République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N° Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Calcul stochastique dans les variétés différentiables

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse stochastique, statistique des processus et applications

par

GUENDOUZI **A**BDELHAK [1]

Sous la direction de

Dr. A.KANDOUCI

Soutenu le 30 Mai 2016 devant le jury composé de

Mr. **D.D**jebbouri	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
Dr. **A.K**ANDOUCI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
Mlle. **F.B**ENZIADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mr. **M.K**ADI	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : a.guendouzi@yahoo.com

Si tu veux courir, cours un kilomètre, si tu veux
changer ta vie, cours un marathon
Émil Zatopek [2].

2. Célèbre coureur de fond du vingtième siècle

Remerciements

Voici venu le moment où nous tenons à exprimer notre gratitude envers tous ceux qui m'ont aidés et soutenu tout au long de ce travail.

Je remercie en premier lieu **Dr.A.KANDOUCI**, promoteur de ce mémoire, ses idées, ses consiels et ses critiques m'ont été d'une aide précieuse pour mener ce travail à bien. Au-delà de l'aspect scientifique de nos discussions, j'ai été particulièrement sensible à sa qualité humaine, à l'excellent climat relationnel qu'il a surétabli entre nous et au fait de savoir que je pouvais toujours compter sur lui.

Je remercie les membres de jury : Mr **D.Djebbouri**, M^{lle} **F.BENZIADI**,et Mr **M.KADI**. Mes profonds remerciements vont à :

- Mr **S.OUAKKAS**.
- Mr **D.DJEBBOURI**.
- M^{lle}**F.BENZIADI**.
- L'ensemble des enseignants qui ont participés à ma formation.
- Toute la promotion ASSPA (2015/2016).
- Tous les responsables du département de Mathématiques.
- Tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce travail à mes parents, GUENDOUZI M'hamed et GUENDOUZI Noria. En reconnaissance des sacrifices qu'ils se sont imposés pour ma réussite.
Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde affection.
A ma grande-mère A toute ma famille A eux, j'exprime ici toute ma gratitude et ma franche reconnaissance. A mes collègues et mes amis Pour tous les soutiens et encouragements qu'ils ont apporté.

Table des matières

Introduction

On commence par le concept de la variété : une variété est un objet géométrique multidimensionnel qui peut être considéré comme un espace qui est localement similaire à l'espace euclidien. Depuis la différentiabilité est une propriété définie localement, la différentiation peut être définie sur une variété d'une manière similaire comme il est défini sur la espace euclidien. Un point sur une variété peut être décrit par plusieurs ensembles de paramètres, qui sont considérés comme des systèmes de coordonnées locaux.

L'avantage de travailler sur une variété est que l'on peut considérer et d'étudier les concepts géométriques (fonctions, invariants, vecteur champs, connexions, etc.) qui font sens à l'échelle mondiale et peut également être décrit quantitativement dans les systèmes locaux de coordonnées.

Cette propriété d'abord fait sens en physique et théorie de la relativité, oú chaque système de coordonnées correspond à un système de référence.

Par conséquent, les principaux objets d'étude dans ce cas sont la vitesse, l'accélération, vigueur, peu importe les champs, les moments, etc., à savoir, des objets qui restent invariant par un changement du système de référence. Ceci veut dire cela alors que ces objets ont un sens globalement, ils peuvent être décrits quantitativement en termes de coordonnées locales.

La surface de la terre est l'un des exemples les plus évocateurs des variétés. On est conscient de cette variété seulement localement, où il ressemble un morceau de plan. Un observateur local situé sur la surface de la terre peut coordonne mesure à tout moment en choisissant une origine et une unité de mesure, le résultat de ce travail étant une carte locale de la région.

Même si elle est rédigée à différentes échelles, des deux cartes de régions qui se chevauchent sont corrélés, dans le sens que l'on peut «comprendre» leur relation. Si ces cartes constituent une cartographie[3] ensemble de la planète, ils forment alors un atlas. Aujourd'hui, les gens sont plus familiers avec le système googlemaps. Les cartes peuvent être transformées par la traduction, contraction ou dilatation, qui se déplacent d'une carte à une autre, la la transformation étant lisse et d'assurer la

3. La cartographie est l'étude et la pratique de faire des cartes.

corrélation entre cartes. La connaissance locale de la surface de la terre contenue dans un atlas forme la notion de variété [51].

Dans ce sujet, nous présentons une extension du calcul stochastique dans les variétés différentiables. D'abord, une introduction générale sur les variétés, ensuite on présente le Mouvement Brownien sur les variétés Riemanniennes, ainsi que les semimartingales, et enfin on effectue tout un calcul stochastique sur les variétés différentiables en terminant par des applications.

En 1979, Schwartz a adopté un point de vue entièrement nouveau : accepter la présence des covariations et tenter d'interpréter cette formule comme l'action du codiffuseur $d^2 f$ au point X_t sur un diffuseur exprimant la cinématique de X.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre esquisse une présentation de quelques notions fondamentales de la géométrie différentielle (vecteurs et covecteurs, fibrés tangent et cotangent), puis la géométrie différentielle d'ordre 2 fait son apparition : diffuseurs et codiffuseurs, fibrés osculateur et coosculateur. Comme l'a découvert Schwartz, c'est le seul langage qui permette un calcul stochastique intrinsèque très général par rapport aux semimartingales continues dans une variété, cette géométrie au second ordre est tout aussi fondamentale mais beaucoup moins classique que la géométrie différentielle ordinaire.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré au calcul stochastique intrinsèque de Schwartz [42], [43], [48] dans une variété, l'objet fondamental est l'intégrale stochastique le long d'une semimartingale continue d'un processus coosculateur à la variété le long de cette semimartingale dans la section intégration des codiffuseurs le long des semimartingale (théorème 2.3.1). Ensuite en va exposer la théorie des martingales dans une variété, due à Meyer [34], [35], [38] : interprétation des connexions dans le langage d'ordre 2, définition (aprés Duncan [20] et Bismut [11], et indépendamment de Darling [16], [19]) de l'intégrale d'Itô d'un processus cotangent à la variété le long d'une semimartingale, en introduisant des martingales. Une semimartingale dans une variété riemannienne pour certaine condition on dit que la semimartingle est une semimartingle normale, et martingale pour la connexion de levi-civita dépend de la métrique riemannienne, aprés ces deux résultats, on va définir le mouvement bronwien dans cette variété [52].

Dans le dernier chapitre, en présente deux applications, l'application affine, elle transforme les géodésiques (respectivement martingales) de V en géodésiques (respectivement martingales) de W [52]. L'application harmonique qui transforme les mouvement browniens de V en martingale de W [10], pour V et W deux variétés différentielles et on donne un exemple de calcul stochastique dans une variété choisie (la sphère) [53].

Chapitre 1

Quelques notions de la géométrie différentielle

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés différentiables

On considére un espace topologique V (c'est-à-dire un espace de points muni d'une topologie). On suppose que cet espace est

– à base dénombrable : la topologie de V a une base dénombrable d'ouverts. Cette propriété est équivalente à l'existence d'un sous-ensemble dénombrable dense (par exemple $\mathbb{Q}^n$ pour $\mathbb{R}^n$).
– séparé : deux points distincts ont des voisinages distincts.

Définition 1.1.1. *Une carte de dimension n sur V est un couple (U, φ) formé de*

– *un ouvert $U \subseteq V$.*
– *un homéomorphisme[1] $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.*

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$: φ est ce que l'on appelle une fonction coordonnées. Un point de V peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, φ) et (W, ψ).

Définition 1.1.2. *Deux cartes (U, φ) et (W, ψ) sur V sont compatibles si $U \cap W = \emptyset$, ou si $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme[2] entre les ouverts de $\mathbb{R}^n$ que sont $\psi(U \cap W)$ et $\varphi(U \cap W)$.*

---

1. un homéomorphisme est une application continue et inversible dont l'inverse est continue
2. Rappels : Une application $f : U \subseteq E \longrightarrow F$, oú E et F sont des espaces vectoriels normés et U un ouvert de E, est un difféomorphisme de U dans $f(U)$ si elle est de classe C^∞, inversible et si son inverse est de classe C^∞. Une condition nécessaire et suffisante est que f soit injective et que $Df(x)$ soit un isomorphisme $\forall x \in U$.

Remarques 1.1.1. – *A priori les dimensions des cartes n'ont pas été fixées.*

On pourrait donc avoir $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et $\psi(W) \subset \mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$. Cependant, si $U \cap W = \emptyset$, le fait que $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ soient des difféomorphismes impose que les deux cartes soient de même dimension.

– *Signification en coordonnées. Une carte (U, φ) donne un systéme local de coordonnées. Sur $U \cap V$, on a donc deux systémes de coordonnées : $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ et $\psi = (y^1, ..., y^n)$. Comme ce sont des homéomorphismes, l'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une bijection et son inverse est $\psi \circ \varphi^{-1}$. Ces deux applications s'écrivent*

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, ..., y^n) &\longmapsto (x^1 = f^1(y), ..., x^n = f^n(y)) \\ \psi \circ \varphi^{-1} : x = (x^1, ..., x^n) &\longmapsto (y^1 = g^1(x), ..., y^n = g^n(x)) \end{aligned}$$

La compatibilité signifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe C^∞.

Définition 1.1.3. *Un atlas de dimension n de V est un ensemble $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension n tel que :*

– *les ouverts U_α recouvrent V.*

– *toutes les cartes de A sont compatibles deux à deux.*

Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur V. On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas, c'est-à-dire que $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $A' = \{(W_\beta, \psi_\beta)\}$ sont équivalents si toutes les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (W_β, ψ_β) sont compatibles deux à deux.

Définition 1.1.4. *Une structure différentiable de dimension n sur V est une classe d'équivalence d'atlas de dimension n de V.*

En pratique on définit une structure différentiable en donnant un atlas représentant la classe.

Définition 1.1.5. *Une variété différentiable*[3] *de dimension n est un espace topologique V séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n.*

3. Techniquement, les variétés dans lesquelles nous allons travailler sont des variétés différentiables réelles, de dimension finie, de classe C^p (où, le plus souvent, $2 \leq p \leq \infty$).

1.1.2 Exemples des variétés différentiables.

1. $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}^n, id)$.
2. Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ). De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ).
3. L'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est une variété de dimension n : il est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ via le choix d'un systéme de coordonnées x. L'atlas à une carte $(\mathbb{E}^n, x)$ y définit donc un structure différentiable.

1.1.3 Applications différentiables

On connaît les notions de différentiabilité et de difféomorphismes pour les applications entre espaces vectoriels normés. On va définir ces notions pour les applications entre variétés. Le principe est toujours le même : on dira qu'une application entre variétés est différentiable (ou est un difféomorphisme) si, lue dans une carte, elle l'est. Formalisons cette définition.

Définition 1.1.1. *Soient M et N des variétés différentiables de dimensions n et k et $F : M \longrightarrow N$ une application. Si (U, φ) est une carte de M contenant p et (V, ψ) une carte de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, on dit que*

$$F^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

est l'application F lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ). Dans le cas particulier où M ou N est égal à $\mathbb{R}^n$, l'application de carte correspondante est l'identité et on note

$$g^{\varphi} = g^{\varphi id} = g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

si $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^k$ et

$$h^{\psi} = h^{id\psi} = \psi \circ h : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

si $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$

Définition 1.1.6. *L'application F est différentiable (ou de classe C^{∞}) en $p \in M$ si il existe une carte (U, φ) de M contenant p et une carte (V, ψ) de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, telles que $F^{\varphi\psi}$ est de classe C^{∞}. On dit que F est une application différentiable de M dans N si elle est différentiable en tout point $p \in M$.*

Cette définition est correcte car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans les variétés. En effet, si on choisit deux systémes de coordonnèes locales différents φ_1, φ_2 (resp.ψ_1, ψ_2) sur M (resp N), on a

$$\psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$$

et les applications entre espaces vectoriels normés $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^∞.
Donnons quelques propriétés des applications différentiables.

- Toute application différentiable est continue.
  (Car sur tout ouvert de carte U, on a $F\,|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.)
- Soit $\bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de M. Alors F est différentiable si et seulement si chaque restriction $F\,|_{U_i}$, $i \in U_i$, l'est.
- La composition d'applications différentiables est différentiable. En effet, soient $F : M \longrightarrow M'$, $G : M' \longrightarrow M''$ et $G \circ F : M \longrightarrow M''$. Alors, dans des cartes de M,M' et M'',

$$\varphi'' \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\varphi'' \circ G \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1})$$

Définition 1.1.7. *Une application $F : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme de M sur N si F est une bijection et si F et F^{-1} sont différentiables. On a alors nécessairement* $\dim M = \dim N$.

Notons que (U, φ), avec U ouvert de M, est une carte de la variété si et seulement si φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

1.2 Sous-variétés

Voyons maintenant comment obtenir simplement des variétés.

1.2.1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2.1. *Un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k \leq n$ si, pour tout point x de N, il existe un ouvert $U_x \subset \mathbb{R}^n$ contenant x et un difféomorphisme*
$\varphi : U_x \longrightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k$$

Autrement dit, une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble que l'on peut localement redresser en un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^k$.
Il est clair qu'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est une variété, les $(U_x \cap N, \varphi|_{U_x \cap N})$ formant un atlas pour N.

La structure différentiable et la topologie sont induites par celles de $\mathbb{R}^n$.

Remarquons alors (le montrer) que l'inclusion de la variété N dans $\mathbb{R}^n$ est un plongement (le terme sous-variété plongée est d'ailleurs souvent employé à la place de sous-variété). De façon générale, l'image d'un plongement est une sous-variété.

Lemme 1.2.1. *[54] Soient $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement. Alors $N = f(U)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.*

Lemme 1.2.2. *[54] Soient $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une application différentiable et $y \in F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Si F est une submersion sur $N = F^{-1}(y)$, alors N est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.*

1.2.2 Sous-variétés de variétés.

Définition 1.2.2. *Une partie N d'une variété M de dimension n est une sous-variété de M de dimension $k \leq n$ si, pour tout point q de N, il existe une carte (U, φ) de M contenant x telle que*

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$$

La carte (U, φ) est dite adaptée à N. Elle vérifie

$$\varphi(U \cap N) = \{(x^1, ..., x^n) \in \varphi(U) \quad t.q. \quad x^{k+1} = ... = x^n = 0\}$$

Les deux résultats suivants se montrent presque de la même façon que les lemmes (il faut en plus passer par des cartes des variétés M et N).

Lemme 1.2.3. *[54] Soient M, N des variétés de dimension n, k et $F : N \longrightarrow M$ un plongement. Alors $W = F(N)$ est une sous-variété de M de dimension k.*

Lemme 1.2.4. *[54] Soient M, N des variétés de dimension n, k, $F : M \longrightarrow N$ une submersion et $y \in F(M)$. Alors $W = F^{-1}(y)$ est une sous-variété de M de dimension n-k.*

Définition 1.2.3. *Un sous-ensemble W d'une variété M est une sous-variété immergée de M de dimension $k \leq n$ si il existe une immersion injective $f : N \longrightarrow M$, où N est une variété de dimension k, dont l'image $f(N)$ est égale à W.*

Remarques 1.2.1.
- *Une sous-variété immergée peut aussi être définie comme une variété contenue dans M telle que l'inclusion $i : W \longrightarrow M$ est une immersion (alors que c'est un plongement pour les vraies sous-variétés).*

– *Des ouverts suffisamment petits de W sont des "vraies" sous-variétés de M . En revanche W lui-même n'en est pas forcément une, sa topologie étant en général plus forte que celle induite par M*

Théorème 1.2.1. *(Plongement de Whitney). Toute variété de dimension n admet un plongement sur une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

L'important théorème de plongement de Whitney dit que toute variété de dimension d est difféomorphe à une sous-variété plongée dans $\mathbb{R}^{d'}$. Mais on pourrait aussi prendre cette propriété comme définition, en décidant de ne considérer comme variétés que les sous-variétés des espaces $\mathbb{R}^{d'}$, Lorsque la variété n'est pas elle-même un ouvert de $\mathbb{R}^d$, qui admet d coordonnées globales (une seule carte), ce théoréme permet de munir la variété d'un système de d' coordonnées, surnuméraires mais globales.

Définition 1.2.1. *Un fibré vectoriel (de dimension finie) au-dessus d'une variété V est une variété F de classe C^p pourvue d'une application surjective $\pi \in C^p(F, V)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- *lorsque v parcourt V , les ensembles $F_v = \pi^{-1}(\{v\}) \subset F$ (appelés fibres) sont tous des espaces vectoriels, de même dimension finie, soit d'.*
- *pour tout $v \in V$, il existe un voisinage W de v dans V et un difféomorphisme de classe C^p entre $W \times \mathbb{R}^{d'}$ et $\pi^{-1}(W) \subset F$ tel que $x \longmapsto \phi(w, x)$ soit, pour chaque $w \in W$, une bijection linéaire entre $\mathbb{R}^{d'}$ et la fibre F_w.*

La dimension d'un tel fibré comme variété est $d + d'$, elle doit être soigneusement distinguée de la dimension algébrique d' de chaque fibre.
Si $v = \pi(x)$, on dit aussi que x est au-dessus de v, on a l'habitude de schématiser V comme un espace horizontal et F comme placé au-dessus de V, et on imagine la fibre F_v comme l'intersection de F avec une verticale passant par v, on dit également que la fibre F_v est au dessus de x.

Proposition 1.2.1. *Soit F un fibré vectoriel au-dessus de V*

a) *Pour toute fonction $f \in C^p(V)$, l'application de F dans F de multiplication par le scalaire f, dont la restriction à une fibre F_v est la multiplication par le réel $f(v)$, est de classe C^p.*

b) *Dans la variété $F \times F$, le sous-ensemble F' formé des (x, y) tels que $\pi(x) = \pi(y)$ est une sous-variété C^p, et l'application $(x, y) \longmapsto x + y$ de F' dans F est C^p.*

c) *On appelle section du fibré (sous-entendu : de classe C^p) toute application $A \in C^p(V, F)$ telle que $\pi \circ A = Id_V$. Soit $v \in V$. Donc qu'il existe d' sections du fibré $A^1, ..., A^{d'}$ et un voisinage ouvert W de v tels que, pour chaque $w \in W$, les vecteurs $A_1(w), ..., A_{d'}(w)$ forment une base de l'espace F_w. Pour toute section B du fibré, les fonctions $b^1, ..., b^{d'}$, définies sur W par $B(w) = \sum_i b^i(w)A_i(w)$, sont de classe C^p sur W.*

Nous rencontrerons énormément de formules contenant des sommations et des dérivées partielles, c'est pourquoi il sera utile d'en alléger l'écriture. Les dérivées partielles d'une fonction f, lue dans des coordonnées locales $v^1, ..., v^d$, par rapport à ces coordonnées, seront notées $D_i f$ au lieu de $\partial f/\partial v_i$, de même pour les dérivées d'ordre supérieur : $D_{ijk} f$ remplace $\partial^3 f/\partial v^i \partial v^j \partial v^k$, etc. Pour alléger encore les formules, on supprime le signe $\sum$, au moyen de la convention suivante, en vigueur dans toute la suite : lorsqu'un même indice, soit i, figure deux fois dans un même monôme, une fois en position basse et une fois en position haute, le signe $\sum_i$ est sous-entendu devant ce monôme.

1.3 Vecteurs et covecteurs tangents

Soit $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ une courbe dans une variété V. À l'instant 0, γ se trouve en un point $x = \gamma(0) \in V$, mais qu'est-ce que la vitesse $\dot{\gamma}(0)$ de γ à cet instant ? On peut choisir des coordonnées locales $v^1, ..., v^d$ au voisinage de x, observer les coordonnées $\gamma^i(t)$ du point $\gamma(t)$ (elles sont bien défnies pour t voisin de 0), et considérer le système des d dérivées $\dot{\gamma}^i(0)$, mais comment faire apparaître ce système de façon intrinséque (c'est-à-dire invariante par difféomorphismes) ?. L'une des manières possibles est la suivante. Pour toute fonction $f \in C^1(V)$, la composée $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1, dont la dérivée en $t = 0$ est $\dot{\gamma}^i(0) D_i f(x)$ (convention de sommation !). Ainsi, les d composantes $\dot{\gamma}^i(0)$ sont aussi les coefficients de l'opérateur différentiel $f \longmapsto (f \circ \gamma)'(0)$, ces coefficients ne sont pas intrinsèques, mais l'opérateur l'est, et il est donc légitime de défnir la vitesse $\dot{\gamma}(t)$ comme étant cet opérateur lui-même.

Définition 1.3.1. *Soient V une variété C^p où $1 \leq p \leq \infty$, et x un point de V. Une application A de $C^p(V)$ dans $\mathbb{R}$ est un vecteur tangent à V au point x s'il existe une carte locale $(v^1, ..., v^d)$ de domaine contenant x et des réels $A^1, ..., A^d$ tels que $Af = A^i D_i f(x)$ pour toute $f \in C^p(V)$. Les A^i sont appelés les coefficients de A dans la carte.*
Si $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ est une courbe dans V, on appelle vitesse de γ à l'instant t, et on note $\dot{\gamma}(t)$, le vecteur $f \longmapsto (f \circ \gamma)'(t)$ tangent à V au point $\gamma(t)$.

Remarque 1.3.1. *Si A est un vecteur tangent en x à V, les coefficients A^i tels que $Af = A^i D_i f(x)$ existent pour toute carte dont le domaine contient x, bien qu'on ne l'ait exigé que pour une seule carte. Si (v^i) et (w^α) sont deux cartes contenant x, les coefficients A^i et A^α de A dans ces deux cartes sont liés par la formule de changement de cartes pour les vecteurs tangents*

$$A^\alpha = A(w^\alpha) = D_i w^\alpha(x) A^i,$$

qui est linéaire et fait naturellement apparaître les coefficients $\frac{\partial w^\alpha}{\partial v^i}$ de la matrice jacobienne liée au changement de coordonnées locales.

Tout vecteur tangent en x à V est la vitesse à l'instant 0 d'une courbe γ telle que $\gamma(0) = x$. Fixons en effet des coordonnées locales (v^i) au voisinage de x, et soient x^i les coordonnées de x et A^i les cofficients de A dans ce système. La courbe γ de coordonnées $\gamma^i(t) = x^i + A^i t$ répond à la question. Remarquons enfin que le nom de vecteurs est justifié par le fait que les vecteurs tangents à V en x forment un espace vectoriel de dimension d, dont une base est composée des d vecteurs $f \longmapsto D_i f(x)$ (cette base dépend du choix des coordonnées locales au voisinage de x).

Définition 1.3.2. *Si x est un point d'une variété V de classe C^p, oú $p \geq 1$, on appelle* espace tangent *en x à V, et l'on note T_xV, l'espace vectoriel de tous les vecteurs tangents en x à V.*
On appelle fibré tangent *à V, et l'on note TV, la réunion disjointe $\bigcup_{x\in V} T_xV$.*

Le fibré tangent TV est canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel au-dessus de V, de classe C^{p-1}, de la manière suivante : Si (v^i) est une carte locale de V, de domaine D, la réunion $\bigcup_{x\in D} T_xV = \pi^{-1}(D)$ est le domaine d'une carte locale de TV, dans laquelle les $2d$ coordonnées d'un vecteur tangent $A \in T_xV$ sont les d coordonnées x^i de sa projection $x = \pi(A)$, et les d coefficients de A dans la carte locale. Le passage entre deux telles cartes, qui se fait au moyen de la formule de changement de cartes rencontrée plus haut, fait intervenir comme on l'a vu les matrices jacobiennes, dont les coefficients sont de classe C^{p-1} seulement, d'où la perte d'un ordre de différentiabilité en passant de V à TV.

Définition 1.3.3. *Soient V et W deux variétés de classe C^p (où $1 \leq p \leq \infty$), x un point de V, et ϕ une application C^p de V dans W. Pour chaque $A \in T_xV$, l'application qui à toute $f \in C^p(W)$ associe le nombre $A(f \circ \phi)$ est un vecteur tangent à W au point $\phi(x)$, noté $\phi_{*x}(A)$. L'application ϕ_{*x} ainsi défnie de T_xV dans T_yW est linéaire, on l'appelle l'application linéaire tangente à ϕ au point x.*

Si (v^i) est une carte locale au voisinage de x et (w^α) une carte locale au voisinage de $\phi(x)$, la matrice de ϕ_{*x} dans les bases D_i et D_α est la matrice $(D_i\phi^\alpha)$. Les applications linéaires tangentes se composent naturellement : $(\psi \circ \phi)_{*x} = \psi_{*x} \circ \phi_{*x}$.

Proposition 1.3.1. *L'application $\phi_{*x} : T_xV \longrightarrow T_{\phi(x)}W$ peut aussi être défnie par la propriété suivante : pour toute courbe $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ vérifant $\gamma(0) = x$, l'image de la vitesse initiale $\dot\gamma(0)$ de γ est la vitesse initiale $(\phi \dot\circ \gamma)(0)$ de la courbe $\phi \circ \gamma$. On peut d'ailleurs remarquer que le vecteur $\dot\gamma(0)$ est lui-même l'image par γ_{*0} du vecteur tangent $\frac{d}{dt} \in T_0\mathbb{R}$.*

Soient ϕ une application C^p d'une variété V dans une variété W (avec $p \geq 1$). L'application tangente à ϕ est l'application $\phi_* \in C^{p-1}(TV, TW)$ dont la restriction à chaque fibre T_xV est ϕ_{*x}. Plus question de linéarité, TV n'étant pas un espace vectoriel, mais la formule de composition $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ subsiste. Et ϕ_* peut être caractérisée par $\phi_*(\dot\gamma(0)) = (\phi \dot\circ \gamma)(0)$ pour toute courbe γ dans V.

