \alpha/m_5$, nous avons

$$\mathbb{P}\{E_1[\sigma_r, T_2] < \theta_3 m_5 n\} \leq \exp(-\epsilon_8 n) + \exp(-\epsilon_6 \sqrt{n}) < \exp(-\epsilon_1 \sqrt{n}).$$

Pour n suffisamment grand. Ensuite, comme toutes les arrivées externes dans l'intervalle $[\sigma_r, T_2]$ doivent encore être dans les classes 1 et 2 à l'instant T_2, nous avons

$$Z_1(T_2) + Z_2(T_2) \geq E_1[\sigma_r, T_2].$$

En combinant ceci avec l'inégalité précédente, le théorème s'ensuit.

3.3.4 Cycle supérieur

L'instant T_2 est le début du cycle supérieur. En vertu du théorème 31, au temps T_2, il y a au moins $\theta_1 m_5 n$ clients dans les classes 1 et 2 sauf sur un ensemble exponentiellement petit.
Afin d'énoncer les principaux résultats de cette section, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 3.3.1. *Soit* $T_3 = \inf\{t > T_2 : Z_2(t) + Z_3(t) = 0\}$*, c'est-à-dire, à l'instant* T_3 *les classes* 2 *et* 3 *se vident.*

Nous définissons les périodes d'occupations de la classe 3 et les périodes impures. Soit $\widetilde{\sigma}_1 = T_2$ et on définit

$$\widetilde{\tau}_1 = \inf\{t > \widetilde{\sigma}_1 : \text{un client de la classe 4 entame le service à l'intant } t\}.$$

L'intervalle $[\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\tau}_1)$ est appelé la première période d'occupation de la classe 3. Ensuite, nous définissons $\widetilde{\sigma}_i$ et $\widetilde{\tau}_i$ par récurrence

$$\widetilde{\sigma}_{i+1} = \inf\{t \geq \widetilde{\tau}_i : \begin{array}{l} \text{un client de la classe 2 entame le service à l'intant } t \\ \text{et la classe 4 n'est pas en service à l'instant } t\} \end{array}.$$

$$\widetilde{\tau}_{i+1} = \inf\{t \geq \widetilde{\sigma}_{i+1} : \text{un client de la classe 4 entame le service à l'intant } t\}.$$

L'intervalle $[\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\tau}_i)$ est la i-ème période d'occupation de la classe 3 et $[\widetilde{\tau}_i, \widetilde{\sigma}_{i+1})$ est la i-ème période d'impure. Il est possible pour qu'il y ait seulement une période d'occupation et aucune période impure dans $[T_2, T_3)$.
On introduit

$$r = \inf\{i : Z_2(\widetilde{\tau}_i) = 0\}. \tag{3.8}$$

On note que r est le plus petit i tel que $\widetilde{\tau}_i \geq T_3$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 3.3.6. *Il existe une constante* c *avec* $0 < c < 1$ *telle que*

$$\mathbb{P}\{r \geq j\} \leq c^j,$$

pour $j = 0, 1, ...$

La preuve de ce lemme est similaire à celle du lemme 17.
Nous n'avons pas besoin d'une lemme suplémentaire qui est analogue au lemme 16 pour cette preuve. Comme auparavant, nous avons comme corollaire.

Corollaire 3.3.2. *(a)* $\mathbb{P}\{r < \infty\} = 1.$
(b) $\mathbb{P}\{T_3 < \infty\} = 1.$

Nous appellons $[\widetilde{\sigma}_r, T_3)$ la dernière période d'occupation de la classe 3. Au cours de la période $[T_2, T_3]$, un client est appelé un écoulement s'il est servi par la classe 2 durant $[T_2, \widetilde{\sigma}_r)$. Voici le théorème pour le cycle supérieur.

Théorème 3.3.5. *Pour tout* $0 < \theta_4 < 1$*, il existe un* $\epsilon_9 > 0$ *tel que pour tout* n *suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_1(\widetilde{\sigma}_r) + Z_2(\widetilde{\sigma}_r) \geq \theta_4 m_5 n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_9 \sqrt{n}).$$

La preuve du théorème 33 dépend crucialement des lemmes suivantes, qui donnent des minorations sur le nombre des écoulements avant la dernière période d'occupation.

Lemme 3.3.7. *Soit* q_i *le nombre de clients de la classe* 2 *qui ont commencé leurs services durant une simple période impure* $[\widetilde{\tau}_i, \widetilde{\sigma}_{i+1})$*. Alors il existe une constante* c *avec* $0 < c < 1$ *telle que pour tout* $i = 1, ...,$

$$\mathbb{P}\{q_i > j\} \leq c^j, \quad \textit{pour } j \geq 0.$$

Preuve . La preuve du lemme est analogue à celle du lemme 18. Comme le présent lemme est un résultat plus fort, nous répétons détails ici.
On fixe une période impure $[\widetilde{\tau}_i, \widetilde{\sigma}_{i+1})$. Quand un client de la classe 2 entame le service à l'intant t au cours de la période, un client de la classe 4 doit être en service en t.
Autrement, la période impure se termine à l'instant $t < \widetilde{\sigma}_{i+1}$ contredisant la définition de $\widetilde{\sigma}_{i+1}$.
Maintenant, on considère la suite des évènements suivants commençant à l'instant t :

1. Une arrivée externe se produit avant que le client de la classe 4 termine le service.
2. Le client de la classe 4 termine le service et devient un client de la classe 5.
3. Le client de la classe 1 entame le service.
4. Le client de la classe 2 termine son service et devient un client de la classe 3.
5. Le client de la classe 5 entame le service.

6. Le client de la classe 5 termine son service avant le client de la classe 1. À cet instant, le deuxième client de la classe 2 entame le service et termine la période impure.

