

République Algérienne Démocratique Et Populaire  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

UNIVERSITE Dr. Tahar Moulay - Saida

FACULTE DES SCIENCES  
Département De Mathématiques

MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
MASTER EN MATHÉMATIQUES

OPTION : Analyse , Géométrie et applications

INTITULE

**Quelques Aspects sur Les Surfaces Minimales**

Présenté par :

Proposé par :

**Laredj Nedjadi**

**Dr S.Ouakkas**

o



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes et surfaces dans <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>6</b>
1.1	Courbe paramétrée : . . . . .	6
1.1.1	Courbes régulières . . . . .	7
1.1.2	Abscisse curviligne . . . . .	8
1.1.3	Courbes planes . . . . .	9
1.1.4	Courbes gauches : . . . . .	11
1.2	Surfaces paramétrées . . . . .	18
1.2.1	Surface régulière . . . . .	19
1.2.2	Espace tangent à une surface . . . . .	19
1.2.3	Surface orientable . . . . .	21
1.2.4	Première Forme fondamentale . . . . .	22
1.2.5	Deuxième forme fondamentale . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Surfaces minimales :</b>	<b>26</b>
2.1	Application de Gauss : . . . . .	26
2.2	Endomorphisme de Weingarten : . . . . .	27
2.2.1	Courbures : . . . . .	29
2.2.2	Surface développable. . . . .	30
2.2.3	Courbure de Gauss et position d'une surface par rapport à son plan tangent : . . . . .	33
2.3	Surfaces minimales. . . . .	36
2.3.1	Cas particulier (Paramétrisation Isothermes). . . . .	39
2.3.2	Surfaces Minimales et Analyse Complexe. . . . .	41
2.3.3	Représentation de Weirstrass-Enneper pour les surfaces minimales. . . . .	42

## TABLE DES MATIÈRES°

---

<b>3 Quelques Surfaces Minimales Connues.</b>	<b>47</b>
3.1 Surface d'Enneper. . . . .	47
3.1.1 Aspect géométrique. . . . .	47
3.1.2 Caractéristiques. . . . .	49
3.1.3 Surface d'Enneper d'ordre $n$ : . . . . .	50
3.2 Le caténoïde. . . . .	50
3.2.1 Aspect géométrique. . . . .	51
3.2.2 Caractéristiques : . . . . .	51
3.3 L' hélicoïde. . . . .	52
3.3.1 Caractéristiques. . . . .	52
3.4 Surfaces de Scherk. . . . .	54
3.4.1 Première surface de Scherk . . . . .	54
3.4.2 Deuxième surface de Scherk . . . . .	54
3.5 Surface de révolution . . . . .	56
3.6 Surface de translation . . . . .	60
<b>Liste des Figures</b>	<b>63</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>64</b>

## Introduction

Depuis toujours les mathématiciens étaient fascinés par l'étude des surfaces pour en tirer profit dans la vie courante (architecture, industrie, art...), et autant pour l'amour de la recherche et de la connaissance. Cette recherche a abouti à un type de surface particulier, (appelée surface minimale), minimisant son aire tout en réalisant une contrainte.

Le premier problème de surface minimale a été posé et résolu par Leonhard Euler en 1744, et au cours des années qui suivent les découvertes se succèdent ( Lagrange(1755), Meusnier (1776) , Weierstrass (1866)...). Depuis les années 1960 la recherche se concentre sur les surfaces minimales, et avec les progrès de l'informatique la vitesse du calcul s'est accélérée plusieurs découvertes sont réalisées.

Se mémoire intitulé «**Quelques Aspects sur Les Surfaces Minimales**» a pour but de faire un résumé de l'essentiel des travaux des scientifiques et les progrès qu'ils ont réalisé sur les surfaces minimales tout en leur donnant des exemples.

Le mémoire se divise en trois chapitres :

Le premier est consacré à des généralités concernant les courbes et les surfaces dans l'espace euclidien à trois dimensions.

Le deuxième chapitre donne les concepts essentiels pour l'étude des surfaces minimales.

Finalement, dans le troisième chapitre on trouve quelques exemples connus de surfaces minimales avec un bref résumé de leurs caractéristiques.

# Chapitre 1

## Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Nous allons tenter, dans ce premier chapitre d'étudier l'allure locale d'une courbe ou d'une surface donnée qui est fortement liée a des concepts tels que « le trièdre de frenet, la coubure, la torsion...»,alors on va définir ces concepts en premier lieu sur les courbes « planes, gauches » et en deuxieme lieu sur les surfaces dans l'espace.

