

# Table des matières

0.1	Introduction . . . . .	2
<b>1</b>	<b>Généralités</b>	<b>4</b>
1.1	Espace Euclidien $\mathbb{E}^3$ de dimension 3 . . . . .	4
1.2	Courbes paramétrées dans $\mathbb{E}^3$ . . . . .	5
1.3	Repère de Serret-Frenet dans $\mathbb{E}^3$ . . . . .	6
1.3.1	Torsion . . . . .	7
1.3.2	courbure . . . . .	7
1.3.3	Signification de la courbure et la torsion d'une courbe . . . . .	7
1.4	Coubes helices et slant helices dans $\mathbb{E}^3$ . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Espace de Minkowski de <math>\mathbb{E}_1^3</math></b>	<b>13</b>
2.1	Espace $\mathbb{E}_1^3$ . . . . .	13
2.2	Courbes causales . . . . .	19
2.3	Repère de Serret-Frenet dans $\mathbb{E}_1^3$ . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Coubes helices et slant helices dans <math>\mathbb{E}_1^3</math></b>	<b>23</b>
3.1	Courbes helices dans $\mathbb{E}_1^3$ . . . . .	23
3.2	Courbes slant helices dans $\mathbb{E}_1^3$ . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Courbes indicatrices et involutions d'une courbe slant hélices dans <math>\mathbb{E}_1^3</math></b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Perspectives</b>	<b>43</b>

## 0.1 Introduction

Les courbes interviennent naturellement dans divers domaines. À titre d'exemple, la trajectoire d'un objet, le tracé d'une route, l'urbanisme et bien d'autres exemples encore se modélisent par des courbes.

En géométrie classique, une classe très importante de courbes est les courbes générales hélices dans l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$ , elles sont définies par la propriété que la tangente fait un angle constant avec une ligne droite fixe. Un résultat classique énoncé en premier par M. LANCRET en 1802 et prouvé par B.SAINT-VENANT en 1845 qu'une courbe soit une courbe générale hélice si le rapport de la courbure par la torsion doit être constant ([3]).

Les courbes slant hélices sont spécifiques à l'espace, et introduit le concept de l'escargot pour la première fois par IZMIYA et TAKEUCHI est que ces courbes ont la normale en chaque point forme un axe de même degré avec une direction donnée ([3]). Ils caractérisent une courbe slant hélice si et seulement si la fonction

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)'$$

est constante.

D'autre part, en géométrie et en relativité restreinte, l'espace de Minkowski, du nom de son inventeur HERMANN MINKOWSKI, est un espace mathématique, et plus précisément un espace affine pseudo-euclidien à quatre dimensions, modélisant l'espace-temps de la relativité restreinte on se limite dans notre travail à la dimension trois.

Les courbes hélices et slant hélices dans l'espace de MINKOWSKI  $\mathbb{E}_1^3$  apparaissent selon les caractères causal du repère de SERRET-FRENET en  $\mathbb{E}_1^3$  dans de nombreux cas qu'on va les étudier et comparées dans notre travail avec des courbes spéciales.

Notre mémoire se compose de quatre chapitres

Dans le premier chapitre, on donne des définitions basiques nécessaires sur les courbes paramétrées à vecteur de vitesse unitaire, le repère de SERRET-FRENET en trois dimensions et les courbes hélice et slant hélices dans l'espace Euclidien de dimension 3.

Au deuxième chapitre, on définit l'espace de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{E}_1^3$  muni du produit scalaire

Lorentzien. On donne les formules du repère de SERRET-FRENET dans  $\mathbb{E}_1^3$  et des définitions sur les courbes causales dans l'espace  $\mathbb{E}_1^3$ .

Dans le troisième chapitre, on définit les courbes hélices et les courbe slant helices dans  $\mathbb{E}_1^3$  et on donne leurs caractérisations.

Finalement, dans le quatrième chapitre, on définit les courbes indicatrices et involution d'une courbe slant hélices dans  $\mathbb{E}_1^3$  et des théorèmes et propositions reliant ces courbes sont données.

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Espace Euclidien $\mathbb{E}^3$ de dimension 3

L'espace Euclidien de dimension 3 est l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  muni de la forme quadratique  $Q_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Tout vecteur tangent peut être vu comme un élément  $v$  de l'espace vectoriel sous-jacent sur lequel on peut évaluer. On définit alors la norme  $\|v\|_0$  comme étant la racine carrée de  $Q_3(v)$ . On définit alors la longueur d'une courbe de classe  $C^1$  par morceaux

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est égal à l'intégrale

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\|_0 dt$$

On peut en fait calculer la longueur de toute courbes absolument continues (on dit aussi rectifiable) i.e. pour laquelle la dérivée  $C'(t)$  est presque partout définie et telle que l'intégrale ci-dessus soit finie.

On définit alors la distance  $d_{euc}(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  comme étant la borne inférieure de la longueur des chemins rectifiables joignant  $x$  à  $y$ .

## 1.2 Courbes paramétrées dans $\mathbb{E}^3$

Intuitivement, une courbe dans l'espace de dimension 3 est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. On dit d'un tel objet qu'il est 1-dimensionnel. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ . Quand le paramètre  $t$  parcourt l'intervalle  $I$ , le point  $\alpha(t)$  parcourt

**Définition 1.1** On appelle courbe paramétrée de classe  $C^k$  de  $\mathbb{E}^3$ , une application de classe  $C^k$

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble  $C = \{\alpha(t), t \in I\}$  est appelé le support géométrique de  $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ . On dit que  $C$  est une courbe géométrique et que  $\alpha$  est une paramétrisation de  $C$ .

On remarque que la courbe paramétrée comporte plus d'informations que la courbe géométrique : quand  $t$  parcourt l'intervalle  $I$ , le point  $\alpha(t)$  parcourt  $C$ . Autrement dit, la courbe paramétrée donne non seulement le support géométrique, mais aussi une façon de le parcourir. Dans la suite, quand on considèrera la restriction d'une courbe  $\alpha$  à un intervalle fermé  $[a, b] \subset I$ , on écrira

$$\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

**Exemple 1.2** Le support géométrique de la courbe paramétrée  $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, t)$$

est une hélice (Figure 1).

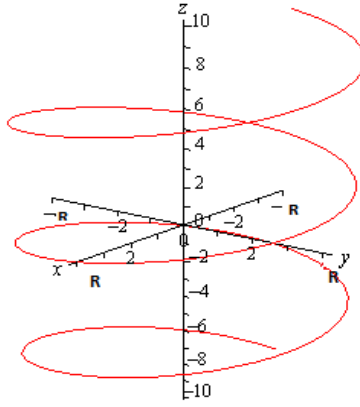


Figure 1 : Courbe helice

### 1.3 Repère de Serret-Frenet dans $\mathbb{E}^3$

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe. En dérivant  $\|T(s)\|^2 = \|\alpha'(s)\|^2 = 1$  on obtient  $T'(s).T(s) = 0$ , le vecteur  $T'$  est donc orthogonal à  $T(s)$ . Si  $\kappa(s) \neq 0$ , on a un vecteur bien défini  $N(s)$  tel que  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ ; c'est le vecteur unitaire normal à la courbe au point  $\alpha(s)$ . Le vecteur unitaire binormal est défini par :

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

où  $\wedge$  est le produit vectoriel défini par

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Le triple  $(T(s), N(s), B(s))$  est un repère orthonormé direct (d'origine le point  $\alpha(s)$ ) appelé repère de Serret-Frenet de la courbe au point  $\alpha(s)$ .

Comme pour les courbes planes, en chaque point d'une courbe gauche paramétrée régulière, on a un repère de Serret Frenet. Ce repère bouge avec le paramètre de la courbe. Les formules de Serret-Frenet expriment justement la dérivée de ce repère.

### 1.3.1 Torsion

En dérivant  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$  membre à membre on obtient :

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$$

Donc  $B'(s)$  est orthogonal à  $T(s)$ , comme il est aussi orthogonal à  $B(s)$ , il est colinéaire à  $N(s)$ .

Il existe donc  $\tau(s) \in \mathbb{R}$  tel que :

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

Le nombre  $\tau(s)$  est appelé la torsion de la courbe  $\alpha$  au point  $\alpha(s)$ .