Soit ζ_k le temps que le k-ième client de la classe 2 qui entame le service au cours de la période impure et soit A_k l'intersection de la suite d'évènements ci-dessus entamé par le k-ième client. Si l'évènement A_k se produit, la période impure se termine avec les k clients ayant entamé des services dans la classe 2. Ainsi,

$$\{q_i > j\} = \{\zeta_{j+1} < \widetilde{\sigma}_{i+1}\} \subset \{\zeta_j < \widetilde{\sigma}_{i+1}\} \cap A_j^c.$$

Comme la probabilité $\mathbb{P}\{A_k/\zeta_k < \widetilde{\sigma}_{i+1}\} > 0$ ne dépend que des paramètres de réseau (la moyenne des interarrivées et les temps de service), nous avons $\mathbb{P}\{A_k^c/\zeta_k < \widetilde{\sigma}_{i+1}\} = c < 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{q_i > j\} & \leq \mathbb{P}\{\zeta_j < \widetilde{\sigma}_{i+1}\}c \\ & \leq \mathbb{P}\{\zeta_1 < \widetilde{\sigma}_{i+1}\}c^j \\ & \leq c^j, \end{aligned}$$

où la chaîne des inégalités est similaire à celle de la preuve du lemme 18.

Lemme 3.3.8. *Il existe un $\epsilon_{10} > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{\textit{nombre des écoulements de la classe 2 durant } [\widetilde{\sigma}_i, \widetilde{\tau}_i) \textit{ excède } \sqrt{n},\ i < r\} \leq \exp(-\epsilon_{10}\sqrt{n}).$$

Preuve . La preuve du lemme est analogue à celle du lemme 19. Cependant, dans le cas du cycle supérieur, en appliquant le lemme 30, les interarrivées sont déterminées par les temps de service des clients de la classe 2. Ainsi, on n'a pas besoin d'utiliser un lemme analogue au lemme 16.
Nous avons un résultat similaire au cas d'un cycle inférieur.

Lemme 3.3.9. *Soit $0 < \delta < 1$, alors il existe un $\epsilon_{11} > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{\textit{plus que } \delta.n \textit{ écoulements de la classe dans } [T_2, \sigma_r]\} \leq \exp(-\epsilon_{11}\sqrt{n}).$$

Preuve . La preuve vient des lemmes 21,22, et 23.
Preuve du théorème 33 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z_1(\widetilde{\sigma}_r) + Z_2(\widetilde{\sigma}_r) < \theta_4 m_5 n\} & \leq \mathbb{P}\{Z_1(\widetilde{\sigma}_r) + Z_2(\widetilde{\sigma}_r) < \theta_4 m_5 n / Z_1(T_2) + Z_2(T_2) \geq \theta_1 m_5 n\} \\ & \quad + \exp(-\epsilon_1\sqrt{n}) \\ & \leq \exp(-\epsilon_{10}\sqrt{n}) + \exp(-\epsilon_1\sqrt{n}) \\ & \leq \exp(-\epsilon_9\sqrt{n}). \end{aligned}$$

La première inégalité vient du conditionnement et de l'application du théorème 31. La seconde vient de lemme 24. La troisième se tient pour ϵ_9 approprié et n suffisamment grand.

3.3.5 Du cycle supérieur vers le cycle inférieur

On rappelle qu'une fois le premier client de la classe 3 entame son service après l'instant $\widetilde{\sigma}_r$, la classe 3 restera positive jusqu'à T_3. Ainsi, aucun client de la classe 4 se sera servi durant $[\widetilde{\sigma}_r, T_3)$, et par conséquent la classe 5 reste vide durant $[\widetilde{\sigma}_r, T_3)$.
Nous divisons $[\widetilde{\sigma}_r, T_3)$ en des sous-intervalles. Nous avons besoin des définitions suivantes. D'abord, on pose $R_0 = \widetilde{\sigma}_r$.

Définition 3.3.2. *On considère les clients qui sont dans les classes* $1-3$ *au temps* $R_0 = \widetilde{\sigma}_r$. *Soit* R_1 *l'instant ou ces clients ont terminé leurs services dans la classe* 3.

Définition 3.3.3. *On suppose que* R_i *a été défini. On considère tous les clients dans les classes* $1-3$ *au temps* R_i. *Soit* R_{i+1} *le temps en lequel tous ces clients auront terminé le service dans la classe* 3, *c'est-à-dire* $Z(R_i) = (z_1, z_2, z_3, z_4, 0)$, *alors* $R_{i+1} = \inf\{t > R_i,\ Z_4([R_i, t]) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4\}$.
Nous définissons $S_{i+1} = R_{i+1} - R_i$ *pour* $i = 1, 2, ...$, *qui est le temps nésessaire pour tous les clients dans les classes* $1-3$ *à l'instant* R_i *pour terminer le service à la classe* 3. *Aussi, soit* $v = \inf\{i : R_i \geq T_3\}$.

Proposition 3.3.2. $\mathbb{P}\{v < \infty\} = 1$.

Preuve . Dans l'intervalle $[R_i, R_{i+1})$, la classe 1 entame un service, donc au moins il y a un client dans le réseau. Par la loi fort des grands nombres, $R_i \to \infty$ presque sûrement quand $i \to \infty$. Comme $T_3 < \infty$ p.s, par le corollaire 10, il y a un nombre fini de R_i avant T_3.

Lemme 3.3.10. *On suppose qu'à l'instant* t *un client de la classe* 3 *entame un service. À l'instant* t', *ce client de la classe* 3 *termine son service. Ensuite, soit* $t'' \geq t'$ *le premier instant où la classe* 1 *se vide après que la classe* 3 *ait terminé un service.*
On pose $u_1 = t'' = t'$. *Alors,*

$$\mathbb{E}[u_1] = \frac{m_3}{1 - m_1} > m_2.$$

De plus, u_1 *est indépendant des évènements qui ont lieu avant* t.