### 1.1 Courbe paramétrée :

**Définition 1.1.1.** *On appelle courbe paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $\mathbb{R}^3$ , une application de classe  $\mathcal{C}^k$*

$$\begin{aligned} f : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto f(t) = M \end{aligned}$$

où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .(Figure1.1)

— L'ensemble  $\Gamma = f(I) = \{f(t), t \in I\}$  est appelé le support géométrique de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  .

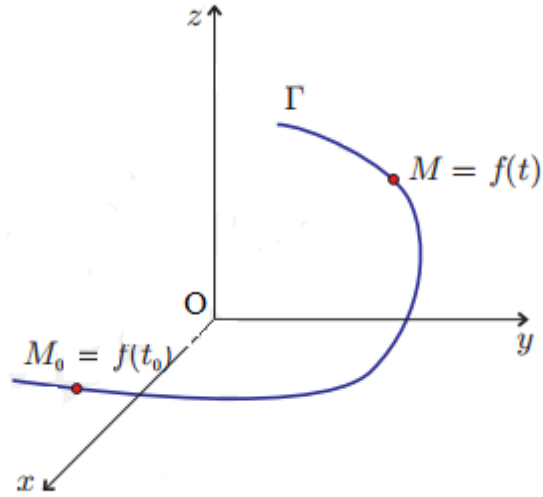


FIGURE 1.1 – Courbe paramétrée

- On dit que  $\Gamma$  est une courbe géométrique et que  $(f, I)$  est une paramétrisation de  $\Gamma$ .
- Un support  $\Gamma$  peut admettre plusieurs paramétrages différents, il suffit pour cela de se donner une fonction bijective  $\varphi$  de  $J$  vers  $I$  :  $(f \circ \varphi, J)$  est alors un arc paramétré de support  $\Gamma$ . [1]

### 1.1.1 Courbes régulières

La courbe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dite régulière si pour tout  $t \in I$  on a  $f'(t) \neq 0$ .

Dans ce cas, le support  $\Gamma$  de la courbe admet une tangente en tout point  $f(t)$  qui est dirigée par  $f'(t) \neq 0$  (Figure 1.2).

Si on reparamétrise une courbe régulière, on a toujours une courbe régulière. D'autre part, les droites tangentes ne dépendent pas de la paramétrisation.

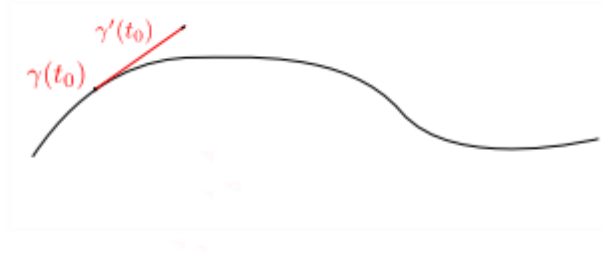


FIGURE 1.2 – Tangente à une courbe paramétrée

### 1.1.2 Abscisse curviligne

Soient  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in I$  et

$$\left( \begin{array}{l} f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto f(t) = M \end{array} \right)$$

une courbe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^1$ .

L'abscisse curviligne de  $f$  est l'application  $s$  définie par :

$$\begin{aligned} s : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du \end{aligned}$$

Le nombre  $s(t)$  défini par  $s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du$  représente la longueur de l'arc orienté  $M_0M$

On remarque que  $s$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  dont la dérivée  $s'(t) = \|f'(t)\|$  est strictement positive. On en déduit que  $s : I \rightarrow J = s(I)$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

L'application  $f \circ s^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  est donc une reparamétrisation de  $f$ , qui est appelée paramétrisation par abscisse curviligne.

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe paramétrée par abscisse curviligne « la paramétrisation  $(f, I)$  est normale », alors pour tout  $t \in I$  on a  $\|f'(t)\| = 1$ . [2]



### 1.1.3 Courbes planes

Rappelons qu'une courbe plane est une courbe qui est entièrement contenue dans un (unique) plan

On s'intéresse à l'allure locale des courbes planes régulières. Une notion centrale pour connaître cette allure est la courbure qui est fortement liée à la dérivée seconde de la paramétrisation.

#### Repère de Serret-Frenet

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Le repère de Serret-Frenet de  $\gamma$  au point  $\gamma(t)$  est le repère orthonormé directe  $(\gamma(t), \vec{T}, \vec{N})$  où  $\vec{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  est le vecteur unitaire tangent à la courbe en  $\gamma(t)$  et  $\vec{N}(t) = \text{rot}_{\pi/2} \vec{T}(t)$  le vecteur unitaire normal à la courbe en  $\gamma(t)$  obtenu en tournant le vecteur tangent unitaire d'un angle  $+\pi/2$

le repère de Serret-Frenet. est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée. (Figure 1.3) [3]

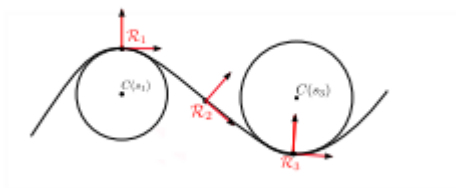


FIGURE 1.3 – Repère de Serret-Frenet  $R_i(\gamma_i(s), \vec{T}_i(s), \vec{N}_i(s))$

### Courbure :

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée normale régulière de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $M = \gamma(s)$  un point de la courbe.

