REMERCIEMENT

J’adresse en premier lieu ma reconnaissance à ALLAH Tout Puissant, de m’avoir donné la force, le moral et la santé de bien terminer ce modeste travail

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m’ont apporté leur aide et qui ont contribué à l’élaboration de ce mémoire ainsi qu’à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Melle Bousmaha Lamia , qui, en tant que tutrice de ce mémoire, elle s’est toujours montré à l’écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l’inspiration, l’aide et le temps qu’elle a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n’aurait jamais vu le jour.

Je n’oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers qui a eu la gentillesse de lire et corriger ce travail. Enfin, j’adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m’ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes

J’exprime ma gratitude à tous les consultants et internautes rencontrés lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse.

Table des matières

Introduction

Le mouvement brownien est à la fois un phénoméne naturel, et un objet mathématique. Le phénoméne naturel est le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide. Il a été observ dés le 18 ‘eme siécle, sinon avant. L’objet mathématique est un processus gaussien dont la variance des accroissements est égale au temps écoulé. Norbert Wiener, qui l’a défini en 1923, l’appelait " the fundamental random function ". On ne va pas pouvoir tout détailler, parce que le mouvement brownien occupe aujourd’hui une place centrale en mathématiques et qu’il est lié à la plupart de leurs branches : les équations d’ ´evolution, l’analyse de Fourier, la théorie du potentiel, la théorie des fonctions d’une variable complexe, la géométrie et la théorie des groupes, l’analyse numérique. L’objectif majeur de cette étude est l’existence de solutions des équations différentielles stochastiques dirigées par un brownien ou un brownien fractionnaire et de démontrer quelques propriétés principales du mouvement brownien et le mouvement brownien fractionnaire, Pour cela, l’étude a été divisée en trois chapitres :
Le premier chapitre est réservé aux notions fondamentales du mouvement brownien et la construction de l’intégrale stochastique
Le second chapitre , on aborde des different types des solutions,ces derniers sont en quelque sorte des applications directes du mouvement brownien standard.
Et pour terminer, on etudie quelque propriete du mouvement brownien fractonaire et ces solution

Chapitre 1

préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par des rappels élémentaires sur les variables aléatoires normales en Section 1.1 puis sur les vecteurs gaussiens en Section 1.2. On introduit la notion générale de processus stochastique dans la Section 1.3. On en d'ecrit les principales propriétés. On spécialise l'étude au cas des processus gaussiens dans la Section 1.4

1.1 processus stochastique

1.1.1 Variables gaussiennes

Définition 1.1.1. *Une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet pour densité*

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2 \setminus 2)$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle admet pour densité

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2})$$

Si

1.1.2 Vecteurs gaussiens

On considère des vecteurs aléatoire dans $\mathbb{R}^n$. Muni de son produit scalaire canonique, $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien. pour des vecteurs $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}$, on note $\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ leur produit scalaire. On peut généraliser cette section $\grave{a}$ un espace E euclidien (si dim(E)=n alors E$\sim$ $\mathbb{R}$).

Définition 1.1.2. *(vecteur gaussiens) un vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)$ est gaussien ssi toutes les combinaisons linéaires de ses cordonnées $\langle aX\rangle = a_1X_1+...+a_nX_n$ suivent une loi gaussienne dans $\mathbb{R}$(pour tout $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}$). Dans un cadre euclidien E, X vecteur à veleurs dans E est gaussien ssi pour tout $a \in E, \langle a, X\rangle$ suit une loi gaussienne.*

1.1.3 Processus stochastiques

Définition 1.1.3. *(processus stochastique) un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variable aléatoire X_t indexée par un ensemble T. en général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considére que le processus est indexé par le temps t. Si T est un ensemble fini,le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variable aléatoire. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}$,on parle de champ aléatoire (drap quan d=2) Un processus dépend de deux paramètres :$X_t(\omega)$ dèpend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$. pour $t \in T$*

1.1.4 Processus gaussiens

Définition 1.1.4. *(processus gaussien)soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique.Il est dit gaussien si toutes ses loi fini-dimensionnelles $\mathcal{L}(X_t, ..., X_{t_n})$ sont gaussiennes $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, ..., t_n \in T)$ Autrement dit $X = (X_t)_{t\in T}$ est gaussien ssi tout les combinaison linéaire de ses martingales $a_1X_{t_1}+...+a_nX_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_n \in T$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$)*

Définition 1.1.5. *Soient* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *deux processus stochastiques sur le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
i) les processus X *et* Y *sont dit indistinguables, si l'ensemble* $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = Y_t(\omega), t \geq 0\}$ *contient un ensemble de probabilité 1*
ii) les processus X *et* Y *sont des modification l'un de l'autre si* $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ *pour tout* $t \geq 0$

Définition 1.1.6. *Soient* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *et* $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ *deux processus stochastiques sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}})$, *respectivement, alors* X *et* Y *ont les même distributions finidimensionnelles si* $\mathbb{P}((X_{,t_1} ..., X_{t_n}) \in \mathcal{B}) = \widetilde{\mathbb{P}}((X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \in \mathcal{B})$ *pour tout* $0 \leq t_1 < ... < t_n < \infty$ *et* $\mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 1.1.1. *si* X *et* Y *sont indistinguables, alors il sont des modifications l'un de l'autre, mais l'implication inverse n'est pas vraie en générale.*
ii) si X *et* Y *sont des modifications l'un de l'autre alors il ont les même distributions finidimensionnelles.*
iii) supposons que X *et* Y *soient des modifications l'un de l'autre et que toutes les trajectoires de* X *et* Y *soient continues à gauche (ou continues à droite), alors les processus* X *et* Y *sont indistinguibles.*

Remarque 1.1.1. *On peut construire des exemples de processus stochastiques définis sur le même espace de probabilité ayant les mêmes distribution finidimensionnelles mais qui ne sont pas des modifications de l'un de l'autre.*

1.2 Mouvement brownien

1.2.1 Filtration

Définition 1.2.1. *(Filtration) Une filtration*$\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *: pour* $0 \leq s \leq t < +\infty, \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.

1.2.2 Processus mesurable

Définition 1.2.2. *(Processus mesurable, processus continu) Un processus X est dit mesurable si l'application suivante :*

$$([0,+\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,+\infty[) \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

est mesurable.
Un processus est dit continue si pour tout $\omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e les trajectoires sont continues).

1.2.3 Processus adapté

Définition 1.2.3. *(Processus adapté) Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. dans la suite, on aura toujour affaire à des processus mesurable et adapté à une filtration que l'on précisera.*

1.2.4 processus progressivement mesurable

Définition 1.2.4. *(processus progressivement mesurable) Un processus est dit progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$, si pour tout $t \geq 0$ l'application suivante :*

$$([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$

$$(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$$

est mesurable

Définition 1.2.5. *Soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un ecpase probabilisée et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace, une famille adaptée $(M_t)_{t\geq 0}$ de variable aléatoire intégrable (c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E} \mid M_t \mid < +\infty$ pour tout t)est*

une martingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_s) = M_s$ *p.s*
une surmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_s) \leq M_s$ *p.s*
une sousmartingale si, pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(M_t \setminus \mathcal{F}_s) \geq M_s$ *p.s*

Remarque 1.2.1. *On déduit de cette définition que si* M_t *est une martingale, alors* $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ *, pour tout* t

Proposition 1.2.1. *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien standard*
X_t *est une* $\mathcal{F}_t$ *martingale*
$X_t^2 - t$ *est une* $\mathcal{F}_t$ *martingale*

Théorème 1.2.1. *(Inégalités Burkholder-Davis-Grundy (BDG)). Soit* $p > 0$ *un réel. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale locale continue* X*, nulle en zéro,*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t>0} \mid X_t \mid^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\infty^{p/2}\right]$$

remarque, En particulier si $T > 0$

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0<t<T} \mid X_t \mid^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{p/2}\right]$$

1.2.5 Temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$.

Définition 1.2.6. *Une application* τ *de* Ω *dans* $\overline{\mathbb{R}}^+$ *est un temps d'arrêt si, pour tout* $t \geq 0, \{\tau \leq t \in \mathcal{F}_t\}$*. la tribu*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty, pourtoutt \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

s'appelle la tribu des évenements antérieurs à τ*.*

Théorème 1.2.2. *Théoreme du temps d'arrêt : Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale continue par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et si τ_1, τ_2 sont deux temps d'arrêts tels que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, K etant une constante réelle finie, alors M_{τ_2} est integrable et :*

$$\mathbb{E}(M_{\tau_2} \setminus \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1} P.ps$$

Construction de l'intégrale stochastique Soit $(B_t)_t$ un $\mathcal{F}_t$-mouvment brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Nous allons donne un sens à $\int_0^t f(s,\omega)dB_s$ pour une classe de processus $f(s,\omega)$ adapté a la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

On va commncer par construir l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dit élémentaire

La specification des lois jointes d'un processus devient considerablement plus simple pour le cas des processus de Markov

1.2.6 Définition du mouvement brownien

Définition 1.2.7. *(MB de dimension k) un mouvement brownien de dimension k, $\{B_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ est la donnée d'un processus mesurable B à valeur dans R^k, et d'une filtration, tels que B est adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, est continu, et vérifie :*

(1) $B_0 = 0$ *presque sûrement.*

1. *pour [(2)]* $0 \leq s < t$, *l'accroisement* $B_t - B_s$ *est independant de* $\mathcal{F}_s$.
2. *pour [(3)]* $0 \leq s < t$,*l'accroisement* $B_t - B_s$ *suit une loi normale centrée, de matrice de covariance* $\sqrt{t-s}Id_k$, *où* Id_k *désigne la matrice identité de dimension* k.

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ fait partie de la définition. Cependant, si on se donne $\{B_t; 0 \leq t < +\infty\}$, processus continu et si on sait que :

1. *B est à accroissement indépendants et stationnaires, i.e. :pour tout $0 \leq r < s \leq t < u, B_u - B_t$ et $B_s - B_r$ sont indépendant et la loi de $B_u - B_t$*

ne dépend que de la différence $u - t$

2. *2. et $B_t = B_t - B_0$ suit une loi normale centrée, de matrice de covariance $\sqrt{t}Id_k$, alors avec la tribu engendrée par B, $\{B_t, \mathcal{F}_t^B; 0 \leq t < +\infty\}$ est un mouvment brownien où : $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{0 \leq s \leq t\}$*

1.2.7 Etude des deux propriétes trajectorielles

Définition 1.2.8. *Soit*

$$f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$$

f est hölder continu de paramétre $\mu \in [0, 1]$ s'il existe $c > 0$ tel que : $|f(t) - f(s)| \leq c|t - s|^{\mu}, \forall s, t \in \mathcal{I}$ On va citer le théoréme de KOLMOGROV qui est un théoréme de base

Théorème 1.2.3. *Soit X_t un processus à valeurs reélles pour lequel il existe trois constantes strictement positives γ, c, ϵ telque : $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{\gamma}] \leq | t - s |^{d+\epsilon}$ Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ de X telque : $\mathbb{E}[(\sup_{t \neq s} | \widetilde{X}_t - X_s | /|t - s|^{\alpha})^{\gamma}] < \infty$ Pour chaque $\alpha \in [0, \epsilon/\gamma]$. En particulier les trajectoires de $\widetilde{X}$ sont hölder continues de paramétre α.*

Preuve. Examinons quelques conséquences du théoréme On a :

$$\mathbb{E}[(\sup_{t \neq s} | \widetilde{X}_t - X_s | /|t - s|^{\alpha})^{\gamma}] < \infty$$

Ceci implique en particulier $(\sup_{t \neq s} | \widetilde{X}_t - X_s | /|t - s|^{\alpha})^{\gamma} < \infty$ p.s

Donc : $\sup_{t \neq s} | \widetilde{X}_t - X_s | /|t - s|\alpha < \infty$ p.s Ceci preuve que $\widetilde{X}$ hölder continus de paramétre α p.s .

Etude trajectorielle de Mouvement Brownien standard

Dans ce paragraphe on va illustrer l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien standard.

Proposition 1.2.2. *Les trajectoires du mouvement brownien classique(standard) sont hölder continues de paramétre* $\alpha < \frac{1}{2}$

Preuve 1.2.1. . *On prend* $\mu = 2n$

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^{2n}] = \mathbb{E}(|Z|^{2n})(t-s)^n$$

D'aprés le collolaire 1, On a $\gamma = 2n, d = 1, d + \epsilon = n$ *En appliquant le théoréme de KOLMOGROV* B_t *a une modification (version)* $\widetilde{B}$ *dont les trajectoires sont hölder continues de paramétre*

$$\alpha \in [0, \epsilon/\gamma] = [0, \frac{n-1}{2n}] = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$$

En prenant n grand, on a prouvé que $\widetilde{B}$ *est hölder continu de paramétre* $\alpha < 1/2$.

Théorème 1.2.4. *(Propriétés des trajectoires). Si W est un MB, alors presque sûrement, on a :*

(1) $t \to W_t(\omega)$ *n'est à variation finie sur aucun intervalle ;*

(2) $t \to W_t(\omega)$ *est localement hölderienne d'ordre* α *pour tout* $\alpha < 1/2$.

(3) $t \to W_t(\omega)$ *n'est dérivable en aucun point (ni localement hölderienne d'ordre* $\alpha \geq 1/2$*).*

1.3 Propriété de Markov

Proposition 1.3.1. *(Propriété de Markov faible) Si f une fontion mesurable bornée de* $\mathbb{R}^n$ *dans,* $\mathbb{R}^n$*,alors*

$$\forall t, h \geq 0 \quad E^x[f(X_{t+h})/\mathcal{F}_t^{(m)}](\omega) = E^{X_t(\omega)}[f(X_h)]P - ps$$

Enonçons à présent la propriété de Markov forte, la preuve de la propriété de Markov faible découlera directement de celle-ci.