### 1.3.2 courbure

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  une courbe. Comme on a supposé qu'elle est paramétrée par la longueur de l'arc, la norme du vecteur  $T$  reste constamment égale à 1. Ce qui pourrait éventuellement changer, c'est sa direction, ce qui va en fait mesurer l'écart entre la courbe et le fait qu'elle soit un morceau de droite

**Définition 1.3** On appelle courbure de  $\alpha$  au point  $\alpha(s)$  le nombre :

$$\kappa(s) = \|T'(s)\|$$

### 1.3.3 Signification de la courbure et la torsion d'une courbe

**Proposition 1.4** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  une courbe de courbure et de torsion. Alors :

- 1)  $\kappa = 0$  si, et seulement si, la courbe est un morceau de droite.
- 2)  $\tau = 0$  si, et seulement si, la courbe est contenue dans un plan.

L'interprétation de son signe qu'on peut donner est la suivante. Supposons qu'on marche sur cette hélice en tournant dans le sens trigonométrique. Alors :

Si  $\tau > 0$  (i.e.  $\alpha > 0$ ) on monte.

Si  $\tau < 0$  (i.e.  $\alpha < 0$ ) on descend.

On peut trouver une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  à courbure et torsion prescrites par le théorème suivant :

**Théorème 1.5** Soient  $s \in I \rightarrow \kappa(s) \in \mathbb{R}_+^*$  et  $s \in I \rightarrow \tau(s) \in \mathbb{R}$  deux fonctions différentiables. Alors il existe une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  paramétrée par la longueur de l'arc ayant comme courbure et comme torsion. Si  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  est une autre courbe, il existe une isométrie affine positive  $D : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  telle que  $\sigma = D \circ \alpha$ .

**Exemple 1.6** On sait d'après le théorème (1.5) que la torsion d'une courbe contenue dans un plan est nulle. On laisse donc de côté ce type de courbe.

La torsion de l'hélice :

$$\alpha(s) = R\left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right), \left(\frac{\alpha s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}}\right)\right)$$

se calcule assez facilement. Elle est constante et donnée par la formule :

$$\tau = \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2}$$

Maintenant, on donne les formules du repère de Serret Frenet dans  $\mathbb{E}^3$ .

**Proposition 1.7** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière de classe  $C^3$  et  $\alpha(s)$  un point birégulier. Alors on a :

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s) N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s) T(s) + \tau(s) B(s) \\ B'(s) = \tau(s) N(s) \end{cases}$$

**Preuve.** Il ne reste que la deuxième formule à montrer. Pour cela, on va calculer les coordonnées de  $N'(s)$  dans la base de Serret-frenet. Pour tout  $s \in I$ , on a

$$N(s).N(s) = 1$$

On dérivant, cela donne :

$$N'(s).N(s) = 0$$



On dérivant le fait que pour tout

$$s \in I; B(s).N(s) = 0,$$

On a

$$\begin{aligned} N'(s).B(s) &= -N(s).B'(s) \\ &= -N(s) - \tau(s)N(s) \\ &= \tau(s) \end{aligned}$$

De même, en dérivant le fait que pour tout  $s \in I$ , on a

$$\begin{aligned} N(s).T(s) &= 0 \\ N'(s).T(s) &= N(s).T'(s) \\ &= N(s).(\kappa(s)N(s)) \\ &= \kappa(s) \end{aligned}$$

alors on a la deuxième formule

$$\begin{aligned} N'(s) &= \langle T, N' \rangle T + \langle N, N' \rangle N + \langle B, N' \rangle B \\ &= -\kappa T + \tau B \end{aligned}$$

■

## 1.4 Courbes hélices et slant hélices dans $\mathbb{E}^3$

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ) et de repère de Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  avec  $\kappa \neq 0$ . L'espace des courbes où leurs vecteur tangent  $T$  fait un angle fixe avec un vecteur parallèle le long de la courbe est appelé l'espace des courbes hélices d'où la définition ;

**Définition 1.8** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur

vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ), alors  $\alpha$  est une courbe hélice si pour tous vecteur  $X$  parallèle le long de la courbe  $\alpha$  (i.e  $\nabla_{\alpha'} X = 0$ ), on a

$$\langle T, X \rangle = c \text{ (constante)}$$

**Théorème 1.9 (Théorème de Lancret)** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ), alors  $\alpha$  est une courbe hélice si et seulement si

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \text{ (constante)}$$

d'autre part, l'espace des courbes où leurs vecteur normal  $N$  fait un angle fixe avec un vecteur parallèle le long de la courbe est appelé l'espace des courbes slant hélices.

**Définition 1.10** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  une courbe paramétrée normale régulière muni d'un vecteur vitesse unitaire  $T$  (i.e  $\|T\| = 1$ ), alors  $\alpha$  est une courbe slant hélice si pour tous vecteur  $X$  parallèle le long de la courbe  $\alpha$  (i.e  $\nabla_{\alpha'} X = 0$ ), on a

$$\langle N, X \rangle = c \text{ (constante)}$$

**Théorème 1.11** Une courbe  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  avec  $\kappa(s) \neq 0$  est une courbe slant hélice si et seulement si

$$\sigma_n(s) = \left( \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) = c \text{ (constante)}$$

est une fonction constante.

**Preuve.** Pour plus de détails voir [3]. ■

**Exemple 1.12 (Courbe hélice dans  $\mathbb{E}_3$ )** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale régulière définie par

$$\alpha(t) = (\cos 6t, \sin 6t, t)$$

C'est une courbe hélice (voire figure 2)

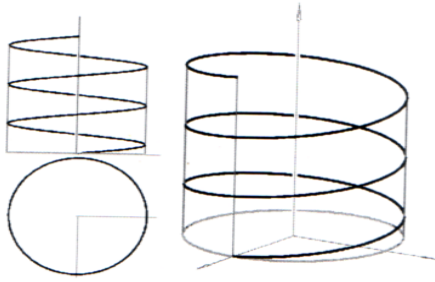


Figure2. Courbe cylindrique spirale

et

$$\alpha(t) = (t \cos 6t, t \sin 6t, t)$$

Une autre courbe hélice (voire figure 3)

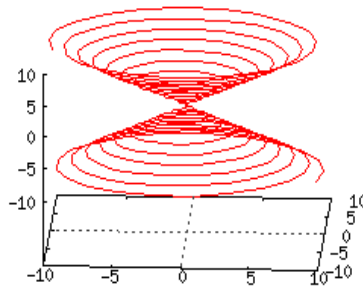


Figure3. Courbe helice spirale

de courbure  $\kappa$  et de torsion  $\tau$  donnés par

$$\kappa = \|\alpha''(t)\| = 12\sqrt{1 + 9t^2}$$

et

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha''(t)\|^2} \\ &= -\frac{(1296 + 7776t^2)}{144 + 1296t^2} \end{aligned}$$

**Exemple 1.13 (Courbe slant hélice dans  $\mathbb{E}_3$ )** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe définie par

$$\alpha(t) = \left( \frac{2}{5} \sin 2t - \frac{1}{40} \sin 8t, \frac{-2}{5} \cos 2t - \frac{1}{40} \cos 8t, \frac{4}{15} \sin 3t \right)$$

$\alpha$  est une courbe slant hélice dans  $\mathbb{R}^3$  où

$$\frac{\pi}{3} < s < \frac{2\pi}{3},$$

avec

$$\kappa(t) = -4 \sin 3t \text{ et}$$

$$\tau(t) = 4 \cos 3t$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_n(s) &= \left( \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \right) (s) \\ &= \frac{16 \sin^2 3t}{(16 \sin^2 3t + 16 \cos^2 3t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3 \sin^2 3t + 13 \cos^2 3t}{\sin^2 3t} \right) \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

elle est représentée par la figure 4.

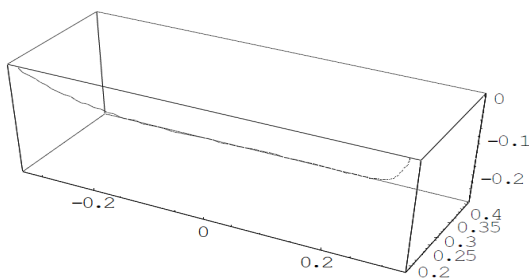


Figure 4. Courbe slant hélice dans  $\mathbb{R}^3$

# Chapitre 2

## Espace de Minkowski de $\mathbb{E}_1^3$

### 2.1 Espace $\mathbb{E}_1^3$

**Définition 2.1** *L'espace de Lorentz-Minkowski de dimension 3 est un l'espace métrique  $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  où la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  est*

$$\langle u, v \rangle_1 = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3, \quad u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$$

*qui est appelé la métrique lorentzienne de dimension 3.*

Nous utilisons également la terminologie de espace de Minkowski et la métrique de Minkowski de se référer l'espace et la métrique, respectivement. La métrique lorentzienne est un métrique non-dégénérée de l'index 1. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  prend également en charge la métrique euclidienne, qui seront désignés par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On écrit l'espace à 3 dimensions euclidien  $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  est un l'espace de Lorentz-Minkowski.