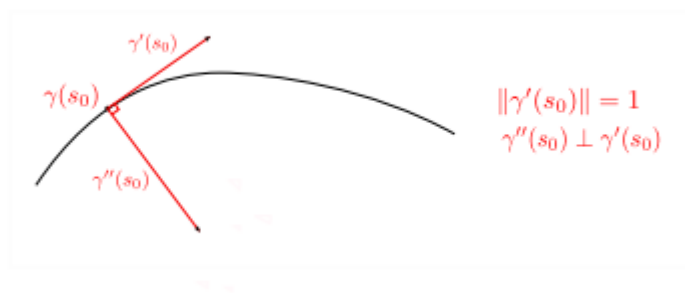


FIGURE 1.4 – Dérivée première et seconde d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne

comme  $\gamma''(s)$  et  $\gamma'(s) = \vec{T}$  sont orthogonal ,alors  $\gamma''(s)$  est colinéaire à  $\vec{N}(s)$  (Figure 1.4)

il existe une application  $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall s \in I, \gamma''(s) = \vec{T}'(s) = \bar{\kappa}(s)\vec{N}$$

— La courbure algébrique  $\bar{\kappa}(s)$  de  $\gamma$  en  $M$  est :

$$\bar{\kappa}(s) = \gamma''(s) \cdot \vec{N}(s) = \vec{s}'(s) \cdot \vec{N}(s)$$

— La courbure  $\kappa(s)$  de  $\gamma$  en  $M$  est :

$$\kappa(s) = |\bar{\kappa}(s)| = \|\vec{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\| = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|$$

— Le point  $M = \gamma(s)$  de  $\gamma$  est birégulier si  $\kappa(s) \neq 0$  .

— Le centre de courbure en  $\gamma(s)$  en un point de courbure non nulle est le point :

$$c(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\bar{\kappa}(s)} \vec{N}(s)$$

— Le rayon de courbure en  $\gamma(s)$  en un point de courbure non nulle est :

$$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

— Le cercle osculateur (Figure 1.3) est le cercle de centre  $c(s)$  et de rayon  $R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$

**Proposition 1.1.3.1.** *Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^2$ , Alors pour tout  $t \in I$ , on a : [2]*

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{et} \quad \kappa(t) = \frac{|\det(\gamma'(t), \gamma''(t))|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

**Proposition 1.1.3.2.** *(Formules de Serret Fresnet). Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée régulière et de classe  $\mathcal{C}^2$ . Alors pour tout  $s \in I$ ,*

*on a :*

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \bar{\kappa}(s) \vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) = -\bar{\kappa}(s) \vec{T}(s) \end{cases}$$

#### 1.1.4 Courbes gauches :

Une courbe gauche est une courbe de  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas plane.

##### Courbure

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale régulière et de classe  $\mathcal{C}^2$ .

La courbure de  $\gamma$  au point  $\gamma(s)$  est :

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$$

La courbure d'une courbe paramétrée régulière  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^2$  au point de paramètre  $t$  vaut :

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

### Point birégulier

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale régulière et de classe  $\mathcal{C}^2$ .

- un point  $\gamma(s)$  est dit birégulier si  $\kappa(s) \neq 0$  (i.e.  $\gamma''(s) \neq 0$ ).
- La dérivée seconde  $\gamma''(s)$  est orthogonale à  $\gamma'(s)$  et indique la direction dans laquelle la courbe est courbée à l'ordre deux.

### Trièdre de Frenet :(Figure 1.5)

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^2$  de support géométrique  $\Gamma$ ,  $s(t)$  son abscisse curviligne et  $M_0 = s(t_0)$  son origine.