Proposition 1.3.2. *(Propriété de Markov forte)*
Si f une fontion mesurable bornée de $\mathbb{R}^n$ dans, $\mathbb{R}^n$ et τ un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_\tau^{(m)})$ averc $\tau < \infty$ P-ps. alors

$$\forall h \geq 0 \quad E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = \quad E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \quad P-ps$$

Preuve. On veut montrer que

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)]$$

Remarquons que puisqu'on a la propriété de Markov forte pour un mouvment brownien, l'homogéniété dans le temps pour une diffusion d'Itô reste vraie si l'on change un temps déterministe de t par un temps d'arrêt τ (fini P-p.s).

$$X_t^0 = X_t^x - x$$

donc

$$\begin{aligned} E[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau] &= E[f(X_{\tau+h}+x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= E[f(X_{\tau+h}-X_\tau+X_\tau+x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= E[G(X_{\tau+h}-X_\tau, X_\tau+x)/\mathcal{F}_\tau] \\ &= g(X_\tau^x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= E[G(X_{\tau+h}-X_\tau, \alpha)] \\ &= E[f(X_{\tau+h}-X_\tau+\alpha)] \\ &= E[f(X_h+\alpha)] \\ &= E^\alpha[f(X_h)] \end{aligned}$$

où $G(x,y) = f(x+y)$
Afin de pouvoir effectuer ces calculs, on a utilisé la proposition suivante.
Soient $\mathbb{B}$ une sous-tribu de $\mathbb{F}$, Y un vecteur aléatoire $\mathbb{B}$- mesurable et X une variable aléatoire indépendante de $\mathbb{B}$. Alors, pour toute fonction mesurable h,

$$\mathbb{E}[h(Y,X)/\mathbb{B}] = \phi(Y), \; P-ps$$

où

$$\phi(t) = \mathbb{E}(h(t,X))$$

en effet :
- $X_{\tau+h} - X_\tau$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau$
- X_τ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable
- G est une fonction mesurable bornée
  En remplaçant α par X_τ, on obtient

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \ P - ps$$

Ce qui termine la preuve.

La propriété de Markove faible est obtenue en posant, pour chaque t fixé, $\tau = t$

1.3.1 processus de Markov

Définition 1.3.1. *(processus de Markov) Soit μ une mesure de probabilité dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus defini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\mu)$ a valeur dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un processus de Markov avec la distribution initiale μ , si;*
i)$\mathbb{P}^\mu(X_0 \in A) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
ii) pour tout $s, t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}^\mu[X_{t+s} \in A/\mathcal{F}_s] = \mathbb{P}^\mu[X_{t+s} \in A/X_s], p.s.$$

Définition 1.3.2. *une famille de Markov est un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adapté sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est une famille des probabilite $\{\mathbb{P}^x\}_{x\in\mathbb{R}}$ tels que :*
a) pour tout $A \in \mathcal{F}$, la famille $x \to \mathbb{P}^x(A)$ est mesurable
b)$\mathbb{P}^x(X_0 = x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
c)pour tous $x \in \mathbb{R}, s, t \geq 0 et A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mathbb{P}^x[X_{t+s} \in A\mathcal{F}_s] = \mathbb{P}^x[X_{t+s} \in A/X_s], P_p.s.$
d) pour tous $x \in \mathbb{R}, s, t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}^x[X_{t+s} \in /X_s] = \mathbb{P}^y[X_t \in A], \mathbb{P}^x X_s^{-1} - p.s.$

1.3.2 Processus de diffusion

Définition 1.3.3. *(processus de diffusion) Soit* $X = \{X_t, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbb{R}}$*, une famille de Markov sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*avec des trajectoires presque sûrment continues, on dit que X est un processus de diffusion,s'il verifie les condition suivantes :*

1)$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s}\mathbb{E}[X_t - X_s/X_s = x] = b(s, x)$

2)$\lim_{t\to s} \frac{1}{t-s}\mathbb{E}[(X_t - X_s)^2/X_s = x] = \sigma^2(s, x)\forall x \in \mathbb{R}$ *où* σ*,*b *:*$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, sont des fonctions mesurables, on appelle b(s,x) le drift et* $\sigma^2(s, x)$ *le coefficient de diffusion*

En d'autres termes b(s,x) est une vitesse du mouvement aléatoire modélisé par X et $\sigma(s, x)$ *est une approximation de la moyenne du changement dans la covariance* $X_t - x$*, pour les petites valeur de* $t > 0$

Exemple 1.3.1. *le mouvement brownien standard est un processus de diffusion avec le drift* $b(s, x) \equiv 0$ *et le coefficient de diffusion* $\sigma(s, x) \equiv 1$

Il y a plusieurs définitions de ce type du processus (probabilite de transition, generateur infinitesimal,...) et plusieurs approches telles que les approches analytiques et les approches probabiliste par equation différetielles stochasique qui sont l'objet de notre travail

1.4 Intégale stochastique

1.4.1 Intégale stochastique

Définition 1.4.1. *(Intégale stochastique)Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équation différentielle ordinaire, qui sert de modéle pour de phénoménes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été géné par la non différentiabilité du MB. Du coup on a commencé par construire une intégrale par rapport au MB, pour ensuite défnir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à* $\int_0^t H_s dB_s$

1.4.2 Intégrale de stieljes

Définition 1.4.2. *(Intégrale de stieljes) Soit f une fonctionà valeur réelles, definie sur $[a,b]$. Rapplons que si g est à variation bornnée et pour ϕ fonction définie sur $[a,b]$ et continue on peut définir l'integrale au sens de Stieljes de ϕ par rapport à g de la façon suivant :*

$$\int_a^b \phi dg = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

où$\mid \Pi \mid$ est la subdivision $x_0, x_1, ..., x_m$ de l'intervalle $[a,b]$ et $\mid \Pi \mid$ est le pas se Π i.e

$$\mid \Pi \mid = \max_{k=1,\ldots,m} (x_k - x_{k-1}).$$

On pose alors :

$$\int_a^b \phi df = \int_a^b \phi dg - \int_a^b \phi dh$$

Mais la réciproque est vrai. Si pour tout fonction ϕ continue, la limite suivante :

$$\lim \sum_{k=1}^{m} \phi(x_{k-1})(g(x_k) - g(x_{k-1}))$$

existe et est finie alors g est à variantion bornnée Donc il est impossible de défnir l'intégrale stochastique trajectoire par trajectoire pour tout processus continu. Si H est un processus stochastique continu, à ω fixé, on ne peut pas donner un sens à l'expression : $\int_0^t H_s(\omega) dB_s(\omega)$

Une telle construction a été développée par T. Lyons (1994-...)[15] dans la théorie des rough paths. Mais elle impose des conditions supplémentaires de régularité sur H.

1.4.3 Intégrale par rapport au MB

Définition 1.4.3. *Intégrale par rapport au MB : La construction est dûe à K. Itô (1942-1944) dans le cas du M.B. et a été généralisée au cas d'une martingale de carré intégrable par Kunita et Watanabe (1967).*
On suppose donné un mouvement brownien B avec sa filtration $(F_t)_{t\geq 0}$. On définit deux classes de processus :

$$H^2 = \{H = (H_t)_{t\geq 0}, \, processus \; adapt \, , \, tel \, que \, \forall \, t \, \mathbb{E} \int_0^t H_s ds < +\infty\}$$

et $\mathcal{M}_c^2$ l'ensemble des martingales (par rapport à la filtration du brownien), de carré intégrable, continues et nulles à l'instant 0.

1.4.4 Intégrale d'Itô

Théorème 1.4.1. *(Intégrale d'Itô) Il existe une unique application linéaire, notée I, de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathcal{M}_c^2$ telle que pour tout $H \in \mathbb{H}^2$ et tout t*

$$\mathbb{E}(I(H)_t^2) = \mathbb{E} \int_0^t H_s^2 ds$$

on note

$$I(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$$

Tel que le théoréme est énoncé, on peut se demander où intervient vraiment le M.B, dans l'intégrale. Pour comprendre son rôle, il faut se pencher un peu plus sur la construction. Si le processus H est de la forme :

$$H_t = \Phi_0 1_0 + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i 1_{]t_{i-1},t_i](t)}$$

ou $0 = t_0 < t_1 < .. < t_p < +\infty$, Φ *est* $\mathcal{F}_0 -$ *mesurable et bornée et pour i=1...p les* Φ_i *sont* $\mathcal{F}_{t_{i-1}} -$ *mesurable et bornée on pose :*

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i(B_{t_i \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

Il est aisé de démontrer que l'intégrale stochastique I vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment sur les processus élémentaires. Ensuite on montre la densité des processus de la forme (1) dans $\mathbb{H}^2$. *Et on va prolonger I définie sur les processus élémentaires à la classe* $\mathbb{H}^2$. *L'unicité signifie que si I et* I' *sont deux prolongements vérifiant les propriétés précédentes alors I(H) et* $I'(H)$ *sont indistinguables.*

1.4.5 Propriétés de l'intégrale d'Itô

Proposition 1.4.1. *(Propriétés de l'intégrale d'Itô) Pour* $H \in \mathbb{H}^2$ *et* $T \in \mathbb{R}^+$,

1)I(H) est à variation quadratique finie et cette variation sur [0,T] est égale à $\int_0^t H_s^2 ds$

2)

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t H_s dB_s \right|^2 \right) \le 4\mathbb{E} \int_0^T H_s^2 ds$$

Une derniére extension consiste à relaxer l'hypothése d'intégrabilité portant sur H, en introduisant :

$$\widetilde{H}^2 = \{H = (H_t)_{t \ge 0},\ processus\ adapt,\ tel\, que\, \forall\, t \ge 0 \int_0^t H_s^2 < +\infty\, P - p.s\}$$

on peut encore prolonger I sur cet ensemble, mais on n'a plus une martingale, mais seulement une martingale locale

1.4.6 Formule d'Itô

La formule d'Itô (ou formule de changement de variable) est un outil particuliérement important dans l'etude des processus stochastique ou a un M.B d-dimensionnel

Définition 1.4.4. *(Processus d'Itô ou semi martingale) un processus X, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, est appelé semi-martingale s'il se décompose de la maniere suivante : pour tout t, presque surment :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

avec X_0 et K à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, H à valeur dans $\mathbb{R}^{n\times d}, H \in \mathbb{H}^2$ et $\mathbb{E}\int_0^t \mid K \mid ds < \infty \forall t$. Cette décomposition si elle existe est unique

Théorème 1.4.2. *(Formule d'Itô)soit f une fonction définie sur $[0, +\infty] \times \mathbb{R}^n$ à valeur réeles, une fois continument dérivable en temps et deux fois en espace (i.e. tout les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continue) soit X une semi-martingale $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$ Alors $\{f(t, X_t; 0 \leq t \leq +\infty\}$ est encore une semi-martingale et admet la decomposition suivant $f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s)K ds + \int_0^t \nabla f(s, X_s)H_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t trac(H_s^* D^2 f(s, X_s)H_s)ds$ ou ∇f désigne le gradien de f par rapport aux variable d'espace et D^2 désigne la matrice hessienne de f sans l'hypothèse de regularité sur f, ceci est faux sans celle-ci on tombe dans une autre classe de processus dit de Dirichlet*

Définition 1.4.5. *Soit V^* la classe des processus stochastique à valeur réelles $(Y_t)_{t\geq 0}$ adaptées, mesurables et tels que :*

$$P\left(\int_0^\infty Y_t^2 dt < \infty\right) = 1$$

Théorème 1.4.3. *Soient B un processus d'Itô réel de la forme :*

$$dB_t = X_t dt + dW_t, 0 \leq t \leq T, Y_0 = 0$$

où $T \leq \infty$ est une constante donnée, W un mouvement brownien et $X_t 1_{\{t \leq T\}} \in V^*$, poson :

$$M_t = \varepsilon_t(X) = \exp\bigg(- \int_0^t X_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\bigg), 0 \leq t \leq T$$

et supposons que X satisfait la condition de Novikov :

$$\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg(\frac{1}{2}\int_0^T X_s^2 ds\bigg)\bigg] < \infty$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérence par rapport à P.

Définissons la meusure Q dans $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$ par $dQ(\omega) = M_T(\omega)dP$, alors B est un mouvement brownien par rapport a Q pour tout $t \leq T$.

Chapitre 2

EDS dérigées par le mouvement brownien.

2.1 Introduction

Le but des équations différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un système physique perturbé par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$dX_t = b(X_t)dt \tag{2.1}$$

On rajoute, pour exprimer ce bruit et définir son intensité un terme qui sera de la forme σdB_t où B est un mouvement brownien et σ une constante, on obtient une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t \tag{2.2}$$

On généralise cette équation en permettant à σ de dépendre de l'état de y à l'instant t :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.3}$$

dite équation autonome.

On peut encore généraliser cette équation en permettant à b et σ de dépendre aussi du temps t pour avoir enfin une équation différentielle stochastique de la forme

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.4}$$

La solution de l'équation :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \tag{2.5}$$

Définition 2.1.1. *Pour l'équation (2.4), on dit qu'il y a*

. existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de (2.5)

. existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de (2.5) ont même loi

. unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t>0}, P)$ et le mouvement brownien B étant fixés, deux solutions X et X' telles que $X_0 = X'_0$ P-p.s. sont indistinguables.

On dit de plus qu'une solution X de l' EDS (2.5) est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

2.2 Solutions fortes.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W, \quad t \geq 0\}$ un mouvement brownien et ξ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$, indépendante de $\mathcal{F}_\infty^W$ de distribution $\mu(\Gamma) = P(\xi \in \Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Définissions la filtration $\mathcal{B}_t$ par :

$$\mathcal{B}_t = \sigma(\xi) \vee \mathcal{F}_t^W = \sigma(\xi, W_s, 0 \leq s \leq t), t \geq 0$$

et l'augmentation $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{B}_t$ par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{B}_t \cup \mathcal{N}), t \geq 0, \quad \mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t), \tag{2.6}$$

où $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega / \exists G \in \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{B}_t), \quad avec\ N \ \subset G \quad et \quad P(G) = 0\}$

Définition 2.2.1. *soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, $W = \{W_t, \mathcal{F}_t^W, \quad t \geq 0\}$ un mouvement brownien et ξ une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}$, indépendante de W. Un processus X est dit solution forte de l'équation (2.4) avec* *la condition initiale ξ si $P(X_0 = \xi) = 1$ et X vérifie les conditions suivantes :*

(i) X possède des trajectoire contnues p.s,

(ii) X est $\mathcal{F}_t$-adapté, (où $\mathcal{F}_t$ est définie par (2.6)),

(iii) X satisfait :

$$P\left[\int_0^t (|b(s,X_s)| + \int_0^t |\sigma(s,X_s)|^2)ds < \infty\right] = 1,$$

(iv) X satisfait :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)dt + \int_0^t \sigma(s,X_s)dW_s, t \geq 0.$$

• *On peut interoréter X comme la sortie d'un système dynamique défini par la paire des coefficients (b, σ), où les entrées sont W et ξ.*

2.3 Solution faible

Nous pouvons affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS introduite précédemment (notamment les conditions de Lipschitz) et donc introduire une nouvelle notion de solution dite faible, en opposition aux solutions fortes. Ceci a des implications importantes aussi bien pour la théorie que pour les applications.