Preuve . La preuve du lemme est exactement analogue à celle du lemme 16.

Lemme 3.3.11. *Soit* θ_5 *une constante quelconque fixée avec* $0 < \theta_5 < 1$. *Il existe un* $\epsilon_{11} > 0$ *tel que pour tout* s_i *suffisamment drand,*

$$\mathbb{P}\{S_{i+1} < \frac{m_3}{1 - m_1}.s_i / Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) = s_i\} \leq \exp(-\epsilon_{11} s_i),$$

pour $i = 1, 2, ...$

Preuve . Durant $[R_i, R_{i+1}]$, la classe 3 doit servir tous les clients présents dans les classes $1, 2$, et 3 à l'instant R_i, le résultat est suit les lemmes 29 et 25.
Dans le lemme suivant, on rappelle que $E_1[s,t]$ désigne le nombre d'arrivées externes dans l'intervalle $[s,t]$.

Lemme 3.3.12. *Soit θ_6 une constante quelconque fixée avec $0 < \theta_6 < 1$. Il existe un $\epsilon_{12} > 0$ tel que pour tout s_i suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{E_i[R_i, R_{i+1}] < \theta_6 \frac{m_3}{1-m_1}.s_i / Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) = s_i\} \leq \exp(-\epsilon_{12} s_i).$$

Preuve . La preuve ici est analogue à celle du théorème 31.

Théorème 3.3.6. *On suppose que $Z(0) = (0, z_2, 0, n, z_5)$ avec un client de la classe 4 entamant le service à l'instant 0 et un client de la classe 2 non en service à l'instant 0_+. Alors pour tout $0 < \theta_7 < 1$, il existe un $\epsilon_{13} > 0$ et T_3, un temps de Markov avec $Z(T_3) = (Z_1(T_3), 0, 0, Z_4(T_3), 0)$ tel que pour tout n suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_4(T_3) \geq \frac{(1-m_1)m_5}{1-m_1-m_3}\theta_7 n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_{13}\sqrt{n}).$$

Preuve . On a au moins $s_0 = \theta_4 m_5 n$ clients dans les classes 1 et 2 à l'instant $R_0 = \widetilde{\sigma}_r$ sauf sur un ensemble exponentiellement petit d'après les lemmes 26 et 27 et pour n suffisamment grand sauf sur un ensemble exponentiellement petit, il y a au moins

$$(\theta_6 \frac{m_3}{1-m_1})\theta_4 m_5 n$$

arrivées durant le service des clients présents à $\widetilde{\sigma}_r$. Ainsi, à l'instant R_1, on a au moins

$$s_1 = (\theta_6 \frac{m_3}{1-m_1})\theta_4 m_5 n$$

clients dans les classes $1-3$ sauf sur un ensemble exponentiellement petit. En raisonnant similairement, sauf sur les ensembles exponentils, à l'instant R_i, on a au moins

$$s_i = (\theta_6 \frac{m_3}{1-m_1})^i \theta_4 m_5 n$$

clients dans les classes $1-3$.
En suite, on fixe un entier positif N. On définit

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} (\theta_6 \frac{m_3}{1-m_1})^i \theta_4 m_5.$$

Comme

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\theta_6 \frac{m_3}{1-m_1})^i \theta_4 m_5 = \theta_6 \frac{\theta_6(1-m_1)}{1-m_1-\theta_6 m_3}\theta_4 m_5,$$

pour tout θ_7 avec $0 < \theta_7 < 1$, on peut choisir θ_4 et θ_6 et N avec $0 < \theta_i < 1$ tels que

$$K \geq \theta_7 \frac{(1 - m_1)m_5}{1 - m_1 - m_3}. \tag{3.9}$$

Ensuite, pour n suffisamment grand de sort que $s_i,\ i = 1, ..., N$, soit suffisamment grand pour appliquer les lemmes 26 et 27, nous montrons qu'en R_N, nous aurons servi Kn clients à la classe 3 sauf sur un ensemble exponentiellement petit en probabilité. À l'instant T_3, la classe 4 doit contenir tous les clients qui sont servis à la classe 3 durant $[\widetilde{\sigma}_r, T_3)$. En particulier, la classe $Kn = \theta_7(1-m_1)m_5/(1-m_1-m_3)n$ clients à l'instant T_3 sauf sur un ensemble petit.
On note d'abord que la taille de N exigée pour rendre (3.8) valable dépend seulement des moyennes des temps de service m_i et les $0 < \theta_i < 1$ qui sont fixées. Par conséquent, la taille nécessaire de N peut être fixée une fois. Ensuite, nous devons avoir $s_1, s_2, ..., s_N$ suffisamment grands aux instants $R_1, ..., R_N$ pour appliquer les lemmes 26 et 27. Comme N ne dépend pas du nombre initial de n clients dans le système, nous pouvons rendre N suffisamment grand de sort que s_N, et ainsi s_i pour $i = 0, ..., N - 1$, soit suffisamment grand pour appliquer les lemmes 26 et 27. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Z_1(R_{i+1}) + Z_2(R_{i+1}) + Z_3(R_{i+1}) \leq s_{i+1}\} \quad & \leq \mathbb{P}\{Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) \leq s_i\} \\
& + \sum_{s=s_i}^{\infty} \mathbb{P}\{Z_1(R_{i+1}) + Z_2(R_{i+1}) + Z_3(R_{i+1}) \\
& \leq s_{i+1}/Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) = s\} \\
& \times \mathbb{P}\{Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) = s\} \\
& \leq \mathbb{P}\{Z_1(R_i) + Z_2(R_i) + Z_3(R_i) \leq s_i\} \\
& + \exp(-\epsilon_{12} s_k) \\
& \cdots \\
& \leq \mathbb{P}\{Z_1(R_0) + Z_2(R_0) + Z_3(R_0) \leq s_0\} \\
& + \sum_{k=0}^{i} \exp(-\epsilon_{12} s_k) \\
& \leq \mathbb{P}\{Z_1(R_0) + Z_2(R_0) + Z_3(R_0) \leq s_0\} \\
& + (i+1) \exp(-\epsilon_{12} s_0) \\
& \leq \exp(-\epsilon_9 \sqrt{n}) + N \exp(-\epsilon_{12} s_N),
\end{aligned}$$

pour $i = 0, ..., N - 1$, où pour obtenir la dernière inégalité, nous avons utilisé le théorème 32.