**Définition 2.2** *Un vecteur  $v \in \mathbb{E}_1^3$  est dit :*

- 1) *vecteur de type espace si  $\langle v, v \rangle_1 > 0$  ou  $v = 0$ ,*
- 2) *vecteur de type temps si  $\langle v, v \rangle_1 < 0$*
- 3) *vecteur de type lumière si  $\langle v, v \rangle_1 = 0$  et  $v \neq 0$ .*

Le cône lumière de  $\mathbb{E}_1^3$  est l'ensemble de tous les vecteurs lumière de  $\mathbb{E}_1^3$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}$$

L'ensemble des vecteurs de type temps est

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}_1^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0\}$$

Les ensembles  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{C}$  sont composantes connexes.

**Définition 2.3** Soit  $U \subset \mathbb{R}^3$  un sous-espace vectoriel, on a la métrique induite  $\langle, \rangle_U$  telle que

$$\langle u, v \rangle_U = \langle u, v \rangle_1, \quad u, v \in U$$

On a trois types de La métrique de  $U$  :

- 1) La métrique est définie positive alors  $U$  est appelé type espace.
- 2) La métrique a l'index 1 alors  $U$  est dit de type temps.
- 3) La métrique est dégénéré alors  $U$  est appelé lumière.

Le caractère causal d'un vecteur ou un sous-espace est la propriété d'être de type espace, type lumière ou type temps. On a quelques caractérisations et propriétés de la causalité d'un sous-espace de  $\mathbb{E}_1^3$  :

**Proposition 2.4** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{E}_1^3$ , on a

- 1)  $\dim(U^\perp) = 3 - \dim(U)$ .
- 2)  $(U^\perp)^\perp = U$ .
- 3) si  $U$  est non dégénéré, alors  $U^\perp$  est un sous-espace non dégénéré.
- 4)  $U$  est de type temps (resp. de type espace, lumière) si et seulement si  $U^\perp$  est de type espace (resp. de type temps, lumière).
- 5) Si  $v$  est de type temps ou de type espace alors  $\mathbb{E}_1^3 = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$ .

En comparant avec l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$  l'existence de vecteurs lumière et type temps donnent les propriétés suivantes :

**Proposition 2.5** Soient  $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ , alors on a :

- 1) Si  $u, v$  deux vecteurs lumière sont linéairement indépendants si et seulement si  $\langle u, v \rangle_1 = 0$ .
- 2) Si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs de type temps ou lumière avec  $\langle u, v \rangle_1 = 0$  alors ils sont des vecteurs lumière.

- 3) Si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs de type temps alors  $\langle u, v \rangle_1 \neq 0$ .  
 4) Si  $U$  est un sous-espace lumière alors  $\dim(U \cap U^\perp) = 1$ .

**Proposition 2.6** Soit  $P$  un plan vectoriel de  $\mathbb{E}_1^3$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $P$  est un sous-espace de type temps.  
 2)  $P$  contient deux vecteurs de type lumière linéairement indépendants.  
 3)  $P$  contient un vecteur de type temps.

**Proposition 2.7** Soit  $U$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{E}_1^3$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $U$  est un sous-espace lumière.  
 2)  $U$  contient un vecteur lumière mais pas un type temps.  
 3)  $U \cap C = L \setminus \{0\}$  et  $L$  un sous-espace vectoriel de  $\dim L = 1$ .

**Proposition 2.8** Soit  $P$  un plan vectoriel  $\mathbb{E}_1^3$ . On note par  $\vec{n}_e$  le vecteur orthogonal par rapport à la métrique euclidienne. Alors  $P$  est un plan de type espace (resp. temps, lumière) si et seulement si  $\vec{n}_e$  est un type espace (resp. de type temps, lumière).

*Preuve. Si*

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$$

alors  $\vec{n}_e$  est proportionnelle le vecteur  $(a, b, c)$ . on écrit  $P$  comme

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - (-c)z = 0\} = \text{span}\{(a, b, -c)\}^\perp$$

Le caractère causal de  $(a, b, -c)$  est le même que  $\vec{n}_e$  et proposition 2.6 prouve le résultat. ■

On définit la norme (ou module) d'un vecteur.

**Définition 2.9** Soit  $u \in \mathbb{E}_1^3$ , la norme de  $u$  est

$$\|u\|_1 = \sqrt{|\langle u, u \rangle_1|}$$

Le vecteur  $u$  est appelé unitaire si :

$$\|u\|_1 = 1$$

**Proposition 2.10** Si  $P = \text{Span}\{v\}^\perp$  est un plan de type espace, alors

$$\|v\|_e \geq \|v\|_1$$

**Preuve.** Il suffit que  $\|v\|_1 = 1$ . On suppose  $\vec{n}_e = (a, b, c)$  et  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$v = \pm \frac{(a, b, -c)}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$$

La norme euclidienne  $\|v\|$  est

$$\|v\|_e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 - a^2 - b^2} = \frac{1}{c^2 - a^2 - b^2} \geq 1$$

Car  $c^2 - a^2 - b^2 = 1 - 2(a^2 + b^2) \leq 1$  ■

### Vecteurs temps

Si  $u$  est un vecteur de type temps le cône de type temps de  $u$  est donné par

$$C(u) = \{v \in \tau : \langle u, v \rangle_1 < 0\}$$

Cet ensemble est non vide puisque  $u \in C(u)$ , si  $v$  est un autre vecteur de type temps et en utilisant  $\langle u, v \rangle \neq 0$  (Prop. 2.5) alors

$$\langle u, v \rangle_1 < 0 \text{ ou } \langle u, v \rangle_1 > 0$$

Cela signifie que  $\tau$  est l'union disjointe

$$\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$$

avec

$$C(u) \cap C(-u) = \emptyset$$

**Proposition 2.11** 1) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs de type temps, ils sont dans le même cône de type temps si et seulement si  $\langle u, v \rangle_1 < 0$ .

2)  $u \in C(v)$  si et seulement si  $C(u) = C(v)$ .



3) Les cônes sont des ensembles convexes de type temps.

**Théorème 2.12** Soit  $u, v \in \mathbb{E}_1^3$  deux vecteurs de types temps alors

$$\| \langle u, v \rangle_1 \|_1 \geq \|u\|_1 \|v\|_1$$

si et seulement si  $u$  et  $v$  sont proportionnelles, dans le cas où les deux vecteurs se trouvent dans le même cône de type temps, il existe un nombre unique  $\varphi \geq 0$  tel que

$$\langle u, v \rangle_1 = - \|u\|_1 \|v\|_1 \cosh \varphi$$

Le nombre  $\varphi$  est appelé angle hyperbolique ou Lorentzienne entre  $u$  et  $v$ .

**Preuve.** Soit  $u, v$  deux vecteurs de type temps linéairement indépendantes, et  $U = \text{Span}\{u, v\}$  est un plan de type temps. Par Prop. (2.6) l'équation sur  $\lambda$

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle_1 = \langle u, u \rangle_1 + 2 \langle u, v \rangle_1 + \lambda^2 \langle v, v \rangle_1 = 0$$

on a deux solutions. En particulier, le discriminant de l'équation quadratique doit être positive, soit

$$\langle u, v \rangle_1^2 \geq \langle u, u \rangle_1 \langle v, v \rangle_1$$

Cela montre l'inégalité dans le cas où  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendants. Sur d'autre part, si elles sont proportionnelles, alors on obtient directement l'égalité. pour la deuxième partie du théorème, nous écrivons

$$\frac{\langle u, v \rangle_1^2}{(\|u\|_1 \|v\|_1)^2} \geq 1 \tag{2.1}$$

Si  $u$  et  $v$  sont situées dans le même cône de type temps, puis  $\langle u, v \rangle < 0$  et l'expression 2.1 implique

$$-\frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} \geq 1$$

Comme la fonction cosinus hyperbolique  $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  est un-à-un, il existe un nombre unique  $\varphi \in [0, \infty)$  on a

$$\cosh \varphi = \frac{-\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1}$$

■

Après la définition de l'angle entre les deux vecteurs qui se trouvent dans le même type temps cône, nous demandons comment définir l'angle entre deux des vecteurs  $u, v \in \mathbb{E}_1^3$  qui sont linéairement indépendants et que  $u, v$  ne sont pas lumière, l'angle est défini, en fonction du plan  $P$  déterminé par  $u$  et  $v$ . La métrique induite sur  $P$  peut être Riemannienne, Lorentzienne ou dégénérée.