Définition 2.3.1. *La solution faible de l'équation (2.4) est un triplet :*

- *$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré*
- *W, un$\mathcal{F}_t$-mouvement brownien (standard)*
- *X, un processus $\mathcal{F}_t$ adapté*

les processus X et W sont définis sur le même espace donné et vérifient :

$$P(\int_0^t [\mid b(s,X_s\mid^2 + \mid \sigma(s,X_s\mid^2]ds) = 1, \quad t \geq 0$$

et

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \qquad X_0 = x \tag{2.7}$$

Définition 2.3.2. *(Unicité faible en loi). On dit qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation* (2.4) *si deux solutions faibles ont toujours même loi.*

Définition 2.3.3. *(Unicité en loi) L'EDS* (2.5) *admet une solution faible unique en loi si, étant données deux solution faibles* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X)$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}_t}, \widetilde{P}, \widetilde{W}, \widetilde{X})$ *avec conditions initiales de même loi, alors les processus* X *et* $\widetilde{X}$ *ont même loi. Dans ce cadre, il existe également un autre concept d'unicité : L'EDS (2) admet une solution faible unique au sens trajectoriel, étant données deux solution faibles* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W, X)$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{F}_t}, P, W, \widetilde{X})$ *(donc seuls les processus et les filtrations sont différentes* W *est un mouvement brownien pour les deux filtrations) avec même condition initiale, alors les processus* X *et* $\widetilde{X}$ *sont indistinguables.*

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre. Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure, sous certaines conditions sur b et σ, l'existence d'une unique solution forte

Exemple 2.3.1. *Unicité faible mais pas trajectorielle. Soit* β *un mouvement brownien standard On pose*

$$W_t = \int_0^t sgn(\beta_s) d\beta_s$$

On a alors :

$$\beta_t = \int_0^t sgn(\beta_s) dW_s$$

En effet :

$$\begin{aligned}\int_0^t sgn(\beta_s) dW_s &= \int_0^t sgn(\beta_s) sgn(\beta_s) d\beta_s \\ &= \int_0^t d\beta_s\end{aligned}$$

$$= \beta_t$$

W est une martingale issue de 0 telle que $< W, W >_t = t$ *ainsi, par la caractérisation de Levy, W est aussi un mouvement brownien. On voit alors que* β *est solution de l'EDS*

$$dX_t = sgn(X_t)dW_t, \qquad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement brownien . Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. En effet, β *et* $-\beta$ *sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien. Aussi,* β *n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de W coïncide avec la filtration canonique de* $\mid \beta \mid$ *qui est strictement plus petite que celle de* β*. En effet, l'événement* $\{\beta < 0\}$ *appartient à* $\mathcal{F}^{\beta}$ *mais pas à* $\mathcal{F}^{|\beta|}$

Exemple 2.3.2. *Exemple de non unicité faible. On se donne l'EDS :*

$$X_t = \int_0^t \mid X \mid^{\alpha} ds \tag{2.8}$$

avec α *un réel compris strictement entre 0 et 1. On a alors, pour tout réel c,*$(X_t^{(c)})_{t>0})$ *est une solution de l'EDS 2.8 : avec*

$$X_t^{(c)} = \begin{cases} 0, & si \quad 0 \leq t \leq c \\ (\frac{t-c}{\beta})^{\beta} & si \quad t > c \end{cases}$$

avec $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$

En effet,

$$
\begin{aligned}
X_t = \int_0^t \mid X \mid^\alpha ds &= \int_c^t (\frac{s-c}{\beta})^{\alpha\beta} ds \\
&= (\frac{1}{\beta})^{\alpha\beta} \int_c^t (s-c)^{\alpha\beta} ds \\
&= \frac{1}{\beta}^{\alpha\beta} \frac{(t-c)^{\alpha\beta+1}}{\alpha\beta+1} \\
&= \frac{1}{\beta^{(1-\frac{1}{\beta})\beta}} \frac{(t-c)^{(1-\frac{1}{\beta})+1}}{(1-\frac{1}{\beta})+1} \\
&= \frac{1}{\beta^{(1-\frac{1}{\beta})\beta}} \frac{(t-c)^{(1-\frac{1}{\beta})+1}}{(1-\frac{1}{\beta})+1} \\
&= (\frac{(t-c)}{\beta})^{\beta} \\
&= X_t^{(c)}
\end{aligned}
$$

On vient alors de montrer que pour tout réel $c, X_t^{(c)}$ *est une solution de l'EDS, ce qui nous donne une infinité de solutions. De plus, deux solutions différentes ne peuvent pas avoir la même loi. Passons à présent au théorème d'existence et d'unicité de la solution de 2.5 On désigne par* $\mid . \mid$ *la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^d$

Théorème 2.3.1. *Supposons que les coefficients* b *et* σ *sont lipschitziens par rapport à la deuxième variable, i.e il existe une constante* $K > 0$*, telle que :*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

et satisfait la condition de la restriction sur la croissance linéaire :

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1+|x|^2), \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Alors pour toute condition ξ *initiale avec* $E(\xi^2) < \infty$*, l'équation 2.8 admet une solution forte unique et* $\sup_{t\geq 0} E(|X_t|^2) < \infty$.

Remarque 2.3.1. – ***(i)*** *La condition $E(\xi^2) < \infty$ est supposée pour simplifier la démonstration. Le théorème reste vrai si elle est omise.*

– ***(ii)*** *La condition de restriction sur la croissance linéaire garantit la non explosion de la solution, elle peut être omise si on résoud l'équation sur l'intervalle $[0, \alpha[$, où :*

$$\alpha = \inf\left\{t, \left[\int_0^t (|b(s, X_s)| + |\sigma(s, X_s)|^2)ds = \infty\right]\right\},$$

α est appelé temps d'explosition de la solution. Dans ce cas, sur cet intervalle, la condition de Lipschitz est sufisante pour l'existence et l'unicité de la solution forte.

– ***(iii)*** *On peut poser la condition de restriction sur la croissance linéaire sur $xb(x)$ au lieu de $b(x)$, ie :*

$$|\ xb(t, x)\ |^2 \leq K\big(1 + |x|^2\big), \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

– ***(iv)*** *On peut remplacer la condition de lipschitz globale par la condition de lipschitz locale ie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists K_n > 0,\ tel\ que\ \forall t \geq 0\ et\ x, y \in \mathbb{R}\ avec\ |x|, |y| \leq n :$$

$$|\ b(t, x) - b(t, y)\ | + |\ \sigma(t, x) - \sigma(t, y)\ | \leq K_n\ |\ x - y\ |$$

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du théorème.

Lemme de Gronwall

Lemme 2.3.1. *Soit $T > 0$, $c \geq 0$ et $u, v : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions mesurables. Si u est bornée et v est intégrable, alors :*

$$u(t) \leq c + \int_0^t u(s)v(s)ds, \forall t \in [0, T]$$

Ce qui implique :

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right).$$

Preuve :

Supposons $c > 0$ et posons $z(t) = c + \int_0^t u(s)v(s)ds, \forall t \in [0,T]$, alors $u(t) \leq z(t)$, $z(t)$ est différentiable et $\forall t \in [0,T]$:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{u(t)v(t)}{z(t)} \leq v(t),$$

alors :

$$\log(z(t)) \leq \log(z(0)) + \int_0^t v(s)ds.$$

Donc :

$$u(t) \leq z(t) \leq c\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right), t \in [0,T].$$

Pour $c = 0$, on applique l'inégalité pour $c_n > 0$ avec $\lim c_n = 0$ et on passe à la limite.

Preuve du Théorème :

1. l'unicité :

   Soit X et Y deux solutions fortes de (2.4) :

   $$X_t - Y_t = \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s, \forall t \in [0,T].$$

   On a :

   $$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2), \tag{2.9}$$

   donc : $\mathbb{E}\big(\mid X_t - Y_t \mid^2\big) \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))ds\right|^2$

   $+ 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))dW_s\right|^2, \forall t \in [0,T].$

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

   $$\left(\left|\int_0^t f ds\right|^2 \leq t\int_0^t |f|^2 ds,\ f : [0,t] \to \mathbb{R}\right)$$

et grace à la propriété de l'intégrale stochastique et la condition de lipschitz, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\mid X_t - Y_t \mid^2\Big) &\leq 2T\mathbb{E}\bigg(\int_0^t \mid (b(s,X_s) - b(s,Y_s)) \mid^2 ds\bigg) \\
&\quad +2\mathbb{E}\bigg(\int_0^t \mid (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)) \mid^2 ds\bigg), \forall t \in [0,T], \\
&\leq 2TK^2\bigg(\int_0^t \mathbb{E}\Big(\mid X_s - Y_s \mid^2\Big)ds\bigg) + 2K^2\bigg(\int_0^t \mathbb{E}\Big(\mid X_s - Y_s \mid^2\Big)ds\bigg), \\
&\quad \forall t \in [0,T] \\
&= \mathcal{C}\bigg(\int_0^t \mathbb{E}\Big(\mid X_s - Y_s \mid^2\Big)ds\bigg).
\end{aligned}$$

où $\mathcal{C} = 2K^2(T+1)$

Appliquons le lemme de Gronwall pour $u(t) = \mathbb{E}\Big(\mid X_t - Y_t \mid^2\Big)$ et $c = 0$, on obtient $\mathbb{E}\Big(\mid X_t - Y_t \mid^2\Big) = 0$ donc $X_t = Y_t$ p.s et puisque X et Y sont continues et T est arbitraire, alors $\mathbb{P}\big(X_t = Y_t, \forall t \geq 0\big) = 0$ et l'unicité forte est satisfaite pour l'équation (2.4)

2. l'existence :

   On utilise la méthode des approximation successives définie par :

$$X_t^{(0)} = X_0$$

$$X_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b\big(s, X_s^{(n)}\big)ds + \int_0^t \sigma\big(s, X_s^{(n)}\big)dW_s, \forall t \geq 0, \forall n \geq 0$$

   et établirons la converge de la solution de l'équation (2.4).

   $\forall t \geq 0$, $\forall n \geq 0$, $X_t^{(n)}$ est continue et $\mathcal{F}_t-$adapté.

   Posons :

$$D_t^{(n)} = \mathbb{E}\Big(\mid X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \mid^2\Big), \forall n \geq 0, \forall t \in [0,T]$$

   et montrons que :

$$D_t^{(n)} \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.10}$$

tel que M soit dépendant de K, T et X_0.
Pour $n = 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} D_t^{(0)} = \mathbb{E}\big(\mid X_t^{(1)} - X_t^{(0)} \mid^2 \big) & = & \mathbb{E}\big(\mid \int_0^t b(s, X_0)ds + \sigma(s, X_0)dW_s \mid^2 \big) \\ & \leq & 2t\mathbb{E}\big(\mid \int_0^t K^2\big(1 + |X_0|^2\big)ds \mid^2 \big) + \\ & & 2\mathbb{E}\big(\mid \int_0^t K^2\big(1 + |X_0|^2\big)ds \mid^2 \big) \\ & \leq & tM \end{array}$$

où $M = 2K^2\big(1+\mathbb{E}|X_0|^2\big)(t+1)$ (on a utilisé l'inégalité (2.9), la propriété de l'intégrale stochastique, la condition de restriction sur la croissance linéaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Alors l'inégalité (2.10) est satisfaite pour $n = 0$.
Supposons que l'inégalité (2.10) soit satisfait pour $n - 1$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} D_t^{(n)} & = & \mathbb{E}\big(\mid X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)} \mid^2 \big) \\ & = & \mathbb{E}\Bigg(\Bigg| \displaystyle\int_0^t \big(b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})\big)ds + \big(\sigma(s, X_s^{(n)}) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)dW_s\Bigg|^2\Bigg) \\ & \leq & 2TK^2 \displaystyle\int_0^t \mathbb{E}\big(\mid X_s^{(n)} - X_t^{(s)} \mid^{n-1} \big)ds + 2K^2 \displaystyle\int_0^t \mathbb{E}\big(\mid X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)} \mid^2 \big)ds \\ & \leq & 2K^2(T + 1) \displaystyle\int_0^t \frac{M^n s^n}{n!}ds \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n + 1)!}. \end{array}$$

En utilisant l'inégalité (2.9), la condition lipschitz, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la propriété de l'intégalité stochastique et l'inégalité de martingale, on a :

$$\begin{array}{rcl} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\big(\big|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\big|^2\big) & \leq & 2\Bigg| \displaystyle\int_0^t b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})\Bigg|^2 ds \\ & & +2 \displaystyle\sup_{0\leq t\leq T} \Big| \displaystyle\int_0^T \big(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\big)dW_s\Big|^2\Bigg) \\ & \leq & 2TK^2 \int_0^T \big|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\big|^2 ds + 8K^2 \int_0^T \big|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\big|^2 \\ & \leq & \bar{\mathcal{C}} \int_0^T \big|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}\big|^2 ds \leq \bar{\mathcal{C}} \frac{(MT)^n}{n!} \end{array}$$

Où $\bar{\mathcal{C}} = 2K^2(T+4)$.

Grace à l'inégalité de Chebyshev, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) &\le 2^{2(n+1)}\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\|^2\right)\\ &\le 2^{2(n+1)}\bar{\mathcal{C}}\frac{(MT)^n}{(n)!}.\end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2(n+1)}\bar{\mathcal{C}}\frac{(MT)^n}{n!} < \infty$, alors :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| > \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0, \forall n \ge N(\omega),$$

et grace au lemme de Borel-Cantelli

$$\sup_{m>0}\sup_{0\le t\le T}\left\|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}\right\| \le \frac{1}{2^n}\ p.s.$$

La suite $\left\{X_t^{(n)}(\omega), 0 \le t \le T\right\}_{n=1}^{\infty}$ est donc de Cauchy dans l'espace $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ avec la norme de la convergence uniforme et converge vers une limite $\left\{X_t(\omega), 0 \le t \le T\right\}$ continue et adaptée.