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Z_4(T_3) \leq \theta_7 n \frac{m_5(1-m_1)}{1-m_1-m_3}\} & \leq \mathbb{P}\{\sum_{k=0}^{N}(Z_1(R_k)+Z_2(R_k)+Z_3(R_k)) \leq \theta_7 n \frac{m_5(1-m_1)}{1-m_1-m_3}\} \\
& \leq \mathbb{P}\{\sum_{k=0}^{N}(Z_1(R_k)+Z_2(R_k)+Z_3(R_k)) \leq \sum_{k=0}^{N} s_k\} \\
& \leq \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\{(Z_1(R_k)+Z_2(R_k)+Z_3(R_k)) \leq s_k\} \\
& \leq (N+1)(\exp(-\epsilon_9\sqrt{n}) + N\exp(-\epsilon_{12}s_0)) \\
& \leq \exp(-\epsilon_{13}\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous concluons que pour tout $0 < \theta_7 < 1$, il existe $\epsilon_{13} > 0$ tel que pour n sufissamment grand,

$$\mathbb{P}\{Z_4(T_3) \leq \theta_7 n \frac{m_5(1-m_1)}{1-m_1-m_3}\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_{13}\sqrt{n}).$$

Par définition, nous avons $Z(T_3) = (Z_1(T_3), 0, 0, Z_4(T_3), 0)$ et un client de la classe 3 a terminé son service à T_{3^-}.
Ce qui achève la preuve du théorème.

Preuve . Nous prouvons une majoration en probabilité sur le nombre de clients de la classe 4 à l'instant T_4. Si $Z_1(T_3) = 0$, alors nous posons $T_4 := T_3$ et nous aurons terminé. Sinon, alors après que le client de la classe 3 ait terminé le service au temps T_3, le réseau entame une période impure typique pour le cycle inférieur. Quand il quitte cette période impure, il entame une période d'occupation de la classe et 5 le réseau sera dans un état comme a été décrit par la conclusion du théorème. Nous appelons T_4 l'instant où la période impure se termine. On note que cette définition est conforme avec la définition de T_4 donnée dans l'énoncé du théorème 30.
Ensuite, soit N le nombre de clients qui ont quitté la classe 4 durant cet intervalle $[T_3, T_4)$ du cycle impure. Il est borné par $q+1$, où q est le nombre de clients de la classe 4 qui ont entamé le service durant l'intervalle. D'après la lemme 18, il existe un $\epsilon_{14} > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\{N \geq \sqrt{n}\} \leq \exp(-\epsilon_{14}\sqrt{n}).$$

Nous combinons cette estimation avec le résultat du théorème 33 comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Z_4(T_4) \leq c\theta_7 n - c\theta_7\sqrt{n}\} & \leq \mathbb{P}\{Z_4(T_4) \leq c\theta_7 n - c\theta_7\sqrt{n}/Z_4(T_3) \geq c\theta_7 n\} \\
& +\mathbb{P}\{Z_4(T_3) < c\theta_7 n\} \\
& \leq \exp(-\epsilon_{14}\sqrt{n}) + \exp(-\epsilon_{13}\sqrt{n}) \\
& \leq \exp(-\epsilon_{15}\sqrt{n})
\end{aligned}$$

où
$$c = \frac{(1-m_1)m_5}{1-m_1-m_3}.$$
La dernière inégalité est satisfaite pour un $\epsilon_{15} > 0$ et n suffisamment grand
$$\mathbb{P}\{Z_4(T_4) \leq c\theta_7 n(1-\sqrt{n}/n)\} \leq \exp(-\epsilon_{15}\sqrt{n}),$$
ce qui implique que
$$\mathbb{P}\{Z_4(T_4) \leq c\theta_8 n\} \leq \exp(-\epsilon_{15}\sqrt{n}),$$
pour tout $0 < \theta_8 < 1$, comme θ_7 et $(1-\sqrt{n}/n)$ peuvent être choisis proche de 1 pour n suffisamment grand.

3.3.6 Une minoration sur tous les clients dans le réseau

Maitenant, nous montrons que, sauf sur un ensemble de petite probabilité, on aura au moins $n/4$ clients dans le réseau dans $[0, T_4]$. Dans tous les résultats ci-dessus, on rappelle que chaque θ_i peut être choisi proche de 1. Dans les arguments suivants, nous supposons que les θ_i sone suffisamment proche de 1.