1) Si le plan est Euclidien, la définition de l'angle entre les deux vecteurs de type espace est usuel dans l'espace euclidien.

2) Si le plan est lorentzienne, alors il est isométrique à la plan Lorentz-Minkowski  $\mathbb{E}_1^2$  et une isométrie ne change pas la définition de l'angle.

Nous avons défini l'angle pour deux vecteurs de type temps dans le même cône de type temps. Il suffit de considérer que  $u$  et  $v$  sont unitaires. L'ensemble  $U_1^2$  des vecteurs unitaires de  $\mathbb{E}_1^2$  a quatre composantes, à savoir

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_+^1 &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y > 0\}, \mathbb{H}_-^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = -1, y < 0\} \\ \mathbb{S}_+^{1+} &= \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x > 0\}, \mathbb{S}_+^{1-} = \{(x, y) \in \mathbb{E}_1^2 : x^2 - y^2 = 1, x < 0\}\end{aligned}$$

Les vecteurs dans  $\mathbb{H}_+^1 \cup \mathbb{H}_-^1$  sont de type temps et dans  $\mathbb{S}_+^{1+} \cup \mathbb{S}_+^{1-}$  sont de type espace.

**Remarque 2.13** *on rappelle que, en changeant  $(x, y)$  par  $(y, x)$ , le plan  $\mathbb{E}_1^2$  changements par  $\mathbb{R}^2$  équipés de la métrique*

$$-(dy)^2 + (dx)^2$$

*Un vecteur de type espace (resp. de type temps) de  $\mathbb{E}_1^2$  convertit à un vecteur de type temps (resp. de type espace) du nouvel espace métrique.*

**Définition 2.14** *Soit  $u, v \in \mathbb{E}_1^2$  deux vecteurs de type espace non nuls de telle  $u \setminus |u|$  et  $v \setminus |v|$  se trouvent dans le même composant de  $U_1^2$ . et l'angle  $\angle(u, v) = \varphi$ . Alors  $\varphi \in [0, \infty)$  est le nombre unique tel que*

$$\cosh \varphi = \frac{\langle u, v \rangle_1}{\|u\|_1 \|v\|_1} \quad (2.2)$$

**Définition 2.15** *Soient  $u, v \in \mathbb{E}_1^3$  le produit vectoriel Lorentzienne de  $u$  et  $v$  est la unique*

vecteur désigné par  $u \wedge_1 v$  qui satisfait

$$\langle u \wedge_1 v, w \rangle_1 = \det(u, v, w) \quad (2.3)$$

Où  $\det(u, v, w)$  est le facteur déterminant de la matrice obtenue en plaçant des colonnes les coordonnées des trois vecteurs  $u, v$  et  $w$  par rapport à  $B_u$ .

Le bilinéarité de la métrique assure l'existence et l'unicité de ce vecteur  $u \wedge_1 v$ , En prenant 2.3 chacun des vecteurs  $E_i$  de  $B_u$ , nous obtenons l'expression de  $u \wedge_1 v$  en coordonnées par rapport à  $B_u$

$$u \wedge_1 v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

On dit que  $u \wedge_1 v$  le produit vectoriel euclidien, alors  $u \wedge_1 v$  est le reflet de  $u \wedge_e v$  par rapport au plan de l'équation  $z = 0$ .

Notons que si  $u$  et  $v$  sont deux vecteurs non dégénérées, alors  $B = \{u, v, u \wedge_1 v\}$  est une base de  $\mathbb{E}_1^3$ . Mais contrairement à l'espace euclidien, le caractère causal de  $u$  et  $v$  détermine si la base est ou non orienté positivement. Exactement, si  $u, v$  sont de type espace, alors  $u \wedge_1 v$  est de type temps.

La norme de  $u$  dans  $\mathbb{E}_1^3$  est noté par  $\|u\|_1 = \sqrt{\langle u, u \rangle_1}$ . Les vecteurs  $u$  et  $v$  sont orthogonaux si  $\langle u, v \rangle_1 = 0$ .

L'espace de De Sitter (ou la sphere Lorentzienne de rayon  $r$  et de centre 0) est défini par

$$\mathbb{S}_r^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in M \mid \langle u, u \rangle_1 = r^2\},$$

et l'espace anti de De Sitter (ou la sphere Hyperbolique de rayon  $r$  et de centre 0) est donnée par

$$\mathbb{H}_r^2 = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in M \mid \langle u, u \rangle_1 = -r^2\}.$$

## 2.2 Courbes causales

Soit  $\mathbb{E}_1^3$ , l'espace de Minkowski de dimension 3, on a les définitions suivantes ;

**Définition 2.16** *Un vecteur de norme strictement négative de  $\mathbb{E}_1^3$  est dit de type temps ou plus simplement temporel, un vecteur de norme strictement positive est dit de type espace, ou spatial et un vecteur non-nul de norme nulle est dit de type lumière, nul ou isotrope. Enfin, un vecteur non-nul de type temps ou lumière est dit de type causal.*

Maintenant, soit  $\alpha$  une courbe paramétrée de  $I \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{E}_1^3$ ;

**Définition 2.17** *Une courbe  $\alpha$  est dite de type temps ou temporelle (resp. espace, lumière, causal) si tous ses vecteurs tangents sont de type temps (resp. espace, lumière, causal).*

Si  $\alpha$  est une courbe paramétrée par la longueur d'arc alors

$$\|T\|_1 = \pm 1$$

( $\alpha$  ne peut pas être lumière  $\|T\|_1 \neq 0$ )

## 2.3 Repère de Serret-Frenet dans $\mathbb{E}_1^3$

Le repère de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$  est donné par la proposition suivante :

**Proposition 2.18** *Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe non nulle paramétrée avec la longueur d'arc  $s$ . Le vecteur vitesse, normal, binormal, la courbure et la torsion vérifient les formules de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$  données par*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  sont respectivement la courbure et la torsion de  $\alpha$  et

$$\langle T, T \rangle_1 = \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \langle N, N \rangle_1 = \varepsilon_2 = \pm 1, \quad \langle B, B \rangle_1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3.$$

Les liens entre le vecteur tangent  $T$ , le vecteur normal principale  $N$  et le vecteur binormal  $B$  sont

$$T \wedge_1 N = \varepsilon_1 \varepsilon_2 B, \quad N \wedge_1 B = -\varepsilon_1 T \quad \text{et} \quad B \wedge_1 T = -\varepsilon_2 N.$$

où  $\wedge_1$  est le produit vectoriel dans  $\mathbb{E}_1^3$ .

**Preuve.** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe non nulle paramétrée avec la longueur d'arc  $s$ . On a  $\forall s \in I$

$$\langle T, T \rangle_1 = \varepsilon_1 = \pm 1$$

On obtient donc en dérivant

$$\langle T, \frac{dT}{ds} \rangle_1 = 0$$

d'où les vecteurs  $T$  et  $T'$  sont orthogonaux, alors il existe une fonction  $\kappa$  et un vecteur unitaire  $N$  tel que

$$T' = \kappa N$$

on en déduit que

$$\langle N', T \rangle_1 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa$$

En dérivant  $B = T \wedge N$  membre à membre on obtient :

$$B' = T' \wedge_1 N + T \wedge_1 N' = T \wedge_1 N'$$

donc  $B$  est orthogonal à  $T$  et  $B$ , il est colinéaire à  $N$ . Il existe donc  $\tau \in \mathbb{R}$  tel que

$$B' = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \tau N$$

D'autre part, Pour tout  $s \in I$ , on a

$$\langle N(s), N(s) \rangle_1 = \varepsilon_2$$

On dérivant, la dernière équation cela donne :

$$\langle N'(s), N(s) \rangle_1 = 0$$

Puisque  $(T, N, B)$  est une base orthonormée, on a alors

$$\begin{aligned} N'(s) &= \langle T, N' \rangle T + \langle N, N' \rangle N + \langle B, N' \rangle B \\ &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa T + \tau B \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  est une courbe de type espace avec un vecteur normal de type espace ou temps alors formules de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$  sont

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

avec

$$\langle T, T \rangle = 1, \quad \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \varepsilon = \pm 1$$

Si  $\alpha$  est une courbe de type temps avec un vecteur normal de type espace ou temps alors formules de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$  sont

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \varepsilon\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix},$$

avec

$$\langle T, T \rangle = -1, \quad \langle N, N \rangle = \langle B, B \rangle = \varepsilon = \pm 1$$

d'où la preuve de la proposition. ■

# Chapitre 3

## Coubes helices et slant helices dans $\mathbb{E}_1^3$

### 3.1 Courbes helices dans $\mathbb{E}_1^3$

Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe non nulle (i.e. espace ou temps) avec la longueur d'arc  $s$  paramétrée par les formules de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$  ( $T, N, B, \kappa, \tau$ ) données par la formule (2.4).