On montre que X est satisfait l'equation (2.4)

$$\left|\int_0^t \left(b(s,X_s^{(n)}) - b(s,X_s)\right)ds\right| \le K\int_0^T \left|X_s^{(n)} - X_s\right|^2 ds$$

$$\le KT\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n)} - X_t| \to 0\ \ p.s$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s))dW_s\right)^2 = \mathbb{E}\int_0^t \left((\sigma(s,X_s^{(n)}) - \sigma(s,X_s))ds\right)^2$$

$$\le K^2\int_0^t \mathbb{E}(X_s^{(n)} - X_s)^2 ds$$

$$\leq K^2 T \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} \|X_t^{(n)} - X_t\|^2\right) \to 0$$

On montre que $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$

$$\mathbb{E}(|X_t^{(n+1)}|^2) \leq 3\mathbb{E}(|X_0|^2) + 3\mathbb{E}\left(|\int_0^t b(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3\mathbb{E}\left(|\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dW_s|^2\right)$$

$$\leq 3\mathbb{E}(|X_0|^2) + 3T\mathbb{E}\left(|\int_0^t b(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right) + 3\mathbb{E}\left(|\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})|^2 ds\right)$$

$$\leq 3\mathbb{E}(|X_0|^2) + 3(T+1)K^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(1 + |X_s^{(n)}|^2\right) ds\right)$$

$$\leq 3\mathbb{E}(|X_0|^2) + 3(T+1)K^2 T + 3(T+1)K^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left(|X_s^{(n)}|^2\right) ds\right)$$

$$\leq C(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) + C\int_0^t \mathbb{E}\left(|X_s^{(n)}|^2\right) ds$$

$$\leq \left[C + C^2 + ... + C^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right](1 + \mathbb{E}(|X_0|^2))$$

$$\leq C(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) \exp(Ct), \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

En faisant tendre n vers ∞, on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq C(1 + \mathbb{E}(|X_0|^2)) \exp(Ct), \quad \forall 0 \leq t \leq T$$

On presente maintenant trois exemples de résolution d'EDS

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1. *Soit l'EDS suivante :*

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t, \qquad X_0 = x$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS. On a

$$e^t dX_t = -e^t X_t dt + dB_t$$

ou encore

$$e^t dX_t + e^t X_t dt = dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d(e^t X_t) = e^t dX_t + e^t X_t dt$$

Ce qui donne :

$$d(e^t X_t) = dB_t$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + e^{-t} B_t$$

Exemple 2.4.2. *Equation d'Ornstein Uhlenbeck On cherche à résoudre l'EDS suivante :*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \qquad X_0 = x$$

où μ et σ sont deux réels. Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution. On multiplie les deux côtés de cette équation par $e^{-\mu t}$, on obtient :

$$e^{-\mu t} dX_t = \mu X_t e^{-\mu t} dt + \sigma e^{-\mu t} dB_t$$

ou encore

$$e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt = \sigma e^{-\mu t} dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties donne :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = e^{-\mu t} dX_t - \mu X_t e^{-\mu t} dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d(X_t e^{-\mu t}) = \sigma e^{-\mu t} dB_t$$

d'où, la solution

$$X_t = x + \sigma e^{\mu t} \int_0^t e^{-\mu s} dB_s$$

Exemple 2.4.3. *Modèle de Black et Scholes Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant t. Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :*

$$dS_t = S_t(\mu dt, \sigma dB_t), \qquad S_0 = x$$

La solution est

$$S_t = xe^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t} e^{\mu t}$$

En effet, il suffit d'écrire $\sigma(t,x) = \sigma x$ et $b(t,x) = bx$ pour voir qu'elles vérifent les conditions du théorème (2.3.1). On applique ensuite la formule d'Itô à

$$f(t,x) = xe^{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}t} e^{\mu t}$$

on aura

$$S_t = f(t, B_t)$$

$$= f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds$$

$$= \int_0^t (b - \frac{\sigma^2}{2}) S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_s ds$$

d'où

$$dS_t = S_t(\mu dt, \sigma dB_t), \qquad S_0 = x$$

On peut affaiblir la condition de Lipschitz dans le théorème (2.3.1) de la manière suivante :

Théorème 2.4.1. *(Yamada, Tanaka)*
Supposons que l'équation différentielle stochastique unidimentionnelle :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2.11}$$

Vérifie les conditions suivantes :

i)

$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq \rho(x-y),$$

ii)

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k(|x-y|), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

où $\rho, k : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *sont des fonctions strictement croissantes et* ρ *concave telle que :*

$$\rho(0) = k(0) \ et \ \int_0^\epsilon \frac{du}{\rho(u)} = \int_0^\epsilon \frac{du}{k^2(u)} = \infty,$$

alors l'unicité des trajectoires et l'unicité forte sont satisfaites.

Preuve

Soient $1 > a_1 > ... > a_n > ... > 0$ tels que :

$$\int_{a_1}^1 \frac{1}{k^2(u)} du = 1, \int_{a_2}^{a_1} \frac{1}{k^2(u)} du = 2, ..., \int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{k^2(u)} du = n$$

Il est clair que $a_n \to 0$, si $n \to \infty$. Soit $\psi_n(u), n \geq 1$, une suite de fonctions continues à support contenu dans $]a_n, a_{n-1}[$ telle que $0 \leq \psi_n(u) \leq 2k^{-2}(u)/n$ et $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(u) du = 1$.

Posons :

$$\phi_n(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_n(u) du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que $\phi_n \in C^2(\mathbb{R})$, $|\phi_n'(x)| \leq 1$ et $\phi_n(x) \to |x|$ si $n \to \infty$ et $\phi_n(x)$ est non décroissante.

Supposons que X^1 et X^2 soient deux solutions de l'équation (2.11) sur le même espace de probabilité avec la même condition initiale et la même filtration, alors :

$$X_t^1 - X_t^2 = \int_0^t (b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2)) ds + \int_0^t (\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2)) dW_s$$

En appliquant la formule d'Itô pour ϕ_n, on obtient :

$$\phi_n(X_t^1 - X_t^2) = \int_0^t \phi_n'(X_t^1 - X_t^2)(b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))ds$$

$$+1/2 \int_0^t \phi_n''(X_t^1 - X_t^2)(\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))ds$$

$$+ \int_0^t \phi_n'(X_t^1 - X_t^2)(\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))dW_s$$

L'espérance de la troisième intégrale dans le terme droit est nulle, alors :

$$\mathbb{E}\left[\phi_n(X_t^1 - X_t^2)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_n'(X_t^1 - X_t^2)(b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))ds\right]$$

$$+1/2\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_n''(X_t^1 - X_t^2)(\sigma(s, X_s^1) - \sigma(s, X_s^2))ds\right]$$

$$= I_1 + I_2$$

$$|I_1| \leq \int_0^t \mathbb{E}|b(s, X_s^1) - b(s, X_s^2))|ds \leq \int_0^t \mathbb{E}(\rho(|x - y|))ds$$

$$\leq \int_0^t \rho(\mathbb{E}|x - y|)ds$$

On a utilisé $|\phi_n'| < 1$ et la condition (i).

D'autre part, on a $\mathbb{E} \int_0^t \phi_n''(X_t^1 - X_t^2)k^2(X_t^1 - X_t^2)ds \leq 2t/n, alors I_2 \leq t/n \to 0$ si $n \to \infty$ et

$$\mathbb{E}\left[\phi_n(X_t^1 - X_t^2)\right] \to \mathbb{E}\left[|X_t^1 - X_t^2|\right]$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[|X_t^1 - X_t^2|\right] \leq \int_0^t \rho(\mathbb{E}|x - y|)ds$$

La condition (ii) implique que $\mathbb{E}(|X_t^1 - X_t^2|) = 0$ d'où $X_t^1 = X_t^2 \;\; p.s \;\; \forall t \geq 0$. Puisque X^1 et X^2 sont continues, alors l'unicité des trajectoires est satisfaite ainsi que l'unicité forte (car la démonstration est indépendante de la filtration).

Remarque

Si σ satisfait la condition Hölder d'ordre α :

$$|\sigma(t,x) - \sigma(s,y)| \leq C|x-y|^{\alpha}, \quad t \geq 0 \quad x, y \in \mathbb{R}$$

où $C < \infty, \alpha > 0$, alors pour $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la condition (i) est satisfaite.

Proposition 2.4.1. *(Zvonkin)*
Soit l'EDS unidimentionnelle :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t; \quad X_0 = x_0$$

où le coefficient b est mesurable et borné, le coefficient σ est continu et borné et il existe des constantes $C > 0, \epsilon > 0s$ telles que :

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C\sqrt{|x-y|}, t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}$$

$$|\sigma(t,x)| \geq \epsilon, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Alors l'existence forte et l'unicité des trajectoires sont satisfaites.

Théorème 2.4.2. *supposons que b et σ vérifient les condition de théorème (2.3.1), alors la solution forte X de (2.4) est représentée par $X = F(\xi, W)$ où F satisfait la propriété de mesurabilité $\forall t \geq 0, F_{\mu}^{-1}(\mathcal{H}_t) \subset \mathcal{F}_t$ et pour tout $f \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, la fonction $x \to F(x, f)$ est continue. De plus pour tout espace de probabilité, tout mouvement brownien W et toute variable aléatoire ξ, la solution forte X est obtenue par $X = F(\xi, W)$ avec la même fonction F.*

Théorème de Yamada-Watanabe Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas optimales. Toshio YAMADA et Shinzo WATANABE ont montré qu'on peut les affaiblir dans le théorème suivant :

Théorème 2.4.3. *Soit d = m = 1 Supposons que b et σ sont à croissance linéaire, que b vérifie la condition de Lipschitz locale et* $| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) |^2 \leq \rho | x - y |$ *pour tout* $t \geq 0$, *où* ρ *est une fonction borélienne de* $]0, +\infty[$ *dans lui même telle que*

$$\int_{|Z|<\epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \qquad \forall \epsilon > 0$$

Alors 2.3 admet une unique solution forte.

En effet, les conditions du théorème de Yamada et Watanabe sont plus faible que la condition de Lipschitz. Si s est lipschitzienne, alors on a pour tous x et y réels, si

$$| \sigma(x) - \sigma(y) | \leq c | x - y |$$

alors

$$| \sigma(x) - \sigma(y) |^2 \leq c^2 | x - y |^2$$

Il suffit alors de prendre $\rho(x) = x^2$ On a bien

$$\int_{|Z|<\epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \qquad \forall \epsilon > 0$$

Exemple 2.4.4. *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *On considère l'EDS*

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \qquad X_0 = 0$$

$f(x) = \sqrt{x}$ *n'est pas lipschitzienne mais elle vérifie la condition du théorème de Yamada et Watanabe. La solution (unique) de cette équation est appelée processus de Feller.*

2.4.1 Deux concepts d'unicité.

Il y a deux types d'unicité associés à la notion de solution faible : l'unicité des trajectoires qui est la généralisation de l'unicité forte et l'unicité en loi qui est importante dans le cadre des solutions faibles.

Définition 2.4.1. *Supposons que* $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$ *et* $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, (\widetilde{X}, W)$ *sont deux solutions faibles de l'équation différentielle stochastique* (2.4) *avec le même mouvement brownien* W*, le même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et la même condition initiale i.e.* $(X_0 = \widetilde{X}_0) = 1$*. On dit que l'unicité des trajectoires est satisfaite pour l'équation* (2.4) *si on a :* $P(X_t = \widetilde{X}_t, \forall t \geq o) = 1$.

Définition 2.4.2. *On dit que l'unicité en loi est satisfaite pour l'équation* (2.4)*, si pour tout couple de solutions faibles* $(\Omega, \mathcal{F}, P), (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X, W)$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{P}), \{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}, (X, W)$ *avec la même distribution initiale i.e.*

$$P(X_0 \in A) = \widetilde{P}(\widetilde{X}_0 \in A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

les deux processus X*,* $\widetilde{X}$ *possèdent la même loi.*

Proposition 2.4.2. *L'unicité des trajectoires implique l'unicité en loi.*

Preuve. Soit deux solutions faibles. On pose $S = \mathbb{R} \times C([0, \infty [\times \mathbb{R}) \times C([0, \infty[\times \mathbb{R})$. Soit S la σ-algèbre borélienne de S et considérons la mesure image $Q^i(A) = P^i[(X_0^i, W^i, X^i) \in A], A \in \mathcal{S}, i = 1, 2$. On X_t^i est $\mathcal{F}_t^i$-mesurable et X_0^i est P^i-indépendant de W^i. Si μ est la P^i-loi de X_0^i, alors la mesure produit $\mu \otimes P^W$ est la P^i-loi des deux premières coordonnés (X_0^i, W^i) (où P^W est la mesure de Wiener). On a $\forall k \geq 1, C([0, \infty[\times \mathbb{R}^k)$ est un espace polonais, alors la distribution conditionnelle régulière K^i de X^i sachant (X_0^i, W^i) existe sous P^i et on peut écrire pour tout borélien $F \in \mathbb{R} \times C([0, \infty[\times \mathbb{R}), G \in C([0, \infty[\times \mathbb{R})$:

$$Q^i(F \times G) = \int_F K^i(x, w, G)\mu(dx)P^w(dw).$$

Soient $T = S \times C([0, \infty[\times \mathbb{R})$ et $\mathcal{T}$ sa σ-algèbre borélienne. Définissons sur cet espace la mesure de probabilité :

$$Q(d(x, w, y_1, y_2)) = K^1(x, w, dy_1)K^2(x, w, dy_2)\mu(dx)P^W(dw),$$

et posons $\breve{\mathcal{T}}_t = \sigma(x, w(s), y_1(s), y_2(s), s \leq t)$ et soit $\mathcal{T}_t$ la version de $\breve{\mathcal{T}}_t$ qui satisfait les conditions habituelles, alors la projection de la première coordonnée est la loi sous Q de la distribution initiale de X^i et la deuxième coordonnée est un $\mathcal{T}_t$-mouvement brownien (relativement à Q). De plus la distribution de la projection (w, y_i) (sous Q) est la même que celle de (W^i, X^i) (relativement à P^i). En construisant deux solutions faibles sur le même espace de probabilité avec la même condition initiale et le même mouvement brownien, alors l'unicité des trajectoires implique que $Q((x, w, y_1, y_2) \in T / y_1 = y_2) = 1$ et on a :

$$P^1((W^1, X^1) \in A) = Q((w, y_1) \in A) = Q((w, y_2) \in A) = P^2((W^2, X^2) \in A).$$

Ainsi l'unicité en loi est satisfaite.

Théorème 2.4.4. ***(Unicité des trajectoires)***
Supposons que b et σ vérifient la condition de Lipschitz locale, alors l'unicité des trajectoires est satisfaite pour l'équation (2.4).

Preuve. Dans le preuve du théorème (2.3.1), nous n'utilisons pas la filtration, alors la preuve de cet théorème est la même.

Théorème 2.4.5. ***(Nakao, Le Gall)***
Considérons l'EDS unidimensionnelle autonome :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \tag{2.12}$$

et supposons que b et σ sont des fonctions mesurables et bornées et qu'il existe une fonction croissante et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\sigma(x) \geq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\sigma(x) - \sigma(y))^2 \leq |f(x) - f(y)|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors l'unicité des trajectoire est satisfaite.