#### a. Vecteur tangent unitaire

Appelons  $\vec{T}$  le vecteur défini par :

$$\vec{T} = \frac{d\gamma(t)}{ds} = \overline{\frac{d\vec{OM}}{ds}}$$

$$\|\vec{T}\| = \frac{\|d\overline{OM}\|}{|ds|} = 1$$

Le vecteur  $\vec{T}$  est unitaire tangent à  $\Gamma$  au point  $M$

**Remarque 1.1.4.1.**  $\vec{T} = \frac{d\gamma(t)}{ds} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\gamma(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$  donc  $\vec{T} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$

Si  $\Gamma$  est paramétrée par abscisse curviligne,  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , alors  $\vec{T} = \gamma'(t)$

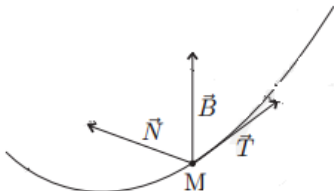


FIGURE 1.5 – Trièdre de Frenet

### b. Vecteur unitaire de normale principale

le vecteur  $\vec{T}$  est unitaire donc  $\vec{T} \cdot \vec{T} = \|\vec{T}\|^2 = 1$

par dérivation  $\frac{d(\vec{T} \cdot \vec{T})}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 0$

alors  $\frac{d\vec{T}}{ds}$  est orthogonal à  $\vec{T}$ .

posons :

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\|}$$

$\vec{N}$  est «le vecteur unitaire de la normale principale» de  $\Gamma$  en  $M$ .

**Remarque 1.1.4.2.**  $\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \vec{T}'(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$

### c. Vecteur binormal

La binormale à  $\gamma$  au point  $\gamma(s)$  est le vecteur  $\vec{B}(s)$  défini par :

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

$\vec{B}(s)$  est orthogonal à  $\vec{T}(s)$  et  $\vec{N}(s)$ .

$\vec{B}(s)$  est unitaire car  $\vec{T}(s)$  et  $\vec{N}(s)$  sont unitaires

**Définition 1.1.4.0.1.** On appelle trièdre de Frenet associé à  $\Gamma$  en  $M$  le repère orthonormé direct de l'espace  $(\gamma(s), \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ .

$(M, \vec{T}, \vec{N})$  définit le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $M$ . C'est le plan qui contient le mieux  $\Gamma$ .

$(M, \vec{N}, \vec{B})$  définit le plan normal à  $\Gamma$  en  $M$ .

$(M, \vec{B}, \vec{T})$  définit le plan rectifiant à  $\Gamma$  en  $M$ . (Figure 1.6)

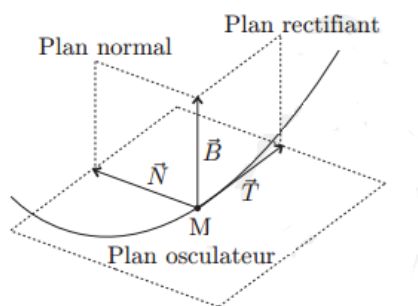


FIGURE 1.6 – Plans associés à une courbe

### Torsion d'une courbe :

Dans les courbes planes il a un seul vecteur normal qui est orthogonal au vecteur tangent en tout point de la courbe tandis que pour une courbe gauche, il y a tout un plan qui est orthogonal au vecteur tangent à la courbe en chaque point. La torsion d'une courbe, nous indique comment "tourne" le repère de Serret-Fresnet autour de la droite tangente à la courbe.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale de classe  $\mathcal{C}^3$ . et  $\gamma(s)$  un point birégulier.

pour tout  $s \in I$ , on a

$$\vec{B}(s) \cdot \vec{B}(s) = \|\vec{B}(s)\|^2 = 1,$$

en dérivant on a

$$\forall s \in I \quad \vec{B}'(s) \cdot \vec{B}(s) = 0,$$

et pour tout  $s \in I$  on a

$$\vec{B}(s) \cdot \vec{T}(s) = 0,$$

en dérivant on a

$$\forall s \in I \quad \vec{B}'(s) \cdot \vec{T}(s) + \vec{B}(s) \cdot \vec{T}'(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{T}(s) = 0$$

Le vecteur  $\vec{B}'(s)$  est orthogonal à  $\vec{B}(s)$  et  $\vec{T}(s)$ , il est donc colinéaire à  $\vec{N}(s)$ , alors il existe un réel  $\tau(s)$  tel que :

$$\vec{B}'(s) = \tau(s) \cdot \vec{N}(s)$$

**Définition 1.1.4.0.2.** La torsion  $\tau(s)$  d'une courbe  $\gamma$  paramétrée par abscisse curviligne en un point birégulier  $\gamma(s)$  est :

$$\tau(s) = \vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$$

**Interprétation géométrique**

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^3$  dont tous les points sont biréguliers. Alors

$$\text{la courbe } \gamma \text{ est plane} \Leftrightarrow \forall t \in I, \tau(t) = 0$$

La torsion est donnée pour tout  $s \in I$  par :

$$\tau(s) = \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2} \quad (1.1)$$