Proposition 1.3.2. *Soient V une variété C^p, où $1 \leq p \leq \infty$, et A une fonction réelle sur $V \times C^p(V)$. Pour chaque x de V, notons $A(x)$ la fonction $f \longmapsto A(x,f)$ sur $C^p(V)$, pour chaque $f \in C^p(V)$, notons Af la fonction $x \longmapsto A(x,f)$ sur V. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour chaque x de V, $A(x)$ est un vecteur tangent en x à V, et l'application $x \longmapsto A(x)$ ainsi défnie de V dans TV est de classe C^{p-1} (autrement dit, A est une section du fibré tangent).*

(ii) *pour toute carte locale $(v^1, ..., v^d)$, il existe des fonctions $A^1, ..., A^d$, défnies et de classe C^{p-1} dans le domaine D de la carte, telles que, pour tous $x \in D$ et $f \in C^p(V)$, on ait $A(x,f) = A^i(x)D_i f(x)$,*

(iii) *$f \longmapsto Af$ est une application linéaire de $C^p(V)$ dans $C^{p-1}(V)$ vérifant pour toutes $f^1, ..., f^n$ dans $C^p(V)$ et toute ϕ dans $C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ la formule (dite de changement de variables)*

Quand ces conditions sont réalisées, on dit que A est un champ de vecteurs sur V.

Peuve de la propostion 1.3.2 : Si f est une fonction de C^p nulle au voisinage de x, il existe $g \in C^p$ telle que $g = 1$ au voisinage de x et $fg = 0$ partout. La formule de changement de variables donne
$fAg + gAf = A(fg) = 0$, d'où $Af = 0$ au voisinage de x, ceci montre que l'opérateur A est local. Ètant donnés x et f, pour calculer $A(x,f)$, on se fixe une carte (v^i) au voisinage de x et, quitte à modifier les v^i et f hors d'un voisinage de x, on se ramène au cas où les v^i sont définis partout sur V et où $f = \phi \circ (v^1, ..., v^d)$, pour une $\phi \in C^p(\mathbb{R}^d)$. L'hypothèse (iii) donne alors $A(x,f) = A(x, v^i)D_i f(x)$.

■

Remarque 1.3.2. *Lorsque $p = \infty$, les deux conditions qui suivent sont équivalentes à (i),(ii) et (iii) ci-dessus :*

Proposition 1.3.3. **(iv)** *$f \longmapsto Af$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$ vérifant la formule (de Leibniz)*

$$\forall f \in C^\infty(V) \qquad A(f^2) = 2fAf,$$

(v) *$f \longmapsto Af$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$, on a $A1 = 0$ et, pour tous $C^\infty(V)$ et $x \in V$ tels que $f(x) = 0$, $A(x, f^2) = 0$.*

De même que les vecteurs tangents en un point peuvent être multipliès par des réels, les champs de vecteurs peuvent être multipliès par des fonctions, et forment ainsi un module sur l'algèbre $C^{p-1}(V)$. La propriètè fondamentale d'un champ de vecteurs est de donner lieu à un flot sur la variété : Pour $p \geq 1$, si A est un champ de vecteurs de classe C^{p-1} et x un point de V, il existe un intervalle ouvert

I tel que $0 \in I \subset \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma \in C^p(I, V)$ tels que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$. Lorsque $p \geq 2$ (ou qu'une condition de Lipschitz est satisfaite), on peut choisir I maximal, il y a unicité (deux solutions γ' et γ'' coïncident sur $I' \cap I''$) et la solution $\gamma(t)$ est fonction C^{p-1} de x (pour t fixé, l'ensemble des $x \in V$ tels que la solution $\gamma(t)$ soit défnie est un ouvert, sur lequel la solution est une application C^{p-1} dans V).

Définition 1.3.4. *Soient $p \geq 1$ et V une variété de classe C^p. Pour $x \in V$, on appelle espace cotangent en x à V le dual T_x^*V de l'espace vectoriel T_xV . Les éléments de T_x^*V sont appelés covecteurs (ou vecteurs cotangents). On appelle fibré cotangent la réunion disjointe $T^*V = \bigcup_{x \in V} T_x^*V$, c'est un fibré vectoriel de classe C^{p-1} au-dessus de V.*

Si f est une fonction C^p sur V, ou seulement sur un voisinage de x dans V, un covecteur $df(x) \in T_x^*V$ est défini par la formule $\langle df(x), A\rangle = Af$ pour tout $A \in T_xV$. Si (v^i) est une carte au voisinage de x, les d covecteurs $dv^i(x)$ forment une base de T_x^*V, plus précisément la base duale de la base (D_i), car $\langle dv^i(x), D_j\rangle = D_jv^i(x) = \delta^i_j$. Tout covecteur $\sigma \in T_x^*V$ s'écrit donc de façon unique $\sigma = \sigma_i dv^i(x)$, où σ_i sont d coefficients réels, et la dualité entre vecteurs et covecteurs s'exprime en coordonnées locales par la formule très simple

$$\langle \sigma, A\rangle = \langle \sigma_i dv^i(x), A^j D_j\rangle = \sigma_i A^j \langle dv^i(x), D_j\rangle = \sigma_i A^i \delta^j_i = \sigma_i A^i.$$

Les coefficients σ_i du covecteur $\sigma = df(x)$ sont bien sûr $\sigma_i = D_i f$. Tout covecteur de T_x^*V est de la forme $df(x)$ pour une f bien choisie (prendre par exemple f égale à $\sigma_i v^i$ au voisinage de x si les coefficients du covecteur dans la base $dv^i(x)$ sont σ_i).

Définition 1.3.1. *Sur une variété V de classe C^p, un champ de covecteurs*[4] *est une application $\sigma \in C^{p-1}(V, T^*V)$ telle que $\sigma(x) \in T_x^*V$ pour tout x de V*

Remarque 1.3.3. *Les champs de covecteurs sont les sections du fibré cotangent. On peut les identifier aux fonctions C^{p-1} sur TV, dont la restriction à chaque fibre T_xV est linéaire.*

L'exemple fondamental de champ de covecteurs est df, où $f \in C^p$, de valeur $df(x)$ au point x. Il n'est pas vrai que tout champ de covecteurs soit de cette forme, mais une conséquence du théorème de plongement de Whitney est l'existence de fonctions $f^1, ..., f^n \in C^p$, telles que tout champ de covecteur s'écrive (de façon en général non unique)$\sum_n^{k=1} g_k df_k$, où les g_k sont dans C^{p-1}. Remarquer que, si f est une fonction de classe C^p et γ une courbe, on a $\langle df, \dot{\gamma(t)}\rangle = (f \circ \gamma)'(t)$.

4. Le terme consacré est forme différentielle de degré 1.

Remarque 1.3.4. *Si ϕ est une application C^p de V dans W et σ un champ de covecteurs sur W, on peut définir un champ de covecteurs $\phi^*\sigma$ sur V . Mais si A est un champ de vecteurs sur V , on ne peut pas en général définir un champ de vecteurs ϕ_*A sur W*

1.4 Diffuseurs

En 1979, Schwartz a découvert que le langage qui décrit de façon intrinsèque les semimartingales dans les variétés est la géométrie différentielle d'ordre 2, dans laquelle les espaces de jets d'ordre 2 jouent un rôle aussi fondamental que les traditionnels objets tangents ou cotangents d'ordre 1 évoqués plus haut. En Géométrie et en Mécanique, pour passer à l'ordre 2 et parler par exemple de l'accélération d'une courbe, on a l'habitude de travailler dans le tangent itéré TTV (le fibré tangent construit sur la variété TV). Le point de vue agréable pour les probabilistes est un peu différent, parce que la formule de changement de variable pour les semimartingales fait appel à des objets d'ordre 2 qui ne s'expriment pas naturellement dans le cadre de TTV : il s'agit des opérateurs différentiels d'ordre 2 sans terme constant, qui jouent en calcul stochastique un rôle aussi central que les vecteurs tangents (opérateurs différentiels d'ordre 1 sans terme constant) dans le calcul différentiel ordinaire.

Définition 1.4.1. *Soient V une variété C^p où $2 \leq p \leq \infty$, et x un point de V . Une application L de $C^p(V)$ dans $\mathbb{R}$ est un diffuseur au point x s'il existe une carte locale $(v^1, ..., v^d)$ de domaine contenant x et des réels $L^1, ..., L^d$ et $L^{11}, L^{12}, ..., L^{dd}$ tels que $Lf = L^{ij}D_{ij}f(x) + L^kD_kf(x)$ pour toute $f \in C^p(V)$. Les nombres L^k et $\frac{1}{2}(L^{ij} + L^{ji})$ sont appelés les coefficients de L dans la carte.*

Pour construire un diffuseur en x, on peut, une fois choisie la carte, se donner arbitrairement les $d + d^2$ nombres L^k et L^{ij} . Mais, en raison de la symétrie $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$ des dérivées secondes, on ne change pas L en symétrisant la matrice des L^{ij}, L ne dépend donc que de ses $d + d(d + 1)/2$ coefficients. Et réciproquement L détermine ses $d + d(d + 1)/2$ coefficients, puisque $L^k = Lv^k$ et $L^{ij} + L^{ji} = L(\tilde{v}^i\tilde{v}^j)$, où la fonction $\tilde{v}^i \in C^p(V)$ est défnie par $\tilde{v}^i(y) = v^i(y) - v^i(x)$.

En choisissant nuls les coefficients L^{ij} , on voit que tout vecteur tangent en x est aussi un diffuseur en x.

Tout comme les vecteurs, les diffuseurs au point x peuvent indifféremment être décrits dans toute carte locale entourant x : si (w^α) est une autre carte, le diffuseur L s'écrit aussi, en posant $(\tilde{w}^\alpha) = w^\alpha - w^\alpha(x)$,

$$L = \frac{1}{2}L(\tilde{w}^\alpha\tilde{w}^\beta)D_{\alpha\beta} + Lw^\gamma D_\gamma$$

Les formules de changement de cartes sont donc

$$L^\gamma = L^{ij} D_{ij} w^\gamma(x) + L^k D_k w^\gamma(x) \qquad L^{\alpha\beta} D_i w^\alpha(x) D_j w^\beta(x)$$

La première de ces formules montre que, lorsque les coefficients L^k des termes d'ordre 1 sont nuls, il n'en va pas nécessairement de même des coefficients L^γ ; la notion d'opérateur différentiel en x (purement d'ordre 2) n'existe pas, ou plutôt n'est pas intrinsèque, car non invariante par changements non linéaires de coordonnées. Plus généralement, on ne peut pas parler de la partie d'ordre 1 d'un diffuseur, car il ne suffit pas de connaître les L^k pour savoir calculer les L^γ, il faut aussi les L^{ij} . Mais cela a un sens de parler des (diffuseurs sans termes d'ordre 2) : ce sont exactement les vecteurs tangents.

Définition 1.4.1. *Si $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, V)$ est une courbe dans V, on appelle accélération de γ à l'instant t, et on note $\ddot\gamma(t)$, le diffuseur $f \longmapsto (f\circ\gamma)''(t)$ au point $\gamma(t)$.*

Ses composantes dans une carte locale sont $L^k = \ddot\gamma^k(t)$ et $L^{ij} = \dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)$. Remarquer que c'est précisément dans le coefficient L^k du terme d'ordre 1 que vient se nicher $\ddot\gamma^k(t)$, la seule information authentiquement d'ordre 2 ! Remarquer aussi que si l'on connaît le diffuseur $\ddot\gamma(t)$, on peut presque retrouver le vecteur $\dot\gamma(t)$, mais pas tout à fait : $\dot\gamma(t)$ n'est déterminé qu'à un facteur ± 1 près.

Définition 1.4.2. *Si x est un point d'une variété V de classe C^p avec $2 \le p \le \infty$, on appelle espace osculateur en x à V, et on note $\mathbb{T}_x V$, l'espace vectoriel formé de tous les diffuseurs en x.*

Une fois choisie une carte locale autour de x, les opérateurs différentiels D_k et D_{ij} au point x forment, pour $1 \le k \le d$ et $1 \le i \le j \le d$, une base de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$. [5]

Lemme 1.4.1. *Soient $x \in V$ et $\mathcal{C}$ l'ensemble de toutes les courbes γ de classe C^p telles que $\gamma(0) = x$. Lorsque γ décrit $\mathcal{C}$, les vecteurs $\dot\gamma(0)$ décrivent tout l'espace tangent $T_x V$, et les diffuseurs $\ddot\gamma(0)$ décrivent une partie génératrice de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$.*
Pour que les accélérations $\ddot\gamma(0)$ et $\ddot\delta(0)$ de deux courbes γ et δ dans $\mathcal{C}$ diffèrent d'un vecteur tangent ($\ddot\gamma(0) - \ddot\delta(0) \in T_x V$), il faut et il suffit que les vitesses $\dot\gamma(0)$ et $\dot\delta(0)$ soient égales ou opposées :$\dot\gamma(0) \pm \dot\delta(0)$.
En particulier, l'accélération $\dot\gamma(0)$ est dans $T_x V$ si et seulement si la vitesse $\dot\gamma(0)$ est nulle.
Enfin, lorsque γ décrit toutes les courbes de $\mathcal{C}$ telles que $\dot\gamma(0) = 0$, les diffuseurs $\ddot\gamma(0)$ décrivent tout l'espace tangent $T_x V$.

Peuve de lemme 1.4.1 : La première des quatre assertions, rappelée ici pour mémoire, a déjà été établie comme remarque, après la défnition des vecteurs tangents.

5. L'espace tangent $T_x V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{T}_x V$.

Fixons une carte locale autour de x. Si une courbe γ passe en x à l'instant 0, elle est dans le domaine de la carte pour t voisin de 0, et ses coordonnées $\dot\gamma^i(0)$ sont définies pour t voisin de 0. Le diffuseur $\ddot\gamma(0)$ a pour composantes $L^k = \ddot\gamma^k(0)$ et $L^{ij} = \dot\gamma^i(0)\dot\gamma^j(0)$, ces nombres L^{ij} sont les coefficients d'une matrice symétrique, positive, de rang 0 ou 1. Réciproquement, étant donnés une telle matrice m et un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, il existe une courbe γ dans $\mathcal{C}$ telle que $\gamma(0) = x$, $\ddot\gamma^k(0) = v^k$ et $\ddot\gamma^{ij}(0) = m^{ij}$: il suffit de choisir un vecteur $w \in \mathbb{R}^d$ tel que $w^i w^j = m^{ij}$ et de poser par exemple $\gamma^i(t) = x^i + f(t)(w^i t + \frac{1}{2} v^i t^2)$, où f est C^∞, vaut 1 au voisinage de t = 0, et est portée par un compact assez petit pour que γ ne sorte pas du domaine de la carte. Les accélérations $\ddot\gamma(0)$ sont donc exactement les diffuseurs $L^{ij}D_{ij} + L^k D_k$ où les L^k sont quelconques et les L^{ij} forment une matrice symétrique positive de rang 0 ou 1. Puisque ces matrices engendrent linéairement l'espace de toutes les matrices symétriques, les accélérations $\ddot\gamma(0)$ engendrent linéairement $\mathbb{T}_x V$.

Pour que $\ddot\gamma(0) - \ddot\delta(0)$ soit dans $T_x V$, il faut et il suffit que les d^2 nombres $\dot\gamma^i(0)\dot\gamma^j(0) - \dot\delta^i(0)\dot\delta^j(0)$ soient nuls, en fixant un indice i_0 tel que $\dot\gamma^{i_0}(0) \neq 0$ (s'il en existe) et en s'intéressant seulement aux couples $i_0 j$, on en déduit facilement que $\dot\delta(0) = \pm\dot\gamma(0)$. Et cette condition nécessaire est évidemment suffisante.

Enfin, pour $A \in T_x V$, de composantes A^i dans la carte, toute courbe γ telle que $\dot\gamma^i(0) = 0$ et $\ddot\gamma^i(0) = A^i$ (nous venons de voir qu'il en existe) vérifie $\ddot\gamma(0) = A$.

■

Définition 1.4.3. *Soient V et W deux variétés de classe C^p (où $2 \leq p \leq \infty$), x un point de V , et ϕ une application C^p de V dans W. Pour chaque $L \in \mathbb{T}_x V$, l'application qui à toute $f \in C^p(W)$ associe le nombre $L(f \circ \phi)$ est un diffuseur sur W au point $\phi(x)$, noté $\phi_{*x}(L)$. Ceci définit une application linéaire de $\mathbb{T}_x V$ dans $\mathbb{T}_{\phi(x)} W$ dont la restriction à $T_x V$ est l'application tangente ϕ_{*x} on l'appelle application osculatrice*[6] *en x à γ, et on la note encore ϕ_{*x}.*

Si (v^i) est une carte locale au voisinage de x et (w^α) une carte locale au voisinage de $\phi(x)$, le diffuseur $M = \phi_{*x}(L)$ est donné par ses composantes
$M^\alpha = L\phi^\alpha$ et $M^{\alpha\beta} = L^{ij} D_i \phi^\alpha(x) D_j \phi^\beta(x) = \frac{1}{2}(L(\phi^\alpha \phi^\beta) - \phi^\alpha L \phi^\beta - \phi^\beta L \phi^\alpha)$.

Proposition 1.4.1.
- *L'accélération initiale $\ddot\gamma(0)$ d'une courbe est l'image par γ_{*0} du diffuseur $\frac{d^2}{dt^2} \in \mathbb{T}_0\mathbb{R}$.*
- *L'application $\phi_{*x} : \mathbb{T}_x V \longrightarrow \mathbb{T}_{\phi(x)} W$ est caractérisée par la propriété suivante : ϕ_{*x} est linéaire, et pour toute courbe $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, V)$ vérifiant $\gamma(0) = x$, l'image de l'accélération initiale $\ddot\gamma(0)$ de γ est l'accélération initiale $(\phi \ddot\circ \gamma)(0)$ de la courbe $\phi \circ \gamma$.*

6. Les applications osculatrices se composent naturellement, comme les applications tangentes : $(\psi \circ \phi)_{*x} = \psi_{*\phi(x)} \circ \psi_{*x}$.

Définition 1.4.4. *Le fibré osculateur $\mathbb{T}V$ est la réunion disjointe $\bigcup_{x\in V}\mathbb{T}_xV$, c'est une variété de classe C^{p-2}.*

La structure de variété de $\mathbb{T}V$ est construite comme celle du fibré tangent TV, la perte de deux ordres de différentiabilité vient de la formule de changement de cartes pour les diffuseurs, où interviennent, on l'a vu plus haut, des dérivées secondes $D_{ij}w^{\alpha}$, qui sont seulement $p-2$ fois différentiables. Soient ϕ une application C^p d'une variété V dans une variété W (où $p \geq 2$). L'application osculatrice à ϕ est l'application $\phi_* \in C^{p-2}(\mathbb{T}V, \mathbb{T}W)$ dont la restriction à chaque fibre $\mathbb{T}_xV$ est ϕ_{*x}. La formule de composition $(\psi\circ\phi)_* = \psi_*\circ\phi_*$ s'étend bien sûr aux applications osculatrices, et réciproquement, ϕ_* peut être caractérisée par $\phi_*(\phi \overset{..}{\circ} \gamma)(0)$ pour toute courbe γ dans V.

Proposition 1.4.2. *Soient V une variété C^p, où $2 \leq p \leq \infty$, et L une fonction réelle sur $V \times C^p(V)$. Pour chaque x de V , notons $L(x)$ la fonction $f \longmapsto L(x,f)$ sur $C^p(V)$; pour chaque $f \in C^p(V)$, notons Lf la fonction $x \longmapsto L(x,f)$ sur V. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour chaque x de V, $L(x)$ est un diffuseur en x, et l'application $x \longmapsto L(x)$ ainsi définie de V dans $\mathbb{T}V$ est de classe C^{p-2} (autrement dit, L est une section du fibré osculateur).*

(ii) *pour toute carte locale $(v^1,...,v^d)$, il existe des fonctions $L^1,...,L^d$ et $L^{11}, L^{12},..., L^{dd}$, définies et de classe C^{p-2} dans le domaine D de la carte, telles que, pour tous $x \in D$ et $f \in C^p(V)$, on ait*

$$L(x,f) = L^{ij}(x)D_{ij}f(x) + L^k(x)D_kf(x).$$

(iii) *$f \longmapsto Lf$ est une application linéaire de $C^p(V)$ dans $C^{p-2}(V)$, et en posant $\Gamma(fg) = \frac{1}{2}[L(fg)-fLg-gLf]$, on a pour toutes $f^1,...,f^n$ dans $C^p(V)$ et toute ϕ dans $C^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ la formule (dite de changement de variables)*

$$L(\phi\circ(f^1,...,f^n)) = D_k\phi\circ(f^1,...,f^n)Lf^k + D_{ij}\phi\circ(f^1,...,f^n)\Gamma(f^i,f^j).$$

Lorsque ces trois conditions sont réalisées, on dit que L est un champ de diffuseurs sur V, l'opérateur bilinéaire Γ est le carré du champ associé à L.

Peuve de la propostion 1.4.2 : Si f est une fonction de C^p nulle au voisinage de x, il existe $g \in C^p$ telle que $g = 1$ au voisinage de x et $fg = 0$ partout. La formule de changement de variables donne
$0 = L(fg^2) = fL(g^2) + 2gL(fg) - g^2Lf - 2fgLg$, d'où $Lf = 0$ au voisinage de x, ceci montre que l'opérateur L est local. Ètant donnés x et f, pour calculer $L(x,f)$, on se fixe une carte (v^i) au voisinage de x et, quitte à modifier les v^i et f hors d'un voisinage de x, on se ramène au cas où les

v^i sont définis partout sur V et où $f = \phi \circ (v^1, ..., v^d)$, pour une $\phi \in C^p(\mathbb{R}^d)$. L'hypothèse (iii) donne alors $L(x, f) = Lv^k(x)D_k f(x) + \Gamma(v^i, v^j)(x)D_{ij}f(x)$.

■

Remarque 1.4.1. *Lorsque $p = \infty$, les deux conditions qui suivent sont équivalentes à (i),(ii) et (iii) ci-dessus :*

Proposition 1.4.3. **(iv)** *$f \longmapsto Lf$ est une application linéaire de $C^1(V)$ dans $C^1(V)$ vérifiant la formule libiniz*

$$\forall f \in C^\infty(V) \qquad L(f^3) = 3fL(f^2) - 3f^2 Lf,$$

(v) *$f \longmapsto Lf$ est une application linéaire de $C^1(V)$ dans $C^1(V)$, on a $L1 = 0$ et, pour tous $f \in C^\infty(V)$ et $x \in V$ tels que $f(x) = 0$, $L(x, f^3) = 0$.*

Les champs de diffuseurs forment un module sur l'algèbre $C^{p-2}(V)$. Un exemple fort important de champ de diffuseurs est le composé AB de deux champs de vecteurs A et B : comme composé de deux opérateurs différentiels de degré 1, c'est un opérateur différentiel de degré au plus 2, comme il tue les fonctions constantes, il n'a pas de terme constant.
Sous des hypothèses de régularité et d'ellipticité, un champs de diffuseurs sur V est le générateur infinitésimal d'une diffusion sous-markovienne, à durée de vie éventuellement finie, unique en loi. Mais, alors qu'un champ de vecteurs s'intégre en un flot déterministe, un champ de diffuseurs L ne donne pas lieu, de façon intrinsèque, à un flot stochastique, il faut pour cela une structure plus riche, obtenue en choisissant une décomposition de L en somme de Hörmander $B_0 + \sum_i A_i^2$, où B_0 et A_i sont des champs de vecteurs.

1.5 Codiffuseurs

Définition 1.5.1. *Soient $p \geq 2$ et V une variété de classe C^p. Pour $x \in V$, on appellera espace coosculateur en x à V le dual $\mathbb{T}_x^* V$ de l'espace vectoriel $\mathbb{T}_x V$. Les éléments de $\mathbb{T}_x^* V$ seront appelés codiffuseurs. On appellera fibré coosculateur la réunion disjointe $\mathbb{T}^* V = \bigcup_{x \in V} \mathbb{T}_x^* V$, c'est un fibré vectoriel de classe C^{p-2} au-dessus de V.*

L'exemple le plus simple de codiffuseur est l'application $L \longmapsto Lf$ de $\mathbb{T}_x V$ dans $\mathbb{R}$, où f est une fonction de classe C^p définie au voisinage de x. Ce codiffuseur sera noté $d^2 f(x)$. Il peut être caractérisé par la formule $\langle d^2 f(x), \ddot{\gamma}(0) \rangle = (f \circ \gamma)''(0)$ pour toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x$. Comme pour les covecteurs, il est vrai que tous les éléments de $\mathbb{T}_x^* V$ sont de la forme $d^2 f(x)$.

Les codiffuseurs au point x sont donc les applications linéaires de $\mathbb{T}_xV$ dans $\mathbb{R}$. Puisque T_xV est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{T}_xV$, chaque codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ peut être restreint à T_xV, fournissant ainsi un covecteur $\mathbf{R}\theta \in T_x^*V$, naturellement appelé la restriction de θ. Cette application $\mathbf{R} : \mathbb{T}_x^*V \longrightarrow T_x^*V$ est linéaire et surjective (c'est l'application adjointe de l'injection canonique de T_xV dans $\mathbb{T}_xV$). Pour $f \in C^p$, on lit immédiatement sur les définitions que $\mathbf{R}(d^2f(x)) = df(x)$.