Théorème 3.3.7. *Il existe un $\epsilon_{16} > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,*
$$\mathbb{P}\{|Z(t)| \geq n/4,\ \forall t \in [0, T_4]\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_{16}\sqrt{n}).$$

Preuve . Sur $[0, \sigma_r]$, la minoration sur $|Z(t)|$ vient directement de la preuve du théorème 32 tant que θ_2 est proche de 1. Ensuite, soit $\widehat{\sigma}_r = \inf\{t > \sigma_r,\ Z_4(t) + Z_5(t) \leq n/4\}$. Alors par notre définition de $\widehat{\sigma}_r$ et le théorème 32, la minoration est satisfaite en fait sur $[0, \widehat{\sigma}_r]$. Maintenant, nous devons seulement montrer que, sauf sur un petit ensemble, il y aura au moins $n/4$ arrivées au réseau durant $[\sigma_r, \widehat{\sigma}_r]$. Si c'est ainsi, alors la minoration est satisfaite sur $[0, T_2]$.
Dans $[\sigma_r, \widehat{\sigma}_r]$, la classe 5 doit servir $(\theta_2 - 1/4)n$ clients sauf sur un ensemble exponentiellement petit. Maintenant, par des arguments analogues à la preuve du lemme 20, le temps nécessaire pour servir $(\theta_2 - 1/4)n$ clients à la classe 5 est $(\theta_9 - 1/4)m_5 n$ sauf sur un ensemble petit où $0 < \theta_9 < 1$.
Par des arguments analogues à la preuve du théorème 31, le nombre d'arrivées de clients de l'extérieur durant $[\sigma_r, \widehat{\sigma}_r]$ est $(\theta_{10} - 1/4)m_5 n$ sauf sur un ensemble exponentiellement petit, danc pour θ_{10} trés proche de 1, l'expression ci-dessus devient proche de $n/4$.
Maintenant, comme tous les clients qui arrivent durant $[\sigma_r, \widehat{\sigma}_r]$ sont dans les classe 1 ou 2, nous avons, pour tout $0 < \theta_{10} < 1$, il existe un $\epsilon_{17} > 0$ tel que pour tout n suffisamment grand,
$$\mathbb{P}\{Z_1(\widehat{\sigma}_r) + Z_2(\widehat{\sigma}_r) \geq (\theta_{10} - 1/4)m_5 n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon_{17}\sqrt{n}).$$

Ainsi, une minoration sur $|Z(t)|$ du théorème est satisfaite sur $[0, T_2]$.
Maintenant, nous devons montrer que cette minoration est satisfaite sur $[T_2, T_3]$. Sur cet intervalle, qui est le cycle supérieur, la minoration vient automatiquement des arguments dans la sous section du cycle supérieur. En particulier, le théorème 30 garantie que le nombre total des clients dans le réseau durant le cycle supérieur est au moins $\theta_4 m_5 n$, sauf sur un ensemble petit, qui est encore facilement plus grand que $n/4$ pour θ_4 proche de 1 et $m_5 < 1$.
Finalement, le théorème 31 assure que le réseau ne perd pas trop de clients durant $[T_3, T_4]$ sauf sur un ensemble petit. En particulier, le théorème 31 implique qu'avec une probabilité élevée, il y a au moins $\theta m_5 n$ clients dans le réseau durant $[T_3, T_4]$.
Nous obtenons une minoration en probabilité sur $|Z(t)|$ pour tout $t \in [0, T_4]$ en prenant toutes les majorations exponentielles.

3.4 Le réseau exponentiel-preuve du théorème 29

On suppose qu'il existe z_0 tel que

$$\mathbb{P}_{z_0}(\{w : |Z(t,w)| \nrightarrow \infty\}) > 0 \tag{3.10}$$

où $\mathbb{P}_Z(.)$ est loi du processus partant de l'état z pour chaque entier l, $A_l = \{$état z : $|z| \leq l\}$. Alors (3.10) implique qu'il existe $l > 0$ tel que

$$\mathbb{P}_{z_0}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t \in [k,\infty)} \{w : Z(t,w) \in A_l\}) \equiv \delta > 0. \tag{3.11}$$

Maintenant, on suppose que nous commençons de l'état initial $z_1 = (0, 0, 0, n, 0)$. On note que cet état du type donné le théorème 30. On fixe $\theta < 0$ tel que $c\theta > 1$ où

$$c = \frac{(1 - m_1)m_5}{1 - m_1 - m_3}.$$

Nous appliquons le théorème 30 et la propriété forte de Markov, nous avons pour n suffisamment grand,

$$\mathbb{P}_{z_1}(\{w : Z(t,w) < n/4,\ \forall t \geq 0\}) \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\epsilon \sqrt{n(c\theta)^i}). \tag{3.12}$$

On note en particulier que le nombre droit de l'inégalité est proche de zéro quand n tend vers l'infini, par conséquent, la probabilité sur la gauche est petit. On choisit $n > 4l$ suffisamment grand pour satifaire le théorème 30 et tel que le membre gauche de l'inégalité soit plus petit que $\delta/2$.

On peut vérifier que tout état initial de la forme donnée dans le théorème 30 est accessible de l'état zéro. Comme tout état peut accéder l'état zéro, nous avons

$$\mathbb{P}_z\{Z \text{ est un processus de Markov qui atteint l'état } z_1\} > 0,$$

pour tout état initial z. Comme l'ensemble A_l est fini, nous avons

$$\min_{z \in A_l} \mathbb{P}_z\{Z \text{ est un processus de Markov qui atteint l'état } z_1\} > 0.$$

Maintenant, pour tout w dans $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t\in[t,\infty)}\{w : Z(t,w) \in A_l\}$, il existe une suite $\{t_k\}$ telle que $t_k > k$ et $Z(t_k, w) \in A_l$ pour $k \geq 1$. Chaque fois que le processus entame A_l, il y a une probabilité positve pour qu'il atteint l'état z_1. Ainsi, sur l'évènement $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t\in[t,\infty)}\{w : Z(t,w) \in A_l\}$, le processus Z atteindra z_1 avec une probabilité 1. Danc, nous avons

$$\begin{aligned}
\delta \ &\leq \mathbb{P}_{z_0}(\textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t\in[k,\infty)}\{w : Z(t,w) \in A_l\}) \\
&= \mathbb{P}_{z_0}(\textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t\in[k,\infty)}\{w : Z(t,w) \in A_l\} \cap \{Z(T) = z_1\}) \\
&\leq \mathbb{P}_{z_1}(\textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{t\in[k,\infty)}\{w : Z(t,w) \in A_l\}) \\
&\leq \mathbb{P}_{z_1}(\{w : Z(t,w) < n/4, \text{ pour certains } t \geq 0\}) \\
&\leq \delta/2.
\end{aligned}$$

ceci même à une contradiction.