Démonstration : on a

$$\begin{aligned} \tau(s) &= \vec{N}(s) \cdot \vec{B}'(s) \\ &= \vec{N}(s) \cdot (\vec{T}'(s) \wedge \vec{N}(s) + \vec{T}(s) \wedge \vec{N}'(s)) \\ &= \vec{N}(s) \cdot (\vec{T}(s) \wedge \vec{N}'(s)) \\ &= \det(\vec{N}(s), \vec{T}(s), \vec{N}'(s)) \\ &= -\det(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{N}'(s)) \\ &= -\det(\gamma'(s), R(s)\gamma''(s), R(s)\gamma'''(s)) \\ &= -R(s)\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)) \\ &= -\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma''(s)\|^2} \end{aligned}$$

**Proposition 1.1.4.0.1.** pour une paramétrisation générale

La torsion d'une courbe paramétrée  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^3$  en un point  $\gamma(t)$  est donnée par :

$$\tau(s) = -\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\|^2}$$



### Formules de Serret-Frenet

En chaque point d'une courbe gauche paramétrée régulière, on a un repère de Serret-Frenet, qui bouge le long de la courbe. Les formules de Serret-Frenet expriment la dérivée de ce repère.

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée normale régulière de classe  $\mathcal{C}^3$  et  $\gamma(s)$  un point birégulier. Alors on a :

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s) \\ \vec{B}'(s) = \tau(s)\vec{N}(s) \end{cases}$$

## 1.2 Surfaces paramétrées

**Définition 1.2.1.** Une surface paramétrée de classe  $\mathcal{C}^k$   $k \geq 1$  est une application de classe  $\mathcal{C}^k$

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \longmapsto f(u, v) = M \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

où  $U$  est un domaine ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$ .

L'ensemble  $S = f(U) = \{f(x, y), (x, y) \in U\}$

est appelé le support géométrique de la surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  (Figure 1.7)

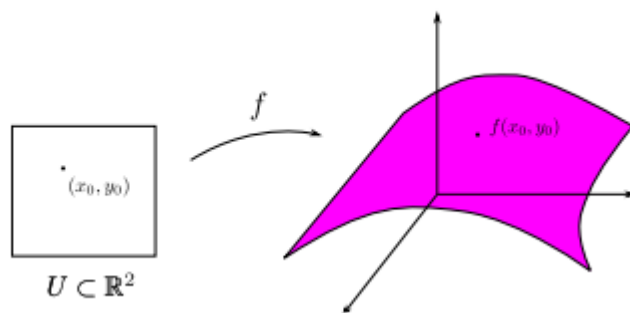


FIGURE 1.7 – Surface paramétrée

### Reparamétrisation

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$  un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme. Alors

$f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une surface paramétrée qui a exactement le même support géométrique que  $f$ .

On dit que  $\varphi$  est un changement de variable admissible et que  $f \circ \varphi$  est une reparamétrisation de  $f$ .

### 1.2.1 Surface régulière

- La surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est dite régulière au point  $M_0 = f(u_0, v_0)$  si les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$  sont libres. ie  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$
- Une surface paramétrée est dite régulière si elle est régulière en tout point.

### 1.2.2 Espace tangent à une surface

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$  et

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (u, v) \end{aligned}$$

une courbe paramétrée plane dont le support géométrique est inscrit dans l'espace des paramètres  $U$ , alors l'application

$$\begin{aligned} f \circ \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (f \circ \gamma)(t) = M \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est une courbe paramétrée dont le support  $\Gamma$  est inclus dans le support  $S = f(U)$

soient  $M_0 \in S$ ,  $M_0 = f(u_0, v_0)$  supposons  $U = I \times J$ , «  $I$ ,  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  » tels que  $(u_0, v_0) \in I \times J$

et deux courbes paramétrées  $(f_{v_0}, I)$  et  $(f_{u_0}, J)$  tracées sur  $S$  et définies par :

$$\begin{array}{ll}
 1. f_{v_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 & 2. f_{u_0} : J \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 u \longmapsto f_{v_0}(u) = (u, v_0) & v \longmapsto f_{u_0}(v) = (u_0, v)
 \end{array}$$

$f_{u_0}$  et  $f_{v_0}$  sont les deux fonctions partielles de  $f$  en  $(u_0, v_0)$  les supports  $\Gamma_{u_0}$  et  $\Gamma_{v_0}$  de  $(f_{u_0}, J)$  et  $(f_{v_0}, I)$  respectivement sont appelés courbes-coordonnées de  $S$  en  $M_0$  (Figure 1.8)

Si  $f_{u_0}$  est régulière en  $v = v_0$ , alors le vecteur

$$f'_{u_0}(v_0) = \frac{df_{u_0}}{dv}(v_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

est tangent à la courbe  $\Gamma_{u_0}$  en  $M_0$ . De même si  $f_{v_0}$  est régulière en  $u = u_0$ , alors le vecteur

$$f'_{v_0}(u_0) = \frac{df_{v_0}}{du}(u_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(v_0, u_0)$$

est tangent à la courbe  $\Gamma_{v_0}$  en  $M_0$ .