Proposition 1.5.1. *On suppose V de classe C^p, où $2 \leq p \leq \infty$. Soient $\sigma \in T_x^*V$ et $\tau \in T_x^*V$ deux covecteurs en x. Il existe un unique codiffuseur $\sigma \cdot \tau \in \mathbb{T}_x^*V$ (appelé le produit de σ et τ) tel que pour toute courbe γ vérifiant $\gamma(0) = x$ on ait*

$$\langle \sigma \cdot \tau, \ddot{\gamma}(0)\rangle = \langle \sigma, \dot{\gamma}(0)\rangle\langle \tau, \dot{\gamma}(0)\rangle.$$

Le produit $\sigma \cdot \tau$ est bilinéaire, symétrique et de restriction nulle : $R(\sigma \cdot \tau) = 0$. En outre, pour toutes f et g de classe C^p, on a

$$df(x) \cdot dg(x) = \frac{1}{2}[d^2(fg)(x) - f(x)d^2g(x) - g(x)d^2f(x)].$$

Peuve de la propostion 1.5.1 : Pour établir l'existence, il suffit de choisir une carte locale au voisinage de x, d'en déduire une base (D_{ij}, D_k) de $\mathbb{T}_xV$ (où $1 \leq i \leq j \leq d$ et $1 \leq k \leq d$), et de poser $\langle \sigma.\tau, D_{ij}\rangle = \frac{1}{2}(\langle \sigma, D_i\rangle\langle \tau, D_j\rangle + \langle \sigma, D_j\rangle\langle \tau, D_i\rangle)$ et $\langle \sigma.\tau, \ddot{\gamma(0)}\rangle = 0$, on vérifie immédiatement que cet objet satisfait la propriété requise :

$$\begin{aligned}
\langle \sigma \cdot \tau, \ddot{\gamma}(0)\rangle &= \langle \sigma.\tau, \dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)D_{ij} + \ddot{\gamma}^k D_k\rangle \\
&= \frac{1}{2}\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)(\langle \sigma, D_i\rangle\langle \tau, D_j\rangle + \langle \sigma, D_j\rangle\langle \tau, D_i\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle \sigma, \dot{\gamma}(0)\rangle\langle \tau, \dot{\gamma}(0)\rangle + \langle \sigma, \dot{\gamma}(0)\rangle\langle \tau, \dot{\gamma}(0)\rangle) \\
&= \langle \sigma, \dot{\gamma}(0)\rangle\langle \tau, \dot{\gamma}(0)\rangle.
\end{aligned}$$

Comme $\langle \sigma \cdot \tau, D_k\rangle = 0$ pour tout k, on a $\mathbf{R}(\sigma.\tau) = 0$.
L'unicité découle de ce que les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$ engendrent linéairement l'espace osculateur $\mathbb{T}_xV$ (lemme 1.4.1). De même, la bilinéarité et la symétrie, évidentes sur les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$, s'étendent à tout $\mathbb{T}_xV$, et la formule pour $df(x).dg(x)$ résulte de

$$\begin{aligned}
\langle df(x).dg(x), \ddot{\gamma}(0)\rangle &= \langle df(x), \dot{\gamma}(0)\rangle\langle dg(x), \dot{\gamma}(0)\rangle \\
&= (f \circ \gamma)'(0)(g \circ \gamma)'(0) \\
&= \frac{1}{2}[((fg) \circ \gamma)'' - f(x)(g \circ \gamma)'' - g(x)(f \circ \gamma)''](0) \\
&= \frac{1}{2}\langle d^2(fg)(x) - f(x)d^2g(x) - g(x)d^2f(x), \ddot{\gamma}(0)\rangle
\end{aligned}$$

■

Nous venons de voir deux opérations qui relient covecteurs et codiffuseurs, la restriction et le produit. Il y en a une troisème, la différentiation symétrique. Contrairement aux deux autres, elle n'est pas ponctuelle (bien qu'elle soit locale) : on ne peut pas la définir en restant dans des fibres au dessus de x, il faut travailler au voisinage de x (comme nous avons déjà dû le faire pour la composition des champs de vecteurs). Ceci nécessite de définir les champs de codiffuseurs.

Définition 1.5.2. *Un champ de codiffuseurs est une application $\theta \in C^{p-2}(V, \mathbb{T}^*V)$ telle que $\theta(x) \in \mathbb{T}^*_x V$ pour tout x de V.*

Remarques 1.5.1. *Les champs de codiffuseurs sont les sections du fibré coosculateur, on peut les identifier aux fonctions C^{p-2} sur $\mathbb{T}V$, dont la restriction à chaque fibre $\mathbb{T}_x V$ est linéaire.*

Comme exemple de champ de codiffuseurs, l'acitons $d^2 f$, où f est une fonction C^p, la valeur de $d^2 f$ au point x est le codiffuseur $d^2 f(x)$ et son accouplement avec les champs de covecteurs est donné par $\langle d^2 f, L\rangle = Lf$. Il est faux que tout champ de codiffuseurs soit de cette forme (c'est déjà faux pour les champs de covecteurs, qui ne sont pas tous de la forme df). La formule de la proposition (1.5.1) s'étend immédiatement aux champs de covecteurs : $df.dg = \frac{1}{2}(d^2(fg) - fd^2 g - gd^2 f)$.

Proposition 1.5.2. *On suppose V de classe C^p, où $2 \leq p \leq \infty$. Si σ est un champ de covecteurs, il existe un unique champ de codiffuseurs $d\sigma$ (appelé la différentielle symétrique de σ) tel que pour toute courbe γ on ait*

$$\langle d\sigma, \ddot{\gamma}(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \sigma, \dot{\gamma}(t)\rangle$$

On a toujours $\mathbf{R}(d\sigma) = \sigma$ et $d(df) = d^2 f$. La différentiation $\sigma \longmapsto d\sigma$ est linéaire, mais n'est pas C^p-linéaire : pour $f \in C^p$, on a $d(f\sigma) = df.\sigma + fd\sigma$.

Il importe de ne pas confondre ce d avec l'opérateur de différentiation extérieure, ou cobord, que nous n'utiliserons pas, et qui transforme les champs de covecteurs (ou formes différentielles de degré 1) en formes différentielles de degré 2, celles-ci sont antisymétriques par nature, au contraire des champs de codiffuseurs.
Contrairement à la différentielle extérieure, d ne vérifie pas $d \circ d = 0$, puisque $d(df) = d^2 f$. C'est bien sûr cette dernière formule qui justifie de noter $d^2 f$ le codiffuseur $L \longmapsto Lf$.

Peuve de la propostion 1.5.2 : Commençons par établir l'existence et la formule $\mathbf{R}(d\sigma) = \sigma$. Si χ est une carte locale, soient σ_i les coefficients de σ dans cette carte, ce sont des fonctions définies sur le domaine D de la carte, et de classe C^{p-1} sur D. Définissons, en tout point de D, un codiffuseur

θ^χ par $\langle \theta^\chi, D_k\rangle = \sigma_k$ et $\langle \theta^\chi, D_{ij}\rangle = \frac{1}{2}(D_i\sigma_i + D_j\sigma_j)$. Il vérifie $\mathbf{R}\theta^\chi = \sigma$ sur D, et pour toute courbe γ, on a, sur l'ouvert $\{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in D\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle &= \frac{1}{2}[\sigma_j(\gamma(t))\dot\gamma^j(t)] \\
&= D_i\sigma_j(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t) + \sigma_j(\gamma(t))\ddot\gamma^j(t) \\
&= \dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\langle, D_{ij}\rangle + \ddot\gamma^k(t)\langle\theta^\chi, D_k\rangle \\
&= \langle \theta^\chi, \ddot\gamma(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Si χ' et χ'' sont deux cartes, cette formule jointe au lemme pérécédant montre que $\theta^{\chi'} = \theta^{\chi''}$ sur l'intersection des domaines de χ' et χ'', il existe donc un champ de codiffuseurs θ tel que, pour chaque carte χ, $\chi = \theta^\chi$ sur le domaine de χ il vérifie identiquement les formules $\mathbf{R}\theta = \sigma$ et
$\langle \theta^\chi, \ddot\gamma(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle$. Il reste à établir l'unicité, la linéarité en σ et les formules donnant $d(df)$ et $d(f\sigma)$. L'unicité et la linéarité en σ, qu'il suffit de vérifier en un point x. La formule $d(df) = d^2f$ s'obtient de même en remarquant que

$$\langle d^2f, \ddot\gamma(t)\rangle = \frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = \frac{d}{dt}\langle df, \dot\gamma(t)\rangle.$$

enfin, la formule donnant $d(f\sigma)$ résulte de

$$\begin{aligned}
\langle d(f\sigma), \ddot\gamma(t)\rangle &= \frac{d}{dt}\langle f\sigma, \dot\gamma(t)\rangle \\
&= \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle] \\
&= \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))]\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle + f(\gamma(t))\frac{d}{dt}\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle \\
&= \langle df, \dot\gamma(t)\rangle\langle \sigma, \dot\gamma(t)\rangle + f(\gamma(t))\langle d\sigma, \ddot\gamma(t)\rangle \\
&= \langle df.\sigma, \ddot\gamma(t)\rangle + \langle f d\sigma, \ddot\gamma(t)\rangle.
\end{aligned}$$

■

La base de l'espace osculateur $\mathbb{T}_xV$ formée des $d+d(d+1)/2$ diffuseurs D_{ij} et D_k, où $1 \le i \le j \le d$ et $1 \le k \le d$ est peu maniable, en pratique, on préfère travailler avec tous les D_{ij}, en utilisant les coefficients des diffuseurs. C'est sous cette forme que la dualité entre diffuseurs et codiffuseurs s'exprime de façon agréable.

Proposition 1.5.3. *Soit x un point du domaine d'une carte locale $(v^1, ..., v^d)$ sur V. Tout codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}^*_xV$ s'écrit de façon unique comme*

$$\theta_{ij}dv^i(x)\cdot dv^j(x) + \theta_k d^2v^k(x)$$

où θ_{ij} et θ_k sont d^2+d nombres réels vérifiant $\theta_{ij}=\theta_{ji}$.
Si $L\in\mathbb{T}_xV$ est un diffuseur en x, de coefficients L^{ij} et L^k (donc tel que $L=L^{ij}D_{ij}+L^kD_k$ et $L^{ij}=L^{ji}$), la dualité entre $\mathbb{T}_x^*V$ et $\mathbb{T}_xV$ s'exprime par

$$\langle\theta,L\rangle=\theta_{ij}L^{ij}+\theta_kL^k$$

cette formule reste d'ailleurs valable lorsque l'un seulement de θ et L est écrit sous forme symétrique en i et j.
Lorsque f parcourt les fonctions de classe C^{p-2}, le codiffuseur $d^2f(x)$ décrit tout l'espace coosculateur $\mathbb{T}_x^*V$.

Peuve de la propostion 1.5.3 : Si L est un diffuseur en x, de coefficients L^{ij} et L^k, puisque

$$\langle d^2v^l,L\rangle=Lv^l=L^{ij}D_{ij}v^l+L^kD_kv^l=0+L^k\delta_k^l=L^l$$

et que

$$\begin{aligned}2\langle L,dv^l.dv^m\rangle &= L(v^lv^m)-v^l(x)Lv^m-v^m(x)Lv^l\\ &= L^{ij}D_{ij}(v^lv^m)+L^kD_k(v^lv^m)-v^l(x)Lv^m-v^m(x)Lv^l\\ &= L^k(\delta_k^lv^m(x)+v^l(x)\delta_k^m)+L^{ij}(\delta_i^l\delta_j^m+\delta_i^m\delta_j^l)-v^l(x)Lv^m-v^m(x)Lv^l\\ &= L^{lm}+L^{ml}=2L^{lm},\end{aligned}$$

les $dv^i(x)\cdot dv^j(x)$ et les $dv^k(x)$ engendrent toutes les formes linéaires sur $\mathbb{T}_xV$, c'est-à-dire le dual $\mathbb{T}_x^*V$. La formule de dualité $\langle\theta,L\rangle=\theta_{ij}L^{ij}+\theta_kL^k$ en résulte également, et ainsi que l'unicité de l'écriture de θ (pourvu que $\theta^{ij}=\theta^{ji}$) : si $\theta_{ij}dv^i(x)\cdot dv^j(x)+\theta_kd^2v^k(x)=0$, alors $\theta_{ij}L^{ij}+\theta_kL^k=0$ pour tout L, donc θ_{ij} et θ_k sont nuls.
L'extension de la formule de dualité au cas où l'une seulement des matrices (θ^{ij}) ou (L^{ij}) est symétrique est immédiate : si, par exemple, $L^{ij}=L^{ji}$, on ne change pas $\theta_{ij}L^{ij}$ en remplaçant θ^{ij} par sa symétrisée $\frac{1}{2}(\theta_{ij}+\theta_{ji})$.
Enfin, pour $\theta=\theta_{ij}dv^i(x)\cdot dv^j(x)+\theta_kd^2v^k(x)\in\mathbb{T}_x^*V$ (écriture symétrique), il existe $f\in C^{p-2}$ telle que $D_{ij}f(x)=\theta_{ij}$ et $D_kf(x)=\theta_k$ (on peut prendre par exemple un polynôme convenable en les v^i multiplié par une fonction C^p, égale à 1 au voisinage de x, et à support compact inclus dans le domaine de la carte), on a alors

$$\langle\theta,L\rangle=\theta_{ij}L^{ij}+\theta_kL^k=L^{ij}D_{ij}f(x)+L^kD_kf(x)=Lf=\langle,d^2f(x),L\rangle$$

pour tout $L\in\mathbb{T}_xV$, d'où $d^2f=\theta$.

■

Proposition 1.5.4. *Soit $(v^1, ..., v^d)$ une carte locale, de domaine D. Tout champ de codiffuseurs θ sur V s'écrit dans D de façon unique comme*

$$\theta_{ij} dv^i \cdot dv^j + \theta_k d^2 v^k,$$

où θ_{ij} et θ_k sont $d^2 + d$ fonctions sur D de classe C^{p-2} et vérifiant la condition de symétrie $\theta_{ij} = \theta_{ji}$. On a aussi

$$\mathbf{R}(\theta_{ij} dv^i \cdot dv^j + \theta_k d^2 v^k) = \theta_k dv^k,$$

et, si f et g sont deux fonctions et σ et τ deux champs de covecteurs qui s'écrivent $\sigma = \sigma^i dv^i$ et $\tau = \tau_i dv^i$ dans D,

$$d\sigma = \sigma_k d^2 v^k + D_i \sigma_j dv^i dv^j, \qquad d^2 f = D_k f d^2 v^k + D_{ij} f dv^i dv^j,$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_i \tau_j dv^i dv^j, \qquad df \cdot dg = D_i f D_j g dv^i dv^j.$$

(remarquer que ces écritures des champs de codiffuseurs $d\sigma$, $\sigma \cdot \tau$ et $df \cdot dg$ ne sont pas mises sous forme symétrique). La formule de dualité entre champs de diffuseurs et de codiffuseurs s'écrit encore

$$\langle \theta, L \rangle = \theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k$$

où $L = L^{ij} D_{ij} + L^k D_k$ est une écriture dans la carte d'un champ de diffuseurs et où l'un au moins des systèmes de coefficients (θ_{ij}) et (L^{ij}) est symétrique.

Peuve de la propostion 1.5.4 : L'existence et l'unicité de cette écriture d'un champ de codiffuseurs, ainsi que la formule de dualité avec les champs de diffuseurs, se déduisent des énoncés analogues en un point (proposition 1.5.3).
La formule donnant la restriction $\mathbf{R}(\theta)$ résulte immédiatement des propriétés $\mathbf{R}(d^2 f) = df$ et $\mathbf{R}(s \cdot \tau) = 0$ de $\mathbf{R}$. Enfin, les quatre formules donnant $d\sigma$, $\sigma \cdot \tau$, $d^2 f$ et $df \cdot dg$ se déduisent sans peine de proposition 1.5.1.

■

Si $\phi : V \longrightarrow W$ est une application C^p entre deux variétés, on note ϕ^*_x l'application adjointe de ϕ_{*x}, qui va de $\mathbb{T}^*_{\phi(x)} W$ dans $T^*_x V$, elle est définie par $\langle \theta^*_x, L \rangle = \langle \theta, \phi_{*x} \rangle$ pour tout $L \in \mathbb{T}_x V$ et, grâce à 1.5.3, peut être caractérisée par $\phi^*_x[d^2 f(\phi(x))] = d^2(f \circ \phi)(x)$ pour toute $f \in C^p(W)$.

Si ϕ est une application C^p de V dans W et θ un champ de codiffuseurs sur W, on peut définir un champ de codiffuseurs $\phi^*\theta$ sur V : en un point $x \in V$, poser $(\phi^*\theta)(x)$. Le même symbole ϕ^* est donc utilisé pour deux opérations analogues, l'une sur les covecteurs, l'autre sur les codiffuseurs. L'expérience montre que ce n'est pas gênant, bien au contraire : cela ajoute à l'élégance des trois formules ci-dessous :

Proposition 1.5.5. *Soient ϕ une application C^p de V dans W, θ un champ de codiffuseurs sur W, σ et τ deux champs de covecteurs sur W. On a*

$$\phi^*(d\sigma) = d(\phi^*\sigma)$$

$$\phi^*(\mathbf{R}\theta) = \mathbf{R}(\phi^*\theta) \qquad et \qquad \phi^*(\sigma \cdot \tau) = \phi^*\sigma.\phi^*\tau$$

Les deux dernières formules ont aussi lieu si θ, σ et τ sont un codiffuseur et des covecteurs en un point y de W de la forme $\phi(x)$, en remplaçant, bien sûr, ϕ^* par ϕ_{*x}.

Peuve de la propostion 1.5.5 : La seconde formule se vérifie séparément en chaque point x, en choisissant une fonction f sur W telle que $(d^2f) = (\phi(x)) = \theta(\phi(x))$ et en écrivant, au point x,

$$\phi^*(\mathbf{R}\theta) = \phi^*(\mathbf{R}(d^2f)) = \phi^*(df) = d(f \circ \phi) = \mathbf{R}d^2(f \circ \phi) = \mathbf{R}\phi^*(d^2f)$$

La troisième peut, et la définition du produit des covecteurs, se vérifier sur les accélérations des courbes :

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(\sigma.\tau), \ddot{\gamma} \rangle &= \langle \sigma.\tau, \phi_*\ddot{\gamma} \rangle = \langle \sigma.\tau, (\phi \ddot{\circ} \gamma) \rangle = \langle \sigma, (\phi \dot{\circ} \gamma) \rangle \langle \tau, (\phi \dot{\circ} \gamma) \rangle \\ &= \langle \sigma, \phi_*\dot{\gamma} \rangle \langle \tau, \phi_*\dot{\gamma} \rangle = \langle \phi^*\sigma, \dot{\gamma} \rangle \langle \phi^*\tau, \dot{\gamma} \rangle = \langle \phi^*\sigma.\phi^*\tau, \ddot{\gamma} \rangle \end{aligned}$$

Pour la première formule, on écrit σ comme une somme finie de champs de covecteurs du type fdg, où f et g sont des fonctions, c'est toujours possible dans le domaine d'une carte (ça l'est aussi globalement, mais peu importe...). On peut donc supposer $\sigma = fdg$. On a alors $\phi^*\sigma = f \circ \phi\phi^*(dg) = f \circ \phi d(g \circ \phi)$, d'où

$$\begin{aligned} d(\phi^*\sigma) &= d(f \circ \phi d(g \circ \phi)) = d(f \circ \phi).d(g \circ \phi) + f \circ \phi d^2(g \circ \phi) && (1.1) \\ &= \phi^*df.\phi^*dg + f \circ \phi\phi^*d^2g = \phi^*(df.dg + fd^2g) = \phi^*d(fdg) = \phi^*d\sigma && (1.2) \end{aligned}$$

■

Comme pour les champs de vecteurs, si A est un champ de diffuseurs sur V, il n'est en général pas possible de définir un champ de diffuseurs ϕ_*A sur W.

Définition 1.5.3. *Un codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ tel que $\mathbf{R}\theta = 0$ sera dit purement d'ordre deux.*
Dans la dualité entre $\mathbb{T}_xV$ et $\mathbb{T}_x^*V$, le sous-espace purement d'ordre deux de $\mathbb{T}_x^*V$ est donc l'orthogonal du sous-espace (purement d'ordre un) $\mathbb{T}_xV$ de $\mathbb{T}_x^*V$.

Proposition 1.5.6. *Pour $x \in V$, le sous-espace vectoriel purement d'ordre deux* $\ker \mathbf{R}$ *de l'espace coosculateur $\mathbb{T}_x^*V$ est linéairement engendré par les codiffuseurs de la forme $\sigma \cdot \sigma$, où décrit T_x^*V.*
Il existe une bijection linéaire $\mathbf{Q}$ entre le sous-espace purement d'ordre deux de $\mathbb{T}_x^*V$ et l'ensemble des formes quadratiques sur T_xV, telle que $\mathbf{Q}(\sigma \cdot \sigma)$ soit la forme quadratique $A \longmapsto \langle \sigma, A\rangle^2$. La forme quadratique $\mathbf{Q}\theta$ est aussi caractérisée par la formule $\langle \theta, \ddot{\gamma}(0)\rangle = (\mathbf{Q}\theta)(\dot{\gamma})(0)$, valable pour toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x$.
Réciproquement, étant donné $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$, s'il existe une forme quadratique q sur T_xV
telle que $\langle \theta, \ddot{\gamma}(0)\rangle = q(\dot{\gamma})(0)$ pour toute telle courbe, alors θ est purement d'ordre deux et $q = \mathbf{Q}\theta$.
Autrement dit, $\mathbf{Q}(\sigma \cdot \sigma) = \sigma \otimes \sigma$ et le sous-espace purement d'ordre deux $\ker \mathbf{R}$ *de l'espace coosculateur s'identifie au produit tensoriel symétrique $T_x^*V \otimes T_x^*V$.*

Définition 1.5.4. *Un codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ purement d'ordre deux sera dit positif (respectivement défini positif) si la forme quadratique associée $\mathbf{Q}\theta$ est positive (respectivement définie positive).*

Peuve de la propostion 1.5.6 : Utilisons des coordonnées locales au voisinage de x. Un codiffuseur $\theta \in \ker \mathbf{R}$ s'écrit $\theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x)$, on établit ainsi une bijection entre l'espace $\ker \mathbf{R}$ et les matrices symétriques (θ_{ij}). Pour $\sigma = \sigma_i dv^i(x) \in T_x^*V$, la matrice correspondant à $\theta = \sigma.\sigma$ est $\theta_{ij} = \sigma_i \sigma_j$, et $\mathbf{Q}\theta$ est caractérisée par $\mathbf{Q}(\theta)(A^i D_i) = \theta_{ij} A^i A^j$. Pour tout $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ et toute courbe γ telle telle que $\gamma(0) = x$, on a en coordonnées locales $\langle \theta, \ddot{\gamma}\rangle = \theta_k \ddot{\gamma}^k + \theta_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j$. On voit immédiatement sur cette expression que les coefficients θ_k sont nuls si et seulement si θ s'identifie à une forme quadratique agissant sur $\dot{\gamma}$, et qu'alors cette forme quadratique, de matrice (θ_{ij}), est égale à $\mathbf{Q}\theta$.

■

La formule de changement de base pour les covecteurs purement d'ordre deux s'écrit

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_{ij} D_\alpha v^i D_\beta v^j$$

Elle ne fait intervenir que les dérivées premières des coordonnées. Ceci traduit le caractère tensoriel de ces objets, cela montre aussi que le (fibré coosculateur purement d'ordre deux) est muni d'une structure de variété de classe C^{p-1}, donc un peu plus régulier que le fibré coosculateur, qui est de classe C^{p-2}.

Définition 1.5.5. *On appelle variété riemannienne une variété de classe C^p munie d'un champ C^{p-1} de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs.*

Une structure riemannienne sur une variété munit chaque espace tangent T_xV d'une structure euclidienne, ceci permet de quantifier la vitesse des courbes, puis de parler de leur longueur, et de bien d'autres invariants.

1.6 Connexions et géodésiques

Définition 1.6.1. *Soient V une variété (de classe C^2 au moins) et x un point de V . Une connexion au point x est une application linéaire de l'espace osculateur $\mathbb{T}_xV$ dans l'espace tangent T_xV , dont la restriction au sous-espace $T_xV \subset \mathbb{T}_xV$ est l'identité.*

Une telle application linéaire Γ est une projection, elle est donc caractérisée par son noyau $\ker\Gamma$, qui est un sous-espace de $\mathbb{T}_xV$ supplémentaire de T_xV, et $\mathbb{T}_xV$ est somme directe de $\ker\Gamma$ et de T_xV , la décomposition s'écrivant $L = (L - \Gamma L) + \Gamma L$.

Si $(v^1, ..., v^d)$ est une carte au voisinage de x, les D_k en x forment une base de T_xV, et une connexion Γ au point x est complètement déterminée par le choix des coefficients Γ^k_{ij} tels que $\Gamma(D_{ij}) = \Gamma^k_{ij}D_k$. Ces coefficients répondent au joli nom de symboles de Christoffel de la connexion. Puisque D_{ij} est symétrique en i et j, il en va de même des symboles de Christoffel Γ^k_{ij}.

Lorsque V est un espace vectoriel ou affine, la connexion plate au point x est celle qui consiste à choisir la décomposition naturelle $\Gamma(L^{ij}D_{ij} + L^kD_k) = L^kD_k$ dans toute carte formée de fonctions linéaires ou affines, dans une telle carte, les symboles de Christoffel de cette connexion sont donc tous nuls.