Remarque 2.4.1. *si σ et σ^{-1} sont bornées et σ est à variations bornées sur tout compact alors les conditions (i) et (ii) sont satisfaites.*

Théorème 2.4.6. ***(Sonoc)***
Supposons qu'il existe une fonction continue $u(t)$ *sur* $[0, T]$ *avec* $u(t) > 0$ *pour* $t > 0$*, de dérivée* $u'(t) \in L^1[0, T]$*,* $u'(t) > 0$ *pour* $t > 0$ *et* $\lim_{t \to 0^+} u'(t) = \infty$ *telle que pour* $0 < t \leq T$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *:*

(i) $|f(t, x) - f(t, y)|^2 + |g(t, x) - g(t, y)|^2 \leq \frac{u'(t)}{2u(t)}|x - y|^2$.

(ii) $|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq L + M|x|^2$.

Si $c \in L^4$ *est indépendante de* W_t *pout tout* $t \geq 0$ *et* b *et* σ *sont continus, alors l'unicité des trajectoire est satisfaite pour l'équation* (2.4).

Théorème 2.4.7. ***(Yamada et Watanabe)***
Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoire soient satisfaites pour l'equation (2.4) *pour une distribution initiale fixée* μ*, alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaite pour l'equation* (2.4) *avec la même distrubution initiale.*
De plus, il existe une fonction mesurable $F_\mu : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *telle que toute solution avec la distribution initiale* μ *s'écrit* $X = F_\mu(X_0, W)$*, p.s.*

Théorème 2.4.8. ***(Ikeda et Watanabe)***
Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoire soient satisfaites poue l'equation (2.4) *pour toute mesure de probabilité* μ*, telle que la loi de* X_0 *coïncide avec* μ*, alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaites pour l'quation* (2.4)*. De plus, il existe une fonction mesurable* $F : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *telle que tout solution s'écrit* $X = F(X_0, W)$*,p.s.*

Théorème 2.4.9. ***(Kallenberg)***
Supposons que l'existence de la solution faible et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation (2.11) *débutant en des points arbitraire fixes,*

alors l'unicité en loi et l'existence forte sont satisfaites pour l'équation (2.11)*. De plus, il existe une fonction universelle prévisible* $F : \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *telle que tout solution s'écrit* $X = F(X_0, W)$*,p.s.*

Théorème 2.4.10. ***(Existence faible)(Skorokhod)***
Si $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions bornées et continues et* ν *est une mesure de probabilité dans* $\mathbb{R}$*, alors il existe un espace de probabilité filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un mouvement brownien* W *et un processus continu et adapté* X *satisfait l'équation autonome* (2.3) *tels que* ν *soit la loi de* X_0*.*
Les conditions du théorème (Existence faible) ne garantissent ni l'existence forte ni l'unicité en loi.

Chapitre 3

EDS dérigées par le mouvement brownien fractionnaire

3.1 Mouvement Brownien Fractionnaire

3.1.1 Definition et propriétés

Définition 3.1.1. *Le mouvement brownien fractionnaire B_t^H est un gaussien centré de covariance*

$$\rho(t,s) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}) \tag{3.1}$$

.

Remarque 3.1.1. *Si $H = 1/2$ on est dans le cas du mouvement brownien classique .*

Proposition 3.1.1. *le mouvement Brownien fractionnaire B_t^H est un processus à accroissement stationaire .*

Preuve. Comme B_t^H est un processus gaussien il sufit de verifier que

$$cov(B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{s_1}^H - B_{s_0}^H) = cov(B_{t_1+h}^H - B_{t_0+h}^H, B_{s_1+h}^H - B_{s_0+h}^H)$$

tel que $s_0 < s_1 < t_0 < t_1$, par simplification on se raméne au cas où il y a deux incréments :

$$
\begin{array}{rcl}
cov(B^H_{t_1} - B^H_{t_0}, B^H_{s_1} - B^H_{s_0}) & = & cov(B^H_{t_1}, B^H_{s_1}) - cov(B^H_{t_1}, B^H_{s_0}) - cov(B^H_{t_0}, B^H_{s_1}) + cov(B^H_{t_0}, B^H_{s_0}) \\
& = & \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_1^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) - \frac{1}{2}(t_1^{2H} + s_0^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}) \\
& & -\frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_1^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}) + \frac{1}{2}(t_0^{2H} + s_0^{2H} - (t_0 - s_0)^{2H})
\end{array}
$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$
\begin{array}{rcl}
cov(B^H_{t_1+h} - B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h} - B^H_{s_0+h}) & = & cov(B^H_{t_1+h}, B^H_{s_1+h}) - cov(B^H_{t_1+h}, B^H_{s_0+h}) \\
& & -cov(B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h})r + cov(B^H_{t_0+h}, B^H_{s_0+h}) \\
& = & \frac{1}{2}((t_1 + h)^{2H} + (s_1 + h)^{2H} - (t_1 - s_1)^{2H}) \\
& & -\frac{1}{2}((t_1 + h)^{2H} + (s_0 + h)^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}) - \frac{1}{2}((t_0 + h)^{2 \ldots} \\
& & +(s_1 + h)^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H}) + \frac{1}{2}((t_0 + h)^{2H} + (s_0 + h)^{2H} \ldots
\end{array}
$$

En simplifiant chaque terme on obtient :

$$cov(B^H_{t_1+h} - B^H_{t_0+h}, B^H_{s_1+h} - B^H_{s_0+h}) = \frac{1}{2}\{(t_0 - s_0)^{2H} + (t_1 - s_1)^{2H} - (t_0 - s_1)^{2H} - (t_1 - s_0)^{2H}\}$$

d'où le résultat

Proposition 3.1.2. *Si X_t est un processus gaussien stationnaire et $X_0 = 0$ tel que $Var(X_t) = t^{2H}$ alors X_t est un mouvement brownien fractionnaire de paramétre H.*

Preuve. On a

$$cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\{Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_t - X_s)\}$$

on utilise la stationnarité doù l'on deduit :

$$cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}\{Var(X_t) + Var(X_s) - Var(X_{t-s})\}$$

$$= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - \mid t - s \mid^{2H})$$

Remarque 3.1.2. *En remarque que :* $B^H_{t_{i+1}} - B^H_{t_i} = (t_{i+1} - t_i)^H \mathcal{N}$ *en loi où* $\mathcal{N}$ *suit une loi gaussienne centrée réduite.*

L'autosimilarité est la propriété qu'ont certains processus stochastiques de préserver leur loi après un changement d'échelle des temps. Celle-ci est présente dans tous les domaines des probabilités et offre de multiples champs d'application. Certaines classes de processus autosimilaires dont le mouvement brownien est un représentant commun, satisfont à des propriétés fractionnaires ou multifractionnaires qui sont appliquées à la modélisation de phénomènes physiques fractals. D'autres classes possèdent des propriétés markoviennes, homogènes ou inhomogènes et sont étroitement liées aux processus de Lévy par des transformations trajectorielles, d'où leur importance à la fois sur le plan théorique et appliqué. La représentation dans le cas autosimilaire d'objets tels que les arbres aléatoires et les processus de fragmentation se fait généralement à l'aide de processus autosimilaires markoviens.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(B^{(H)}_{at} B^{(H)}_{as}) &= \frac{1}{2}((at)^{2H} + (as)^{2H} - (a \mid t - s \mid^{2H})) \\
&= a^{2H} \mathbb{E}(B^{(H)}_t B^{(H)}_s) \\
&= \mathbb{E}(a^H B^{(H)}_t a^H B^{(H)}_s)
\end{aligned}
$$

$$
(B^{(H)}_{at}) =^d (a^H B^{(H)}_t)
$$

Les processus auto-similaires seront des processus de distribution invariante par certains changements d'échelle de temps et d'espace. Ils ont été introduits et étudiés par Kolmogorov à l'occasion de ses études sur les fluides turbulents. Le terme "auto-similaire" est dû à Mandelbrot, et est devenu standard. Cependant, Mandelbrot utilise quant à lui le terme auto-affin pour qualifier les processus auto-similaires (auto-similaire étant réservé pour lui à des objets géométriques).

$$
\mathbb{E}((B^{(H)}_{t+h} - B^{(H)}_h)(B^{(H)}_{s+h} - B^{(H)}_h)) = \mathbb{E}(B^{(H)}_t B^{(H)}_s)
$$

$$(B_{t+h}^{(H)} - B_h^{(H)}) =^d B_t^{(H)}$$

$$\mathbb{E}((B_{t+h}^{(H)} - B_h^{(H)})(B_{s+h}^{(H)} - B_h^{(H)})) = \mathbb{E}(B_{t+h}^{(H)} B_{s+h}^{(H)}) - \mathbb{E}(B_{t+h}^{(H)} B_h^{(H)}) - \mathbb{E}(B_{s+h}^{(H)} B_h^{(H)}) + \mathbb{E}((B_h^{(H)})^2)$$

$$\frac{1}{2}(((t+h)^{2H} + (s+h)^{2H} - \mid t-s \mid^{2H}) - ((t+h)^{2H} + h^{2H} - t^{2H}) - ((s+h)^{2H} + h^{2H} - s^{2H}) + 2h^{2H}$$

$$= \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - \mid t - s \mid^{2H}$$

$$= \mathbb{E}(B_t^{(H)} B_s^{(H)})$$

Comme dans le cas brownien, le MBF est nulle part différentiables. Effectivement, nous avons la proposition suivante. Soit $r(n) = \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)X_1)$

Définition 3.1.2. *On dit que X_t est a courte mémoire tant que $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ et X_t a longue mémoire si $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$*

Proposition 3.1.3. *Le mouvement brownien fractionnaire B^H a une longue mémoire si $H > \frac{1}{2}$ et il a une courte mémoire si $H \leq \frac{1}{2}$*

Preuve. Si $H = \frac{1}{2}$ on est dans le cas d'un mouvement brownien standard on a :

$$r(n) = \mathbb{E}(B_{n+1}B_1) - \mathbb{E}(B_n B_1) = 1 - 1 = 0$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) < \infty$ (courte mémoire). -Si $H \neq \frac{1}{2}$

$$r(n) = \mathbb{E}(B_{n+1}B_1) - \mathbb{E}(B_n B_1) = \frac{1}{2}\{(n+1)^{2H} - n^{2H} + (n+1)^{2H} - n^{2H}\}$$

donc :

$$r(n) = 2H \int_0^1 ((n+a)^{2H-1} - (n-a)^{2H-1}) da = 2H(2H-1) \int_0^1 da \int_{-1}^1 db (n+ab)^{2H-2}$$

d'où

$$r(n) \leq (n+1)^{2H-2}$$

et

$$r(n) > (n-1)^{2H-2}$$

on conclut que

$$r(n) \sim n^{2H-2}$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$si $H \leq \frac{1}{2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) = \infty$ si $H > \frac{1}{2}$(c.q.f.d).

3.1.2 Etude trajectorielle de Mouvement Brownien fractionnaire

Dans ce paragraphe en va présenter l'une des propriétés importante concernant les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire.

Proposition 3.1.4. *Les trajectoires du mouvement brownien fractionnaire sont hölder continues de paramétre $\alpha < H$. Pour la démonstration on utilise le corollaire suivant :*

Corollaire 3.1.1. *Dans le cas du mouvement brownien fractionnaire on a :*

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})$$

et

$$\mathbb{E}(B_t^{2H}) = t^{2H}$$

Preuve. on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = \mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_S^{2H}|)$$

Par application de la linéarité de l'espérance et du corrollaire précédent on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^{2H} - 2B_t^H B_s^H + B_S^{2H}|) = \mathbb{E}(|B_t^{2H}|) - 2\mathbb{E}(|B_t^H B_s^H|) + \mathbb{E}(|B_t^{2H}|)$$

$$= |t^{2H}| + |s^{2H}| - |(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})|$$

$$= |t-s|^{2H}$$

Donc on a :

$$\mathbb{E}(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t-s|^{2H}$$

On prend $\gamma = 2, d = 1, d + \epsilon = 2H$ d'où $\epsilon = 2H - 1$ d'aprés le théoréme de KOLMOGROV, B_t^H à une modification(vérsion) $\widetilde{B}^H$ dont les trajectoire sont hölder continues de paramétre

$$\alpha \in [0, \epsilon/\mu[= [0, \frac{2H-1}{2}[= [0, H - \frac{1}{2}[$$

On a prouvé que $\widetilde{B}^H$ hölder continue de paramétre $\alpha < H$

le processus B^H n'est ni un processus de Markov ni une semi-martingale et on ne peut pas appliquer le calcul stochastique développé par Itô en vue de définir l'intégrale stochastique relativement à B^H. Différentes approches sont résumées dans cette section. Dans la deuxième section, on expose le théorème de Girsanov pour le MBF qui a un rôle fondamental dans les preuves des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions abordés dans la troisième section.

3.2 Intégration par rapport au mouvement brownien fractionnaire.

Différentes méthodes ont été utilisées pour construire le calcul stochastique par rapport à un MBF B^H. Citons les contributions suivantes :

• Lin, Dai et Heide ont défini l'intégrale stochastique par rapport à un MBF B^H de paramètre H $> \frac{1}{2}$ en utilisant la méthode des trajectoires de

Riemann-Stieltjes. Dans ce cas, la fonction à intégrer doit être de p-variation finie, où $\frac{1}{p}$ + H > 1.

• En utilisant les notions d'intégration et de dérivation fractionnaires, Zähle a défini l'intégrale stochastique trajectorielle par rapport à un MBF B^H de paramètre H $\in]0, 1[$. Si la fonction à intégrer possède des trajectoires λ-Hölder continues avec $\lambda > 1 - H$, alors cette intégrale peut être interprétée comme une intégrale de Riemann-Stieltjes.

• Decreusefond, $\ddot{U}$stünel, Carmona, Coutin, Alòs, Mazet, Nualart, Duncan, Pasik, Hu et ϕksendal ont développé le calcul des variations stochastique par rapport à un processus gaussien B. Ce calcul est un outil puissant qui peut être utilisé pour définir l'intégrale stochastique. Plus précisément, comme dans le cas du processus de Wiener, l'opérateur de divergence par rapport à B peut être interprété comme une intégrale stochastique. L'intégrale construite par cette méthode possède une moyenne nulle et peut être obtenue comme la limite de sommes de Riemann.

3.2.1 Calcul fractionnaire.

Nous rappelons ici les définitions et les propriétés de base du calcul fractionnaire.
Soient a,b $\in \mathbb{R}$ et a $<$ b. Pour $f \in L^1([a, b])$ et $\alpha > 0$, les intégrales fractionnaires gauche et droite de Riemann-Liouville de f d'ordre α sur (a,b) sont données pour presque tout x par :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy,$$

et :

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-y)^{\alpha-1} f(y) dy, \tag{3.2}$$

où Γ est la fonction d'Euler. Cette intégrale prolonge les intégrales itérées d'ordre n habituelles de f pour $\alpha = n \in N$.
Nous avons la première formule de composition :

$$I_{a^+}^{\alpha}(I_{a^+}^{\beta} f) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f.$$

La dérivée fractionnaire peut être définie comme l'opération inverse. Supposons que $0 < \alpha < 1$ et$p > 1$, et soient $I_{a^+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $I_{b^-}^{\alpha}(L^p)$) l'image de $L^p([a,b])$ par l'opérateur $I_{a^+}^{\alpha}$(resp. $I_{b^-}^{\alpha}$).