L'angle Lorentzienne  $\theta$  entre  $T$  et un vecteur tangent  $X$  à la courbe  $\alpha$  est

$$g_1(T, X) = L(\theta)$$

Où  $L(\theta)$  est

- i.  $\cos \theta$  si  $T$  et  $X$  sont des vecteurs de type espace qui couvrent un sous espace vectoriel de type espace,
- ii.  $\cosh \theta$  si  $T$  et  $X$  sont des vecteurs de type espace qui couvrent un sous espace vectoriel de type temps,
- iii.  $\sinh \theta$  si  $T$  et  $X$  sont des caractères de casual différents.

**Définition 3.1** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire avec la longueur d'arc  $s$ . La courbe  $\alpha$  est dite hélice si pour tous champ vecteurs non nul  $U$  parrallel le long de la courbe  $\alpha$  (i.e.  $\nabla_{\alpha'} U = 0$ ) dans  $\mathbb{E}_1^3$ , la fonction  $\langle T(s), U \rangle$  est constante.

**Théorème 3.2** Soit  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe non nulle avec la longueur d'arc  $s$  paramétrisée par les formules de Serret-Frenet dans  $\mathbb{E}_1^3$   $(T, N, B, \kappa, \tau)$ . La courbe  $\alpha$  est une courbe hélice si et seulement si le quotient entre la torsion et la courbure soit constant

$$\frac{\tau}{\kappa} = c \text{ constante}$$

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire non nulle avec la longueur d'arc  $s$  dans  $\mathbb{E}_1^3$ . Le repère de Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  de  $\alpha$  est donné par

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  sont la courbure et la torsion de la courbe, respectivement .

On suppose d'abord que  $\alpha$  est hélice. Soit  $U$  le champ de vecteurs parallèle de caractère quelconque. On a on de la définition (3.1)

$$\langle T(s), U \rangle = c$$

En dérivant, cela donne

$$\left\langle \frac{dT(s)}{dt}, U \right\rangle + \left\langle T(s), \frac{dU}{dt} \right\rangle = 0$$

Comme  $U$  est parallèle, on aura

$$\left\langle T(s), \frac{dU}{dt} \right\rangle = 0$$

On a

$$\left\langle \frac{dT(s)}{dt}, U \right\rangle = 0$$

Alors

$$\kappa \langle N, U \rangle = 0 \implies \langle N, U \rangle = 0$$

De même, après la dérivation, on obtient

$$\langle -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa T + \tau B, U \rangle = 0 \implies -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \kappa \langle T, U \rangle + \tau \langle B, U \rangle = 0$$



et

$$\frac{\tau}{\kappa} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\langle T, U \rangle}{\langle B, U \rangle} = c \text{ constante}$$

La réciproque est facile. ■

## 3.2 Courbes slant hélices dans $\mathbb{E}_1^3$

**Définition 3.3** Soit  $\alpha$  une courbe de vecteur de vitesse unitaire (ou une courbe unitaire). La courbe  $\alpha$  est appelée *slant hélice* si pour tous un champ vecteurs parrallel le long de la courbe  $\alpha$  non nul  $U$  (i.e.  $\nabla_{\alpha'} U = 0$ ) dans  $\mathbb{E}_1^3$ , on a la fonction  $\langle N(s), U \rangle$  est constante.

**Théorème 3.4** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type temps dans  $\mathbb{E}_1^3$ . La courbes  $\alpha$  est une courbe *slant hélice* si et seulement si l'une des deux fonctions suivantes

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \text{ et } \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \quad (3.1)$$

est constante par tout  $s$  et que  $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ .

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type temps dans  $\mathbb{E}_1^3$ . Le repère de Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  de  $\alpha$  est donné par

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s), \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|} \text{ et} \\ B(s) &= T(s) \times_1 N(s) \end{aligned}$$

et

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où  $\kappa$  et  $\tau$  sont la courbure et la torsion de la courbe, respectivement .

On suppose d'abord que  $\alpha$  est *slant hélice*.

Soit  $U$  le champ de vecteurs parallel tel que la fonction

$$\langle N(s), U \rangle = c$$

( $c$  est constante) alors il existe des fonctions lissent  $a_2$  et  $a_1$  de telles que

$$U = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3(s)B(s), \quad s \in I \quad (3.3)$$

Comme  $U$  est constante, une différenciation de l' équation (3.3) et en utilisant (3.2), on a

$$\begin{cases} a_1' + ck = 0 \\ ka_1 - \tau a_3 = 0 \\ a_3' + c\tau = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

De la seconde équation en (3.4), on en déduit

$$a_1 = a_3 \left( \frac{\tau}{\kappa} \right) \quad (3.5)$$

de plus  $U$  est parallel alors il est constant d'où

$$\langle U, U \rangle = -a_1^2 + c^2 + a_3^2 \quad (3.6)$$

$$= \text{constant} \quad (3.7)$$

Nous rappelons que cette contrainte, ainsi que la deuxième et la troisième équation (3.4) est équivalent au système très (3.4). Combinant (3.5), (3.6) et soit  $m$  le constante donnée par

$$\varepsilon m^2 = a_3^2 \left( \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right) \quad \text{où } m > 0 \text{ et } \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}. \quad (3.8)$$

Si  $\varepsilon = 0$ ,  $a_3 = 0$  et de (3.4), nous avons  $a_1 = c = 0$ . Ce la signifie que  $U = 0$  d'où la contradiction.

Ainsi  $\varepsilon = \pm 1$  et ainsi  $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ , cela donne

$$a_3 = \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1}} \text{ ou}$$

$$a_3 = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}}$$

sur  $I$ , La troisième équation dans (3.4) donne

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1}} \right] = c\tau \text{ ou}$$

$$\frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} \right] = -c\tau$$

sur  $I$ , qui donne

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \pm \frac{c}{m} \text{ ou}$$

$$\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = \mp \frac{c}{m}$$

Inversement, supposons que la condition (3.1) est satisfaite. En ordre pour simplifier les calculs, nous supposons que

$$\langle N, U \rangle = C$$

alors

$$U = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} T + CN + \frac{k}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} B \quad (3.9)$$

Une différenciation de (3.9) et tenant compte que  $U$  est parallèle (i.e.  $\frac{dU}{ds} = 0$ ), on aura

$$C' = 0 \text{ alors}$$

$$C = \text{constante}$$

d'où

$$\langle N(s), U \rangle = \text{constante}$$

ce qui signifie que  $\alpha$  est une courbe slant hélice. ■

**Théorème 3.5** Soit  $\alpha$  est une courbe unitaire de type espace dans  $\mathbb{E}_1^3$ . La courbe  $\alpha$  est appelée slant hélice si et seulement si :

a) Si le vecteur normal  $N$  est de type temps, alors

$$\frac{k^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad \text{ou} \quad \frac{k^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (3.10)$$

sont constantes pour tout  $s$  et  $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ .

b) Si le vecteur normal  $\alpha$  est de type espace, alors

$$\frac{k^2}{(\tau^2 + \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)' \quad (3.11)$$

est constante pour tout  $s$ .

c) Si le vecteur normal  $\alpha$  est de type lumière, alors toute courbe de type espace est slant helices courbes.

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type espace dans  $\mathbb{E}_1^3$ .

Dans le cas où la vecteur normale  $N(s)$  de  $\alpha$  est de type temps ou de type espace alors le repère de Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  de  $\alpha$  est donné par

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\varepsilon_2 \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On suppose d'abord que  $\alpha$  est slant hélice.