Un exemple très important de connexion concerne le cas d'une sous-variété V d'un espace vectoriel (ou affine) euclidien $\mathbb{E}$. Soit x un point de V . On peut munir V d'une connexion au point x de la façon suivante (qui dépend de l'injection canonique $i : V \longrightarrow E$ et de la structure euclidienne de $\mathbb{E}$) : Pour $L \in \mathbb{T}_xV$, $i_{*x}L$ est dans $\mathbb{T}_x\mathbb{E}$, on peut donc prendre sa partie d'ordre 1 (pour la connexion plate de $\mathbb{E}$ au point x) $\Gamma_{\mathbb{E}}(i_{*x}L)$, qui est dans l'espace tangent $T_x\mathbb{E}$. Elle n'est pas nécessairement dans T_xV, mais on utilise alors la structure euclidienne de l'espace tangent $T_x\mathbb{E}$ pour projeter orthogonalement $\Gamma_{\mathbb{E}}(i_{*x}L)$ sur le sous-espace T_xV. Cette opération est linéaire, et il est clair qu'elle respecte T_xV, c'est donc une connexion au point x, appelée la connexion induite par i et par la structure euclidienne.

Une connexion[7] $\Gamma : \mathbb{T}_xV \longrightarrow T_xV$ au point x transforme les diffuseurs en vecteurs, et vérifie

7. Les connexions que l'on rencontre en géométrie sont un peu plus générales que les nôtres, elles sont déterminées par des symboles de Christoffel non nécessairement symétriques en i et j. Celles que nous utilisons sont appelées connexions

$\Gamma \circ i = Id_{T_xV}$ (où i désigne l'injection canonique de T_xV dans $\mathbb{T}_xV$). Dualement, l'application adjointe Γ^* transforme les covecteurs en codiffuseurs et vérifie $\mathbf{R} \circ \Gamma^* = Id_{T_x^*V}$, son image $\mathbf{Im}\Gamma^*$ est un sous-espace de $\mathbb{T}_x^*V$ isomorphe à T_x^*V et supplémentaire à $\ker \mathbf{R}$ elle donne lieu à une décomposition de $\mathbb{T}_x^*V$ en somme directe, s'écrivant $\theta = (\theta - \Gamma^*\mathbf{R}\theta) + \Gamma^*\mathbf{R}\theta$, le premier terme est dans $\ker \mathbf{R}$, le second dans $\mathbf{Im}\Gamma^*$. En coordonnées locales, pour $\sigma = \sigma_i dv^i(x) \in T_x^*V$ et $\theta = \theta_k d^2v^k(x) + \theta_{ij}dv^i(x).dv^j(x) \in \mathbb{T}_x^*V$, on a $\Gamma^*\sigma = \sigma_k(d^2v^k(x) + \Gamma_{ij}^k dv^i(x).dv^j(x))$ *et* $\theta - \Gamma^*\mathbf{R}\theta = (\theta_{ij} - \theta_k\Gamma_{ij}^k)dv^i(x).dv^j(x)$

Puisque tout codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ est de la forme $d^2f(x)$ pour une fonction $f \in C^2(V)$, la connexion au point x est aussi caractérisée par l'application $f \longmapsto d^2f(x) - \Gamma^*df(x)$.

Définition 1.6.2. *Soit Γ une connexion au point x. Pour $f \in C^2(V)$, le codiffuseur $d^2f(x) - \Gamma^*df(x) \in \mathbb{T}_x^*V$ est appelé* la hessienne *de f au point x (sous-entendu : relativement à Γ) et noté $Hessf(x)$.*

Remarquer que $Hessf(x)$ est purement d'ordre deux : $\mathbf{R}Hessf(x) = 0$. En coordonnées locales, $Hessf(x) = (D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k)f(x)dv^i(x).dv^j(x)$. L'action de $Hessf(x)$ sur les diffuseurs en x est donnée par $\langle Hessf(x), L\rangle = (Id - \Gamma)Lf(x)$, elle consiste à faire agir sur f la partie purement du second ordre $(Id - \Gamma)L$ de L. Si V est un espace vectoriel et Γ la connexion plate, on a en coordonnées linéaires $Hessf(x) = D_{ij}f(x)dv^i(x).dv^j(x)$, ce qui justifie le nom de hessienne.

Définition 1.6.3. *Une connexion*[8] *sur une variété V de classe au moins C^2 est la donnée, pour tout x de V, d'une connexion au point x.*

Les symboles de Christoffel d'une connexion sont donc des fonctions, définies sur tout le domaine d'une carte, nous leur demanderons la plus grande régularité possible, en exigeant qu'elles soient de classe C^{p-2}. (Mais on rencontre parfois aussi des connexions qui sont seulement continues, voire boréliennes...)

En faisant agir la connexion simultanément en chaque point, on peut la considérer comme une machine C^{p-2}-linéaire qui transforme tout champ de diffuseur en un champ de vecteur, et préserve les champs de vecteurs. Dualement, Γ^* est une opération C^{p-2}-linéaire transformant les champs de covecteurs en champs de codiffuseurs, et vérifiant $\mathbf{R} \circ \Gamma^* = Id$.

---

sans torsion par les géomètres, comme nous n'utiliserons pas les connexions tordues, il n'y a pas d'inconvénient à appeler ici simplement connexions les connexions sans torsion.

8. La définition habituelle d'une connexion en géométrie consiste, comme nous le verrons trés bientôt, à introduire une dérivation covariante ∇. L'objet ici appelé $Hessf(x)$ est, à un isomorphisme canonique près, la dérivée covariante seconde $\nabla df(x)$ de la géométrie usuelle, l'isomorphisme est l'identification de l'espace des codiffuseurs purement d'ordre deux à $T_x^*V \odot T_x^*V$ par la bijection $\mathbf{Q}$

En particulier, si A et B sont deux champs de vecteurs, leur composé AB (au sens de la composition des opérateurs différentiels) est un champ de diffuseurs, et $\Gamma(AB)$ est à nouveau un champ de vecteurs, les géomètres l'appellent dérivée covariante de B selon A et le notent $\nabla_A B$. Leurs livres définissent une connexion comme une opération $(A, B) \longmapsto \nabla_A B$ sur les champs de vecteurs vérifiant certaines propriétés.

Bien entendu, si V est un espace affine, la connexion plate sur V est celle qui est plate en chaque point, elle opére sur les champs de diffuseurs en gardant seulement la partie d'ordre 1 (en coordonnées affines).

Si V est une sous-variété d'un espace affine euclidien $\mathbb{E}$, la connexion induite sur V par l'injection et par la structure euclidienne est définie, comme plus haut, en chaque point.

Cet exemple de connexion est tout à fait fondamental. (Les auditeurs ayant un peu fréquenté les variétés riemanniennes vérifieront sans peine que la connexion ainsi construite sur V n'est autre que la connexion de *Levi-Civita* asssociée à la structure riemannienne induite sur V par $\mathbb{E}$. Ceci resterait d'ailleurs vrai si l'on remplaçait $\mathbb{E}$ lui-même par une variété riemannienne.)

Définition 1.6.4. *Soit V une variété munie d'une connexion Γ. Une courbe $\gamma : I \longrightarrow V$ de classe C^2 au moins et définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est une géodésique si l'on a $\Gamma\ddot{\gamma}(t) = 0$ pour tout $t \in I$.*

Lorsque Γ est la connexion plate sur un espace affine, les géodésiques sont les mouvements uniformes. Lorsque Γ est la connexion induite sur une sous-variété V d'un espace affine euclidien $\mathbb{E}$, γ est une géodésique si et seulement si son vecteur accélération dans $\mathbb{E}$ (au sens usuel de la cinématique : c'est un vecteur et non un diffuseur) reste à tout instant t orthogonal à l'espace tangent $T_{\gamma(t)}V$.

En coordonnées locales, l'équation des géodésiques $\Gamma\ddot{\gamma}(t) = 0$ s'écrit

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma^k_{ij}(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t), \qquad \textit{pour tout } k$$

Si l'on pose $u^k = \dot{\gamma}^k$, on obtient le système différentiel d'ordre 1 à $2d$ composantes

$$\begin{cases} \frac{du^k}{dt} = -\Gamma^k_{ij}(\gamma^1, ..., \gamma^d)u^i u^j \\ \frac{d\gamma^k}{dt} = u^k \end{cases}$$

Chapitre 2

Calcul Stochastique dans les variétés différentiables

2.1 Rappel sur les semimartingales continues

Les semimartingales continues, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un espace vectoriel de dimension finie, sont au cœur de la théorie de l'intégration stochastique, et font l'objet de nombreux ouvrages. pour le cas continu qui seul nous intéresse ici, on peut le lire en négligeant tout ce qui concerne les sauts de semimartingales. Mais bien d'autres sources fournissent aussi une excellente approche.

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t>0}$ est fixé (et souvent sous-entendu) dans la suite. Les conditions habituelles sont en vigueur : la tribu $\mathcal{A}$ est complète, chaque tribu $\mathcal{F}_t$ contient tous les événements négligeables (de $\mathcal{A}$) et est égale à l'intersection $\bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

Si X est un processus et T un temps d'arrêt, nous noterons $X^{T]}$ le processus arrêté,
défini par $X_t^{T]} = X_{t\wedge T}$.

Rappelons qu'une semimartingale est un processus réel $X = (X_t)_{t>0}$ admettant une décomposition de la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$, où M est une martingale locale nulle pour $t = 0$ et A un processus adapté, dont chaque trajectoire $t \longmapsto A_t(\omega)$ est une fonction nulle en 0 et à variation bornée sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ (un tel processus A est dit à variation finie).

Nous ne nous intéresserons qu'à des semimartingales continues : par convention, le mot semimartingale signifiera dorénavant (semimartingale continue).

Si X est un tel processus, les processus M et A figurant dans la décomposition de X peuvent aussi être pris continus, et une telle décomposition est alors unique, nous les choisirons toujours ainsi. (Mais si l'on remplace $\mathbb{P}$ par une probabilité équivalente, la décomposition change, bien que X reste une semimartingale.)

Théorème 2.1.1 (Intégration stochastique). *Soit X une semimartingale. Il existe une unique application linéaire de l'espace des processus prévisibles localement bornés dans l'espace des semimartingales nulles en zéro, notée $H \longmapsto \int HdX$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *pour $s \geq 0$ et $A \in \mathcal{F}_s$, si $H = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]s,\infty[}$ (ou encore $H = \mathbb{1}_A$ lorsque $s = 0$),*

$$\int HdX = (X - X^{s]})\mathbb{1}_A,$$

(ii) *si $(H^n)_{n\in N}$ est une suite de processus prévisibles qui converge vers une limite H, et si $\sup_n |H^n|$ est localement borné, alors $\int H^n dX$ tend vers $\int HdX$ (convergence uniforme sur tout compact $[0,t]$, en probabilité).*

(iii) *si X est une martingale locale (respectivement un processus à variation finie), il en va de même de $\int KdX$,*

(iv) *si H et K sont deux processus prévisibles localement bornés,*

$$\int (KH)dX = \int Kd(\int HdX).$$

Si X et Y sont deux semimartingales, la semimartingale

$$[X,Y] = XY - X_0Y_0 - \int XdY - \int YdX$$

est à variation finie, et nulle si X (ou Y) est à variation finie. Elle dépend bilinéairement de X et Y, on l'appelle covariation *de X et Y . On a toujours*

$$[\int HdX, \int KdY] = \int HKd[X,Y].$$

Le processus $[X,X]$ est appelé variation quadratique de X, c'est un processus croissant, nul si et seulement si X est à variation finie.

Théorème 2.1.2. *(Fourmule du changemet de variable) Soient d semimartingales $X^1, ..., X^d$ définies sur un même espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. Si $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 au moins, le processus $f(X^1,...,X^d)$ est une semimartingale. Plus précisément, il admet l'écriture en intégrales stochastiques*

$$f(X^1,...,X^d) = f(X^1_0,...,X^d_0) + \int D_i f(X^1,...,X^d)dX^i + \tfrac{1}{2}\int D_{ij}f(X^1,...,X^d)d[X,Y].$$

Cette formule peut être simplifiée en introduisant *les intégrales de Stratonovitch.* Si X et Y sont deux semimartingales, l'intégrale de Stratonovitch $\int Y\delta X$ est définie comme $\int YdX + \frac{1}{2}d[Y,X]$, elle satisfait à la formule d'associativité

$$\int Z\delta(Y\delta X) = \int (ZY)\delta X$$

et la formule de changement de variable devient, pour f de classe C^3,

$$f(X^1, ..., X^d) = f(X_0^1, ..., X_0^d) + \int D_i f(X^1, ..., X^d) \delta X^i$$

Cette formule est encore vraie si f est C^2, en définissant $\int Y \delta X$ pour les processus Y de la forme $g \circ X$, où g est C^1 (ce ne sont pas nécessairement des semimartingales).

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ étant fixé, l'ensemble L^0 de toutes les variables aléatoires p.s. finies est pourvu d'une structure d'espace vectoriel topologique métrisable complet (e.v.t.m.c.) par *la topologie de la convergence en probabilité*, qui peut être définie par la distance $dist_p(X, Y) = \rho_p(X - Y)$, où $\rho_p(X) = E[|X| \wedge 1]$.

L'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ étant fixé, l'ensemble des processus continus et adaptés est muni d'une structure d'e.v.t.m.c. par *la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, en probabilité*, donnée par la distance $dist_{cp}(X - Y) = \rho_{cp}(X - Y)$, où $\rho_{cp}(X) = \sum_n 2^{-n} \rho_p(\sup_{t \in [0,n]} |X_t|)$.

Enfin, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$ étant toujours fixé, l'ensemble des semimartingales est un e.v.t.m.c. pour *la topologie des semimartingales* , que l'on peut définir par $dist_{sm}(X, Y) = \rho_{sm}(X - Y)$ où, si $X = X_0 + M + A$ est la décomposition canonique d'une semimartingale X, on a posé
$\rho_{sm}(X) = \rho_p(X_0) + \rho_{cp}([M, M]) + \rho_{cp}(\int |dA|)$.

Sur le sous-espace formé des martingales locales, les deux topologies (semimartingales et convergence uniforme sur les compacts en probabilité) coïncident, et déterminent une structure d'e.v.t.m.c.

Proposition 2.1.1. *Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semimartingales qui converge, au sens des semimartingales, vers une semimartingale X.*

Si $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de semimartingales qui converge, en topologie des semimartingales, vers une limite Y, les covariations $[X^n, Y^n]$ convergent, au sens des semimartingales, vers $[X, Y]$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite fonctions C^2 qui converge vers f au sens des fonctions C^2 (convergence uniforme sur les compacts de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2), alors $f_n \circ X^n$ converge au sens des semimartingales vers $f \circ X$.

Si $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus prévisibles qui converge simplement vers un processus H, et si $\sup_n H^n$ est localement borné, alors $\int H^n dX^n$ tend vers $\int H dX$ au sens des semimartingales.

Si $\mathbb{Q}$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ (par exemple $\mathbb{Q}[A] = \mathbb{P}[A \backslash E]$, où E est un événement non négligeable), X^n tend vers X en topologie des semimartingales pour la probabilité $\mathbb{Q}$.

L'une des raisons qui rendent maniable la topologie des semimartingales est son caractère local, explicité pour référence ultérieure dans l'énoncé ci-dessous.

Proposition 2.1.2. *Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semimartingales. On suppose réalisée l'une des trois hypothèses suivantes.*

(i) *Il existe une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt tels que $\sup_k T_k = \infty$ et que, pour chaque k, la suite des semimartingales $\mathbb{1}_{\{T_k>0\}}(X^n)_{T_k}$ converge au sens des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.*

(ii) *La suite $(X_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une limite $Y_{(0)}$ et il existe un recouvrement ouvert prévisible dénombrable $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $[0,1[$, tel que, pour chaque k, $\int \mathbb{1}_{A_k} dX^n$ tende en topologie des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.*

(iii) *Il existe une suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'événements non négligeables, de réunion Ω, tels que, pour chaque k, X^n tende sur E^k (c'est-à-dire pour la probabilité conditionnée par E_k) au sens des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.*

Alors X^n tend au sens des semimartingales vers une limite Y , qui vérifie respectivement dans chacun des trois cas :

(i) $\mathbb{1}_{\{T_k>0\}}(Y^n)_{T_k} = Y^{(k)}$

(ii) $Y_0 = Y_{(0)}$ *et* $\int \mathbb{1}_{A_k} dY = Y^{(k)}$

(iii) *la restriction de Y à E^k est $Y^{(k)}$.*

Le point (iii), par exemple, signifie que lorsqu'on établit que X^n tend vers X au sens des semimartingales, on a le droit (comme pour les convergences en probabilité) de négliger des événements de probabilité arbitrairement petite.

Définition 2.1.1. *Si X est une semimartingale, de décomposition X_0+M+A, et E un événement, on dit que X est une semimartingale jusqu'à l'infini sur E si $[M,M]_\infty + \int_0^\infty |dA_t| < \infty$ presque sûrement sur E.*

Il est clair que l'ensemble des E tels que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur E est stable par union dénombrable, lorsque $E = \Omega$, on dit simplement que X est une semimartingale jusqu'à l'infini.

Proposition 2.1.3. *Soit $a : [0,\infty] \longrightarrow [0,1]$ un homéomorphisme croissant. On définit une nouvelle filtration par $\mathcal{F}'_{a(t)} = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_\infty$ pour $t \geq 1$. Soit X une semimartingale.*

Pour que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini, il faut et il suffit que la limite $X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ existe presque sûrement, et que le processus changé de temps X', défini par $X'_{a(t)} = X_t$ et $X'_t = X_\infty$ pour $t \geq 1$, soit une semimartingale pour la filtration changée de temps $\mathcal{F}'$. Plus généralement, pour que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur un événement E, il faut et il suffit que X_∞ existe presque sûrement sur E, et que X' soit une semimartingale pour $\mathcal{F}'$ et pour la probabilité conditionnée $A \longmapsto \mathbb{P}[A\backslash E]$.

2.2 Semimartingale dans une variété

On peut simplifier les notations du théoréme du changement de variable en appelant semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tout processus $X = (X^1, ..., X^d)$ dont les d composantes sont des semimartingales, et le théorème dit qu'alors toutes les fonctions de classe C^2 (et pas seulement les fonctions linéaires ou affines sur $\mathbb{R}^d$) transforment X en une semimartingale réelle. On a là une propriété caractéristique des semimartingales dans $\mathbb{R}^d$, qui ne fait pas intervenir la structure linéaire de $\mathbb{R}^d$, mais seulement la structure différentiable, et que l'on peut donc étendre aux variétés.

Définition 2.2.1. *L'espace filltré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est fixé. Soit V une variété de classe* C^2 *au moins. Un processus* X *à valeurs dans V est une semimartingale dans V si, pour toute fonction* $f \in C^2(V)$*, le processus* $f \circ X$ *est une semimartingale (réelle).*

Cette définition est due à Schwartz [41].

Tout ce chapitre est emprunté à Schwartz [42], [43], [44], [47] et à Meyer [34], [35], [36], [38], ainsi qu'à Arnaudon et Thalmaier [9] pour ce qui concerne la topologie des semimartingales dans les variétés.

La première chose à remarquer à propos de cette définition est qu'elle ne ne crée pas d'ambiguïté : lorsque V est l'espace $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, muni de sa structure canonique de variété, les semimartingales à valeurs dans V sont exactement les semimartingales usuelles.

Remarque 2.2.1. *Dans une variété seulement de classe* C^1*, il n'est pas possible, en l'absence d'une structure supplémentaire*[1]*, de définir les semimartingales.*

Dans toute la suite, le mot variété *signifiera* variété de classe C^2 au moins*, et les fonctions et les champs de vecteurs, de diffuseurs, de codiffuseurs, etc. définis sur une variété auront, sauf spécification contraire, la plus grande régularité possible. Par exemple, sur une variété* C^p*, champ de codiffuseurs signifiera champ de codiffuseurs de classe* C^{p-2}*.*

Lemme 2.2.1. *Soit* X *un processus à valeurs dans une variété V. Pour que* X *soit une semimartingale dans V, (il faut et) il suffit que* $f \circ X$ *soit une semimartingale pour toute fonction* f *sur V de classe* C^2 *et à support compact.*

1. L'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$ qui transforment les semimartingales en semimartingales contient aussi des fonctions qui ne sont pas de classe C^2, par exemple les différences de fonctions convexes, ceci ouvre la possibilité de définir des semimartingales sur une structure plus pauvre que la structure C^2. Noter en passant que si $d \geq 2$, on ne sait pas si cet espace contient d'autres fonctions que les différences de convexes.

Preuve de lemme 2.2.1 : Supposons cette condition réalisée.

- Il existe une famille dénombrable $\mathcal{D}$ de fonctions C^2 et à supports compacts telles que, pour tout point x de V et tout voisinage compact K de x, il existe une fonction g de $\mathcal{D}$, à support dans K et égale à 1 en x, comme chacun des processus $g \circ X$ est continu et adapté, il en va de même de X.
- Soit $(K_n)_{n\in N}$ une suite croissante de compacts de V , de limite $\bigcup_n K_n = V$ et telle que $K_n \subset K_{n+1}$, les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t : X_t \notin K_n\}$ croissent vers l'infini par continuité de X.
- Si f est une fonction C^2 sur V , il existe pour chaque n une fonction f_n de classe C^2, à support compact, et égale à f sur K_n, et une semimartingale réelle Y_n telle que $f \circ X^{T_n]} = Y^{T_n]}$: sur l'événement $\{X_0 \notin K_n\}$, prendre Y^n constant et égal à $f \circ X_0$, et sur $\{X_0 \in K_n\}$, poser $Y^n = f_n \circ X$. En conséquence, le processus $f \circ X$ est luimêeme une semimartingale, et X est une semimartingale dans V. ■

Proposition 2.2.1. *Soient V et W deux variétés et $\phi : V \longrightarrow W$ une application de classe C^2. Si X est une semimartingale dans V, $\phi \circ X$ est une semimartingale dans W.*

Soient V une sous-variété d'une variété W et X un processus à valeurs dans V. Pour que X soit une semimartingale dans V , il faut et il sufft qu'il soit une semimartingale dans W.

Preuve de la proposition 2.2.1 : La première assertion résulte de ce que, pour f dans $C^2(W)$, $f \circ \phi$ est dans $C^2(V)$.

Si V est une sous-variété de W, l'injection canonique de V dans W est de classe C^p, et toute semimartingale dans V est aussi une semimartingale dans W.

La réciproque en utilisant le fait que toute fonction C^2 et à support compact sur V est la restriction à V d'une fonction C^2 sur W. ■

La propriété d'être une semimartingale dans V peut aussi se vérifier localement, en utilisant des coordonnées locales. On n'a alors besoin que de d fonctions, mais la caractérisation n'est valable que sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ formé des (t, ω) tels que $X_t(\omega)$ soit dans le domaine de la carte. Plus précisément, on a l'énoncé suivant :

Lemme de localisation 2.2.1. *Soit $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert au plus dénombrable de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v^i_\iota)_{1\le i\le d}$. Soit X un processus continu adapté à valeurs dans V . Pour tout instant rationnel $s \in \mathbb{Q}_+$ et tout $\iota \in I$, on introduit le temps d'arrêt $T(s,\iota) = \inf\{t \ge s : X_t \notin U_\iota\}$ et les d processus réels*

$$X_t^{s,\iota,i} = \begin{cases} 0, & \textit{Si } X_s \notin U_\iota \,; \\ v^i_\iota(X_{t\wedge T(s,\iota)}), & \textit{Si } X_s \in U_\iota. \end{cases}$$

définis pour $t \geq s$.

Pour que X soit une semimartingale dans V , il faut et il suffit que chaque processus $X^{s,\iota,i}$ soit une semimartingale réelle sur l'intervalle $[s, \infty[$ correspondant (pour la filtration $\mathcal{F}$ restreinte à cet intervalle).

Démonstration du lemme de localisation :

La condition nécessaire est facile : remplacer dans la définition de $X^{s,\iota,i}$ la fonction v_ι^i par une fonction C^2 sur V et égale à v_ι^i sur $\bar{U}_\iota$, et utiliser les propriétés de localisation des semimartingales réelles.