3.5 Réseau déterministe avec préemption

Théorème 3.5.1. *Pour le réseau déterministe qui suit la discipline* (SBP) *avec préemption, le nombre de clients tend vers l'infini grand* t *tend vers l'infini pour tout état initial* $Z(0) = (0, 0, 0, n, 0)$ *pour* n *suffisamment grand.*

La preuve de ce théorème vient directement du lemme ci-dessous. Nous avons besoin d'abord de la définition suivante :

Définition 3.5.1. *On note par* $\mathcal{I}$ *l'ensemble des clients états de la forme :*
1) $(0, 0, 0, n, 0; a)$ *avec* $0 < a < 1$ *et le temps de service restant à la classe* 4 *est nul.*
2) $(0, 1, 0, n, 0; a)$ *avec* $0.5 < a < 0.6$ *et le temps de service restant à la classe* 4 *est nul. Dans les deux cas, nous supposons que* $n \geq 1$.

Lemme 3.5.1. *On considère un réseau déterministe qui suit la discipline de service* (SBP) *avec préemption. Soit* $Z(0) \in \mathcal{I}$ *et* $Z_4(0) = n$. *Alors pour* $k_1 < 1.2$ *et* $k_2 > 1.2$, *et pour* T *suffisamment grand, il existe un temps* T *tel que*
(a) $Z(T) \in \mathcal{I}$ *et* $Z_4(T) > k_1.n$.
(b) $T \leq k_2.n$.

Preuve . La partie a. Soit $Z(0) \in \mathcal{I}$ dans ce cas, à la date 0_+, cet état devient $(0,0,0,n-1,1;a)$ et les classes 4 et 5 entament au même temps leurs service. L'hypothèse $m_4 \leq m_5$ implique que la classe 5 reste non vide que la classe 4 est non vide. Soit $t_2 = \inf\{t > 0 : Z_5(t) = 0\}$. Selon la discipline (SBP) avec préemption, aucun client n'est arrivé à la classe 4 durant $[0, t_2]$. Ceci entraine qu'à l'instant t_2, la classe 5 vient de faire passer le n-ième client de la classe 4. Ainsi $t_2 = 0.4.n$. D'autre part, comme $Z_1(0) = 0$, et grâce à la discipline (SBP), nous avons $Z_1(t) \leq 1$. pour tout $t \geq 0$. À l'instant t_2, nous avons $Z(t_2) = (0/1, z_2, 0, 0, 0)$. Il est clair que $z_2 \geq 0.4(n-2)$ pour n suffisamment grand, on a $Z_2(t_2) > 0$. On introduit

$$t_3 = \inf\{t > t_2 : Z_2(t) = 0\}$$

et

$$t_4 = \inf\{t > t_2 : \text{la classe 4 entame son service à l'instant } t\}.$$

À l'instant t_2, la classe 2 entame son service et anvoie le client à la classe 3 à l'instant $t_2 + 0.1$. Comme $m_2 \leq m_3$, alors $Z_3(t) > 0$ pour tout $t \in [t_2 + 0.1, t_3]$. Le temps

$$t'_4 = \inf\{t > t_3 \ : \ Z_3(t) = 0\} \leq t_4$$

grâce à la discipline (SBP). Mainenant, nous allons minorer t'_4.
Nous avons déjà vu que $Z_1(t) \leq 1$. Comme $Z_5(t) = 0$ pour $t \in (t_2, t_4)$, alors la classe 2 fonctionne sans préemption durant cet intervalle. L'hypothèse $m_2 \leq m_3$ entraîne que la classe 2 ne peut se vide avant la classe 2. À l'instant t'_4, nous avons les deux situations suivantes : $Z_1(t'_4) \leq 1$, $Z_2(t'_4) \leq 1$. Par conséquent, durant l'intervalle (t_2, t'_4), la classe 3 a fait passer les z_2 clients de la classe 2 et au moins $(t'_4 - t_2) - 2$ clients qui sont venus de l'extérieur. Le temps de service de la station A durant (t_2, t'_4) est

$$t'_4 - t_2 \geq 0.4z_2 + (0.4 + 0.4)[t'_4 - t_2 - 2].$$

Un calcul simple on a

$$t'_4 - t_2 \geq 2z_2 - 8.$$

Le nombre de clients dans la classe 4 à l'intant t_4 est

$$\begin{aligned} Z_4(t_4) \quad & \geq t'_4 - t_2 - 2 + z_2 \\ & \geq 2z_2 - 10 + z_2 \\ & \geq 3z_2 - 10 \\ & \geq 3(0.4n - 2) - 10 \\ & = 1.2n - 16. \end{aligned}$$

Pour n assez grand, $Z_4(t_4) > k_1 n$ avec $k_1 < 1.2$.
Maintenant, nous montrons que $Z_4(t_4) \in \mathcal{I}$. À l'instant t_{4^+}, nous avons, $Z(t_4) =$