Si $f \in I_{a^+}^{\alpha}(L^p)$ (resp. $f \in I_{b^-}^{\alpha}(L^p)$), alors la fonction ϕ telle que $f = I_{a^+}^{\alpha}\phi$ (resp. $f = I_{b^-}^{\alpha}\phi$) est unique dans L^p et coïncide avec la dérivée gauche (resp. droite) de Riemann- Liouville de f d'ordre α définie par :

$$D_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^x \frac{f(x)-f(y)}{(x-y)^{\alpha+1}}dy\right) \tag{3.3}$$

et :

$$D_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(x)}{(b-x)^{\alpha}} + \alpha\int_x^b \frac{f(x)-f(y)}{(y-x)^{\alpha+1}}dy\right)$$

où la convergence des intégrales pour la singularité x $=$ y est satisfaite au sens de L^p .
Quand $\alpha p > 1$ toute fonction dans $I_{a^+}^{\alpha}(L^p)$ est Hölder continue d'ordre $(\alpha - \frac{1}{p})$.

D'un autre côté, toute fonction continue de Hölder d'ordre $\beta > \alpha$ admet une dérivée fractionnaire d'ordre α, c'est-à-dire $C^{\beta}([a,b]) \subset I_{a^+}^{\alpha}(L^p)$ pour tout p $>$ 1.

Pour $f \in I_{a^+}^{\alpha}(L^p)$, on a $I_{a^+}^{\alpha}$ $(D_{a^+}^{\alpha} f) = f$ et pour $f \in L^1$([a,b]) , on a $D_{a^+}^{\alpha}$ $(I_{a^+}^{\alpha} f) = f$. On a des formules d'inversion analogues pour les opérateurs $I_{b^-}^{\alpha}$

et $D^{\alpha}_{b^-}$

Si $f \in I^{\alpha+\beta}_{a^+}(L^1), \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta \leq 1$, on a la deuxième formule de composition

$$D^{\alpha}_{a^+}(D^{\beta}_{a^+}f) = D^{\alpha+\beta}_{a^+}f.$$

On a la formule de l'intégration par parties :

$$\int_a^b (D^{\alpha}_{a^+}f)(s)g(s)ds = \int_a^b f(s)(D^{\alpha}_{b-}g)(s)ds \tag{3.4}$$

pour tout $f \in I^{\alpha}_{a^+}(L^p), g \in I^{\alpha}_{b^-}(L^q), \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Si $W = \{W_t, t \in [O,T]\}$ est un processus de Wiener unidimensionnel pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, on a :

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}dWs = \frac{W_t}{t^{\alpha}} + \alpha\int_0^t \frac{W_t - W_s}{(t-s)^{\alpha+1}}ds = \Gamma(1-\alpha)D^{\alpha}_{0+}W_t \tag{3.5}$$

i.e le processus $\int_0^t (t-s)-\alpha dW_s$ coïncide avec la dérivée fractionnaire gauche du processus de Wiener avec le facteur de temps Γ(1 - α) .

3.2.2 Représentation du mouvement brownien fractionnaire.

Soit $B^H = \{B^H_t, t \in [0,T]\}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst H $\in$]0, 1[défini sur l'espace de probabilité (Ω, $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$). Pour tout $t \in [0,T]$, notons par $\mathcal{F}^{B^H}_t$ la σ-algèbre générée par les variables aléatoires $\{B^H_s, s \in [0,t]\}$ et les ensembles de probabilité nulle.

Notons par ξ l'ensemble des fonctions étagées sur [0, T] et soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert défini comme la fermeture de ξ relativement au produit scalaire définie initialement par :

$$< \mathbf{1}_{[o,t]}, \mathbf{1}_{[o,s]} >_{\mathcal{H}} = R_H(t,s).$$

L'application $\mathbf{1}_{[o,t]} \to B_t^H$ peut être prolongée à une isométrie entre $\mathcal{H}$ et l'espace Gaussien $H_1(B^H)$ notée B^H. Pour $\varphi \in \mathcal{H}$, on peut interpréter $B^H(\varphi)$ comme l'intégrale de Wiener de φ par rapport à B^H et écrire $B^H(\varphi) = \displaystyle\int_0^T \varphi dB^H$.

(i) Cas H $> \frac{1}{2}$.

Le noyau de covariance $R_H(t,s)$ peut être écrit sous la forme :

$$R_H(t,s) = \alpha_H \int_0^t \int_0^s \mid r-u \mid^{2H-2} dudr. \tag{3.6}$$

où $\alpha_H = H(2H-1)$ et la formule (3.6) implique que pour tout $\varphi, \psi \in \xi$:

$$< \varphi, \psi >_{\mathcal{H}} = \alpha_H \int_0^T \int_0^T \mid r-u \mid^{2H-2} \varphi_r \psi_u dudr$$

Considérons le noyau de carré intégrable donné par :

$$K_H(t,s) = C_H S^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t (u-s)^{H-\frac{3}{2}} u^{H-\frac{1}{2}} du, \tag{3.7}$$

où $c_H = \left[\frac{H(2H-1)}{\beta(2-2H, H-\frac{1}{2})}\right]^2$ et $t > s$.

Ce noyau vérifie l'égalité suivante :

$$\int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)K_H(s,u)du = R_H(t,s) \tag{3.8}$$

qui implique que le noyau R_H est défini non négatif et fournit une représentation explicite pour sa racine carrée en tant qu'opérateur.

A partir de (3.7), on obtient :

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c_H(\frac{t}{s})^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}, \tag{3.9}$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* défini de ξ dans L^2 $([0,T])$ par :

$$(K_H^*\phi)(s) = \int_s^T \phi(t)\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s)dt \tag{3.10}$$

Notons que :

$$(K_H^* 1_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)1_{[0,t]}(s) \tag{3.11}$$

L'opérateur K_H^* est une isométrie entre ξ et L^2 $([0,T])$ et peut donc être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

En effet, à partir de (3.6) et (3.8), on a pour tout $s,t \in [0,T]$:

$$\langle K_H^* 1_{[0,t]}, K_H^* 1_{[0,s]}\rangle_{L^2([0,T])} = \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}\rangle_{\mathcal{H}}$$

En utilisant (3.9), (3.10) et (3.2), on peut représenter l'opérateur K_H^* à l'aide de l'intégrale fractionnaire par :

$$(K_H^*\phi)(s) = c_H\Gamma(H-\frac{1}{2})s^{\frac{1}{2}-H}(I_{T^-}^{H-\frac{1}{2}})u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u))(s).$$

Pour tout $c \in [0,T]$, la fonction indicatrice $1_{[o,c]}$ appartient a l'image de K_H^* et en appliquant les règles du calcul fractionnaire, on obtient :

$$(K_H^*)^{-1}(1_{[0,c]})(s) = \frac{1}{c_H T(H-\frac{1}{2})} s^{\frac{1}{2}-H}(D_{c^-}^{H-\frac{1}{2}} u^{H-\frac{1}{2}})(s)1_{[0,c]}(s).$$

Considérons maintenant le processus $W = \{W_t, t \in [O,T]\}$ défini par :

$$W_t = B^H((K_H^*)^{-1}(1_{[0,t]})) \tag{3.12}$$

alors W est un processus de Wiener et le processus B^H admet une représentation intégrale et unique de la forme :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dW_s \tag{3.13}$$

En effet, pour tout $s,t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} E(W_tW_s) &= E(B^H((K_H^*)^{-1}(1_{[0,t]}))B^H((K_H^*)^{-1}(1_{[0,s]}))) \\ &= \langle (K_H^*)^{-1}(1_{[0,t]}), (K_H^*)^{-1}(1_{[0,s]}) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{L^2([0,T])} = t \wedge s \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$,on a :

$$B^H(\varphi) = \int_0^T (K_H^*\phi)(t)dW_t.$$

On peut montrer que les deux processus génèrent la même filtration et en déduire que le processus de Wiener garantissant la représentation (3.13) est unique.

Les éléments de $\mathcal{H}$ peuvent ne pas être des fonctions mais des distributions d'ordre négatif. En fait, $\mathcal{H}$ coïncide avec l'espace des distributions f tel que $s^{\frac{1}{2}-H}I_{0^+}^{H-\frac{1}{2}}(f(u)u^{H-\frac{1}{2}})(s)$ est une fonction de carrée intégrable.

Nous pouvons trouver un sous-espace vectoriel de fonctions de $\mathcal{H}$ de la manière suivante.

Soit $|\mathcal{H}|$ le sous-espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$,tels que :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|}^2 = \int_0^T \left(\int_s^T |\varphi|_r \frac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)dr\right)^2 ds = \alpha_H \int_0^T \int_0^T |\varphi_r||\varphi_u||r-u|^{2H-2}drdu < \infty.$$

On a $(|\mathcal{H}|, \|.\|_{|\mathcal{H}|})$ est un espace de Banach et ξ est dense dans $|\mathcal{H}|$.

D'autre part, $|\mathcal{H}|$ muni du produit scalaire $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$ n'est pas complet et il est isométrique à un sous-espace de $\mathcal{H}$ et on a l'estimation :

$$\|\varphi\|_{|\mathcal{H}|} \leq b_H \|\varphi\|_{L^{\frac{1}{H}}([0,T])} \tag{3.14}$$

pour une certaine constante $b_H > O$.

Cette estimation implique que $L^2([0,T]) \subset L^{\frac{1}{H}} \subset ([0,T]) \subset |\mathcal{H}| \subset \mathcal{H}$. Ceci signifie que l'intégrale du type Wiener $\int_0^T \varphi(t)dB_t^H$(qui égal à $B^H(\varphi)$, par définition) peut être défini pour les fonctions $\varphi \in |\mathcal{H}|$ et :

$$\int_0^T \varphi(t)dB_t^H = \int_0^T (K_H^*\phi)(t)dW_t.$$

(ii) cas $H < \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le noyau K_H défini par :

$$K_H(t,s) = c'_H\left[(\frac{t}{s})^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (H-\frac{1}{2})s^{\frac{1}{2}-H}\int_0^t u^{H-\frac{3}{2}}(u-s)^{H-\frac{1}{2}}du\right],$$

où $c'_H = \left[\frac{2H}{(1-2H)\beta(1-2H,H+\frac{1}{2})}\right]^{\frac{1}{2}}$, $t > s$, satisfait :

$$R_H(t,s) = \int_0^{t\wedge s} K_H(t,u)K_H(s,u)du, \tag{3.15}$$

En utilisant (3.15), on montre que :

$$\frac{\partial K_H}{\partial t}(t,s) = c'_H(H-\frac{1}{2})(\frac{t}{s})^{H-\frac{1}{2}}(t-s)^{H-\frac{3}{2}}. \tag{3.16}$$

Le noyau K_H peut être exprimé par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire par :

$$K_H(t,s) = c'_H\Gamma(H+\frac{1}{2})s^{\frac{1}{2}-H}(D_{t^-}^{\frac{1}{2}-H}u^{H-\frac{1}{2}})(s)$$

Considérons l'opérateur linéaire K_H^* de $\mathcal{E}$ à $L^2([0,T])$ définie par :

$$(K_H^*\phi)(s) = K_H(T,s)\phi(s) + \int_s^T (\phi(r)-\phi(s))\frac{\partial K_H}{\partial r}(r,s)dr.$$

On a :

$$(K_H^* 1_{[0,t]})(s) = K_H(t,s)1_{[0,t]}(s) \tag{3.17}$$

A partirde (3.15) et (3.17), on déduit, comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, que l'opérateur K_H^* est une isométrie entre $\mathcal{E}$ et $L^2([0,T])$ et peut être prolongé à l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
L'opérateur K_H^* peut être exprimé par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire :

$$(K_H^*\phi)(s) = c'_H\Gamma(H+\frac{1}{2})s^{\frac{1}{2}-H}(D_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}u^{H-\frac{1}{2}}\varphi(u))(s) \tag{3.18}$$

$\mathcal{H}$ coïcide avec l'espace $I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a $C^\gamma([0,T]) \subset \mathcal{H}$ si $\gamma > \frac{1}{2} - H$.

Comme dans le cas $H > \frac{1}{2}$, nous pouvons montrer que le processus W défini par :

$$W_t = B^H((K_H^*)^{-1}(1_{[0,t]})) \tag{3.19}$$

est un processus de Wiener et le processus B^H admet la représentation intégrale :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t,s)dW_s,$$

Par conséquent, l'intégrale du type Wiener $\int_0^T \varphi(t)dB_t^H$ peut être définie pour les fonctions $\varphi \in I_{T^-}^{\frac{1}{2}-H}(L^2)$ et on a :

$$\int_0^t \varphi(t)dB_t^H = \int_0^T (K_H^* \phi)(t,s)dW_t.$$

Définition 3.2.1. *Soit est une famille de tribus croissante et continues à gauche sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tel que* $\mathcal{F}_0$ *contient les ensembles de probabilité zéro. Le mouvement brownien fractionnaire* $\{B^H = B^H,\ t \in [0,T]\}$ *est dit* $\mathcal{F}_t$*-mouvement brownien fractionnaire si le processus (3.12) ,* $H > \frac{1}{2}$ *et (3.19),* $H < \frac{1}{2}$ *est* $\mathcal{F}_t$*-processus de Wiener.*

3.2.3 Calcul de Malliavin(calcul stochastique des variations par rapport au MBF)

Le processus $B_t^H = \{B^H,\ t \geq 0\}$ est gaussien et on peut donc développer un calcul stochastique des variations (ou calcul de Malliavin).

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de variables aléatoires régulières et cylindrique de la forme :

$$F = f(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n)) \tag{3.20}$$

où $n \geq 1, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ (f et touts ses dérivées partielles sont bornées) et $\varphi_i \in \mathcal{H}$.