Pour la réciproque,

- introduisons le temps d'arrêt S, supremum essentiel de l'ensemble des temps d'arrêt R tels que les processus arrêtés $X^{R]}$ soient des semimartingales dans V (il est bien défini car le processus constant $X^{0]}$ est une semimartingale dans V).
- Il existe une suite de temps d'arrêt (R_n) telle que $\sup_n R_n = S$ et que chaque $X^{R_n]}$ soit une semimartingale dans V .
- Il suffit de montrer que S est presque sûrement infini, et le caractère local des semimartingales (qui s'étend immédiatement aux variétés) permettra de conclure.
- Supposons donc l'événement $\{S < \infty\}$ non négligeable. Comme X est continu, les intervalles stochastiques

$$J(s, \iota) = \begin{cases} [\![0, T(0, \iota)]\!], & \text{Si } s = 0\,; \\ ]\!]s, T(s, \iota)[\![, & \text{Si } s > 0. \end{cases}$$

  recouvrent le produit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, il existe donc un s et un ι tels que l'événement $\{S \in J(s, \iota)\}$ soit non négligeable, et il existe aussi un n tel que l'événement $A = \{R_n \in [\![s, T(s, \iota)]\!]\}$ ne soit pas non plus négligeable.
- Si f est une fonction C^2 sur V, la restriction de f à un voisinage de $\bar{U}_\iota$ est de la forme $g(v_\iota^1, ..., v_\iota^n)$ pour une fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$, en utilisant l'hypothèse du lemme, il s'ensuit que le processus réel, défini sur $[\![s, \infty[\![$, égal à $g(0)$ sur $\{X_s \notin U_\iota\}$ et à $f \circ X^{T(s,\iota)]}$ sur $\{X_s \notin U_\iota\}$, est une semimartingale.
- semimartingales réelles entraînent que, en posant $T = R_n \mathbb{1}_{A^c} + T(s, \iota)\mathbb{1}_A$, on obtient un temps d'arrêt tel que $f \circ X^{T]}$ soit une semimartingale. Comme T ne dépend pas de f, $X^{T]}$ est une semimartingale dans V . Puisque $T = T(s, \iota) > S$ sur l'événement non négligeable A, ceci est impossible. ■

2.3 Intégration des codiffuseurs le long des semimartingales

Soit X une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, ou, plus généralement, dans une variété V munie pour simplifier de coordonnées globales $(v^1, ..., v^d)$. En notant X^i les semimartingales réelles $v^i \circ X$ (les coordonnées de X), la formule de changement de variable peut être écrite symboliquement

$$d(f \circ X_t) = D_k f \circ X_t dX_t^k + \frac{1}{2} D_{ij} f \circ X_t d[X^i, X^j]_t$$

Lorsque X est une courbe C^1, ceci se réduit à $D_k f \circ X_t \dot{X}^k dt$ dt, c'est-à-dire à $\langle df, \dot{X} \rangle dt$, faisant apparaître la vitesse de X et le covecteur $df(X)$ au point X. Dans le cas général, on peut se ramener à ce formalisme au moyen de l'intégrale de Stratonovitch, en 1979, Schwartz a adopté un point de vue entièrement nouveau, accepter la présence des covariations et tenter d'interpréter cette formule comme l'action du codiffuseur $d^2 f$ au point X_t sur un diffuseur exprimant la cinématique de X. Un tel diffuseur devrait s'écrire

$$dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}.$$

pour lui donner un statut mathématique, il faudrait soit définir rigoureusement les différentielles de semimartingales dX_t^k et $d[X^i, X^j]_t$, soit (comme nous venons de le faire avec dt) les écrire comme absolument continues par rapport à une même différentielle de semimartingale, qui servirait de référence. Mais il n'est pas nécessaire de se lancer dans de telles complications : sans chercher donner un sens rigoureux à $dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$, nous allons tirer les conséquences de sa nature de diffuseur. La première d'entre elles est la possibilité d'intégrer les codiffuseurs le long des semimartingales.

Définition 2.3.1. *Soit V une variété. Un processus Θ à valeurs dans le fibré $\mathbb{T}^*V$ (respectivement TV, T^*V, $\mathbb{T}V$) sera dit localement borné s'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de $\mathbb{T}^*V$ (respectivement TV, T^*V, $\mathbb{T}V$) et une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt telles que T_n tende vers l'infini et que, presque partout sur l'événement $\{T_n > 0\}$, le processus $\Theta^{T_n]}$ soit à valeurs dans K_n.*

Ceci revient à exiger que, pour toute fonction f continue sur le fibré (ou pour une fonction f continue sur le fibré et tendant vers $+\infty$ à l'infini), le processus $f \circ \Theta - f(\Theta_0)$ soit localement borné au sens usuel.

Définition 2.3.2. *Soit V une variété. Un processus Θ à valeurs dans le fibré $\mathbb{T}^*V$ (respectivement TV, T^*V, $\mathbb{T}V$) sera dit au-dessus d'un processus X à valeurs dans V si, π désignant la projection canonique du fibré $\mathbb{T}^*V$ (respectivement TV, T^*V, $\mathbb{T}V$) sur V , on a $X = \pi(\Theta)$.*

Par exemple, dans le cas du fibré $\mathbb{T}^*V$, cela revient à dire que, pour tout (t, ω), le codiffuseur $\Theta_t(\omega)$ est dans la fibre $\mathbb{T}^*_{X_t(\omega)}V$ au-dessus du point $X_t(\omega)$.

Théorème 2.3.1. *Soit X une semimartingale dans une variété V. Il existe une, et une seule, application linéaire $\Theta \longmapsto \int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$ de tous les processus prévisibles à valeurs dans $\mathbb{T}^*V$, localement bornés, au-dessus de X, dans l'espace des semimartingales réelles, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *pour toute fonction f de classe C^2 sur V,*

$$\int \langle d^2 f, \mathcal{D}X\rangle = f \circ X - f(X_0).$$

(ii) *pour tout processus réel H, prévisible et localement borné,*

$$\int \langle H\Theta, \mathcal{D}X\rangle = \int H d(\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle).$$

La semimartingale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$ est appelée l'intégrale du codiffuseur Θ le long de X, sa valeur à l'instant t est notée $\int_0^t \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$. Elle est nulle pour $t = 0$ et a en outre les propriétés suivantes :

(iii) *si Θ et Ξ sont dans $\mathbb{T}^*V$ deux processus au-dessus de X, prévisibles et localement bornés,*

$$\frac{1}{2}[\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle, \int \langle \Xi, \mathcal{D}X\rangle] = \int \langle \mathbf{R}\Theta.\mathbf{R}\Xi, \mathcal{D}X\rangle.$$

(iv) *en particulier, si f et g sont deux fonctions C^2,*

$$\frac{1}{2}[f \circ X, g \circ X] = \int \langle df.dg, \mathcal{D}X\rangle$$

(v) *si $\mathbf{R}\Theta = 0$, l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$ est à variation finie, si de plus est positive , cette intégrale est un processus croissant,*

(vi) *si X est à variation finie, l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$ est à variation finie et est égale, trajectoire par trajectoire, à l'intégrale de Stieltjes $\int \langle \mathbf{R}\Theta, dX\rangle$, en particulier, elle ne dépend que des covecteurs $\mathbf{R}\Theta$.*

(vii) *si T est un temps d'arrêt, l'intégrale arrêtée $(\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle)^{T]}$ est égale à $\int \langle \Theta^{T]}, \mathcal{D}(X^{T]})\rangle$.*

Heuristiquement, $\mathcal{D}X$ est le diffuseur qui s'écrit $dX^k D_k + \frac{1}{2}d[X^i, X^j]D_{ij}$ en coordonnées locales, le processus Θ s'écrit $\theta_k dv^k(X_t) + \theta_{ij} dv^i(X_t).dv^j(X_t)$, où les coefficients θ_k et θ_{ij} sont des processus prévisibles, et $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle$ n'est autre que la semimartingale $\int \theta_k dX^k + \frac{1}{2}\int \theta_{ij} d[X^i, X^j]$. L'ensemble $\mathbb{T}^*V$ n'étant pas un espace vectoriel mais un fibré, la linéarité en Θ n'a de sens que parce que l'on impose à Θ d'être au-dessus de X, ce qui permet l'addition dans chaque fibre.

Démonstration du théorème 2.3.1 : Nous commençons par l'existence

- On choisit un recouvrement ouvert dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in N}$ de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v_\iota^i)_{1 \le i \le d}$, pour s rationnel et $\iota \in \mathbb{N}$, on introduit les temps d'arrêt prévisibles $T(s, \iota) = \inf\{t \ge s : X_t \notin U_\iota\}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, les temps d'arrêt prévisibles $T_n = \inf\{t > 0 : X_t \notin U_0 \cup ... \cup U_n\}$.

– Les temps T_n croissent vers l'infini. Quand (s, ι) décrit $\mathbb{Q}_+ \times \{0, ..., n\}$, les intervalles stochastiques prévisibles $J(s, \iota) =]\!]s, T(s, \iota)[\![$ recouvrent $]\!]0, T_n[\![$, en remplaçant chacun d'eux par un ensemble prévisible $\mathbb{Q}(s, \iota, n)$ plus petit, on construit une partition prévisible de $[\![T_{n-1}, T_n[\![\cap]\!]0 - T_n[\![$ (ce n'est pas vraiment une partition : certains $\mathbb{Q}(s, \iota, n)$ peuvent être vides).

– Sur $J(s, \iota)$, et a fortiori sur $\mathbb{Q}(s, \iota, n)$, le processus X est dans U_ι, et l'on peut donc lire les composantes θ^ι_k et θ^ι_k de Θ dans la carte v_ι, comme U_ι est relativement compact dans le domaine de la carte, les processus prévisibles réels $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta^\iota_k$ et $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta^\iota_{ij}$ sont localement bornés.

– A fortiori, pour ι et n fixés tels que $\iota \leq n$, chacun des processus prévisibles

$$\sum_s \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_k \quad et \quad \sum_s \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_{ij}$$

est localement borné. Appelons w^i_ι une fonction $\mathcal{C}^2$ sur V tout entière, et qui coïncide avec v^i_ι sur un voisinage de $\bar{U}_\iota$, soit $Y^{\iota,i}$ la semimartingale $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} d(w^i_\iota \circ X)$. Nous pouvons enfin poser

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \sum_n \sum_{\iota=n}^{n} (\int (\sum_s \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_k) dY^{\iota,i} + \frac{1}{2} \int (\sum_s \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_{ij}) d[Y^{\iota,i}, Y^{\iota,j}]).$$

Il n'y a aucun probléme de convergence, puisque les termes d'indices supérieurs à n sont des semimartingales nulles sur $[\![0, T_n]\!]$, et la somme est une semimartingale.

La linéarité en Θ est évidente sur la construction, de même que la propriété (ii) il reste à vérifier (i).

Soit donc $f \in C^2$. Il existe $f^\iota \in C^2(\mathbb{R}^d)$ telle que, au voisinage de $\bar{U}_\iota$, on ait $f = f^\iota \circ (w^\iota_1, ..., w^\iota_d)$.
Pour $\Theta = d^2 f(X)$, on peut écrire $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta^\iota_k = D_k f(X) = D_k f^\iota(w \circ X)$ et
$\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta^\iota_{ij} = D_{ij} f(X) = D_{ij} f^\iota(w \circ X)$,
d'où

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_k dY^{\iota,i} + \tfrac{1}{2} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} \theta^\iota_{ij} d[Y^{\iota,i}, Y^{\iota,j}] = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}(s,\iota,n)} d(w \circ X).$$

Comme les $\mathbb{Q}(s, \iota, n)$ où $\iota \leq n$ forment une partition de $]\!]0, \infty[\![$, ceci donne
$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int \mathbb{1}_{]\!]0,\infty[\![} d(f \circ X) = f \circ X - f(X_0)$.

Pour vérifier l'unicité, nous conservons les mêmes objets $U_\iota, v^i_\iota, v^i_\iota$, et nous appelons $J(\Theta)$ l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ construite ci-dessus. Soit $I(\Theta)$ une semimartingale dépendant linéairement de Θ et vérifiant les propriétés (i) et (ii), il s'agit de montrer que $I(\Theta) = J(\Theta)$.

$$df(x).dg(x) = \frac{1}{2}[d^2(fg)(x) - f(x) d^2 g(x) - g(x) d^2 f(x)]$$

jointe à la propriété (ii) fournissent

$$2I(df.dg) = \int d((fg) \circ X) - \int f \circ X d(g \circ X) - \int g \circ X d(f \circ X) = [f \circ X, g \circ X].$$

Revenons à un Θ général. Sur l'ensemble $\{X \in U_\iota\}$, on a

$$\Theta = \theta^\iota_k d^2 w^k_\iota(X) + \theta^\iota_{ij} dw^i_\iota(X)\theta^\iota_k dw^j_\iota(X)$$

d'où, en utilisant (i), (ii) et la formule $I(dw^i_\iota.dw^j_\iota) = \frac{1}{2}[w^i_\iota \circ X, w^j_\iota \circ X]$, on obtient

$$\mathbb{1}_{\{X\in U_\iota\}} d(I(\Theta)) = \mathbb{1}_{\{X\in U_\iota\}}(\theta^\iota_k dY^{\iota,i} + \frac{1}{2}\theta^\iota_{ij} d[Y^{\iota,i}, Y^{\iota,j}]) = \mathbb{1}_{\{X\in U_\iota\}} d(J(\Theta))$$

Il ne reste qu'à remarquer que les $\{X \in U_\iota\}$ forment un recouvrement dénombrable prévisible de $]\!]0,\infty[\![$ pour obtenir $I(\Theta) = J(\Theta)$.

La nullité à l'origine ainsi que la propriété (vii) se vérifient facilement sur la formule explicite donnée plus haut pour établir l'existence. La propriété (iv) a déjà été établie pour démontrer l'unicité, (vi) peut s'obtenir en remarquant que, si X est à variation finie, $\Theta \longmapsto \int\langle \mathbf{R}\Theta, dX\rangle$ satisfait les deux propriétés (i) et (ii) qui caractérisent $\int\langle\Theta, \mathcal{D}X\rangle$.

Pour vérifier (iii), désignons par M et Nles deux membres et par A_ι l'ensemble prévisible $\{X \in U_\iota\}$, il suffit d'établir pour chaque ι l'égalite $\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM = \int \mathbb{1}_{A_\iota} dN$,

c'est-à-dire encore, en utilisant (ii),

$$\frac{1}{2}[\int\langle \mathbb{1}_{A_\iota}\Theta, \mathcal{D}X\rangle, \int\langle \mathbb{1}_{A_\iota}\Xi, \mathcal{D}X\rangle] = \int\langle \mathbf{R}\mathbb{1}_{A_\iota}\Theta.\mathbf{R}\mathbb{1}_{A_\iota}\Xi, \mathcal{D}X\rangle.$$

En oubliant l'indice ι, on est ainsi ramené au cas où l'on a identiquement $\Theta = \theta_k dv^k(X_t) + \theta_{ij} dv^i(X).dv^j(X)$ et $\Xi = \xi_k dv^k(X) + \xi_{ij} dv^i(X).dv^j(X)$ pour des fonctions w^i de classe C^2 et des processus prévisibles localement bornés θ_k, θ_{ij} , ξ_{ij} et ξ_{ij}. On écrit alors $\mathcal{R}\Theta.\mathcal{R}\Xi = \theta_i\xi_j dw^i(X).dw^j(X)$, et il ne reste qu'à appliquer (iv) aux fonctions w^i et w^j.

Enfin, la propriété (v) se lit aussi sur la formule explicite, en utilisant, pour la croissance, une remarque sur les semimartingales vectorielles (équivalente à la formule de Kunita et Watanabe de contrôle des covariations) : Si X est une semimartingale dans $\mathbb{R}^d$ et θ un processus prévisible, localement borné, à valeurs dans les matrices symétriques positives, alors le processus à variation finie $\int \theta_{ij} d[X^i, X^j]$ est croissant. Ceci peut se voir en appelant $r = (r_{ij})$ la racine carrée positive de la matrice θ, on obtient ainsi un processus prévisible localement borné parce que la racine carrée positive est une fonction continue sur les matrices symétriques positives. Et il ne reste plus qu'à poser $Y^i = \int r_{ij} dX^j$ et à remarquer que $\int \theta_{ij} d[X^i, X^j] = \sum_i [Y^i, Y^i]$.

■

2.4 Intégrales de Stratonovitch

Un champ de covecteurs peut être intégré le long des courbes déterministes (ou plus généralement à variation finie, au moyen d'une intégrale de Stieltjes), le long d'une semimartingale, nous venons de voir que ce sont les codiffuseurs qui s'intègrent bien. Pour intégrer un champ de covecteurs σ le long d'une semimartingale générale, une méthode consiste à le transformer d'abord en un champ de codiffuseurs $d\sigma$ par différentiation symétrique.

Définition 2.4.1. *Soient X une semimartingale dans V, et σ un champ de covecteurs, de classe C^1 au moins. On appelle* intégrale de Stratonovitch *de σ le long de X la semimartingale $\int\langle d\sigma, \mathcal{D}X\rangle$.*

Comme dans la théorie des semimartingales réelles, le nom d'intégrale donné à ces objets est un peu abusif, puisqu'une certaine régularité est exigée de σ, et qu'aucun théorème de convergence dominée n'est satisfait. Remarquer que lorsque σ est le champ de covecteurs df, on obtient

$$\int\langle df, \delta X\rangle = \int\langle d^2 f, \mathcal{D}X\rangle = f\circ X - f\circ X_0.$$

Si V a une carte globale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, en notant σ_i les composantes de σ et X^i les coordonnées de X, la différentielle symétrique $\theta = d\sigma$ du champ σ est donnée par $\theta = \sigma_k d^2 v^k + D_i\sigma_j dv^i.dv^j$, l'intégrale de Stratonovitch de σ le long de X vaut donc

$$\int\sigma_k(X)dX^k + \tfrac{1}{2}\int D_i\sigma_j(X)d[X^i, X^j] = \int\sigma_k(X)dX^k + \tfrac{1}{2}\int D_i\sigma_j(X)d[\sigma_k(X), X^k]$$

c'est-à-dire l'intégrale de Stratonovitch $\int\sigma_k(X)\delta X^k$. Ceci explique le nom donné à ce processus.

Proposition 2.4.1. *Soit X une semimartingale dans une variété V de classe C^3 au moins. Il existe une unique application linéaire $\Sigma\longmapsto\int\langle\Sigma, \delta X\rangle$ de l'ensemble des semimartingales à valeurs dans T^*V et au-dessus de X, dans l'espace des semimartingales réelles issues de 0, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

i) *si σ est un champ de covecteurs de classe C^2,$\int\langle\sigma\circ X, \delta X\rangle = \int\langle d\sigma, \mathcal{D}X\rangle$*

ii) *si Z est une semimartingale réelle,*

$$\int Z\delta(\int\langle\Sigma, \delta X\rangle) = \int\langle(Z\Sigma), \delta X\rangle.$$

Le processus $\int\langle\Sigma, \delta X\rangle$ est appelé *intégrale de Stratonovitch de Σ le long de X. (Il n'y a pas d'ambiguïté : lorsque σ est un champ C^1 de covecteurs tel que $\sigma\circ X$ soit une semimartingale, cette définition coïncide avec la précédente).*

Démonstation de la proposition 3.1 : La variété W = T^*V est au moins de classe C^2. Appelons π la projection canonique de W = T^*V sur V . Pour $x \in V$ et $\sigma \in T_x^*V \subset W$, l'application $\pi_{*\sigma} : T_\sigma W \longrightarrow T_x V$ peut être composée avec $\sigma : T_x V \longmapsto \mathbb{R}$ pour définir une forme linéaire $\lambda_\sigma = \sigma \circ \pi_{*\sigma}$ sur $T_\sigma W$, ceci définit un élément canonique λ_σ dans $T_\sigma^* W$, et l'application $\sigma \longmapsto \lambda_\sigma$ est un champ de covecteurs canonique sur W (appelé la forme de Liouville). En coordonnées locales, v^i sont les coordonnées de x, σ s'écrit $\sigma_i dv^i$, et, au point de W de coordonnées σ_i et v^i (il y a $2d$ coordonnées sur W), λ est simplement $\sigma_i dv^i$, le champ de covecteurs λ sur W est donc de classe C^{p-1}. Remarquer que si σ est maintenant un champ de covecteurs sur V , c'est une application de V dans W vérifiant $\pi \circ \sigma = Id$, et le champ de covecteurs $\sigma^* \pi$ sur V n'est autre que σ, comme cela se vérifie immédiatement : $\sigma^*\pi = \pi \circ \sigma^* = \sigma \circ \pi_* \circ \sigma_* = \sigma \circ (\pi \circ \sigma)_* = \sigma \circ Id = \sigma$.
Pour toute semimartingale Σ dans W, on peut définir l'intégrale de Stratonovitch $\int \langle \lambda, \delta\Sigma \rangle = \int \langle d\lambda, \mathcal{D}\Sigma \rangle$ de λ le long de Σ, pour démontrer la proposition, il suffira de vérifier que cette intégrale satisfait les deux conditions (i) et (ii), et est la seule à les satisfaire.
Si l'on a une application linéaire $\Sigma \longmapsto I(\Sigma)$ vérifiant (i) et (ii), pour montrer $I(\Sigma) = \int \langle \lambda, \delta\Sigma \rangle$, il suffit de le vérifier sur les intervalles $[\![s, T_s[\![$ durant lesquels X reste dans le domaine d'une carte locale $(v^i)_{1 \le i \le d}$. Sur un tel intervalle, on peut définir pour chaque i une semimartingale Y^i au-dessus de X dans W = T^*V par $Y^i = (dv^i)(X)$, et toute semimartingale Σ au-dessus de X s'écrit $\Sigma = \Sigma_i Y^i$, où les Σ_i, qui sont les composantes de Σ dans le système de coordonnées, sont d semimartingales réelles. Sur le même intervalle, on définit des semimartingales réelles X^i par $X^i = v^i \circ X$.

Enfin, toujours sur cet intervalle, on a $\int \langle \lambda, \delta\Sigma \rangle = \int \Sigma_i \delta X^i$ en raison de la formule explicite de λ dans les coordonnées locales de W.

■

Proposition 2.4.2. *Soit $\phi : V \longrightarrow W$ une application C^p entre deux variétés de classe au moins C^3. Si X est une semimartingale dans V et Σ une semimartingale dans T^*W au dessus de $\phi \circ X$, on a $\int \langle \Sigma, \delta(\phi \circ X) \rangle = \int \langle \phi^*\Sigma, \delta X \rangle$.*

2.5 Topologie des semimartingales dans une variété

Définition 2.5.1. *Ètant donnés $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et V , on dit qu'une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de semimartingales dans V converge au sens des semimartingales vers une semimartingale X dans V si $f \circ X^n$ tend vers $f \circ X$ au sens des semimartingales réelles pour toute fonction f de classe C^2 sur V.*

On pourrait aussi, comme Arnaudon et Thalmaier [9], utiliser un plongement propre de V dans un espace vectoriel et vérifier que la topologie ne dépend pas du plongement propre choisi. On obtiendrait ainsi un ensemble fini de fonctions-test C^p pour la convergence des semimartingales.

De façon analogue, en considérant toutes les fonctions continues sur V (ou seulement les fonctions C^p, ou en plongeant proprement V dans un espace vectoriel), on peut définir la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ en probabilité pour les processus continus adaptés à valeurs dans V.

Comme pour les semimartingales réelles, la convergence au sens des semimartingales est plus forte que la convergence uniforme sur les compacts en probabilité (pour laquelle, d'ailleurs, les semimartingales ne forment pas un fermé).

Dans la définition de la topologie des semimartingales, comme d'ailleurs dans celle de la convergence uniforme sur les compacts en probabilité, on peut restreindre la classe des fonctions-test en exigeant que leurs supports soient compacts.

Proposition 2.5.1. *Dans V , soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus continus adaptés (respectivement de semimartingales) et X un processus continu adapté (respectivement une semimartingale). Pour que X^n tende vers X uniformément sur les compacts en probabilité (respectivement au sens des semimartingales), il suffit que, pour toute fonction f de classe C^p et à support compact, $f \circ X^n$ tende vers $f \circ X$ uniformément sur les compacts en probabilité (respectivement au sens des semimartingales).*

Démonstration de la proposition 2.5.1 :

Supposant la condition satisfaite, il s'agit de montrer que pour $f \in C^p$, la suite $f \circ X^n$ converge vers $f \circ X$ pour la topologie considérée.

On peut se restreindre à ne le démontrer que pour une sous-suite. Soit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de V , telle que $K_m \subset K_{m+1}$ et que $\bigcup_n K_n = V$, pour chaque m, soit g_m une fonction C^p égale à 1 sur K_m et à 0 sur le complémentaire de K_{m+1}.

Fixons $t > 0$. Pour chaque m, la suite de variables aléatoires $\sup_{[0,t]} |g_m \circ X^n - g_m \circ X|$ tend vers zéro en probabilité quand n tend vers l'infini, en en extrayant une soussuite convenable, on obtient la convergence presque sûre.

on a donc une sous-suite $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall m,\ \exists N(n,\omega),\ \forall n \geq N(n,\omega)\ \sup_{[0,t]} |g_m \circ Y^n - g_m \circ X| < \tfrac{1}{2}$$

Ainsi, pour tout $n \geq N(n,\omega)$, on a l'inclusion $Y^n([0,t]) \subset K_{m+1}$ sur l'événement $E_m = \{X([0,t]) \subset K_m\}$.

Soit f une fonction C^p. La fonction $f_m = fg_{m+1}$ est C^p, à support compact, et égale à f sur K_{m+1}. Sur l'événement $F_{m,l} = E_m \cap \{N(\omega, m) \leq l\}$, en convenant d'arrêter tous les processus à t, on a à la fois

$$f \circ X = f_m \circ X \qquad et \qquad \forall n \geq l \ f \circ Y^n = f_m \circ Y^n$$

donc, en appliquant l'hypothèse à f_m, $f \circ Y^n$ tend vers $f \circ X$ sur $F_{m,l}$ uniformément sur $[0,t]$ en probabilité (respectivement au sens des semimartingales sur $[0,t]$). Il ne reste qu'à remarquer que la réunion en m et l des $F_{m,l}$ est Ω pour obtenir, la convergence sur $[0,t]$. On conclut par le caractére local de la topologie des semimartingales.

■

Voici un résultat général de stabilité des intégrales de codiffuseurs, un peu technique, mais parfois bien utile. Pour l'énoncer, nous nous donnons une norme continue ν sur le fibré coosculateur $\mathbb{T}^*V$, c'est à dire une fonction continue sur $\mathbb{T}^*V$ dont la restriction à chaque espace vectoriel $\mathbb{T}^*_xV$ est une norme. L'existence de telles normes continues est facile à établir (par exemple en utilisant une partition de l'unité sur V subordonnée à un atlas) ; on vérifie sans difficultés que l'hypothèse de majoration dans l'énoncé ci-dessous ne dépend pas du choix de ν.