$(0, 0/1, 0, Z_4(t_4), 0)$, si $Z_2(t_4) = 0$, alors nous avons $Z_4(t_4) \in \mathcal{I}$. Sinon, $Z_2(t_4) = 1$, dans se cas, on peut dire qu'il est arrivé durant l'intervalle $(t_4 - 0.1, t_4)$. Comme les clients de la classe 1 sont prioritaires, le même client doit être arrivé à la classe 1 dans l'intervalle $(t_4 - 0.5, t_4 - 0.4)$. Par conséquent, la prochaine arrivée au réseau se produira dans $(t_4 - 0.5, t_4 - 0.6)$. On vient de montrer que $Z_4(t_4) \in \mathcal{I}$.
La partie b. D'abord, nous rappelons que $t_2 = 0.4n$. Ensuite, lorsque la classe 3 se vide la première fois à l'instant t'_4, les classes 1 et 3 se vident après 2 minutes. Durant $(t_2 + 0.1, t'_4)$, ou bien la classe 1 ou bien la classe 3 doit constamment servir les clients. Par conséquent, la classe 3 a fait passer z_2 clients de la classe 2 et $(t'_4 - t_2)$ clients qui sont venus de l'extérieur. Le temps de service de la station A durant $(t_2 + 0.1, t'_4)$ est

$$\begin{aligned} t'_4 - t_2 - 0.1 \quad & \leq 0.4 z_2 + 0.8(t'_4 - t_2) \\ & \leq 0.4 \times 0.4n + 0.8(t'_4 - t_2), \end{aligned}$$

on a $t'_4 - t_2 \leq 0.8n + 0.5$. Finalement, $t_4 \leq t_2 + t'_4 - t_2 - 0.1 + 2 \leq 1.2n + 2.4$, pour n suffisamment grand, nous pouvons satisfaire la partie b du lemme.

Preuve du théorème 36 : L'état initial $Z(0)$ dans le théoèrme 36 appartient à l'ensemble $\mathcal{I}$ du lemme 28. Par conséquent, on applique le lemme à l'instant 0. La partie a du lemme 28 assure qu'il existe un temps T où l'état $Z(T) \in \mathcal{I}$ (c'est-à-dire le système reviendra toujours à un état dans la même classe que l'état initial), nous concluons qu'il existe une suite de temps $s_1, s_2, ...$ avec

$$Z_4(s_i) > (k_1)^i n, \quad i = 1, 2, \cdots .$$

Ce qui implique

$$\frac{Z_4(s_{i+1}) - Z_4(s_i)}{s_{i+1} - s_i} \geq \frac{k_1 - 1}{k_2}.$$

On peut choisir $k_1 > 1$ et $k_2 > 0$, ceci implique que le taux de croissance est positif durant la suite de temps $\{s_i, i \geq 1\}$.

3.6 Réseau exponentiel avec préemption

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.6.1. *Pour le réseau exponentiel qui suit la discipline de service* (SBP) *avec préemption, à partir de tout état initial,*

$$|Z(t)| \to \infty$$

quand $t \to \infty$ *avec probabilité* 1.

La preuve de ce théorème est basé sur le théorème suivant :

Théorème 3.6.2. *On considère le réseau exponentiel qui suit la discipline de service* (SBP) *avec préemption. Soit* n *un entier trés grand. On suppose que* $Z(0) = (0, z_2, 0, n, 0)$. *Alors pour tout* $0 < \theta < 1$, *il existe* $\epsilon > 0$ *et un temps de Markov* T_4 *avec* $Z(T_4) = (0, Z_2(T_4), 0, Z_4(T_4), 0)$ *tel que pour tout* n *suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\{Z_4(T_4) \geq \frac{(1-m_1)m_5}{1-m_1-m_3}\theta n\} \geq 1 - \exp(-\epsilon\sqrt{n}), \tag{3.13}$$

où

$$T_2\{t > 0 : Z_3(t) = Z_4(t) = Z_5(t) = 0\}, \tag{3.14}$$

$$T_4\{t > T_2 : Z_1(t) = Z_3(t) = Z_5(t) = 0\}. \tag{3.15}$$

De plus, pour tout n *suffisament grand,*

$$\mathbb{P}\{|Z_t| \geq n/4,\ \forall t \in [0, T_4]\} \geq 1 - \exp(-\epsilon\sqrt{n}).$$

3.7 Appendice

Lemme 3.7.1. *Soit* $x_1, x_2, ...$ *une suite des variables aléatoires non négatives i.i.d avec moyenne* $\mathbb{E}(x_1) = m$, *on pose* $y_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$, *supposons que les* x_i *possèdent un moment exponentiel, il existe une constante* $k > 0$, *tel que*

$$\mathbb{E}[\exp(kx_1)] < \infty,$$

et pour tout $\alpha > 0$, *il existe un* $\epsilon > 0$, *alors pour tout* $n \geq 1$

(i) $\mathbb{P}\{y_n > mn + \alpha.n\} \leq \exp(-\epsilon.n)$.

(ii) $\mathbb{P}\{y_n > mn - \alpha.n\} \leq \exp(-\epsilon.n)$.

Lemme 3.7.2. *Considère la file* $GI/GI/1$ *avec* $\{u_i\}$ *les temps d'interarrivées sont i.i.d, et* $\{v_i\}$ *les temps de service sont i.i.d. On suppose que* $\mathbb{E}(u_1) < \mathbb{E}(v_1)$, *la file est vide à l'instant zéro, et la premiére arrivée à l'instant* 0_+, *on pose que pour* $k > 0$

$$\mathbb{E}[\exp(k(u_1 + v_1))] < \infty.$$

Et pour $0 < \delta < 1$, *il existe une constante* $\epsilon > 0$ *tel que pour* n *suffisamment grand (en particulier on prend* $[\delta\sqrt{n}] > 0$*)*

$$\mathbb{P}\{\textit{la file se vide la première fois dans } [s_{[\delta\sqrt{n}]}, s_n]\} \leq \exp(-\epsilon\sqrt{n})$$

où s_n *est le temps d'arrivée de* n*-ième client.*

Preuve de lemme 30 :

$$\mathbb{P}\{\text{la file se vide la première fois entre la } i - \text{ième et } (i+1) - \text{ième arrivée}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\{u_2 < v_1, u_2 + u_3 < v_1 + v_2, ..., u_2+, ..., u_i < v_1+, ..., +v_{i-1}, u_2+, ..., u_{i+1} > v_1+, ..., +v_i\} \\
&\leq \mathbb{P}\{u_2+, ..., u_{i+1} > v_1+, ..., +v_i\} \\
&= \mathbb{P}\{(v_1 - u_1)+, ..., (v_i - u_i) < 0\} \\
&\leq \exp(-\epsilon_1 n),
\end{aligned}$$

pour tout $\epsilon_1 > 0$ la dernière inégalité suit le lemme 29, et $\mathbb{E}(v_1 - u_1) > 0$

$$\mathbb{P}\{\text{la file se vide la première fois dans } [s_{[\delta\sqrt{n}]}, s_n]\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=[\delta\sqrt{n}]}^{n} \exp(-\epsilon_1 i) \\
&\leq n.\exp(-\epsilon_1[\delta\sqrt{n}]) \\
&\leq \exp(-\epsilon_2[\delta\sqrt{n}]) \\
&\leq \exp(-\epsilon\sqrt{n})
\end{aligned}$$

n assez grand.