Soit  $U$  le champ de vecteurs parallèle tel que la fonction  $\langle N(s), U \rangle = c$  ( $c$  est constante) alors il existe des fonctions lisses  $a_2$  et  $a_1$  de telles que

$$U = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3(s)B(s), \quad s \in I \quad (3.13)$$

On a après une différentiation,

$$\begin{cases} a_1' + c\kappa = 0 \\ \kappa a_1 - \tau a_3 = 0 \\ a_3' + c\tau = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

De la seconde équation (3.14), on en déduit

$$a_1 = a_3 \left( \frac{\tau}{\kappa} \right) \quad (3.15)$$

de plus  $U$  est parallel alors il est constant d'où

$$\langle U, U \rangle = a_1^2 + \varepsilon_2 c^2 - \varepsilon_2 a_3^2 = \text{constant} \quad (3.16)$$

Nous rappelons que cette contrainte, ainsi que la deuxième et la troisième équation (3.4) est équivalent au système très (3.4). Combinant (3.5), (3.6) et soit  $m$  le constante donnée par

$$\varepsilon m^2 = a_3^2 \left( \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^2 - 1 \right) \text{ où } m > 0 \text{ et } \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}. \quad (3.17)$$

Si  $\varepsilon = 0$ ,  $a_3 = 0$  et de (3.4), nous avons  $a_1 = c = 0$ . Ce la signifie que  $U = 0$  d'où la contradiction.

Ainsi  $\varepsilon = \pm 1$  et ainsi  $\tau^2 - \kappa^2 \neq 0$ , cela donne

$$\begin{aligned} a_3 &= \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1}} \text{ ou} \\ a_3 &= \pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} \end{aligned}$$

sur  $I$ , La troisième équation dans (3.4) donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 - 1}} \right] &= c\tau \text{ ou} \\ \frac{d}{ds} \left[ \pm \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} \right] &= -c\tau \end{aligned}$$

sur  $I$ , qui donne

$$\begin{aligned}\frac{k^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' &= \pm \frac{c}{m} \text{ ou} \\ \frac{k^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' &= \mp \frac{c}{m}\end{aligned}$$

Inversement, supposons que la condition (3.1) est satisfaite. En ordre pour simplifier les calculs, nous supposons que

$$\langle N, U \rangle = C$$

alors

$$U = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} T + CN + \frac{k}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}} B \quad (3.18)$$

Une différenciation de (3.9) et tenant compte que  $U$  est parallèle (i.e.  $\frac{dU}{ds} = 0$ ), on aura

$$C' = 0 \implies C = \text{constante}$$

d'où

$$\langle N(s), U \rangle \text{ est constante}$$

ce qui signifie que  $\alpha$  est une slant hélice.

c) Soit le vecteur normal  $N(s)$  de la courbe  $\alpha$  est un vecteur de type lumière pour tout  $s \in I$ . alors le repère de Frenet est donné par  $T(s) = \alpha'(s)$ ,  $N(s) = T'(s)$  et  $B(s)$  le vecteur orthogonal unique de type lumière pour  $T(s)$  telle que

$$\langle N(s), B(s) \rangle = 1$$

alors les équations de Frenet est

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -1 & 0 & \tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Si  $\tau$  est la torsion de la courbe ( $\tau(s) \neq 0$  pour tout  $s \in I$ ). Nous montrent que cette courbe est

une courbe slant hélice. Soit  $a_2(s)$  une solution non triviale du O.D.E

$$y(s) + \tau(s)y(s) = 0$$

comme  $U = a_2(s)N(s)$ . En utilisant (3.19),  $dU(s)\backslash ds = 0$ . telle que,  $U$  est un champ de vecteur constant (non nulle) dans  $\mathbb{E}_1^3$  et

$$\langle N(s), U \rangle = 0$$

ce qui signifie que  $\alpha$  est une slant hélice. ■

**Théorème 3.6** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type lumière dans  $\mathbb{E}_1^3$ . La courbe  $\alpha$  est une slant hélice si et seulement si la torsion est

$$\tau(s) = \frac{a}{(bs + c)^2} \quad (3.20)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des constantes, avec  $bs + c \neq 0$ .

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type lumière dans  $\mathbb{E}_1^3$ . Le repère de Frenet de  $\alpha$  est  $T(s) = \alpha'(s)$ , le vecteur normale  $N(s) = T'(s)$  est de type espace et soit  $B(s)$  vecteur unique orthogonale de type lumière à  $N(s)$  telle que

$$\langle N(s), B(s) \rangle = 1$$

les équations sont frenet

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau(s) & 0 & -1 \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Ici  $\tau(s)$  est la torsion de  $\alpha$ , qui est supposé à la propriété  $\tau(s) \neq 0$  pour tout  $s \in I$ .

On suppose que  $\alpha$  est une courbe slant hélice. Soit  $U$  le champ de vecteur constant de telle sorte que la fonction  $\langle N(s), U \rangle = C$  est constante. Alors :

$$U = a_1(s)T(s) + cN(s) + a_3(s)B(s); s \in I \quad (3.22)$$

et

$$\begin{cases} a_1' + c\tau = 0 \\ a_1 - \tau a_3 = 0 \\ a_3' - c = 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

En suite,  $a_3(s) = cs + m$ ,  $m \in \mathbb{R}$  et  $a_1 = (cs + m)\tau$ . En utilisant équation du premier (3.23), on a :

$$(cs + m)\tau' + 2c\tau = 0$$

La solution de cette équation est

$$\tau(s) = \frac{n}{(cs + m)^2}$$

où  $m$  et  $n$  sont des constantes cela prouve (3.20) dans le théorème 4.7. Inversement, si la condition (3.20) donne

$$U = \frac{a}{bs + c}T + bN(s) + (bs + c)B(s)$$

En utilisant les équations Frenet (3.21), nous obtenons que  $\frac{dU(s)}{ds} = 0$ , qui est,  $U$  est un champ de vecteur constant de  $\mathbb{E}_1^3$ . Alors

$$\langle N(s), U \rangle = b$$

ce qui signifie que  $\alpha$  est une slant hélice. ■

**Corollaire 3.7** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe unitaire.

a) Soit  $\alpha$  une courbe de type temps ou une courbe de type espace avec vecteur normal de type espace et  $\kappa^2 - \tau^2 \neq 0$  alors  $\alpha$  est une slant hélice si et seulement si la courbe

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^2$$

donnée par

$$\beta(s) = \left( \int \kappa ds, \int \tau ds \right)$$

est une courbe plane de courbure constante dans le plan de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{E}_1^3$ .

b) Soit  $\alpha$  une courbe de type espace avec un vecteur normal de type temps et  $\kappa^2 - \tau^2 \neq 0$ . Alors  $\alpha$  est une slant hélice si et seulement si la courbe

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^2$$



donnée par

$$\beta(s) = \left( \int \kappa ds, \int \tau ds \right)$$

est une cercle euclidien dans  $\mathbb{E}^2$ .

**Preuve.** Soit  $\alpha$  est une courbe de type temps et on suppose que  $k^2 \tau^2$ .

La courbure  $k_\beta$  de  $\beta$  satisfait

$$-\kappa_\beta^2(s) = \frac{1}{|\beta'(s)|^6} (|\beta'(s)|^2 |\beta''(s)|^2 - \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle^2)$$

Utilisons la métrique de Lorentz  $\mathbb{E}_1^2$ , on a :

$$\begin{aligned} |\beta'(s)|^2 &= \kappa^2 - \tau^2, |\beta''(s)|^2 \\ &= \kappa'^2 - \tau'^2, \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle^2 \\ &= (\kappa\kappa' - \tau\tau')^2 \end{aligned}$$

Alors

$$\kappa_\beta(s) = \pm \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^2$$

Donc la fonction de courbure  $\kappa_\beta$  est constante si et seulement si  $\alpha$  est une courbe slant hélice.

■

**Exemple 3.8 (Courbe slant hélice dans  $\mathbb{E}_1^3$ )** On donne un exemple d'une courbe slant hélice  $\alpha$  de type temps incliné dans espace de Minkowski  $\mathbb{E}_1^3$  par

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$$

$$\alpha_1(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

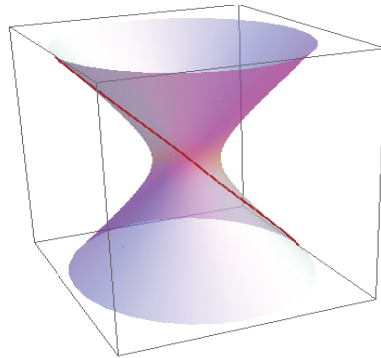
et

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(s) = \frac{9}{400} \sinh(25s) + \frac{25}{144} \sinh(9s) \\ \alpha_2(s) = \frac{9}{400} \cosh(25s) - \frac{25}{144} \cosh(9s) \\ \alpha_3(s) = \frac{15}{136} \sinh(17s) \end{array} \right.$$

*La courbe se trouve sur l'hyperboloïde d'une feuille*

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{34}{225}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{34}{225}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{2}{15}\right)^2} = 1$$

*donnée par la figure 4 suivante*



*Figure.4 Courbe slant helice de type temps*

# Chapitre 4

## Courbes indicatrices et involutions d'une courbe slant hélices dans $\mathbb{E}_1^3$

Nous étudions l'indicatrice de la tangente et indicatrice binormal et involutions d'une slant hélice, On se limite aux courbes non nuls dont leurs vecteur normal  $N$  est de type espace ou de type temps.