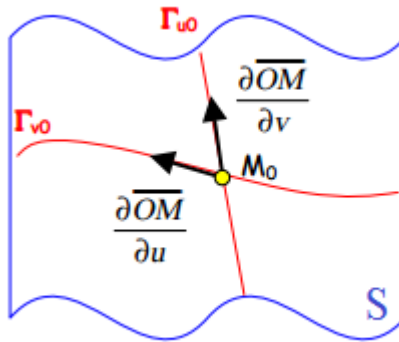


FIGURE 1.8 – Courbes coordonnées

**Définition 1.2.2.1.** *L'espace tangent à une surface paramétrée  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  au point  $M_0 = f(u_0, v_0)$  est l'espace noté*

$T_{M_0}S$  passant par  $M_0$  et engendré par les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ <sup>1</sup> (Figure 1.9).

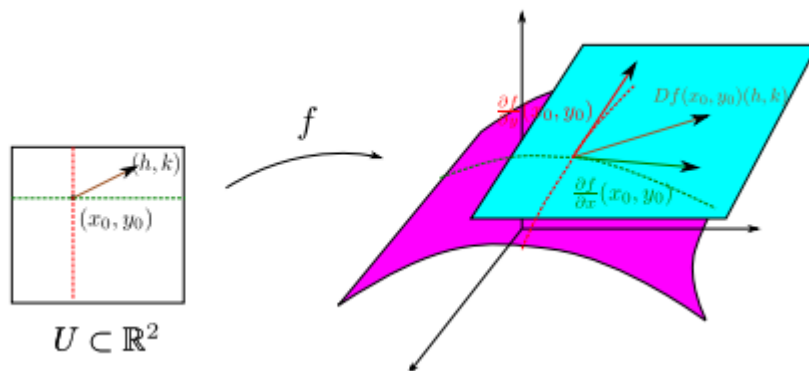


FIGURE 1.9 – Espace tangent d’une surface paramétrée régulière

### 1.2.3 Surface orientable

Une surface  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  est dite orientable s’il existe une application continue  $n : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que, en chaque point  $M$  de la surface  $S$ , le vecteur  $\vec{n}(M)$  est non nul et orthogonal au plan tangent  $T_M S$ .

Une telle application  $n$  est appelée champ de vecteurs normaux de  $S$ . De tels champs  $n$  et  $m$  définissent la même orientation de  $S$  lorsque, en tout point  $M$  de  $S$ ,  $\vec{n}(M)$ , et  $\vec{m}(M)$  sont positivement colinéaires. On définit ainsi une relation d’équivalence sur les champs de vecteurs normaux, et les classes d’équivalence sont les orientations de  $S$ . Lorsque  $S$  est connexe, il existe exactement deux orientations distinctes.

1. En général  $(\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0))$  la base naturelle du plan tangent n’est pas orthonormée.

Orienter la surface orientable connexe, c'est choisir une des deux orientations.

**vecteur normal unitaire :**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière en un point  $M = f(u, v)$ ,  $S$  son support géométrique, le vecteur  $\vec{n}$  définit par :

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

est un vecteur orthogonal au plan tangent  $T_M S$  et  $\|\vec{n}\| = 1$

$\vec{n}$  est appelé vecteur normal unitaire

#### 1.2.4 Première Forme fondamentale

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  le support d'une surface paramétrée de classe  $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = M \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Définition 1.2.4.1.** *la première forme fondamentale de  $S$  en  $M$  est la restriction du produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$  à  $T_M S$  l'espace tangent de  $S$  en  $M$ , c'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :*

$$\begin{aligned} I_M : T_M S \times T_M S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto I_M(u, v) = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire de  $\mathbb{R}^3$ .

On peut également la définir ,en chaque point comme le carré de la forme différentielle  $d\overline{OM}$  ; on note  $I_M = d\overline{OM}.d\overline{OM}$  avec

$$d\overline{OM} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \text{ alors on a } \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_M &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] (du)^2 + 2 \left[\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right] dudv + \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] (dv)^2 \\ &= \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}\right)^2 (du)^2 + 2 \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}\right)^2 (dv)^2 \\ &= \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}\right)^2 dv^2 \end{aligned}$$

posons  $E = \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial u}\right)^2$  ,  $F = \frac{\partial \overline{OM}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}$  ,et  $G = \left(\frac{\partial \overline{OM}}{\partial v}\right)^2$  ,alors

$$I_M = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (1.2)$$

- On dit qu'un paramétrage est orthogonal lorsque  $F = 0$ .
- On dit qu'un paramétrage est symétrique lorsque  $F = 0$  et  $E = G$ .