Proposition 2.5.2. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semimartingales dans V, convergeant pour la topologie des semimartingales vers une limite X. Pour chaque n, soit Θ^n un processus prévisible de codiffuseurs au-dessus de X^n. On suppose que la suite des Θ^n converge simplement et sa limite Θ est un processus prévisible au-dessus de X. On suppose aussi que, pour une norme continue ν sur $\mathbb{T}^*V$, le processus* $\sup_n \nu(\Theta^n)$ *est localement borné. L'intégrale $\int\langle\Theta^n, \mathcal{D}X^n\rangle$ converge vers $\int\langle\Theta, \mathcal{D}X\rangle$ pour la topologie des semimartingales.*

Proposition 2.5.3. *Soit θ un champ de codiffuseurs sur V, non nécessairement C^{p-2}, mais mesurable et localement borné. L'application $X \longmapsto \int\langle\theta, \mathcal{D}X\rangle$, de l'ensemble des semimartingales dans V vers l'espace des semimartingales réelles, est continue pour les topologies des semimartingales dans V et dans $\mathbb{R}$.*

Preuve de la proposition 2.5.3 : Il suffit de vérifier que si une suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X au sens des semimartingales, les intégrales $\int\langle\theta^n, \mathcal{D}X\rangle$ tendent vers $\int\langle\theta, \mathcal{D}X\rangle$, toujours au sens des semimartingales. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts recouvrant V et tels que $K_q \subset K_{q+1}$. Puisque X^n tend vers le processus continu X uniformément sur les compacts en probabilité, les temps d'arrêt

$T_q = \inf\{t : \exists n X_t^n \notin K_q\}$ tendent vers l'infini en probabilité. En extrayant des sous-suites, on se ramène à la convergence presque sûre.

■

2.6 Intégrales d'Itô et martingales

Symboliquement, si X est une semimartingale dans V, $\mathcal{D}X$ est le diffuseur

$$dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}.$$

Disposant d'une connexion Γ sur la variété, nous pouvons élaguer la partie purement d'ordre 2, pour ne garder que la partie d'ordre 1 $\Gamma\mathcal{D}X = (dX^k + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}(X_t) d[X^i, X^j]) D_k$, c'est toujours symboliquement un vecteur tangent, soumis à la brave formule linéaire de changements de cartes dans TV , et pour lequel une décomposition en parties martingale et partie à variation finie $dM + dA$ sera donc invariante par changement de cartes, c'est-à-dire intrinsèque (dM et dA sont dans $T_{X_t}V$; ni M ni A n'existent). Plutôt que de raisonner sur l'objet formel $\mathcal{D}X$, il est plus agréable, et plus conforme aux bonnes mœurs mathématiques, de dire tout cela de façon rigoureuse, en utilisant le langage officiel pour parler de $\mathcal{D}X$, celui des intégrales de codiffuseurs le long de X. Cela nous mène aux intégrales d'Itô dans une variété. Introduites et étudiées par Meyer [34] et [36], elles avaient auparavant déjà été considérées par Duncan [20] dans le cas riemannien (comme limites de sommes de Riemann !) et par Bismut [11] dans le cas des diffusions (c'est lui qui, le premier, a identifé la connexion comme étant la structure géométrique permettant leur existence). La méthode d'approximation de Duncan a été ultérieurement redécouverte par Darling [16] et [18].

Définition 2.6.1. *Soit X une semimartingale dans une variété V pourvue d'une connexion Γ. Soit Σ un processus prévisible, à valeurs dans T^*V, localement borné et au-dessus de X. On appelle intégrale d'Itô de Σ le long de X, et l'on note $\int \langle \Sigma, d_\Gamma X\rangle$, la semimartingale réelle $\int \langle \Gamma^*\Sigma, \mathcal{D}X\rangle$.*

Pour donner un sens à cette définition, il faut remarquer que lorsque Σ est un tel processus de covecteurs, le processus de codiffuseurs $\Gamma^*\Sigma$ est prévisible, localement borné et au-dessus de X. Formellement, la différentielle d'Itô $d_\Gamma X_t$ n'est autre que la partie d'ordre un
$\Gamma\mathcal{D}X_t = (dX_t^k + \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}(X_t) d[X^i, X^j]_t) D_k$ du diffuseur infinitésimal DX_t.

Proposition 2.6.1. *Soient X une semimartingale dans une variété V pourvue d'une connexion, et Σ et T deux processus prévisibles, à valeurs dans T^*V, localement bornés et au-dessus de X. La covariation des deux intégrales d'Itô est donnée par*

$$\frac{1}{2}[\int \langle \Sigma, d_\Gamma X\rangle, \int \langle T, d_\Gamma X\rangle = \int \langle \Sigma.T, \mathcal{D}X\rangle.$$

Si H est un processus prévisible réel localement borné, on a

$$\int \langle H\Sigma, d_\Gamma X \rangle = \int Hd(\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$$

Preuve de la proposition 2.6.1 : La première formule résulte aussitôt de $\mathbf{R}\Gamma^*\Sigma = \Sigma$ et de 2.3.1.(iii), la seconde de $\Gamma^*(H\Sigma) = H\Gamma^*\Sigma$ et de 2.3.1.(ii).

■

Par conséquent, en coordonnées locales, si Σ s'écrit $\sigma_i dv^i$, l'intégrale d'Itô de Σ n'est autre que $\int \sigma_k(dX^k + \frac{1}{2}\Gamma^K_{ij}(X)d[X^iX^j])$. à l'aide des intégrales d'Itô, on peut trés facilement écrire la formule d'Itô dans V :

Proposition 2.6.2. *Soit X une semimartingale dans V. Pour toute fonction $f \in C^2(V)$, on a*

$$f \circ X = f(X_0) + \int \langle df, d_\Gamma X \rangle + \int \langle Hessf, \mathcal{D}X \rangle.$$

Preuve de la proposition 2.6.2 : Immédiat à l'aide des définitions $\int\langle df, d_\Gamma X\rangle = \int\langle \Gamma^* df, \mathcal{D}X\rangle$ et $Hessf = d^2 f - \Gamma^* df$, et de l'égalité $f \circ X - f(X_0) = \int\langle d^2 f, \mathcal{D}X\rangle$.

■

Définition 2.6.2. *Une semimartingale X dans une variété V munie d'une connexion* Γ *est une martingale si, pour tout processus prévisible* Σ *à valeurs dans* T^*V*, localement borné et au-dessus de X, l'intégrale d'Itô*$\int\langle \Sigma, d_\Gamma X\rangle$ *est une martingale locale.*

Heuristiquement, X est une martingale si $\mathcal{D}X$ peut se décomposer en une différentielle de martingale (d'ordre un) et une partie purement d'ordre deux, c'est- à-dire dans le noyau de Γ.

Ces êtres ne sont pas l'analogue dans V des martingales continues dans $\mathbb{R}^d$, mais des martingales locales continues dans $\mathbb{R}^d$, et quand V est la variété $\mathbb{R}^d$ et Γ la connexion plate, cette définition crée une ambiguîté : les martingales dans V sont les martingales locales (continues) usuelles. Malgré cela, nous préférons le terme de martingale pour trois raisons : il est plus simple que martingale locale, dans une variété générale, il n'existe pas d'objets qui correspondent aux vraies martingales (non locales), enfin, l'expérience montre que cette ambiguîté n'est pas gênante. Les auteurs anglo-saxons emploient le terme de Γ-martingale, qui a le double avantage de supprimer toute ambiguîté et de faire figurer explicitement la connexion. La définition ci-dessus d'une martingale dans une variété est empruntée à Meyer [34] et [35], une autre approche, par les fonctions convexes,

Proposition 2.6.3. *Pour qu'une semimartingale X dans V soit une martingale (il faut et) il suffit que, pour toute fonction f de classe C^p et à support compact, la différence $f \circ X - \int \langle Hess f, \mathcal{D}X \rangle$ soit une martingale locale.*

Démonstration de la proposition 2.6.3 : Utilisons un recouvrement ouvert dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v_\iota^i)_{1 \le i \le d}$. Soient w_ι^i des fonctions C^p à support compact, telles que $w_\iota^i = v_\iota^i$ sur U_ι.

Si Σ est un processus prévisible dans T^*V, localement borné et au-dessus de X, il s'agit de montrer que $M = \int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$ est une martingale locale.

Puisque les ensembles prévisibles $A_\iota = \{X \in U_\iota\}$ recouvrent $[\![0, \infty[\![$, il suffit de vérifier que, pour un ι (fixé dans la suite), $\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM$ est une martingale locale.

Définissons des processus prévisibles σ_i par la formule $\Sigma = \sigma_i dv_\iota^i(X)$ sur A_ι et par $\sigma_i = 0$ sur A_ι^c, ils sont localement bornés parce que U_ι est relativement compact dans le domaine de la carte U_ι. En remarquant que $\mathbb{1}_{A_\iota} = \sigma_i dw_\iota^i(X)$ et en utilisant 2.6.1, on peut écrire

$$\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM = \int \langle \mathbb{1}_{A_\iota} \Sigma, d_\Gamma X \rangle = \int \sigma_i d(\int \langle dw_\iota^i, d_\Gamma X \rangle)$$

et c'est fini, puisque la formule d'Itô 2.6.2 et l'hypothèse assurent que l'intégrale d'Itô

$$\int \langle dw^i\iota, d_\Gamma X \rangle = w_\iota^i \circ X - w_\iota^i(X_0) - \int \langle Hess w_\iota^i, \mathcal{D}X \rangle$$

est une martingale locale.

■

Remarque 2.6.1. a) *Si f^1,...,f^q sont des fonctions C^2 sur (V, Γ) et si $\phi : \mathbb{R}^q \to R$ est aussi C^2, la formule de changement de variable pour les hessiennes s'écrit*

$$Hess[\phi \circ (f^1, ..., f^q)] = D_k \phi(f^1, ..., f^q) Hess f^k + D_{ij} \phi f^1, ..., f^q) df^i.df^j.$$

b) *On suppose donné un plongement propre de V dans $\mathbb{R}^q$ (ceci entraîne que toute fonction C^p sur V est restriction à V d'une fonction C^p définie sur $\mathbb{R}^q$). La connexion Γ sur V est quelconque, et n'a a priori rien a voir avec le plongement.*

Soient $f^1, ..., f^q$ les fonctions C^p sur V obtenues en composant les coordonnées de $\mathbb{R}^q$ par le plongement. ce qui Montre qu'une semimartingale X dans V est une martingale pour Γ si et seulement si chaque $f \circ X - \int \langle Hess f^k, \mathcal{D}X \rangle$ est une martingale locale.

Pour rendre plus concrète la notion de martingale, voici trois situations dans lesquelles les martingales sont faciles à caractériser.

Le premier cas : c'est le cas où la variété admet un système de coordonnées globales.

Proposition 2.6.4. *On suppose V pourvue d'une carte globale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, on note Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connexion pour cette carte. Soit X une semimartingale dans V, de coordonnées $X^k = v^k \circ X$. Pour que X soit une martingale, il faut et il suffit que chacun des d processus réels*

$$M^k = X^k + \frac{1}{2}\int \Gamma_{ij}^k(X)d[X^i, X^j]$$

soit une martingale locale.

Si l'on se donne des martingales locales (continues) $M^1, ..., M^d$, tout processus X dans V, dont les coordonnées X^k vérifient

$$X^k = M^k - \frac{1}{2}\int \Gamma_{ij}^k(X)d[X^i, X^j]$$

est une martingale.

Ainsi, dès que la connexion est suffisamment régulière pour que l'équation différentielle stochastique ci-dessus ait toujours une unique solution, les martingales dans V sont en correspondance avec les martingales locales continues dans $\mathbb{R}^d$ (à des problèmes de durée de vie près).

Démonstration de la proposition 2.6.4 : Puisque $Hessv^k = -\Gamma_{ij}^k dv^i.dv^j$, la quantité $M^k = X^k + \frac{1}{2}\int \Gamma_{ij}^k(X)d[X^i, X^j]$ c'est autre que l'intégrale d'Itô $\int\langle dv^k, d_\Gamma X\rangle$, si X est une martingale, M^k est donc une martingale locale.
Réciproquement, si chaque M^k est une martingale locale, la formule de changement de variable

$$d(f\circ X) = D_k f\circ X(dX^k + \frac{1}{2}\Sigma_{ij}^k(X)d[X^i, X^j] + \frac{1}{2}(D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k)f\circ X d[X^i, X^j]$$

montre que pour toute $f \in C^2$, le processus $f\circ X - \int\langle Hessf, \mathcal{D}X\rangle$ est une martingale locale, et X est une martingale d'après 2.6.3. Si l'on se donne des martingales locales continues M^k, tout processus X tel que $X^k = M^k - \frac{1}{2}\int \Gamma_{ij}^k(X)d[M^i, M^j]$ vérifiera $[X^i, X^j] = [M^i, M^j]$, on aura donc $M^k = X^k + \frac{1}{2}\int \Gamma_{ij}^k(X)d[X^i, X^j]$ et X sera une martingale par la première partie de la proposition.

■

Le deuxième cas : C'est le cas où les martingales se décrivent simplement est le cas des diffusions. Une diffusion est une martingale si et seulement si son générateur est purement d'ordre deux.

Proposition 2.6.5. *Sur la variété V, soit L un champ de diffuseurs, non nécessairement continu, mais borélien et localement borné. Soit aussi X une semimartingale dans V, telle que, pour toute $f \in C^2(V)$,*

$$f \circ X_t - \int_0^t Lf(X_s)ds$$

soit une martingale locale. Alors X est une martingale dans V si et seulement si le temps passé par X dans l'ensemble $\{x \in V : \Gamma L(x) \neq 0\}$ est nul. En particulier, lorsque cet ensemble est ouvert (par exemple si L est continu), X est une martingale si et seulement si presque toutes ses trajectoires sont à valeurs dans le fermé $\{\Sigma L = 0\}$. Si $\Gamma L = 0$, le processus X est toujours une martingale dans V.

Démonstation de la proposition 2.6.5 : Notons $=^m$ l'égalité modulo les martingales locales : $Y =^m Z$ signifiera que la différence entre les deux processus réels Y et Z est une martingale locale. Notons aussi $\int Hdt$ le processus $\int HdA$ où $A_t \equiv t$. Pour tout Θ prévisible, localement borné et au-dessus de X dans T^*V, on a $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X\rangle =^m \int \langle \Theta, L\rangle dt$. C'est en effet vrai par hypothèse quand $\Theta = d^2f(X)$, cela s'étend sans peine au cas où $\Theta = Hd^2f(X)$, où H est prévisible réel localement borné, puis à $\Theta = Hdf.dg$ en écrivant $df.dg = \frac{1}{2}(d^2(fg) - fd^2g - gd^2f)$, et enfin au cas général comme dans 2.6.3,
par localisation dans des cartes et écriture de Θ sous la forme $H_k d^2v^k + H_{ij}dv^i.dv^j$. Pour tout processus de covecteurs Σ, prévisible, localement borné et au-dessus de X, on peut écrire

$$\int \langle \Sigma, d_\Gamma X\rangle = \int \langle \Gamma^*\Sigma, \mathcal{D}X\rangle =^m \int \langle \Gamma^*\Sigma, L\rangle(X)dt = \int \langle \Sigma, \Gamma L\rangle(X)dt$$

Pour que X soit une martingale, il faut et il suffit que pour tout Σ, le membre de gauche soit une martingale locale, ou encore que pour tout Σ, le processus à variation finie $\int \langle \Sigma, \Gamma L\rangle(X)dt$ soit identiquement nul. Cette condition est toujours satisfaite si le temps passé par X dans l'ensemble $U = \{\Gamma L \neq 0\}$ est nul.
Réciproquement, si elle est satisfaite, soit σ un champ de covecteurs borélien, localement borné, tel que $\langle \sigma, \Gamma L\rangle > 0$ sur U. En prenant $\Sigma = \sigma \circ X$, on obtient $\int \mathbb{1}_{\{x \in U\}}dt = 0$.

■

Le troisième cas : C'est le cas où V est une sous-variété de $\mathbb{R}^q$ munie de la connexion induite.

Proposition 2.6.6. *Soit V une sous-variété d'un espace vectoriel euclidien $\mathbb{E}$, munie de la connexion induite, appelons p_x la projection orthogonale de $T_x\mathbb{E}$ sur T_xV, et identifions chaque $T_x\mathbb{E}$ à $\mathbb{E}$. Soit X une semimartingale dans V, appelons A la partie à variation finie de la décomposition canonique de*

X dans $\mathbb{E}$ (c'est le processus à variation finie, adapté, continu et issu de l'origine, tel que $X - A$ soit une martingale locale dans $\mathbb{E}$)

Pour tout processus Σ de covecteurs sur V, prévisible, localement borné et au-dessus de X, l'intégrale d'Itô $\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$ est l'intégrale stochastique usuelle $\Sigma \circ p_X(dX)$ dans $\mathbb{E}$, et sa la partie à variation finie est donc $\int \Sigma \circ p_X(dA)$.

Pour que X soit une martingale dans V, il faut et il suffit qu'il existe un processus réel croissant, continu, adapté C et un processus prévisible H à valeurs dans $\mathbb{E}$ tels que l'on ait

$$A = \int H dC \quad \text{et} \quad H_t \perp T_{X_t} V.$$

En langage moins rigoureux mais plus direct, X est une martingale dans V si et seulement si dA_t reste orthogonal dans $\mathbb{E}$ au sous-espace $T_{X_t}V$. L'analogie avec le comportement des géodésiques, caractérisées par l'orthogonalité entre leur accélération (dans $\mathbb{E}$) et l'espace tangent à V.

Démonstration de la proposition 2.6.6 : Pour plus de précision, nous appellerons i l'injection canonique de V dans $\mathbb{E}$, ce qui permet de distinguer un point x de V de son image ix dans $\mathbb{E}$, et le processus X de son image $Y = i \circ X$. Nous noterons Γ_V la connexion sur V et Γ_E la connexion plate sur E, la définition de Γ_V est $\Gamma_V L = p_* \Gamma_E i_* L$ pour $L \in \mathbb{T}_x V$.
Si Σ est un processus de covecteurs sur V, prévisible, localement borné et au-dessus de X, la formule $T = \Gamma_E^*(\Sigma \circ p)$ définit un processus T de codiffuseurs sur $\mathbb{E}$, prévisible, localement borné et au-dessus de Y , tel que $\int \langle i^* T, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle T, \mathcal{D}Y \rangle$. Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int \langle \Sigma, d_{\Gamma_V} X \rangle &= \int \langle \Gamma_V^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle \\
&= \int \langle i^* \Gamma_E^* (\Sigma \circ p_X), \mathcal{D}X \rangle \\
&= \int \langle \Gamma_E^* (\Sigma \circ p_X), \mathcal{D}Y \rangle \\
&= \int \Sigma \circ p_X, d_{\Gamma_E} Y \rangle
\end{aligned}$$

où les intégrales de la première ligne sont dans V et celles de la seconde dans $\mathbb{E}$. L'intégrale d'Itô finale est écrite pour la connexion plate Γ_E sur $\mathbb{E}$, c'est donc l'intégrale usuelle $\Sigma \circ p_X(dY)$, et la première partie de l'énoncé est établie.

Si A peut s'écrire $\int H dC$, où C est croissant continu, et H_t est prévisible dans $\mathbb{E}$ et normal à $T_{X_t}V$, alors $p_X(H) = 0$, et pour tout Σ,

$$\int \Sigma \circ p_X(dA) = \int \Sigma \circ p_X(H dC) = \int \langle \Sigma, p_X(H) \rangle dC = 0.$$

X est donc une martingale pour Γ_V.

Réciproquement, si X est une martingale, soient A^i les composantes de A dans une base de $\mathbb{E}$ (coordonnées linéaires), $C = \sum_i \int |dA^i|$, et H un processus prévisible borné dans $\mathbb{E}$ tel que $dA = HdC$. En identifiant $T_{X_t}V$ et $T^*_{X_t}V$ au moyen de la structure euclidienne, on peut définir un processus prévisible borné dans T^*V au dessus de X par $\Sigma = p(H)$, puisque X est une martingale,

$$0 = \int \Sigma \circ p_X(dA) = \int \langle \Sigma, p_X(H) \rangle dC = \int \|p_X(H)\|^2 dC \ .$$

Ceci montre que, quitte à modifier H sur un ensemble négligeable pour dC, on a $p_X(H) = 0$, c'est-à-dire $H_t \perp T_{X_t}V$.

■

La formule d'Itô 2.6.2 n'a été énoncée que pour les fonctions, elle s'étend immédiatement aux codiffuseurs :

Proposition 2.6.7. *Soient X une semimartingale dans V et Θ un processus coosculateur prévisible, localement borné, au-dessus de X. On a toujours l'identit*

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle \mathbf{R}\Theta, d_\Gamma X \rangle + \int \langle (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta), \mathcal{D}X \rangle$$

Lorsque X est une martingale, ceci est la décomposition canonique de $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ en parties martingale et à variation finie.

Démonstration de la proposition 2.6.7 : La formule se réduit à la trivialité $\Theta = \Gamma^* \mathbf{R}\Theta + (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta)$. Comme $\mathbf{R}\Gamma^*$ est l'identité sur les covecteurs, $(\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta)$ est dans le noyau de $\ker R$, et l'intégrale $\int \langle (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta), \mathcal{D}X \rangle$ est toujours à variation finie d'après 2.3.1.(v).

Si de plus X est une martingale, l'intégrale d'Itô est une martingale locale réelle, et la formule ci-dessus coïncide donc avec la décomposition canonique de $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$.

■

2.7 Semimartingale dans une variété riemannienne

Rappelons qu'une structure riemannienne sur une variété V est la donnée d'un champ g de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs, de classe C^{p-1}. Nous ne postulons aucune relation entre g et la connexion Γ sur V. [2] Il existe toujours des structures riemanniennes sur une variété donnée,

2. En géométrie riemannienne, l'objet fondamental est g, et on montre comment construire une connexion à partir de g, ici, la connexion est donnée, et nous utiliserons une structure riemannienne à titre d'outil technique auxiliaire, comme on utilise une distance sur un espace topologique métrisable.

lorsque la variété admet une carte globale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, on peut par exemple poser $g = \delta_{ij}dv^i.dv^j$, dans le cas général, on peut plonger V dans une variété ayant une carte globale (et donc une structure riemannienne h) et poser $g = \phi^*h$, où ϕ désigne le plongement. On peut généraliser aux variétés riemanniennes la variation quadratique euclidienne des semimartingales dans $\mathbb{R}^d$

Définition 2.7.1. *Si X est une semimartingale dans une variété riemannienne (V, g), on appelle variation quadratique riemannienne le processus croissant $2\int\langle g, \mathcal{D}X\rangle$.*

Si V est muni d'une carte globale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, dans laquelle g s'écrit $g_{ij}dv^i.dv^j$, la variation quadratique riemannienne de X vaut $\int g_{ij}\circ X[dv^i\circ X, dv^j\circ X]$. En particulier, lorsque V est un espace vectoriel euclidien (par exemple $\mathbb{R}$), la variation quadratique riemannienne de X coïncide avec sa variation quadratique euclidienne. (C'est à cela que sert le coefficient 2 dans la définition.)

Proposition 2.7.1. *La variété V étant munie d'une connexion Γ et d'une structure riemannienne g, soient X une martingale dans V (pour Γ) et A sa variation quadratique riemannienne.*

i) *Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, le processus X est constant sur l'intervalle $[\![S, T]\!]$ si et seulement le processus A l'est aussi.*

ii) *Sur l'événement $\{A_\infty < \infty\}$, le processus X converge, dans le compactifié d'Alexandrov $V \cup\{\infty\}$, vers une limite X_∞.*

iii) *Définissons des temps d'arrêt par $T_t = \inf\{s : A_s > t\} \leq \infty$, une nouvelle Filtration $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T_t}$, et un processus Y par $Y_t = X_{T_t}$ (on pose $Y_t = X_\infty$ sur $\{t > A_\infty\}$). La variable aléatoire $A_\infty \leq \infty$ est un temps d'arrêt de $\mathcal{G}$, et, sur l'intervalle $[\![0, A_\infty]\!]$, le processus Y est pour $\mathcal{G}$ une martingale dans V . Si θ est un champ mesurable, localement borné, de codiffuseurs sur V , on a l'égalité $\int_0^t\langle\theta, \mathcal{D}Y_s\rangle = \int_0^{T_t}\langle\theta, \mathcal{D}X_s\rangle$ sur $[\![0, A_\infty]\!]$, en particulier, la variation quadratique riemannienne de Y est la restriction à $[\![0, A_\infty]\!]$ du processus t.*

iv) *Si de plus X est à valeurs dans un compact de V , Y est une martingale dans V sur tout l'intervalle $[\![0, \infty]\!]$, l'intégrale $\int_0^t\langle\theta, \mathcal{D}Y_s\rangle$, définie sur tout cet intervalle, est constante sur $[\![A_\infty, \infty]\!]$, et la variation quadratique riemannienne de Y est le processus $t \longmapsto t \wedge A_\infty$.*

Dû à Darling [19], le (ii) est, historiquement, le premier théorème de convergence des martingales dans les variétés.

Démonstration de la proposition 2.7.1 :

(i) Si une semimartingale X dans V est constante sur $[\![S, T]\!]$, on a $\int\langle\Theta, \mathcal{D}X\rangle = \int\int\langle\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]}\Theta, \mathcal{D}X\rangle$ parce que le second membre satisfait les propriétés 2.3.1.(i) et 2.3.1.(ii) qui caractérisent le premier membre, en particulier, $\int\langle g, \mathcal{D}X\rangle$ est constante sur $[\![S, T]\!]$.