Soit  $\alpha$  une courbe unitaire  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  L'indicatrice de la tangente est la courbe  $T : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  (resp. la courbe  $B : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ ) telle que  $T$  (resp.  $B$ ) est le vecteur tangent (resp. de vecteur binormal) à  $\alpha$ .

Notons par

$$\mathbb{H}_1^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^3, \langle x, x \rangle = -1\}$$

l'espace hyperbolique et

$$\mathbb{S}_1^2 = \{x \in \mathbb{E}_1^3, \langle x, x \rangle = 1\}$$

l'espace de De Sitter, Si l'image d'une courbe réside dans  $\mathbb{H}_1^2$  ou  $\mathbb{S}_1^2$  nous disons que la courbe est sphérique. En particulier, la tangente indicatrice et l'indicatrice normale et binormale sont sphériques exprimé par la définition suivante

**Définition 4.1** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire dans  $\mathbb{E}_1^3$  donnée par le repère de Serret-Frenet  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ . Les vecteurs unitaires  $T, N$  et  $B$  le long de la courbe  $\alpha(s)$  génèrent des courbes  $T(s), N(s)$  et  $B(s)$  sur  $\mathbb{H}_1^2$  ou  $\mathbb{S}_1^2$  suivant leurs causalités de l'origine. Les courbes  $T(s), N(s)$  et  $B(s)$  sont les courbes tangente, normale et binormale respectivement par rapport aux vecteurs

$T, N$  et  $B$ .

On rappelle les repère de Serret-Frenet des courbes indicatrices dans  $\mathbb{E}_1^3$  par les propositions suivantes sans preuves. (voir [2])

**Proposition 4.2** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  une courbe unitaire paramétré par la longueur d'arc  $s$  et de repère de Serret-Frenet  $(T, N, B, \kappa, \tau)$  défini par la formule (2.4). La courbe indicatrice tangente de  $\alpha$  et la courbe  $\mathbf{T}(s)$  de repère de Serret-Frenet noté  $(T_{\mathbf{T}}, N_{\mathbf{T}}, B_{\mathbf{T}}, \kappa_{\mathbf{T}}, \tau_{\mathbf{T}})$  et donné par

$$\begin{cases} D_t T_{\mathbf{T}} = \kappa_{\mathbf{T}} N_{\mathbf{T}} \\ D_t N_{\mathbf{T}} = -\varepsilon_{\mathbf{T}_1} \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \kappa_{\mathbf{T}} T_{\mathbf{T}} + \tau_{\mathbf{T}} B_{\mathbf{T}} \\ D_t B_{\mathbf{T}} = \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \varepsilon_{\mathbf{T}_3} \tau_{\mathbf{T}} N_{\mathbf{T}}, \end{cases}$$

avec

$$\|T_{\mathbf{T}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{T}_1} = \pm 1, \quad \|N_{\mathbf{T}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{T}_2} = \pm 1, \quad \|B_{\mathbf{T}}\|_1 = \pm 1 = -\varepsilon_{\mathbf{T}_1} \varepsilon_{\mathbf{T}_2} = \varepsilon_{\mathbf{T}_3}.$$

et

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{T}} &= \varepsilon_2 N \\ N_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (-\kappa T + \tau B) \\ B_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau T + \kappa B) \end{aligned}$$

la courbure et la torsion de  $\mathbf{T}(s)$  est donnée par

$$\kappa_{\mathbf{T}} = \frac{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2}}{\kappa} \quad \text{et} \quad \tau_{\mathbf{T}} = \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \frac{\kappa \tau' - \kappa' \tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$$

**Proposition 4.3** La courbe indicatrice normale de  $\alpha$  et la courbe  $\mathbf{N}(s)$  de repère de Serret-Frenet noté  $(T_{\mathbf{N}}, N_{\mathbf{N}}, B_{\mathbf{N}}, \kappa_{\mathbf{N}}, \tau_{\mathbf{N}})$  et donné par

$$\begin{cases} D_t T_{\mathbf{N}} = \kappa_{\mathbf{N}} N_{\mathbf{N}} \\ D_t N_{\mathbf{N}} = -\varepsilon_{\mathbf{N}_1} \varepsilon_{\mathbf{N}_2} \kappa_{\mathbf{N}} T_{\mathbf{N}} + \tau_{\mathbf{N}} B_{\mathbf{N}} \\ D_t B_{\mathbf{N}} = -\varepsilon_{\mathbf{N}_2} \varepsilon_{\mathbf{N}_3} \tau_{\mathbf{N}} N_{\mathbf{N}}, \end{cases}$$

avec

$$\|T_{\mathbf{N}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{N}_1} = \pm 1, \quad \|N_{\mathbf{N}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{N}_2} = \pm 1, \quad \|B_{\mathbf{N}}\|_1 = \pm 1 = -\varepsilon_{\mathbf{N}_1}\varepsilon_{\mathbf{N}_2} = \varepsilon_{\mathbf{N}_3}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (-\kappa T + \tau B) \\ N_{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^4}} \left[ (\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\tau T + \kappa B) - (\kappa^2 + \tau^2)^2 N \right] \\ B_{\mathbf{N}} &= \frac{1}{\sqrt{(\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^3}} \left[ (\kappa^2 + \tau^2)(\tau T + \kappa B) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau) N \right] \end{aligned}$$

la courbure et la torsion de  $\mathbf{N}(s)$  est données par

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{N}} &= \frac{\sqrt{(\kappa^2 + \tau^2)^3 + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2}}{(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et} \\ \tau_{\mathbf{N}} &= \frac{[(\kappa\tau'' - \kappa''\tau)(\kappa^2 + \tau^2) - 3(\kappa\tau' - \kappa'\tau)(\kappa\kappa' - \tau\tau')]}{(\kappa^2 + \tau^2) + (\kappa\tau' - \kappa'\tau)^2} \end{aligned}$$

Et finalement pour la courbe binormale, on a :

**Proposition 4.4** *La courbe indicatrice normale de  $\alpha$  et la courbe  $\mathbf{B}(s)$  de repère de Serret-Frenet noté  $(T_{\mathbf{B}}, N_{\mathbf{B}}, B_{\mathbf{B}}, \kappa_{\mathbf{B}}, \tau_{\mathbf{B}})$  et donné par*

$$\begin{cases} D_t T_{\mathbf{B}} = \kappa_{\mathbf{B}} N_{\mathbf{B}} \\ D_t N_{\mathbf{B}} = -\varepsilon_{\mathbf{B}_1} \varepsilon_{\mathbf{B}_2} \kappa_{\mathbf{B}} T_{\mathbf{B}} + \tau_{\mathbf{B}} B_{\mathbf{B}} \\ D_t B_{\mathbf{B}} = -\varepsilon_{\mathbf{B}_2} \varepsilon_{\mathbf{B}_3} \tau_{\mathbf{B}} N_{\mathbf{B}}, \end{cases}$$

avec

$$\|T_{\mathbf{B}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{B}_1} = \pm 1, \quad \|N_{\mathbf{B}}\|_1 = \varepsilon_{\mathbf{B}_2} = \pm 1, \quad \|B_{\mathbf{B}}\|_1 = \pm 1 = -\varepsilon_{\mathbf{B}_1}\varepsilon_{\mathbf{B}_2} = \varepsilon_{\mathbf{B}_3}$$

et

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{B}} &= -N \\ N_{\mathbf{B}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\kappa T - \tau B) \\ B_{\mathbf{B}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} (\tau T + \kappa B) \end{aligned}$$

la courbure et la torsion de  $\mathbf{B}(s)$  sont données par

$$\kappa_{\mathbf{B}} = \frac{\sqrt{\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2}}{\tau} \text{ et } \tau_{\mathbf{B}} = \frac{-(\kappa \tau' - \kappa' \tau)}{\tau (\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2)}$$

**Lemme 4.5** Si  $\beta(t)$  est courbe non-paramétrée par la longueur d'arc, les formules de la courbure et la torsion sont

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta}^2(t) &= \varepsilon \frac{|\beta'(s)|^2 |\beta''(s)|^2 - \langle \beta'(s), \beta''(s) \rangle^2}{|\beta'(s)|^6}, \\ \tau_{\beta}(t) &= -\varepsilon \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t), \beta'''(t))}{k_{\beta}(t)^2 |\beta'(s)|^6} \end{aligned}$$

$\varepsilon = \pm 1$  et  $\beta''(t)$  est de type espace ou de type temps.