### Longueur d'une courbe

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  une courbe paramétrée plane dont le support géométrique vit dans l'espace des paramètres  $U$  .Alors  $f \circ \gamma$  est une courbe paramétrée dont le support est inclus dans le support  $S = f(U)$  . Sa longueur est donnée par :

$$l(f \circ \gamma) = \int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_a^b \|(Df(\gamma(t)).\gamma'(t))\| dt \quad (1.3)$$

## Aire d'une surface

L'aire de la surface  $S = f(U)$  paramétrée par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est :<sup>[4]</sup>

$$\int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| dudv \quad (1.4)$$

**Remarque 1.2.4.0.1.** *les intégrals  $\int_a^b \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt$  et  $\int_U \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| dudv$  ne dépendent pas de la paramétrisation.*

**Remarque 1.2.4.1.**

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|^2 \sin^2 \alpha \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\|^2 - \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right)^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

alors  $\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\| = \sqrt{EG - F^2}$  Le calcul de l'aire d'une surface, le calcul de la longueur d'une courbe dépendent de la première forme fondamentale.

## 1.2.5 Deuxième forme fondamentale

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la surface paramétrée régulière de classe  $\mathcal{C}^2$ , de support  $S$ ,  $m$  un point de  $S$  et  $\Gamma$  une courbe paramétrée par abscisse curviligne tracée sur  $S$  qui passe par  $m$

on a  $\vec{T} = \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{ds}$  le vecteur tangent à la courbe  $\Gamma$  au point  $m$

dérivons  $\vec{T}$ , alors on a :<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

2. En appliquant la formule de dérivation d'une fonction composée



Soit  $\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}\|}$  la normale unitaire en  $m$  au plan tangent  $T_m S$  qui est engendré par les deux vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial u}$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}$ , alors ils sont orthogonaux à  $\vec{n}$ .

On a :

$$\begin{aligned} \vec{T}' \cdot \vec{n} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} \cdot \vec{n} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} \cdot \vec{n} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \cdot \vec{n} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \cdot \vec{n} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \cdot \vec{n} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \cdot \vec{n} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \cdot \vec{n} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \cdot \vec{n} \\ &= \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 \cdot \vec{n} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} dudv \cdot \vec{n} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 \cdot \vec{n} \right] \cdot \frac{1}{ds^2} \end{aligned}$$

Posons

$$II_m(du, dv) = \vec{T}' \cdot \vec{n} \cdot ds^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} du^2 \cdot \vec{n} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} dudv \cdot \vec{n} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} dv^2 \cdot \vec{n}$$

**Définition 1.2.5.1.** On appelle deuxième forme fondamentale de  $S$  en  $m$  la forme quadratique sur  $T_m S$  définie par :

$$II_m(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (1.5)$$

$$\text{avec } L = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \vec{n}, \quad M = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad N = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \vec{n}.$$

**Remarque 1.2.5.1.**

$$\begin{aligned} II_m(du, dv) &= \vec{T}' \cdot \vec{n} \cdot ds^2 \\ &= \|\vec{T}'\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \vartheta \cdot ds^2, \quad \vartheta \text{ est l'angle entre } T' \text{ et } \vec{n} \\ &= \kappa(s) \cdot \|\vec{n}\| \cos \vartheta \cdot ds^2, \quad \kappa(s) \text{ est la courbure de } \Gamma \text{ au point } m \\ &= \kappa(s) \cos \vartheta \cdot I_m, \quad ds^2 = I_m \text{ et } \vec{n} \text{ est unitaire} \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\cos \vartheta}{R(s)} = \frac{II_m}{I_m}, \quad R(s) \text{ est le rayon de courbure.}$$

La deuxième forme fondamentale  $II_m$  au point  $m$  ne dépend pas (au signe près) du choix de la paramétrisation.

# Chapitre 2

## Surfaces minimales :

### 2.1 Application de Gauss :

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la surface paramétrée régulière orientée de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , de support  $\Sigma$ , pour  $m$  un point de  $\Sigma$ , il existe un unique vecteur normal unitaire  $n(m)$  compatible avec l'orientation de  $\Sigma$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\|}.$$

**Définition 2.1.1.** *L'application de Gauss de  $\Sigma$  est l'application de classe  $\mathcal{C}^k$  définie par :*

$$\begin{aligned} \nu : \Sigma &\longrightarrow S^2 \\ m &\longrightarrow \nu(m) = \vec{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \right\|} \end{aligned}$$

Où  $S^2$  est la sphère unité. et  $m = f(u, v)$

**Remarque 2.1.1.** [5]

- $\vec{n} = (\nu \circ f)$ .
- La définition est indépendante du choix de la paramétrisation.