Réciproquement, si une martingale X est constante sur $[\![S,T]\!]$, soit f une fonction C^p à support compact. Par continuité et compacité, il existe une constante c telle que l'on ait
$-cg \leq Hessf \leq cg$ et $-cg \leq df.df \leq cg$ sur tout le support de f, donc partout, les deux intégrales $\int\langle Hessf,\mathcal{D}X\rangle$ et $\int\langle df.df,\mathcal{D}X\rangle$ ont donc une variation totale nulle sur $[\![S,T]\!]$, et sont constantes sur cet intervalle. Les formules 2.6.2 et 2.6.1 permettent d'écrire $f\circ X = f\circ X_0 + M + \int\langle Hessf,\mathcal{D}X\rangle$ où M est une martingale locale telle que $\frac{1}{2}[M,M] = \int\langle df.df,\mathcal{D}X\rangle$, donc constante sur $[\![S,T]\!]$,

finalement, $f\circ X$ est constante sur cet intervalle, et X aussi.

(ii) Si f est une fonction C^p à support compact, le même argument que ci-dessus montre que $f\circ X = f\circ X_0 + M + B$, où $[M,M]_\infty + \int_0^\infty |dB| \leq cA_\infty$. Sur $\{A_\infty < \infty\}$, la limite $(f\circ X)_\infty$ existe, et f étant arbitraire, X_∞ existe dans $V\cup\{\infty\}$.

(iii) Les temps d'arrêt $T_t = \inf\{s : A_s > t\}$ sont croissants et continus à droite en t, donc $\mathcal{G}$ est une filtration. Posons $S_t = \inf\{s : A_s \geq t\}$, on a $S_t \leq T_t$ et A est constant sur $[\![S_t,T_t]\!]$. Le processus Y est lui aussi continu à droite, et a pour limites à gauche $Y_{t^-} = X_{S_t}$, il est continu d'après (i). Pour $f\in C^p$, le processus $f\circ Y$ est pour $\mathcal{G}$ une semimartingale continue, et Y est une semimartingale dans V. L'égalité $\int_0^t\langle\theta,\mathcal{D}Y_s\rangle = \int_0^{T_t}\langle\theta,\mathcal{D}X_s\rangle$ résulte de ce que le membre de droite vérifie les propriétés 2.3.1.(i) et 2.3.1.(ii) qui caractérisent celui de gauche. En particulier, pour $\theta = \Gamma^*\sigma$, on voit que les intégrales d'Itô par rapport à Y proviennent par changement de temps de celles par rapport à X, et Y est une martingale.

(iv) C'est une conséquence du (iii), en remarquant que, sur $\{A_\infty < \infty\}$, X_∞ existe dans V d'après (ii), et X est une semimartingale jusqu'à l'infini.

■

Comme c'est déja le cas pour les martingales locales dans $\mathbb{R}^d$, si X est une martingale dans V pour une certaine filtration, c'est aussi une martingale pour sa filtration naturelle, cela se vérifie immédiatement sur la définition. En conséquence, sur l'espace canonique $c(\mathbb{R}_+,V)$ [3], muni comme d'habitude de la filtration engendrée par les coordonnées, le processus canonique est une martingale dans V pour la loi $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\circ X^{-1}$ de X. Le critére de tension ci-dessous, que je recopie de Kendall [6], étend aux variétés des résultats bien connus dans le cas vectoriel.

3. Rappelons que $c(\mathbb{R}_+,V)$ est un espace polonais, dont la topologie est celle de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$

Proposition 2.7.2. *Soit K un compact d'une variété V munie d'une connexion et d'une structure riemannienne g. Considérons toutes les martingales X dans V, à valeurs dans K, et dont la variation quadratique riemannienne vérifie*

$$2\int_s^t \langle g, \mathcal{D}X\rangle \leq t-s \textit{ pour tous } s \textit{ et } t \textit{ tels que } s \leq t.$$

L'ensemble des lois de ces martingales est tendu sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, V)$.

Démonstration de la proposition 2.7.2 : On commence par plonger V dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$ [4]. Appelons
$i : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un tel plongement. Appelons (bonne martingale) toute martingale X dans V, à valeurs dans K, et de variation quadratique riemannienne $2\langle g, \mathcal{D}X_t\rangle$ majorée par dt.

Pour vérifier que l'ensemble des lois des bonnes martingales X est tendu sur $C(\mathbb{R}_+, V)$, il suffit de vérifier que l'ensemble des lois des $i \circ X$ est tendu sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

À cet effet, nous allons appliquer le critére de Stroock et Varadhan [10]. Selon ce critére, il suffit d'établir que pour toute f de classe C^1 et à support compact sur $\mathbb{R}^n$, il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, le processus $f(u + (i \circ X)) + Ct$ soit une sous-martingale.

Appelons v^k les n coordonnées usuelles sur $\mathbb{R}^n$, par compacité et continuité, il existe une constante c telle que, sur K, on ait $d(v^k \circ i).d(v^k \circ i) \leq cg$ et $cg \leq Hess(v^k \circ i) \leq cg$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Pour toute bonne martingale X, la décomposition canonique $v^k \circ i(X_0) + M^k + B^k$ de $v^k \circ i(X)$ vérifie

$$\tfrac{1}{2}[M^k, M^k] = \int \langle d(v^k \circ i).d(v^k \circ i), \mathcal{D}X\rangle \text{ et } B^k = \int \langle Hess(v^k \circ i), \mathcal{D}X\rangle$$

donc aussi $d[M^k, M^k] \leq cdt$ et $|dB^k| \leq cdt$. Soit f de classe C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Il existe un nombre $\alpha < \infty$ tel que l'on ait $|D_k f(y)| \leq \alpha$ et $|D_{ij} f(y)| \leq \alpha$ pour tous i, j et k et pour tout y dans $\mathbb{R}^n$. Si X est une bonne martingale, la semimartingale

$$\begin{aligned} f(u + iX) = f(u + iX_0) \quad &+ \int D_k f(u + iX) dM^k \\ &+ \int D_k f(u + iX) dB^k + \frac{1}{2} \int D_{ij} f(u + iX) d[M^i, M^j] \end{aligned}$$

a pour partie à variation finie $R = \int D_k f(u + iX) dB^k + \frac{1}{2} \int D_{ij} f(u + iX) d[M^i, M^j]$, qui vérifie $|dR| \leq n\alpha cdt + \frac{1}{2} n^2 \alpha cdt$. Il suffit donc de poser $C = (n + \frac{1}{2} n^2)\alpha c$ pour que $f(u + iX) + Ct$ soit une sous-martingale locale, donc aussi une sous-martingale (elle est bornée sur tout intervalle [0,t]).

■

4. Le théorème de Whitney n'est pas ici nécessaire : il suffit de plonger un voisinage U de K, or on peut recouvrir U par un nombre fini q d'ouverts, chacun relativement compact dans le domaine d'une carte, et il est dès lors facile de plonger U dans $\mathbb{R}^{qd}$.

2.8 Variétés riemanniennes et mouvements browniens

Rappelons qu'une variété riemannienne est une variété équipée d'un champ g de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs. Dans une carte locale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, g s'écrit $g_{ij}dv^i.dv^j$, où les fonctions g_{ij} sont définies dans le domaine de la carte, de classe C^{p-1}, et forment en chaque point du domaine une matrice symétrique définie positive.

Partant d'une variété riemannienne, la première chose que font les géomètres, c'est la munir d'une connexion [5]. Ce serait indispensable si l'on voulait explorer les propriétés géométriques liées à g, mais tel n'est pas notre propos, et nous ne le ferons pas : nous nous donnerons sur V une structure riemannienne g et une connexion Γ sans postuler aucune relation entre ces deux structures. Comme nous utiliserons très peu la géométrie liée à g, ceci sera sans conséquence, mais les auditeurs devront toutefois se rappeler que les mouvements browniens, fonctions harmoniques, applications harmoniques définis dans cette section diffèrent un peu de ceux que l'on considère habituellement : pour retrouver la définition usuelle (qui est la seule raisonnable), il faut se restreindre au cas où la connexion dont on munit V est la connexion canoniquement associée à g.

Étant donnée une structure riemannienne g sur une variété V , chacun des espaces tangents T_xV est pourvu par la forme quadratique $\mathbf{Q}g(x)$(voir 1.5.6) d'une structure d'espace euclidien [6], ceci permet d'identifier T_xV et son dual T_x^*V , et d'identifier TV et T^*V (cette identification respecte leurs structures de variétés de classe C^{p-1}). Si f est une fonction sur V, le vecteur tangent correspondant au covecteur $df(x)$ est appelé gradient de f en x, et noté $\nabla f(x)$. Si A et B sont dans T_xV, leur produit scalaire euclidien sera noté $\langle A,B\rangle$, et la norme euclidienne $\sqrt{\langle A,A\rangle}$ de A sera noté $\|A\|$ La structure euclidienne de T_xV permet aussi de parler de la trace de toute forme bilinéaire ou quadratique sur T_xV, si θ est un codiffuseur en x purement d'ordre deux (c'est-à-dire tel que $\mathbf{R}\theta=0$), nous noterons Tr à la trace de la forme quadratique associée à θ par la proposition 1.5.6.

Dans une carte locale $(v^i)_{1\leq i\leq d}$, si l'on note g^{ij} les coefficients de la matrice inverse de la matrice formée par les g_{ij} , le produit scalaire s'écrit $\langle A\backslash B\rangle = g_{ij}A^iB^j$, le gradient ∇f vaut $g^{ij}D_ifD_j$ et la trace de $\theta=\theta_{ij}dv^i.dv^j$ est $Tr\theta = g^{ij}\theta_{ij}$.

Une convention de notation nous sera utile dans toute cette section : Si U est un processus,

5. dite connexion canonique, ou encore connexion de Levi-Civita, c'est l'unique connexion sans torsion pour laquelle $\nabla g=0$

6. espace de Hilbert réel, de dimension finie

nous noterons $\int Udt$ le processus dont la valeur à l'instant t est $\int_0^t U_s ds$, en d'autres termes, avec les notations précédant et en appelant I l'application identique de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même,$\int Udt$ n'est autre que $\int UdI$.

Lemme 2.8.1. *Soit X une semimartingale à valeurs dans une variété riemannienne (V, g). Il y a équivalence entre :*

(i) *pour toute fonction f dans $C^p(V)$,*

$$[f \circ X, f \circ X] = \int \|\nabla f\|^2 \circ X dt.$$

(ii) *pour toutes fonctions f et h dans $C^p(V)$,*

$$[f \circ X, h \circ X] = \int \langle \nabla f \backslash \nabla h \rangle \circ X dt.$$

(iii) *pour tout processus Θ de codiffuseurs purement d'ordre deux, au-dessus de X, prévisible et localement borné,*

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \frac{1}{2} \int Tr\Theta dt.$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la semimartingale X est normale.

Lorsque V est l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de sa structure riemannienne canonique, une semimartingale X est normale si et seulement si $[X^i, X^j]_t = \delta^{ij} t$ pour tout t. Plus généralement, si V a une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, X est normale si et seulement si $[v^i \circ X, v^j \circ X] = \int g^{ij} \circ X dt$

Preuve de lemme 3.2 (iii)$\Longrightarrow$ (i) s'obtient en prenant $\Theta = (df.df) \circ X$,

(i)$\Longrightarrow$(ii) résulte de la formule de polarisation $2df.dh = d(f + h).d(f + h) - df.df - dh.dh$, et de la formule analogue pour les crochets de semimartingales.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Si la formule (iii) est vraie pour Θ, elle est aussi vraie pour $H\Theta$, où H est n'importe quel processus réel, prévisible et localement borné. Cette remarque, jointe à la linéarité en Θ, permet de se ramener au cas où Θ est nul quand X est hors d'un compact inclus dans le domaine d'une carte locale. Dans ce cas, il suffit d'écrire $\Theta = \Theta_{ij} dv^i.dv^j$, où les processus Θ_{ij} sont prévisibles et localement bornés, et d'appliquer l'hypothèse (ii) à v^i et v^j.

■

Exemple 2.8.1. *La variation quadratique riemannienne d'une semimartingale normale vaut $d \times t$ (où d est la dimension), si d = 1, la réciproque est vraie : toute semimartingale de variation quadratique riemannienne t est normale.*

Proposition 2.8.1. *Soit V une variété munie d'une structure riemannienne g et d'une connexion Γ. Si X est une semimartingale dans V, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est une martingale (pour Γ) et X est normale (pour g).*

(ii) *pour toute fonction $f \in C^2(V)$, le processus $f \circ X - f(X_0) - \frac{1}{2}\int TrHessf \circ Xdt$ est une martingale locale.*

Les semimartingales vériffiant ces conditions sont appelées des mouvements browniens.

Lorsque Γ est la connexion canoniquement associée à g, l'opérateur différentiel $f \longmapsto TrHessf$ est appelé laplacien sur (V,g), ou opérateur de Laplace-Beltrami sur (V,g), et traditionnellement noté Δ. Mais dans le cadre moins contraignant où nous nous plaçons, il est préférable de le laisser sous la forme $TrHess$, pour rappeler que la connexion est arbitraire, et aussi pour bien mettre en évidence les rôles de g (via la trace) et de Γ (via la hessienne) dans sa déffinition. En coordonnées locales, cet opérateur s'écrit bien sûr $g^{ij}(D_{ij} - \Gamma^k_{ij}D_k)$.

C'est un opérateur elliptique, et la théorie des diffusions, ou un argument d'équations differentielles stochastiques, permet de démontrer l'existence (sur un espace filtré convenable) et l'unicité en loi du mouvement brownien issu d'un point donné, mais avec une trés importante restriction : le temps d'arrêt prévisible $\imath$ où le processus quitte tout compact de V peut être fini, et le mouvement brownien n'est défini que sur l'intervalle $[0, \imath]$ (penser par exemple au cas où V est un ouvert strict de $\mathbb{R}^d$).

Démonstration de la proposition 2.8.1 : (i) $\Longrightarrow$ (ii). Puisque X est une martingale, l'intégrale d'Itô $\int \langle df, d_\Gamma X\rangle$ est une martingale locale, et la formule d'Itô 2.6.2 s'écrit

$$\int f \circ X - f(X_0) = martingale \quad locale \quad + \int \langle Hessf, \mathcal{D}X\rangle$$

Puisque X est normale, 2.7.2.(iii) donne $\int \langle Hessf, \mathcal{D}X\rangle = \frac{1}{2}\int TrHessf \circ Xdt$, d'où (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Pour toute fonction f,

$$TrHess(f^2) = Tr(2fHessf + 2df.df) = 2fTrHessf + 2\|\nabla f\|^2$$

on en tire

$$f^2 \circ X - f^2(X_0) = martingale \quad locale \quad + \int (fTrHessf) \circ Xdt + \int \|\nabla f\|^2 \circ Xdt.$$

Mais par ailleurs

$$\begin{aligned} f^2 \circ X - f^2(X_0) &= 2\int (f \circ X)d(f \circ X) + [f \circ X, f \circ X] \\ &= martingale \quad locale + \int (f \circ X)(TrHessf \circ X)dt + [f \circ X, f \circ X] \end{aligned}$$

comparant ces deux formules, on obtient l'égalité entre processus croissants

$$\int \|\nabla f\|^2 \circ X dt = [f \circ X, f \circ X]$$

qui montre que X est normale. L'égalité 2.7.2.(iii) fournit

$$\int \langle Hessf, \mathcal{D}X \rangle = \frac{1}{2} \int TrHessf \circ X dt$$

et X est une martingale d'après 2.6.3.

■

Chapitre 3

Quelques exemples et applications

3.1 Exemples : calcul stochastique dans les sphères

Exemple 3.1.1. *(Mouvement brownien sur le cercle) Le plus simple variété compacte est le cercle*

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Soit W un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. Ensuite, le mouvement brownien sur $\mathbb{S}^1$ est donnée par $X_t = e^{iw_t}$.

Exemple 3.1.2. *(Mouvement brownien sur une sphère)*

$$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x|^2 = 1\}$$

la d-sphère plongée dans $\mathbb{R}^{d+1}$. La projection à la sphère tangente à x est donnée par

$$P(x)\xi = \xi - \langle \xi, x\rangle x, \text{ avec } x \in \mathbb{S}^d \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^{d+1}$$

Par conséquent, la matrice $P(x)$ est

$$P(x)_{ij} = \delta_{ij} - x_i x_j.$$

Un mouvement brownien sur $\mathbb{S}^d$ est la solution de l'équation

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t (\delta_{ij} - X_s^i X_s^j) \circ dW_s^j, X_0 \in \mathbb{S}^d.$$

Ceci est la représentation Stroock du mouvement brownien sphérique.

Notre prochain exemple est le mouvement brownien sur une variété radialement symétrique. Une telle variété sert souvent de modèles pour comparer des mouvements browniens sur différentes variétés.

La conclusion importante est que la partie radiale de mouvement brownien sur une telle variété est un processus de diffusion sur $\mathbb{R}_+$ généré par le Laplacien radial, tandis que la partie angulaire est un mouvement brownien sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ indépendant du processus radial, mais en cours d'exécution sur une nouvelle horloge de temps défini par le processus radial. Ainsi, les propriétés probabilistes d'un tel mouvement brownien sont essentiellement déterminée par son processus radial.

Le paramètre géométrique est le suivant. Dans les coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ déterminé par la carte exponentielle à son pôle, la métrique d'un radialement variété symétrique a la forme spéciale

$$ds^2 = dr^2 + G(r)^2 d\theta^2,$$

où $d\theta^2$ désigne la métrique riemannienne standard sur $\mathbb{S}^{d-1}$ et G est une fonction lisse sur un intervalle $[0, D)$ satisfaisant $G(0) = 0$, $G'(0) = 1$. Les variétés de courbure constante K sont des exemples de ces variétés, où

$$G(r) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{K}r}{\sqrt{K}}, & K \geq 0\,; \\ \frac{\sinh\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}}, & K < 0. \end{cases}$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami est de la forme

$$\triangle_M = L_r + \frac{1}{G(r)^2}\triangle_{\mathbb{S}^{d-1}}$$

où L_r est le laplacien radiale

$$L_r = (\frac{\partial}{\partial r})^2 + (d-1)\frac{G'(r)}{G(r)}\frac{\partial}{\partial r} \tag{3.1}$$

Exemple 3.1.3. *(Mouvement brownien sur une variété radialement symétrique)*

Soit $X_t = (r_t, \theta_t)$ un mouvement brownien sur une variété radialement symétrique M écrite en coordonnées polaires. L'application de la propriété de martingale du mouvement brownien X à la fonction de distance $f(r, \theta) = r$ et en utilisant (3.1), nous avons

$$r_t = r_0 + \beta_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{G'(r_s)}{G(r_s)}ds \tag{3.2}$$

où β_t est une martingale locale dont la variation quadratique est

$$\langle \beta, \beta \rangle_t = \int_0^t \Gamma(r, r)(X_s)ds$$

Puisque

$$\Gamma(r, r) = |\nabla r|^2 = 1$$

nous avons $\langle \beta, \beta \rangle_t = t$ *est donc un mouvement brownien de dimension 1. ça suit que le processus radial est un processus de diffusion généré par la direction radiale Laplacien* L_r. *Nous regardons maintenant le processus angulaire. Soit* $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$. *Puis, à partir de (3.1),*

$$f(\theta_t) = f(\theta_0) + M_t^f + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\triangle_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\theta_s)}{G(r_s)^2} ds \tag{3.3}$$

pour M^f *une martingale locale.*

Définir une nouvelle échelle de temps

$$l_t = \int_0^t \frac{ds}{G(r_s)^2} \tag{3.4}$$

et laissez $\{\tau_t\}$ *l'inverse de* $\{l_t\}$. *Soit* $z_t = \theta_{\tau_t}$. *Ensuite (3.3) devient*

$$f(z_t) = f(z_0) + M_{\tau_t}^f + \frac{1}{2} \int_0^t \triangle_{\mathbb{S}^{d-1}} f(z_s) ds$$

puisque $t \longrightarrow M_{\tau_t}^f$ *est encore une martingale locale (adaptée au changement de temps filtration), on voit que le processus changement temps angulaire* $t \longrightarrow z_t = \theta_{\tau_t}$ *est un mouvement brownien sur* $\mathbb{S}^{d-1}$.

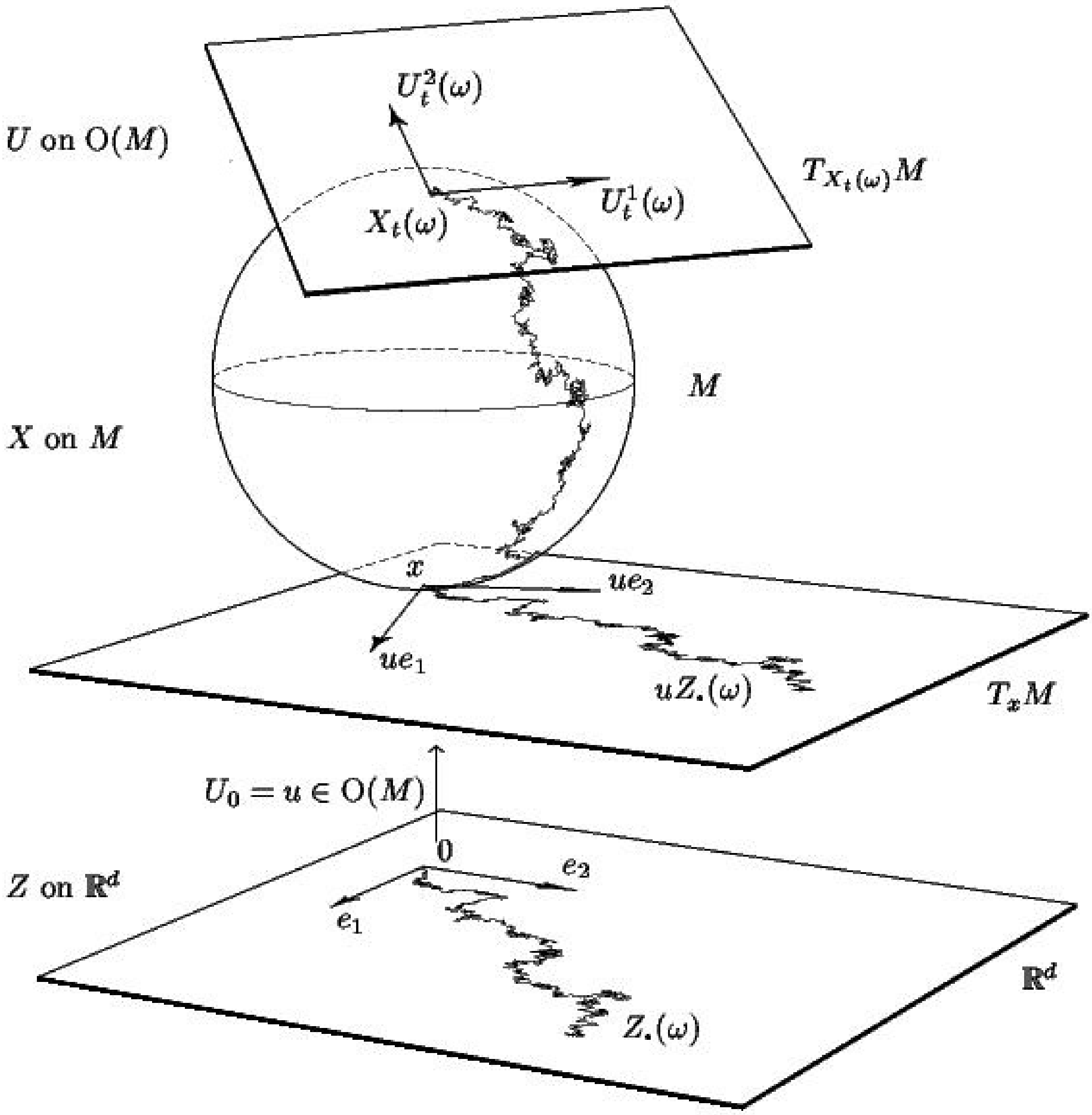

FIGURE 3.1 – le dessin suivant explique le mouvement browienn dans la variété différentille M (un espase euclidien), c'est une sphère de dimension 3 avec $T_{X_t(\omega)}M$ c'est l'espace tangent en point $X_t(\omega)$

3.2 Applications

3.2.1 Applications affines

Définition 3.2.1. *Soient Γ_V et Γ_W deux connexions sur des variétés V et W respectivement. Si x est un point de V, une application $\phi \in C^2(V,W)$ est affine au point x si l'on a $\phi_{*x}(\Gamma_V L) = \Gamma_W(\phi_{*x}L)$ pour tout $L \in \mathbb{T}_x V$, ou encore, de façon équivalente, $\phi_x^*(\Gamma_W^*\sigma) = \Gamma_V^*(\phi_x^*\sigma)$ pour tout $\sigma \in T^*_{\phi(x)}W$. Elle est affine si elle est affine en tout point x de V.*

Il n'existe en général pas d'applications affines non constantes d'une variété dans une autre. Une importante exception est le cas où V est $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$: une courbe à valeurs dans W est une application affine (l'intervalle de définition étant muni de la connexion plate) si et seulement si c'est une géodésique.