L'opérateur de dérivation D d'une variable aléatoire régulière et cylindrique F de la forme (3.20) est définie comme la variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{H}$:

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(\varphi_1), ..., B^H(\varphi_n))\varphi_i.$$

L'opérateur de dérivation D est un opérateur fermé de $L^P(\Omega)$ dans $L^P(\Omega, \mathcal{H})$ pour tout $p \geq 1$. Pour tout nombre entier $k \geq 1$, notons D^k l'itération de l'opérateur de dérivation et pour tout $p \geq 1$, définissons l'éspace de Sobolev $\mathbb{D}^{k,p}$ comme la fermeture de $\mathcal{S}$ par rapport à la norme :

$$\parallel F \parallel_{k,p}^p = E(|F|^p) + \sum_{i=1}^{k} (\parallel D^j F \parallel_{\mathcal{H}^{\otimes j}}^p)$$

De la mème manière, pour un espace de Hilbert V, notons $\mathbb{D}^{k,p}(V)$ l'espace de Sobolev correspondant des variables aléatoire à valeur dans V.

L'opérateur de la divergence δ est l'adjoit de l'opérateur D.

On dit que la variable alétoire u dans $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ appartient au domaine de δ (noté par $Dom\delta$), s'il existe une constante c vérifiant :

$$|E(\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}})| = \left| E\int_0^T D_t F u_t dt \right| \leq c \parallel F \parallel_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $F \in \mathcal{S}$.

Dans ce cas $\delta(u)$ est défini par la relation de dualité :

$$E(F\delta(u)) = E(\langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}) = E\int_0^T D_t F u_t dt,$$

pour tout $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

On a les deux propriétés de base de l'opérateur de divergence :

i) $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}) \subset Dom\delta$ et pour tout $u \in \mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H})$:

$$E(\delta(u)^2) = E(\|u\|_{\mathcal{H}}^2) + E(\langle Du, (Du)^*\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}}),$$

où $(Du)^*$ est l'adjoint de (Du) dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.

ii) Pour tout F dans $\mathbb{D}^{1,2}$ et tout $u \in Dom\delta$ tels que Fu et $F\delta(u) + \langle DF, u\rangle\mathcal{H}$ sont de carré intégrable, on a :

$$Fu \in Dom\delta \text{ } et \text{ } \delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_{\mathcal{H}}$$

(i) Pour tout $F \in \mathbb{D}_W^{1,2} = \mathbb{D}^{1,2}$, on a $K_H^* DF = D_W F$,
où D_W désigne l'opérateur dérivée par rapport à W et $\mathbb{D}_W^{1,2}$ est l'espace de Sobolev correspondant.
(ii) $Dom\delta = (K_H^*)^{-1}(Dom\delta_W)$ et pour toute variable aléatoire u de $Dom\delta$ à valeurs dans $\mathcal{H}$, on a $\delta(u) = \delta_W(K_H^* u)$, où δ_W est l'opérateur de divergence par rapport au processue W.

3.2.4 Intégrale stochastique par rapport au MBF

L'intégrale de Skorohod est une extension de l'intégrale de Itô au sens que l'ensemble des processus adaptés de carré intégrable $L_a^2([0,T] \times \Omega)$ est inclus dans Dom δ et la restriction de l'opérateur δ à $L_a^2([0,T] \times \Omega)$ coïncide avec l'intégrale stochastique de Itô.

La définition suivante de l'intégrale stochastique symétrique a été introduite par Russo et Vallois. On suppose que tout les processus et les fonctions sont nuls à l'extérieur de l'intervalle $[0,T]$.

Définition 3.2.2. *Soit $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ un processus stochastique avec des trajectoires intégrables. L'intégrale symétrique de u, par rapport au MBF B^H est définie comme la limite en probabilité lorsque ε tend vers zéro de :*

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T u_s(B_{s+\epsilon}^H - B_{s-\epsilon}^H)ds$$

si cette limite existe et on la note par $\int_0^T u_t dB_t^H$.

***(i) Cas** $H > \frac{1}{2}$*

La proposition suivante donne les conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale symétrique et fournit une représentation de l'opérateur de divergence comme intégrale stochastique.

Proposition 3.2.1. *Soit $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1.2}(|\mathcal{H}|)$, et supposons aussi que :*

$$\int_0^T \int_0^T |D_s u_t||t-s|^{2H-2} dsdt < \infty \quad p.s \tag{3.21}$$

alors l'intégrale symétrique existe et on a :

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \delta(u) + \alpha_H \int_0^T \int_0^T D_s u_t \mid t-s \mid^{2H-2} dsdt$$

Remarque 3.2.1. *Sous les hypothèses de la proposition, l'intégrale $\int_0^T u_t dB_t^H$ coïncide aussi avec les intégrales forward et backward.*

Formule de Itô. Si F est une fonction de la classe $\mathcal{C}^2$, alors l'intégrale trajectorielle de Riemann Stieljes $\int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H$ existe pour tout $t \in [0,T]$ (grace au théorème de Young). De plus, on a la formule de changement du variables suivante :

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H \tag{3.22}$$

Soit F une fonction de la classe $C^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\max\{|F(x)|, |F'(x)|, |F''(x)|\} \leq c \exp(\lambda x^2) \tag{3.23}$$

où c et λ sont des constantes positives telles que $\lambda < \frac{1}{4T^{2H}}$, alors le processus $F'(B_t^H) \in \mathbb{D}^{1,2}(|H|)$ vérifie la condition (3.21) et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^t F'(B_s^H)dB_s^H &= \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H(2H-1)\int_0^t\int_0^s F''(B_s^H)(s-r)^{2H-2}drds \\ &= \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H\int_0^t F''(B_s^H)s^{2H-1}ds\end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant (3.33) et (3.24), on déduit la formule de Itô suivante pour le processus de divergence :

$$F(B_t^H) = F(0) + \int_0^t F'(B_s^H)\delta B_s^H + H\int_0^t F''(B_s^H)s^{2H-1}ds \tag{3.25}$$

On donne maintenant la version générale de la formule de Itô.

Théorème 3.2.1. *Soit F une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$. On suppose que $u = \{u_t \in [0,T]\}$ est un processus dans $\mathbb{D}^{2,2}_{loc}(|\mathcal{H}|)$ tel que l'intégrale indéfinie $X_t = \int_0^t u_s\delta B_s^H$ soit continue p.s. et que $||u||_2 \in \mathcal{H}$ .Alors pour tout $t \in [0,T]$ on a la formule suivante :*

$$\begin{aligned}F(X_t) &= F(0) + \int_0^t F'(X_t)u_s\delta B_s^H \\ &+ \alpha_H\int_0^t F''(X_s)u_s\left(\int_0^T |s-\sigma|^{2H-2}\left(\int_0^s D_\sigma u_\theta \delta B_\theta^H\right)d\sigma\right)ds \\ &+ \alpha_H\int_0^t F''(X_s)u_s\left(\int_0^s u_\theta(s-\theta)^{2H-2}d\theta\right)ds.\end{aligned} \tag{3.26}$$

(ii) Cas $H < \frac{1}{2}$ *: L'extension des résultats précédents n'est pas trvial dans le cas $H < \frac{1}{2}$. On remarque par exemple que l'intégrale forward $\int_0^T B_t^H dB_t^H$*

au sens de Russo et Vallois (avec la convergence dans L^2) n'existe pas. Rappelons que pour $H < \frac{1}{2}$ l'opérateur K_H^* donné par (3.18) est une isométrie entre l'espace de Hilbert H et $L^2([0,T])$ et on a l'estimation :

$$\left|\frac{\partial K}{\partial t}(t,s)\right| \leq c'_H\left(\frac{1}{2} - H\right)(t-s)^{H-\frac{3}{2}}$$

Considérons la semi-norme définie sur ξ par :

$$\begin{aligned} ||\varphi||_k^2 &= \int_0^T \varphi^2(s)K(T,s)^2 ds \\ &+ \int_0^T \left(\int_s^T |\varphi(t)-\varphi(s)|(t-s)^{H-\frac{3}{2}}dt\right)^2 ds \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{H}_K$ le complété de ξ par rapport à cette semi-norme. L'espace $\mathcal{H}_K$ est continûment inclus dans $\mathcal{H}$.

Proposition 3.2.2. *Soit $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ un processus stochastique dans l'espace $\mathbb{D}^{1,2}(\mathcal{H}_K)$. Supposons que la trace définie comme la limite en probabilité :*

$$TrDu := \lim_{\epsilon \longmapsto 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^T < Du_s, 1_{[s-\epsilon,s+\epsilon]} >_{\mathcal{H}} ds$$

existe et que :

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T u_s^2(s^{2H-1} + (T-s)^{2H-1})ds\right) < \infty,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T\int_0^T (D_r u_s)^2(s^{2H-1} + (T-s)^{2H-1})dsdr\right) < \infty,$$

alors l'intégrale stochastique symétrique de u par rapport au MBF existe et :

$$\int_0^T u_t dB_t^H = \delta(u) + TrDu$$

transformation de Girsanov.
soient B^H un mouvement Brownien fractionnaire avec le Paramètre de Hurst $0 < H < 1$ et $\{\mathcal{F}_t^{B^H}, t \in [0,T]\}$ sa filtration naturelle.
Etant donné un processus adapté avec des trajectoires intégrables

$$u = \{u_t, t \in [0,T]\}$$

consédérons la transformation :

$$\widetilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t u_s ds \tag{3.27}$$

Nous pouvons écrire

$$\widetilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t u_s ds = \int_0^t K_H(t,s) dW_s + \int_0^t u_s ds = \int_0^t K_H(t,s) d\widetilde{W}_s$$

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \left(K_H^{-1} \left(\int_0^{\bullet} u_s ds \right)(r) \right) dr \tag{3.28}$$

notons que $K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} u_s ds\right) \in L^2([0,T])$ p.s. si seulement si :

$$\int_0^{\cdot} u_s ds \in I_{0^+}^{H+\frac{1}{2}} \left(L^2([0,T]) \right)$$

on a la version suivante du théoréme de Girsanov pour le mouvement brownien fractionaire :

Théorème 3.2.2. *considérons le processus de décalage (3.27) défini par un processus $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$ avec des trajectoires intégrables et supposons que :*

(i) $\int_0^{\cdot} u_s ds \in I_{0^+}^{H+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]))$ *(Im K_H),p.s.*

(ii) $\mathbb{E}(\xi_T) = 1$, *ou* $\xi_T = \exp\left(\int_0^T \left(K_H^{-1}\int_0^{\cdot} u_s ds\right) dW_s + \int_0^T \left(K_H^{-1}\int_0^{\cdot} u_s ds\right)^2 ds\right)$,

alors le processus de décalage $\widetilde{B}^H$ est un $F_t^{B^H}$-mouvement Brownien fractionnaire avec le paramétre de Hurst H relativement à la nouvelle probabilité $\widetilde{P}$ définie par $\frac{d\widetilde{P}}{dP} = \xi_T$.

on peut remplacer la condition ***(ii)*** *par la condition de novikov suivante :*

$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \left(K_H^{-1}\int_0^{\cdot} u_r dr\right)^2 (s) ds\right) < \infty$

- *L'opérateur inverse K_H^{-1} est donnée par :*

$$(K_H^{-1}h)(s) = s^{H-\frac{1}{2}} D_{0^+}^{H-\frac{1}{2}}\left(r^{\frac{1}{2}-H}h'(r)\right)(s), si H > \frac{1}{2} \tag{3.29}$$

$$(K_H^{-1}h)(s) = s^{\frac{1}{2}-H} D_{0^+}^{H-\frac{1}{2}} s^{H-\frac{1}{2}} D_{0^+}^{2H} h(s), si H < \frac{1}{2} \tag{3.30}$$

pour tout $h \in I_0^{H+\frac{1}{2}}(L^2([0,T]))$

si h est différentiable (ou absolument continue)K_H^{-1} est donné grace à (3.30) par :

$$K_H^{-1}h = s^{H-\frac{1}{2}} I_{0^+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} h' \tag{3.31}$$

3.3 EDS dérigées par le mouvement brownien fractionnaire

3.3.1 Existence de la solution faible

Soient $B^H = \{B_t^H, t \in [0,T]\}$ un mouvement brownien fractionnaire avec le paramétre de Hurst $H \in]0,1[$; considérons l'équation stochastique suivante :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t b(s, X_s)ds \tag{3.32}$$

où $b : [0,T] \times \mathbb{R}$ est une fonction mesurable

Définition 3.3.1. *Une solution faible de l'équation (3.32) est un couple de processus continus et adaptés (X, B^H) sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\})$, tel que :*

(i) *B^H est un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien fractionnaire dans le sens de la définition (3.2.1).*

(ii) *X et B^H satisfont (3.32).*

Théorème 3.3.1. *Supposons que $b(t,x)$ satisfait la condition sur la croissance linéaire (H_1) :*

$$| \; b(t,x) \; | \leq C(1 + |x|),$$

si $H < \frac{1}{2}$ (cas singulier) ou la condition de Hölder de continuité (H_2), d'odre $1 > \alpha > 1 - \frac{1}{2H}$ en x et dordre $\gamma > H - \frac{1}{2}$ en t :

$$|b(t,x) - b(s,y)| \leq C(|x-y|^\alpha + |t-s|^\gamma),$$

si $H > \frac{1}{2}$(cas régulier),

alors l'équation (3.32) admet une solution faible.

Preuve. Posons $\widetilde{B}_t^H = B_t^H - \int_0^t b(s, B_s^H + x)ds$ et supposons que le processus $u_s = -b(s, B_s^H + x)$ satisfait les condition i) et ii) du théoreme (3.2.2), alors $\widetilde{B}^H$ est un $\mathcal{F}_t^{B^H}$-mouvement brownien fractionnaire relativement à la mesure de probabilité $\widetilde{P}$ et $(B^H, \widetilde{B}^H)$ est une solution faible de (3.32) sur l'éspace de probabilité filtrée $\left(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P}, \{\mathcal{F}_t^{B^H}, t \in [0,T]\}\right)$.

On pose $v_s = -K_H^{-1}\left(\int_0^{\cdot} b(r, B_r^H + x_0)dr\right)(s)$

Montrons que le processus v satisfait les condition i) et ii) du théoreme (3.2.2).

Cas $H < \frac{1}{2}$

En utilisant (3.31) et la propriété de croissance linéaire de b,on obtient

$$\begin{aligned} |v_s| &= \left| s^{H-\frac{1}{2}} I_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} b(s, B_s^H + x) \right| \\ &= c_H s^{H-\frac{1}{2}} \left| \int_0^s (s-r)^{-H-\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}-H} b(r, B_r^H + x) dr \right| \end{aligned}$$

$$\leq c_H C(1 + |x| + \|B^H\|_\infty) s^{H-\frac{1}{2}} \tag{3.33}$$

L'opérateur $(K_H)^{-1}$ préserve la propriété d'adaptation et par conséquent le processus v est adapté. Ainsi la condition ii) peut être démontrée le critère de Novikov. Il suffit de prouver qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sup_{0 \leq s \leq T} E(exp(\lambda v_s^2)) < \infty \tag{3.34}$$

Cas $H > \frac{1}{2}$

En utilisant la relation (3.29), on montre que le processus v est adapté et on obtient :

$$v_s = -s^{H-\frac{1}{2}} D_{0+}^{\frac{1}{2}-H} s^{\frac{1}{2}-H} b(s, B_s^H + x) = -c_H(\alpha(s) + \beta(s)), \tag{3.35}$$

où α et β s'expriment en fonction de b et de B^H.