Bibliographie

[1] S. Asmussen, *Applied probability and queues*. Wiley and sons, 1987.

[2] F. Belarbi et A. Dermoune, Stabilité d'un réseau à deux stations et cinq files
d'attenty, Pub. Irma, Lille (2004), vol. 63.

[3] M. Bramson, *Instability of FIFO queueing networks*, *Annals of Applied probability*. 4 :414-431, 1994.

[4] L. Billingley, *Convergence of probabilty measure*, Wiley series in probability and mathematical statistics, Jhon wiley and sons Ltd, New york, 1968.

[5] H. Chen and H. Zhang, *Stability of multiclass queueing networks under FIFO servicediscipline, math.*

[6] J. G. Dai, *On positive Harris rcurrence of multiclass queueing networks : a unified approach. viafluid limit models, Annals* of *Applied probability*, 5(1995), pp. 57-79.

[7] J. G. Dai and J. J. Hasenbein and J. H. Vande vate, Stability and instability of two station queueing networks, the Annals of Applied probability, 2004, vol 14, no. 1,326-377.

[8] M. Duflo, *Algorithmes stachastiques*, springes-verlag, Berlin, 1996.

[9] V. Dumas, *A multiclass networks with non − linear, non − convex, non − monotonic stability conditions. Queueingsystems : theoryand Applictions*, 25 :1-43-1997.

[10] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov processes*, Jhon Wiley and Son Inc, New York, 1986. Characterization and convergence.

[11] V. A. Fayolle and G. Malyshev and M. V. Men'shikov, Topics in the construstive theory of countable Markov chains. Combridge University press, 1995.

[12] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, 1986, John Wiley and sons.

[13] Y. Filonov, *A criterion for ergodicity of discrete homogeneous Markov chains*, Akade-minya Nauk Ukrainskoi SSR.Institut Mathematiki. Ukrainskii Mathematichskii Zhurnal 41, (1989), pp. 1421-1422.

[14] F.D. Gakhov, *Boundary value problme*, Dover Publications Inc, New york, 1990, Translated from the Russian, Reprint of the 1966 translation.

[15] R. k. Getoor, *Tansience and recurrence of Markov process*. In.A zema. Jaud Yor. M. editors. Séminaire de probabiliés XIV, 397-409. New York, 1979.

[16] J. M. Harrison and V. Nguyen, *Some badly behaved closed queueing networks*. In F. P. Kelly and R. J. Williams, editors, stochastic Networks, volume 71 of the IMA volume in mathematcs and its applications, page 117-124, New York, 1995. Springer-verlag.

[17] J. J. Hasenbein, *Necessary conditions for global stability of multiclass queueing networks*. OR letters, 21 :87-94,1997.

[18] S. Karlin and H. M. Taylor, *A first cours in stochastic processes*, second sdition. Academic press, New York, 1975.

[19] M. R. Leadbetter, G. Lindgren and H. Rootzén, Extremes and related properties of random sequences and processes, Springer-Verlag, New York, 1983.

[20] S. H. Lu and P. R. Kumar, *Distributd scheduling based on due dates and buffer priorities* IEEE Transactions on Automatic control, 36 : 1406-1416,1991.

[21] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Springer-Verlag, London, 1993.

[22] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, state-dependant criteria. for convergence of Markov chaines. Ann of ap prob, 1993.

[23] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *stability of markovian process III* : Foster-Lyapunov, criteria for continous time processes. Adv app proba, 1993.

[24] J. Neveu, *Processus ponctuels*. Ecole détéde probabilité de Saint-Flour. VI, lecture notes in maths 598, Spinger-Verlag, 1977.

[25] J. Neveu, *Construction des files d'attente stationnaires*. Lecture notes on control and information scienes 60, Spinger-Verlag, PP 31-41, 1983.

[26] E. Nummelin, *Regeneration intandem queues*. Adv. prob. vol 13, PP 221-230.

[27] A. N. Rybko and A. L. Stolyar, *Ergodicity of stochastic processes describing the operation of open queneing networks*, problems of information tansmission, 28 :199-220, 1992.

[28] L.C.G. Rger et D. williams, Diffusion, processes and martingales. Vol 1, Foundations, second Edition, Jhon wiley and sons Ltd, chichester, 1994.

[29] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third Edition, McGraw Hill Book CO, New York, 1987.

[30] K. Sigman *The stability of open queueing networks*. Stoch. proc. appl, vol mathbf35, PP 11-25, 1990.

[31] A. L. Stoylar and K. K. Ramakrishnan, The stability of flow merge point with non-interleaving cut-through scheduling discipline. Proceedings of INFOCOM'99, 1999.

[32] M. EL. Taha and S. Stidham, *Sample−path Analysis of Queueing systems*. Kluwer Academic publishers, New York, 1999.

[33] R. J Williams, *Diffusion appraximations for open multiclass queueing networks* : sufflscient conditions involing state space collase. Queueing systems : theory and Applications, 30 : 27-88, 1998.