Même dans le cas où V est une sous-variété de $W = \mathbb{R}^q$ et où Γ_V est la connexion induite par l'inclusion i et une structure euclidienne sur W, l'application i n'est en général pas affine. En effet, elle ne transforme pas les géodésiques de V en mouvements uniformes dans W, alors que, comme nous allons le voir, ce serait une condition nécessaire (et suffisante) d'affinité. Plus généralement, si l'on se donne ϕ et Γ_W, il n'existe en général pas de connexion Γ_V rendant ϕ affine.

Lemme 3.2.1. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \longrightarrow V$ une courbe dans V telle que $\gamma \circ M$ soit une martingale dans V pour toute martingale locale réelle M à valeurs dans I. La courbe γ est une géodésique.*

Preuve de lemme 3.2.1 : Soit σ un champ de covecteurs sur V, $\tau = \gamma^*\Gamma^*\sigma$ est un champ de codiffuseurs sur I, que l'on peut écrire $\tau = a(t)d^2t + b(t)dt.dt$, où les fonctions a et b sur I sont données par $a = \langle \tau, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$ et $b = \langle \tau, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rangle$. Pour toute martingale locale M dans I,

$$\begin{aligned}\int (a(M)dM + \frac{1}{2}b(M)d[M,M]) &= \int \langle \tau, \mathcal{D}M\rangle = \int \langle \gamma^*\Gamma^*\sigma, \mathcal{D}M\rangle \\ &= \int \langle \Gamma^*\sigma, \mathcal{D}(\gamma \circ M)\rangle = \int \langle \sigma, d_\Gamma(\gamma\circ M)\rangle\end{aligned}$$

est par hypothèse une martingale locale, donc $\int b(M)d[M,M] = 0$. En prenant pour M un mouvement brownien changé de temps de façon à quitter tout compact de I quand t tend vers l'infini, on obtient $\int b(M)dt = 0$, et, b étant continu, $b = 0$ sur I. Ceci s'écrit $\langle \tau, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\rangle = 0$, ou encore $\langle \sigma, \Gamma\ddot{\gamma}\rangle = 0$ puisque $\gamma_*(\frac{\partial^2}{\partial t^2}) = \ddot{\gamma}$. Comme σ est arbitraire, $\Gamma\ddot{\gamma}$ est nul, et γ est une géodésique.

■

Proposition 3.2.1. *Pour qu'une application soit affine, il faut et il suffit qu'elle transforme les géodésiques (respectivement martingales) de V en géodésiques (respectivement martingales) de W.*

Démonstration de la proposition 3.2.1 En trois étapes. Dans un premier temps, nous allons vérifier que les applications affines transforment les martingales en martingales. Soit ϕ affine. Si X est une semimartingale dans V , et si Σ est un processus prévisible, localement borné de covecteurs sur W au-dessus de $\phi \circ X$, on a, en utilisant la définition de l'intégrale d'Itô et la proposition 2.6.6,

$$\begin{aligned}\int \langle \Sigma, d_{\Gamma_W}(\phi \circ X)\rangle &= \int \langle \Gamma_W^* \Sigma, \mathcal{D}(\phi \circ X)\rangle = \int \langle \phi^* \Gamma_W^* \Sigma, \mathcal{D}X\rangle \\ &= \int \langle \Gamma_V^* \phi^* \Sigma, \mathcal{D}X\rangle = \int \langle \phi^* \Sigma, d_{\Gamma_V} X\rangle\end{aligned}$$

Ensuite, nous allons établir que si ϕ transforme les martingales en martingales, elle transforme aussi les géodésiques en géodésiques. Soit γ une géodésique de V, définie sur un intervalle ouvert I. Comme γ est affine de I dans V, l'étape précédente montre que $\gamma \circ M$ est une martingale dans V pour toute martingale locale M dans I. En utilisant l'hypothèse sur ϕ, on obtient que $\phi \circ \gamma \circ M$ est une martingale dans W, et d'après le lemme 3.2.1, la courbe $\phi \circ \gamma$ est une géodésique de W.

Enfin, si ϕ transforme les géodésiques en géodésiques, elle est affine. Pour le montrer, il suffit grâce au lemme 3.2.1 de vérifier que $\phi_{*x}\Gamma_V \ddot{c}(0) = \Gamma_W \phi_{*x}\ddot{c}(0)$ pour tout x de V et toute courbe c dans V telle que $c(0) = x$. Mais il existe une géodésique γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = \dot{c}(0)$. Puisque les courbes c et γ ont même vitesse en $t = 0$, le lemme 3.2.1 dit que leurs accélérations $\ddot{c}(0)$ et $\ddot{\gamma}(0)$ diffèrent d'un vecteur : il existe $A \in T_xV$ tel que $\ddot{c}(0) = \ddot{\gamma}(0) + A$. Comme γ est une géodésique, on a

$$\phi_{*x}\Gamma_V \ddot{c}(0) = \phi_{*x}\Gamma_V(\ddot{\gamma}(0) + A) = \phi_{*x}\Gamma_V \ddot{\gamma}(0) + \phi_{*x}A = \phi_{*x}A$$

et de même, en utilisant le fait que $\phi \circ \gamma$ est une géodésique,

$$\begin{aligned}\Gamma_W \phi_{*x}\ddot{c}(0) &= \Gamma_W \phi_{*x}(\ddot{\gamma}(0) + A) = \Gamma_W \phi_{*x}\ddot{\gamma}(0) + \Gamma_W \phi_{*x}A \\ &= \Gamma_W \phi \ddot{\circ} \gamma(0) + \phi_{*x}A = \phi_{*x}A\end{aligned}$$

L'égalité annoncée est ainsi établie.

$\blacksquare$

3.2.2 Applications harmoniques

Définition 3.2.2. *Soient (V,g,Γ) une variété munie d'une structure riemannienne et d'une connexion, et (W,$\bar{\Gamma}$) une variété munie d'une connexion. Une application $h \in C^2(V, W)$ est harmonique si l'on a*

$$Tr[h^* \overline{Hess} f] = Tr Hess(f \circ h)$$

pour toute $f \in C^2(W)$, où le symbole $Hess$ désigne la hessienne sur W pour la connexion $\bar{\Gamma}$, Tr et Hess provenant de g et Γ.

On voit que toute application affine de (V,Γ) dans $(W,\bar{\Gamma})$ est harmonique (pour n'importe quelle g), mais la réciproque est fausse (sauf si V est unidimensionnelle). Alors qu'il n'existe en général pas, même localement, d'application affine non constante de V dans W, il n'en va pas de même pour les applications harmoniques : si l'on se fixe un point x dans V, un point y dans W et une application linéaire ϕ de T_xV dans T_yW, il existe toujours au moins une et souvent une infinité d'application harmonique h définie au voisinage de x, telle que $h(x) = y$ et que $h_{*x} = \phi$.

Le cas qui suscite le plus d'intérêt de la part des géomètres est celui où V et W sont toutes deux riemanniennes, et munies de leurs connexions canoniques, les applications harmoniques sont alors, localement, les extrémales d'une certaine fonctionnelle d'énergie.

Proposition 3.2.2. *Soient V une variété munie d'une structure riemannienne g et d'une connexion Γ, et W une variété munie d'une connexion $\bar{\Gamma}$. Une application $h \in C^2(V,W)$ est harmonique si et seulement si, pour tout mouvement brownien X dans V, défini sur un intervalle stochastique prévisible $[\![0,\zeta[\![$, la semimartingale $h \circ X$ est une martingale sur $[\![0,\zeta[\![$.*

Remarque 3.2.1. *Nous n'avons pas rigoureusement introduit les notions de semimartingales, intégrales stochastiques, martingales, définies seulement sur un intervalle prévisible $[\![0,\zeta[\![$ (la démonstration de 2.3.1 est déjà bien assez pénible comme ça !) ; mais toute la théorie s'étend sans difficulté à cette situation. Pour éviter d'avoir à tout rééecrire, le plus simple est de ramener le cas ζ quelconque au cas $\zeta \equiv \infty$ par un changement de temps. Pour référence ultérieure, en voici un énoncé formel (nous admettrons ce résultat de théorie générale des processus)*

Lemme 3.2.2. *[52] Sur un espace filtré $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ soit ζ un temps d'arrêt prévisible strictement positif. Il existe un processus croissant (adapté) continu A, à valeurs dans $[0,\infty]$, fini et strictement croissant sur ,$[\![0,\zeta[\![$ issu de 0 et tel que $lim_{t\uparrow\uparrow\zeta} A_t = \infty$*

Bien entendu, les mouvements browniens ne sont pas stables par changement de temps, et, pour utiliser ce lemme, il faudra travailler simultanément dans les deux échelles de temps : l'échelle vraie , dans laquelle sont définis les semimartingales normales et les mouvements browniens, et une échelle fictive, dans laquelle le temps d'explosion ζ est repoussé à l'infini. Nous verrons un exemple de multiples allers-retours entre ces deux échelles dans la démonstration de la proposition 1.5.3.

Démonstration de la proposition 3.2.2 : Remarquons tout d'abord que si X est un mouvement brownien dans V, défini sur $[\![0,\zeta[\![$ et si f est une fonction C^2 sur W, en posant $Y = h \circ X$, on a toujours sur $[\![0,\zeta[\![$

$$\frac{1}{2}\int Tr(h^*\overline{Hess}f) \circ X dt = \int \langle \overline{Hess}f, \mathcal{D}Y\rangle$$

est sur $[\![0,\zeta[\![$ la partie à variation finie de la semimartingale $(f \circ Y)$, c'est-à-dire de $(f \circ h) \circ X$, d'où

$$\frac{1}{2}\int Tr(h^{*}\overline{Hess}f) \circ X dt = \int TrHess(f \circ h) \circ X dt$$

sur $[\![0,\zeta[\![$ En posant $g = Tr(h^{*}\overline{Hess}f - Hess(f \circ h))$, ceci devient $\int g \circ X dt = 0$ sur .$[\![0,\zeta[\![$ Pour presque tout ω, on a donc $\int_0^t g(X_s)ds = 0$ pour tout t assez petit. Fixant un tel ω et dérivant en t = 0, on obtient par continuité $g(x) = 0$, comme x est arbitraire, h est harmonique.

Voici un exemple de résultat non probabiliste obtenu à l'aide de la théorie des martingales dans les variétés. C'est un théorème de Kenda [10] et [31] , qui montre comment une hypothèse de nature potentialiste (toutes les fonctions harmoniques bornées sur V sont constantes) a des conséquences sur les applications harmoniques de V dans une autre variété.

■

Théorème 3.2.1. *Soit V une variété pourvue d'une structure riemannienne g et d'une connexion* Γ. *On suppose que les fonctions* $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *harmoniques (c'est à dire vériffiant* $TrHess\, u = 0$) *et bornées sont constantes.*

Soit W une variété munie d'une connexion $\bar{\Gamma}$. *On suppose que pour tout* $y \in W$, *il existe une fonction* C^2 *et convexe* $\phi : W \longrightarrow [0,1]$ *telle que* $\{\phi = 0\} = \{y\}$. *On suppose aussi que toutes les martingales à valeurs dans W convergent p.s. Toute application harmonique de V dans W est constante.*

Remarque 3.2.2. a) *En taxant de potentialiste l'hypothèse de constance des fonctions harmoniques bornées sur V, j'exagère un peu. En effet, ce qui sera utilisé dans la démonstration, c'est que toutes les fonctions réelles bornées qui transforment les mouvements browniens sur V en martingales (appelons ces fonctions finement harmoniques) sont constantes, qu'elles soient ou non* C^2. *Cela est en réalité sans conséquence, car il est vrai que ces fonctions sont automatiquement* C^p. *Mais, si l'auditeur ne désire pas admettre ce résultat, le plus simple est sans doute de remplacer simplement harmoniques par finement harmoniques dans l'hypothèse sur V, qui devient alors de nature probabiliste, et en apparence plus forte, bien qu'en fait équivalente.*

b) *De même, et pour la même raison, on peut renforcer la conclusion, en y remplaçant application harmonique par application finement harmonique, c'est-à-dire application non nécessairement* C^2, *mais transformant les mouvements browniens en martingales. Comme dans le cas des fonctions réelles, on n'a en réalité rien gagné, car les applications finement harmoniques sont* C^p. *Ce théorème de régularité des applications finement harmoniques est dû à Kendall [13], pour une démonstration entièrement probabiliste, voir aussi Arnaudon, Li et Thalmaier [8].*

c) *L'hypothèse selon laquelle chaque point de W est l'unique minimum d'une fonction convexe bornée est toujours localement réalisée : dans une variété avec connexion, tout point a un voisinage ouvert W ayant cette propriété. Cette hypothèse est une façon d'exiger que la variété W ne soit pas trop grande, par exemple, Kendall établit dans [52] que cette condition est satisfaite lorsque W est un ouvert relativement compact dans un hémisphère de dimension d, mais ne l'est pas si W est un hémisphère ouvert de dimension d. Plus généralement, il établit que dans une variété riemannienne pourvue de sa connexion canonique, toute boule*

$B(x, r)$ ne rencontrant pas le cut-locus de x et sur laquelle toutes les courbures sectionnelles κ vérifient$\kappa t < \frac{1}{2}\pi$, remplit cette condition d'existence de fonctions convexes. C'est le cas, par exemple, de tout ouvert W relativement compact dans une variété de Cartan-Hadamard.

Il est clair que cette hypothèse est toujours vérifiée si W admet une séparante bornée ϕ (poser alors $\phi(z) = \psi(y, z)$), on peut se demander si la réciproque est vraie.

d) *Enfin, la seconde hypothèse sur W, la convergence des martingales, est presque une conséquence de la première : selon la proposition, la convergence des martingales a lieu dès qu'il existe une fonction définie-convexe sur une variété dans laquelle W est relativement compacte.*

Démonstration du théorème 3.2.1 : tout point x de V, on peut associer un mouvement brownien X à valeurs dans V, issu de x, défini jusqu'à son temps d'explosion ζ, la loi du couple (ζ, X) ne dépend que de x. Le processus $M = h \circ X$ est défini sur l'intervalle $[\![0, \zeta[\![$ et est une martingale dans W sur cet intervalle. L'hypothèse de convergence des martingales dans W permet d'affirmer que la limite $M_\zeta = \lim_{t \uparrow\uparrow \zeta} M_t$ existe p.s. (il suffit de renvoyer ζ à l'infini à l'aide du lemme 3.2.2).

Si l'on fixe un borélien A de W, la probabilité $\mathbb{P}[M_\zeta \in A]$ ne dépend que de la loi de (ζ, X), c'est donc une fonction de x, que nous noterons $u^A(x)$.

Si T est un temps d'arrêt tel que $T < \zeta$, la propriété forte de Markov pour la diffusion X donne $u^A \circ X_T = \mathbb{P}[M_\zeta \in A \backslash \mathcal{F}_T]$ ce. Ceci entraîne que $\mathbb{E}[u^A \circ X_T] = u^A(x)$, donc $u^A \circ X$ est une martingale locale sur $[\![0, \zeta[\![$ (rappelons qu'un processus adapté N sur $[0, \infty[$ est une martingale si $\mathbb{E}[N_S]$ est constante lorsque S décrit les temps d'arrêt bornés, on se ramène à ce critère par le changement de temps 3.2.2). En conséquence, la fonction u^A est harmonique, l'hypothèse faite sur V entraîne qu'elle est constante.

Ceci a deux conséquences. D'abord, la loi de M_ζ ne dépend pas de x, ensuite, pour $T < \zeta$, $[M_\zeta \in A \backslash \mathcal{F}_T] = [M_\zeta \in A]$, en prenant une suite de temps d'arrêt qui annonce, on obtient à la limite $\mathbb{1}_A \circ M_\zeta = [M_\zeta \in A]$, et la variable aléatoire M_ζ est déterministe. Il existe donc un point y de W tel que $M_\zeta = y$ p.s., et cet y ne dépend pas de x.

Nous savons qu'il existe sur W une fonction ϕ convexe, C^2, bornée, nulle au point y et strictement positive sur $W\backslash\{y\}$. Le processus $\phi \circ M$ est une sous-martingale locale positive sur $[\![0, \zeta]\!]$, de limite $M_\zeta = \phi(y) = 0$. Le changement de temps du lemme 3.2.2 le transforme en une sous-martingale bornée, positive et de limite nulle, donc identiquement nulle. Sa valeur initiale, $\phi(h(x))$ est zéro, comme ϕ ne s'annule qu'en y, on en tire $h(x) = y$, et h est constante.

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on a donné la première esquisse de la notion de calcul stochastique dans les variétés différentiables, on a commencer par la définition de la semimartingale dans une variété et nous avons appliqué un calcul stochastique très général, c'est l'intégration stochastique des codiffuseurs le long de semimaringale, et l'intégrale de strachonovich comme une intégrale des covecteurs le long de la semimartingale, ensuite on est allé plus loin en considérant une variété muni d'une connextion, en suite on a introduit l'intégrale d'itô et la formule d'itô géométrique, et on a effectué des calculs avec la métrique identité dans la variété, d'aprés le choix de la métrique riemannienne, on a définit les mouvements browniens en se servant de la définition des martingales et les semimaringales normales.

Pour bien illustré la théorie dans ce mémoire, nous avons présénté des exemples d'applications tels que le mouvement browienne dans le cercle comme une variété compacte de dimension 1 inclue dans $\mathbb{R}^2$, ensuite dans la sphère de dimension d inclue dans un espace euclidien de dimension $d + 1$ et plus généralement, Le Mouvement brownien sur une variété radialement symétrique, pour lequel on a appliqué la formule d'Itô géométrique pour le deux composants de processus $X_t = (r_t, \theta_t)$. Plus loin que ça, on a donné un exemple d'application harmonique, cette application très élémentaire mais typique d'application des martingales à une question d'analyse dans les variétés. Il s'agit du comportement des applications harmoniques (ce sont les solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles) d'une variété dans une autre. Par ailleurs, il n'existe en général pas d'applications affines non constantes d'une variété dans une autre. Pour cela, une importante exception est le cas où V est $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$: une courbe à valeurs dans W est une application affine (l'intervalle de définition étant muni de la connexion plate) si et seulement si c'est une géodésique.

Comme perspectives, nous nous serions intéréssés aux calculs stochastiques dans les variétés différentiables pour des processus n'étant pas des semimartingles, comme par exemple, le mouvement browien fractionnaire, les processus de Rosemblatt et plus généralement les processus d'Hermite.

On peut aussi se mettre dans un cadre stochastique pour étudier le comportement des trajectoires des applications biharmoniques et même φ-harmoniques.

Bibliographie

[1] M. Arnaudon. *Connexions et martingales dans les groupes de Lie.* Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526, Springer, 1992.

[2] M. Arnaudon. *Caractéristiques locales des semi-martingales et changements de probabilités.* Séminaire de Probabilités XXVIII, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer, 1994.

[3] M. Arnaudon. *Dédoublement des variétés à bord et des semi-martingales.*Stochastics and Stochastics Reports 44, 43-63, 1993.

[4] M. Arnaudon. *Propriétés asymptotiques des semi-martingales à valeurs dans les variétés à bord continu.* Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557, Springer, 1993.

[5] M. Arnaudon. *Espérances conditionnelles et $\mathcal{C}$-martingales dans les variétés.* Séminaire de Probabilités XXVIII, Lecture Notes in Mathematics 1583, Springer, 1994.

[6] M. Arnaudon. *Barycentres convexes et approximations des martingales continues dans les variétés.*. Séminaire de Probabilités XXIX, Lecture Notes in Mathematics 1613, Springer, 1995.

[7] M. Arnaudon. *Differentiable and analytic families of continuous martingales in manifolds with connection.* Probability Theory and Related Fields 108, 219-257, 1997.

[8] M. Arnaudon. *Manifold-valued martingales, change of probabilities, and smoothness of Finely harmonic maps.* Prépublication.

[9] M. Arnaudon et A. Thalmaier. *Stability of stochastic differential equations in manifolds.* Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Mathematics 1686, Springer, 1998.

[10] M. Arnaudon et A. Thalmaier. *Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields.* J. Math. Pures et Appliquées 77, 283-315, 1998.

[11] J.M. Bismut. *Mécanique aléatoire.* Lecture Notes in Mathematics 866, Springer, 1981.

[12] H. Cartan. *Calcul différentiel.* Hermann, 1967.

[13] P. J. Catuogno.. *Second order connections and stochastic calculus.* Prépublication, Instituto de Matemàtica, Universidade Estadual de Campinas, Brésil.

[14] S. Cohen. *Géométrie différentielle stochastique avec sauts. I.* Stochastics and Stochastics Reports 56, 179-203, 1996.

[15] S. Cohen. *Géométrie différentielle stochastique avec sauts. II. des EDS avec sauts* Stochastics and Stochastics Reports 56, 205-225, 1996.

[16] R.W.R. Darling. *Martingales on Manifolds and Geometric Itô Calculus.* Ph. D. Thesis 866, University of Warwick, 1982.

[17] R.W.R. Darling. *Martingales in manifolds.* Definition, examples and behaviour under maps. Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer, 1982.

[18] R.W.R. Darling. *A martingale on the imbedded torus. Bull.* London Math. Soc. 15, 221-225,1983

[19] R.W.R. Darling. *Convergence of martingales on a Riemannian manifold.* Publ. R.I.M.S. Kyoto University 19, 753-763, 1983.

[20] T.E. Duncan. *Stochastic integrals in Riemannian manifolds.* J. Multivariate Anal. 6, 397-413, 1976.

[21] T.E. Duncan. *Some geometric methods for stochastic integration in manifolds.* Geometry and Identification 63-72, Lie Groups : Hist., Frontiers and Appl. Ser B, 1, Math. Sci. Press, Brookline, 1983.

[22] M. Èmery. En marge de l'exposé de Meyer. *Géométrie différentielle stochastique.* Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer, 1982.

[23] M. Èmery. *Convergence des martingales dans les variétés.* Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Volume 2, Astérisque 132, Société Mathématique de France, 1985.

[24] M. Èmery. *En cherchant une caractérisation variationnelle des martingales.* Séminaire de Probabilités XXII, Lecture Notes in Mathematics 1321, Springer, 1988.

[25] M. Èmery. *Stochastic Calculus in Manifolds.* With an appendix by P. A. Meyer. Universitext, Springer, 1989.

[26] M. Èmery. *On two transfer principles in stochastic differential geometry.* Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer, 1990.

[27] M. Èmery et G. Mokobodzki *Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété.* Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics 1485, Springer, 1991. (Addendum dans le Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics LNM 1526, Springer, 1992.)

[28] M. Èmery. *Fonctions convexes et semimartingales dans une variété.* Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics 1059, Springer, 1984.

[29] W.S. Kendall. *Stochastic differential geometry, a coupling property, and harmonic maps.* J. London Math. Soc. 33, 554-566, 1986.

[30] W.S. Kendall. *Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property.* Stochastics 19, 111-129, 1986

[31] W.S. Kendall. *Stochastic differential geometry. Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society.* Vol. 1, 515-524, VNU Sci. Press, Utrecht, 1987.

[32] W.S. Kendall. *Stochastic differential geometry : an introduction.* Acta Appl. Math. 9, 29-60, 1987.

[33] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque.* Hermann, 1972

[34] P. A. Meyer. *Un cours sur les intégrales stochastiques.* Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer, 1976.

[35] P. A. Meyer. *A differential geometric formalism for the Itô calculus. Stochastic Integrals, Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium, .* Lecture Notes in Mathematics 851, Springer, 1981.

[36] P. A. Meyer. *Géométrie différentielle stochastique (bis).* Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer, 1982.

[37] P. A. Meyer. *Le théorème de convergence des martingales dans les variétés riemanniennes, d'après R.W. Darling et W.A. Zheng.* Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes in Mathematics 986, Springer, 1983.

[38] P. A. Meyer.. *Géométrie différentielle stochastique.* Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Volume 1, Astérisque 131, Société Mathématique de France, 1985.

[39] P. A. Meyer.. *Qu'est-ce qu'une différentielle d'ordre n ?.* Exposition. Math. 7, 249-264, 1989.

[40] G. de Rham. *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques.* Hermann, 1960

[41] L. Schwartz. *Semi-martingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes.* Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics 780, Springer, 1980.

[42] L. Schwartz. *Géométrie différentielle du 2 ordre, semimartingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle.* Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921, Springer, 1982.

[43] L. Schwartz. *Semimartingales and their Stochastic Calculus on Manifolds.* Presses de l'Universit é de Montréal, 1984.

[44] L. Schwartz. *Construction directe d'une diffusion sur une variété.* Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Mathematics 1123, Springer, 1985.

[45] L. Schwartz. *Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités. Aspects of Mathematics and its Applications,.* Collected Papers in Honour of Leopoldo Nachbin, 689-725, 1986.

[46] L. Schwartz. *Compléments sur les martingales conformes* Osaka J. Math. 23, 77-116, 1986.

[47] L. Schwartz. *Les différentielles de semimartingales vraies, sections de Fibrés vectoriels.* J. Geom. Phys. 5, 137-148, 1988.

[48] L. Schwartz. *W.A.Calcul infinitésimal stochastique.* Analyse mathématique et applications.

[49] D.W. Stroock et S.R.S. Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer, 1979.

[50] A. Thalmaier. *Brownian motion and the formation of singularities in the heat equation for harmonic maps.* Probability Theory and Related Fields 105, 335-367, 1996..

[51] M. Arnaudon. *Geometric Modeling in Probability and Statistics.* Springer

[52] Michel Emery *Martingales continues dans les variétés différentiables..* 1999.

[53] Elton P. Hsu. *Stochastic Analysis On Manifolds.* 65, 81-96, 2009.

[54] Frédéric Jean. *Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique* AOT 13 Notes de cours Èdition 2011/2012

[55] Alessandra Frabetti. *Géométrie différentielle appliquée à la physique.* Cours M2 - Lyon 1 - automne 2010