**Théorème 4.6** Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type temps ou espace (avec le vecteur normal de type temps ou espace). Si  $\alpha$  est une courbe slant hélice de  $\mathbb{E}_1^3$ , alors la tangente indicatrice  $\mathbf{T}$  est une sphérique hélice.

**Preuve.** On note la courbure et la torsion de  $\mathbf{T}$  par  $\kappa_{\mathbf{T}}$  et  $\tau_{\mathbf{T}}$  respectivement. Nous allons prouver que le rapport  $\kappa_{\mathbf{T}}/\tau_{\mathbf{T}}$  est constante, ce qui montre que  $\mathbf{T}$  est un (sphérique) hélice dans  $\mathbb{E}_1^3$ . Afin de calculer  $\kappa_{\mathbf{T}}$  et  $\tau_{\mathbf{T}}$ , nous soulignons que l'indicatrice tangente est pas la longueur d'arc paramétré.

Soit  $\alpha$  est une courbe avec le vecteur normal  $N$  de type espace ou de type temps (i.e.  $\langle N_{\mathbf{T}}, N_{\mathbf{T}} \rangle = \varepsilon_{\mathbf{T}_2} = \pm 1$ ). Alors l'indicatrice de tangente  $\mathbf{T}$  est une courbe de type espace ou une courbe de type temps. Pour les deux cas on a d'après le lemme (4.5)

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{T}}^2(t) &= -\frac{1}{\kappa^2} (\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2), \\ \det(\mathbf{T}', \mathbf{T}'', \mathbf{T}''') &= \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)', \\ \tau_{\mathbf{T}} &= \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \frac{\kappa \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\alpha$  est une courbe de type temps, alors  $\mathbf{T}$  est une courbe de type espace et

$$\begin{aligned} k_{\mathbf{T}}^2(t) &= -\frac{1}{\kappa^2} (\kappa^2 - \tau^2) , \\ \det(\mathbf{T}', \mathbf{T}'', \mathbf{T}''') &= -\kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' , \\ \tau_{\mathbf{T}} &= \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \frac{\kappa \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\kappa^2 - \tau^2} \end{aligned}$$

Ou on utilisant la proposition (3-9), on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\mathbf{T}}}{\kappa_{\mathbf{T}}} &= \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\kappa^2 - \varepsilon_{\mathbf{T}_2} \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ ou} \\ \frac{\tau_{\mathbf{T}}}{\kappa_{\mathbf{T}}} &= \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{(\kappa^2 - \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$\kappa_{\mathbf{T}}/\tau_{\mathbf{T}}$  est constante. Cela montre que  $\mathbf{T}$  est une courbe hélice. ■

**Théorème 4.7** *Soit  $\alpha$  une courbe unitaire de type temps ou d'un type espace (avec le vecteur normal de type temps ou espace). Si  $\alpha$  est une courbe slant hélice de  $\mathbb{E}_1^3$ , alors la binormale indicatrice  $\mathbf{B}$  est un sphérique hélice .*

**Preuve.** Soit  $\kappa_{\mathbf{B}}$  et  $\tau_{\mathbf{B}}$  la courbure et la torsion de la courbe  $\mathbf{B}$  et  $\alpha$  un courbe de type espace. La courbe binormale indicatrice  $\mathbf{B}$  est un courbe de type temps ou d'un type espace, si  $N$  est de type espace ou de de type temps, on a

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{B}}^2 &= \frac{\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2}{\tau^2} , \\ \det(\mathbf{B}', \mathbf{B}'', \mathbf{B}''') &= \varepsilon_0 \kappa^2 \tau^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' , \\ \tau_{\mathbf{B}} &= \frac{\kappa^2}{\tau (\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \end{aligned}$$

$\varepsilon_0 = 0$  ou  $-1$ . Si  $\alpha$  est de type temps, alors  $\mathbf{B}$  est une courbe de type espace

Alors

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{B}}^2 &= \frac{\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2}{\tau^2} , \\ \det(\mathbf{B}', \mathbf{B}'', \mathbf{B}''') &= \varepsilon_0 \kappa^2 \tau^3 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' , \\ \tau_{\mathbf{B}} &= \frac{\kappa^2}{\tau (\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\mathbf{B}}}{\kappa_{\mathbf{B}}} &= \delta(\tau) \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ ou} \\ \frac{\tau_{\mathbf{B}}}{\kappa_{\mathbf{B}}} &= \delta(\tau) \frac{\kappa^2 \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'}{\left(\kappa^2 - \tau^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

où  $\delta = \pm 1$  si  $\tau$  est positive ou négative, respectivement. On ici utilisant (3.1), (3.10) et (3.11), les deux expressions sont des constantes, ce qui prouve que la binormale indicatrice  $\mathbf{B}$  est une hélice dans  $\mathbb{E}_1^3$ . ■

**Définition 4.8** Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  est une courbe paramétrées par la longueur d'arc  $s$ . Une courbe involution de  $\alpha$  est la courbe  $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  telle que pour chaque  $s \in I$  le point  $\beta(s)$  se trouve sur la ligne de la tangente de  $\alpha$  à  $s$  et

$$\langle \alpha'(s), \beta'(s) \rangle = 0$$

Si  $\alpha$  est une courbe non-nulle, l'équation d'une involution est

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)T(s)$$

où  $c$  est une constante et  $T$  est la tangente unité du vecteur  $\alpha$ .

On a le théorème :

**Théorème 4.9** Soit  $\alpha$  une courbe de type temps unitaire ou de type espace (avec le vecteur normal de type temps ou espace). Soit  $\beta$  une involution de la courbe  $\alpha$ . Alors  $\alpha$  est un courbe slant hélice si et seulement si  $\beta$  est une courbe hélice.

**Preuve.** Soit  $k_\beta$  et  $\tau_\beta$  la courbure et la torsion de  $\beta$ . Si  $\alpha$  est une courbe de type temps , on a

$$\begin{aligned}\kappa_\beta^2 &= \frac{\tau^2 - \kappa^2}{\kappa^2 (c - s)^2}, \\ \tau_\beta &= -\frac{k}{(c - s)(\tau^2 - \kappa^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\end{aligned}$$



Alors

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\frac{\kappa^2}{(\tau^2 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

Si  $\alpha$  est une courbe de type espace,

$$\begin{aligned}\kappa_\beta^2 &= \frac{\tau^2 - \varepsilon_0 \kappa^2}{\kappa^2 (c - s)^2}, \\ \tau_\beta &= -\frac{\kappa}{(c - s) (\tau^2 - \varepsilon_0 \kappa^2)} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'\end{aligned}$$

et

$$\frac{\tau_\beta}{\kappa_\beta} = -\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 - \varepsilon_0 \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$$

$\varepsilon_0 = \pm 1$  avec  $N$  un vecteur est un type espace ou de type temps. ■

# Chapitre 5

## Conclusion

Ce travail généralise l'étude des courbes hélices et slant hélices dans le cas Euclidien. l'espace de Minkowski est un espace très important dans la relativité restreinte, muni d'une métrique Lorentzienne on peut étudier les courbes hélices et slant hélices dans ce cas, comme une extension du cas Euclidien et des relations entre les courbes indicatrices et l'involution d'une courbe de déduit directement.

# Chapitre 6

## Perspectives

- 1) Caractériser les courbes helices et slant helices au cas des variétés Riemannienne et Lorentzienne.
- 2) Caractériser les courbes  $V_n$ -slant helices
- 3) Etudier les surface dans l'espace de Minkowski  $\mathbb{E}_1^3$ .
- 4) Voir d'autre type de courbes spéciales.

# Bibliographie

- [1] A. T. Ali et R. Lopez. Slant helices in Minkowski Space  $\mathbb{E}_1^3$ , J. Korean Math. Soc., 48 (2011), No. 1, pp. 159-167.
- [2] I. Gök, S. K. Nurkan, K. Ilarslan, L. Kula et M. Altınok, Characterizations of timelike slant helices in Minkowski 3-space, Math. Commun. 19(2014), 119-138.
- [3] N. Djellali. Sur les courbes hélices et les courbes slant hélices, Mémoire de Master, Université Dr Tahar Moulay -Saïda (2015).
- [4] R. Lopez, Differential Geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, arXiv :0810.3351v2 [math.DG] 9 oct 2014.
- [5] T. Barbot. Introduction a la Géométrie Causale de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter, (UMPA, Lyon, CNRS).