En faisant des estimations des fonctions α et β, on montre que la condition ii) du théorème (3.2.2). est satisfaite en utilisant le critère de Novikov.

Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t (b_1(s, X_s) + b_2(s, X_s))ds, \qquad (3.36)$$

où $b_1, b_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \to\to \mathbb{R}$ sont des fonctions mesurables. $H > \frac{1}{2}$ et $B^H = \{B_t^H, t \in [0, T]\}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]\frac{1}{2}, 1[$

Théorème 3.3.2. *Soit $H > \frac{1}{2}$ et supposons que b_1 et b_2 sont des fonctions mesurables sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions $(C_1), (C_2)$ et (C_3) ou bien $(C_1), (C_2')$ et (C_3') suivantes :*

(C_1) *b_1 est Hölder continue d'ordre $1 > \alpha > \frac{1}{1-2H}$ en x et d'ordre $\gamma > H - \frac{1}{2}$ en t :*

$$|b_1(t, x) - b_1(s, y)| \leq C(|x - y|^\alpha + |t - s|^\gamma) \qquad (3.37)$$

(C_2) $\sup_{s \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_2(s, x)| \leq M < \infty$

(C_3) $\forall s \in [0, T], b_2(s, \cdot)$ *est non décroissante et continue à gauche (ou à droite).*

(C_2') $\sup_{s \in [0,T]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |b_2(s, x)| \leq M(1 + |x|)$

(C_3') *pour tout $s \in [0, T], b_2(s, .)$ est une fonction non décroissantes et continue.*

Alors l'équation (3.36) admet une solution faible

Preuve. la preuve est analogue à celle du théorème précédent. Pour plus de détails voir [3].

Proposition 3.3.1. *On Considére une suite de fonctions mesurables $b_n(t;X)$ uniformément bornées par C, telles que :*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(t;X) = b(t;X)$$

pour presque tous $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ et supposons aussi que les solutions correspondantes $X_t^{(n)}$ des équations :

$$X_t^{(n)} = x + B_t^H + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds;\ 0 \leq t \leq T$$

convergent p.s. à un certain processus X_t pour tout $t \in [0,T]$; alors le processus X_t est une solution de l'équation (3.32)

3.3.2 Unicité en loi et unicité des trajectoires.

Théorème 3.3.3. *Supposons que $b(t,x)$ satisfait les conditions sur la croissance linéaire (H_1) et la condition de Hölder continu (H_2) ; alors l'unicité en loi et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation (3.32).*

Preuve.

Unicité en loi : Soient (X, B^H) une solution faible de l'équation stochastique (3.32) définie dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\})$. On définit un processus u_s et une mesure de probabilité $\widetilde{P}$ par :

$$u_s = (K_H)^{-1}\left(\int_0^{\cdot} b(r, X_r)dr\right)(s)$$

$$\frac{d\tilde{p}}{dp} = exp\left(-\int_0^T u_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 ds\right) \tag{3.38}$$

Le processus u_s satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème (3.2.2). En effet, il est adapté et puisque X_t possède les mêmes propriétés de régularité que le MBF, on déduit que $\int_0^T u_s^2 ds < \infty$ p.s.

Finalement, on peut appliquer le critère de Novikov pour montrer que $E(\frac{d\tilde{p}}{dp}) = 1$, car le lemme de Gronwall nous permet d'écrire :

$$\|X\|_\infty \leq (x + \|B^H\|_\infty + CT)\exp(CT)$$

et :

$$|X_t - X_s| \leq |B_t^H - B_s^H| + C|t+s|\|X\|_\infty$$

Le théorème de Girsanov permet d'affirmer que le processus

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t u_s ds$$

est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien relativement à la probabilité $\widetilde{P}$.

On a la représentation

$$X_t = X + \int_0^t K_H(t,s) d\widetilde{W}_s$$

et par conséquent, $X - x$ est un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien fractionnaire, relativement à la probabilité $\widetilde{P}$, de paramètre de Hurst H. En conséquence, les processus $X - x$ et $\widetilde{B}_t^H$ ont la même distribution relativement à la probabilité P.

En effet, on peut facilement montrer que si Ψ est une fonctionnelle mesurable bornée sur $C([0,T])$, alors :

$$E_p(\Psi(X - x)) = E_P(\Psi(\tilde{B}^H))$$

Unicité des trajectoires : Soient X_1 et X_2 deux solutions faibles définies sur le même espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\})$ par rapport au même mouvement brownien fractionnaire, alors $\sup(X_1, X_2)$ et $\inf(X_1, X_2)$ sont ainsi des solutions. Elles possèdent donc les mêmes lois et donc $X_1 = X_2$.

Théorème 3.3.4. *Soient b_1 et b_2 des fonctions mesurables sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (C_1), (C_2) et (C_3) (resp. (C_1), (C_2') et (C_3') du théorème d'existence, alors l'unicité en loi et l'unicité des trajectoires sont satisfaites pour l'équation (3.36).*

Preuve. La preuve est analogue à celle du théorème précédent. Pour plus de détails voir [3].

3.3.3 Existence de la solution forte

Définition 3.3.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, B^H un mouvement brownien fractionnaire. Un processus X est une solution forte de l'équation (3.32) si :*

- *(i) X est continu et :$\mathcal{F}_t^{B^H}$-adapté.*
- *(ii) X et B^H satisfont (3.32).*

Soient $p, \beta > 1$, on dit que la fonction mesurable $F : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartient à $L_{p,\beta}$, si

$$\|F\|_{p,\beta} = \left(\int_0^T \left(\int_R |F(t,x)|^p dx \right)^{\frac{\beta}{p}} dt \right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty.$$

Théorème 3.3.5. *Supposons que $b(t, x)$ satisfait la condition de croissance linéaire (H_1) du théorème (3.3.1). Si $H < \frac{1}{2}$, alors l'équation (3.32) admet une solution forte unique.*

Preuve. Pour tout $R > 0$, posons $b_R(t, x) = b(t, (x \wedge R) \vee (-R))$. La condition de croissance linéaire implique que b_R est une fonction mesurable bornée. Soit ρ une fonction régulière non négative de support compact dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(z) dz = 1$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, posons $b_{R,j}(t, x) = j \int_{\mathbb{R}} b_R(t, Z)\rho(j(x - z))dz$.

Soient pour $k \leq n$, $\widetilde{b}_{R,n,k} = \bigwedge_{j=n}^{k} b_{R,j}$ et $\widetilde{b}_{R,n} = \bigwedge_{j=n}^{\infty} b_{R,j}$.
Il est clair que $\widetilde{b}_{R,n,k}$ est lipschitZienne relaivement à la variable x uniformément en t, $\widetilde{b}_{R,n,k} \downarrow \widetilde{b}_{R,n}$, si $k \to \infty$ et $\widetilde{b}_{R,n} \uparrow b_R$, si $n \to \infty$, pour presque tout x et pour tout t.
L'équation obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par $(\widetilde{b}_{R,n,k})$ dans l'équation (3.32) admet une solution unique $\widetilde{X}_{R,n,k}$. En utilisant le critère de comparaison pour les équations différentielles ordinaire, on montre que la suite $\widetilde{X}_{R,n,k}$ décroit avec k, par conséquent elle admet une limite $\widetilde{X}_{R,n}$. Grace au théorème de comparaison $\widetilde{X}_{R,n,k}$ (et par conséquent $\widetilde{X}_{R,n}$) est bornée supérieurement (resp. inféreurement) par la solution avec un coefficient constant R (resp.$-R$) et de plus $\widetilde{X}_{R,n}$ est croissante et converge donc vers une limite X_R, qui est une solution de l'équation de obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par b_R dans l'équation (3.32).
En augmentant R, on obtient le résultat.
L'unicité est une conséquence du théorème 5 de [19].

Théorème 3.3.6. *Supposons que $b(t,x)$ satisfait la condition de croissance :*

$$b(t,x)^2 \leq K + F(t,x)$$

pour presque tous $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, où $K > 0$ est une constante et F est une fonction non négative dans $L_{p,\beta}$ pour tout $p > 1$, $\beta > \frac{p}{p-H}$, et $H < \frac{1}{2}$. Alors l'équation (3.32) admet une solution forte unique.

Preuve. Pour tout $n > 0$, posons $b_n(t,x) = (b(t,x) \vee (-n)) \wedge n$.
Il est claire que $b_n(t,x)^2 \leq C + F(t,x)$, où $F \in L_{p,\beta}$, $p > 1$ et $\beta > \frac{p}{p-H}$.
De plus $\lim_{n\to\infty} b_n(t,x) = b(t,x)$.
Notons que b_n est une fonction mesurable bornée et donc l'équation obtenue en remplaçant $b(t,x)$ par b_n dans l'équation (3.32) admet une solution forte unique. Comme b_n est croissante et le théorème de comparaison implique

que $X_t^{(n)}$ est croissant p.s. et converge danc vers un processus X_t qui est une solution de l'équation (3.32). l'unicité est une conséquence du théorème 5 de [19]. Pour plus de détails, voir [18].

Théorème 3.3.7. *Supposons que $b_1 \equiv 0$ et b_2 satisfait les conditions (C_2) et (C_3) (resp. (C_2') et (C_3')), alors il existe une solution forte (resp. Solution forte unique) pour l'équation :*

$$X_t = x_0 + B_t^H + \int_0^t b_2(s, X_s)ds, \; 0 \leq t \leq T \tag{3.39}$$

Preuve. Supposons que $b_2 : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, bornée, non décroissante et continue à gauche et posons pour tout $n \geq 1$: $b_n(s, x) = \int_{x-\frac{1}{n}}^{x} b_2(s, y)dy$. Les fonctions $b_n(s, x)$ sont non décroissantes et bornées uniformément. En utilisant $([19], proposition.7)$,

on montre que l'équation :

$$X_t^{(n)} = x_0 + B_t^H + \int_0^t b_n(s, X_s^n)ds, \; 0 \leq t \leq T$$

admet une solution forte notée $X^{(n)}$. Soient $n > m$, notons $\Delta_t = X_t^n - X_t^m$. En utilisant la monotonie de b_n, on obtient :

$$\Delta_t \geq \int_0^t (b_m(s, X_s^n) - b_m(s, X_s^m))ds$$

$$\geq \int_0^t (b_m(s, X_s^n) - b_m(s, X_s^m))I_{\{\Delta_s \leq 0\}}ds \tag{3.40}$$

$$\geq 2mM \int_0^t \Delta_s I_{\{\Delta_s \leq 0\}}ds \geq -2mM \int_0^t \Delta_s^- ds$$

Et donc :

$$\Delta_t^- \leq 2mM \int_0^t \Delta_s^- ds \tag{3.41}$$

Grace au lemme de Gronwall, on obtient que pour presque tout ω et pour tout $t \in [0, T]$, la suite $(X_t^n(\omega))$ est une fonction non décroissante de n, bornée (puisque b_n est borné). Par conséquent, elle admet une limite quand $n \to \infty$ et on pose :

$$\lim_{n \to \infty} X_t^n(\omega) = X_t(\omega),$$

ce qui nécessite en particulier que X soit $\mathcal{F}^{B^H}$−adapté. En appliquant le résultat de convergence de [19]. proposition.7 et la bornétude des b_n ainsi que le théorème de la convergence dominé de lebesgue, on obtient :

$$X_t = x + B_t^H + \int_0^t b_2(s, X_s) ds.$$

Bibliographie

[1] E. Alòs, O. Mazet et D. Nualart. Stochastic calculus with respect to fractional Brown ian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$. (2000). Stoch. Proc. Appl. 86, 121-139.Springer.

[2] E. Alòs et D. Nualart. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. Stochastics and Stochastics Reports 75, 129-152, 2003.

[3] B. Boufoussi et Y. Ouknine. On a SDE driven by A fractional Brownian motion with and monotone drift. Elect. Comm. in Probab. 8 (2003)122-134.

[4] J-C Breton. Processus et calcul stochastiques ; Processus en temps continu, integration stochastique. Université de Rennes 1, Septembre-Décembre 2011.

[5] P. Briand, Equations Différentielles Stochastiques Rétrograde, cours, Mars 2001.

[6] . Cheridit et D. Nualart. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in]0\frac{1}{2}[$

[7] A. S. Chemy et H. J. Engelbert. Singular Stochastic Differential Equations. Springer- Verlag Berlin (2005).

[8] L.Decreusefond. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion.

[9] T. E. Duncan, Y. Hu et B. Pasik-Duncan, 1998. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I.Theory

[10] L. C. Evans. An introduction to Stochastic Differential Equations.

[11] S. Geiss. Stochastic Processes in continuous time (05/2006).

[12] N. Ikeda et S. Watanabe. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Rolland (1981).

[13] I. Karatzas et S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, Berlin.(1988).

[14] P.E. Kloeden et E.Platen, (1992) : Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.

[15] T. Lyons : Differential equations driven bu rough signals, Rev. Mat. Iberoamericana, 1998, 14 :2, 215-310

[16] Y. Mishura et D. Nualart. Weak solution for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion with parameter $H > \frac{1}{2}$ and discontinuous drift.IMUB No 319. 2003

[17] D. Nualart et Y. Ouknine. Besov regularity of stochastic integrals with respect to the fractional Brownian motion with parameter $H > \frac{1}{2}$. Journal of Theoretical Probability 16, 451-470, 2003

[18] D. Nualart et Y. Ouknine. Stochastic differential equations with additive fractional noise and locally unbounded drift. Progress in Probability 56, 353-365, 2003

[19] D. Nualart et Y. Ouknine. Regularization of differential equations by fractional noise. Stoch. Proc. Appl. 102 (2002), 103-116.

[20] D. Nualart, G. Via.Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. 2003.

[21] B. Oksendal. Stochastic Differential Equations. 5th Edition, Springer-Verlag Heidel- berg New York. (2000).

[22] Z. Qian. Stochastic Differential Equations. (05/2006).

[23] M. ReiB. Stochastic Differential Equations. 2003/04.

[24] L. C. G. Rogers et D. Williams. Diffusions, Markov Processes and Martingales, Volume 2 Cambridge University Press (2000).