- L'application  $\nu$  est différentiable.
- Comme  $\nu(m)$  est normale à  $T_m\Sigma$  pour le produit scalaire euclidien, et que  $T_{\nu(m)}S^2 = \nu(m)^\perp$ , ces deux espaces tangents vus comme espaces vectoriels sont égaux ce qui permet de voir  $d\nu(m)$  comme une application  $T_m\Sigma \longrightarrow T_m\Sigma$ , alors  $d\nu(m)$  est un endomorphisme

## 2.2 Endomorphisme de Weingarten :

Soient  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière orientée de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ ,  $\Sigma = f(U)$  et  $m = f(u, v) \in \Sigma$ .

**Définition 2.2.1.** L'endomorphisme de Weingarten est l'application linéaire  $W_m$  définie par :

$$\begin{aligned} W_m : T_m\Sigma &\longrightarrow T_{\nu(m)}S^2 \approx T_m\Sigma \\ X &\longrightarrow W_m(X) = -d\nu_m(X) \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.1.** Pour tout  $m \in \Sigma$ , l'endomorphisme de Weingarten est une forme bilinéaire symétrique pour le produit scalaire euclidien.

Démonstration[6] Il faut montrer que

$$\forall m \in \Sigma, \forall X, Y \in T_m\Sigma, \langle d\nu_m(X), Y \rangle = \langle X, d\nu_m(Y) \rangle$$

Soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $T_m\Sigma$ . Par bilinéarité, il suffit de montrer la relation pour les couples  $((e_1, e_1), (e_2, e_2))$  et  $(e_1, e_2)$ . Seul le dernier cas est non trivial.

Soit  $(e_u, e_v)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2 \supset U$ . On choisit

$$e_1(m) = df_{(u,v)}(e_u) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v).$$

$$e_2(m) = df_{(u,v)}(e_v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

On a

$$\begin{aligned} d\nu_m(e_1) &= d(\nu \circ f)_{(u,v)}(e_u) \\ &= dn_{(u,v)}(e_u) \\ &= \frac{\partial n}{\partial u}(u, v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\nu_m(e_2) &= d(\nu \circ f)_{(u,v)}(e_v) \\ &= dn_{(u,v)}(e_v) \\ &= \frac{\partial n}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

alors

$$\langle d\nu_m(e_1), e_2 \rangle = \left\langle \frac{\partial n}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

et

$$\langle e_1, d\nu_m(e_2) \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial n}{\partial v}(u, v) \right\rangle$$

On sait que  $n$  est orthogonal à  $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ ,

alors

$$\left\langle n, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle = 0$$

en dérivant par rapport à  $u$  on a :

$$\left\langle \frac{\partial n}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle = - \left\langle n(u, v), \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v) \right\rangle$$

$$\text{et } \left\langle n(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle = 0,$$

en dérivant par rapport à  $v$ , on a :

$$\left\langle \frac{\partial n}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle = - \left\langle n(u, v), \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) \right\rangle$$

comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(u, v)$

On conclut

$$\begin{aligned} \langle d\nu_m(e_1), e_2 \rangle &= \left\langle \frac{\partial n}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial n}{\partial v}(u, v), \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right\rangle \\ &= \langle e_1, d\nu_m(e_2) \rangle \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.2.** *Endomorphisme de weingarten et deuxième forme fondamentale (écriture matricielle)*

Soient  $W_m, I_m, II_m$  respectivement les matrices de l'endomorphisme de weingarten, la première, et la deuxième formes fondamentales de  $\Sigma$  au point  $m$ . écrivent dans la base  $(f_u, f_v)$ , alors

$$W_m = I_m^{-1} \cdot II_m$$

Démonstration

on sait que  $dn_m \in T_m\Sigma$ , alors  $n_u$  et  $n_v$  s'écrivent dans la base  $(f_u, f_v)$ <sup>1</sup> de  $T_m\Sigma$  sous la forme

$$\begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix}}_{W_m} \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

où  $W_m$  est la matrice de l'endomorphisme de weingarten dans la base  $(f_u, f_v)$ .

Les matrices des deux formes fondamentales écrites dans la base  $(f_u, f_v)$  sont

$$I_m = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II_m = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$\forall X, Y \in T_m\Sigma$  :

$$\begin{aligned} II_m(X, Y) &= \langle W_m(X), Y \rangle \\ &= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} \\ &= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}, \text{ alors :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(W_m) = \frac{\det(II_m)}{\det(I_m)} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\text{tr}(W_m) = \frac{1}{2} \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}$$

### 2.2.1 Courbures :

L'endomorphisme de weingarten  $W_m$  étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormale  $(V_1, V_2)$  de  $T_m\Sigma$ , où  $V_1, V_2$  sont les vecteurs propres de  $W_m$  associés respectivement aux valeurs propres  $k_1, k_2$ .

---

1.  $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v}, n_u = \frac{\partial n}{\partial u}$  et  $n_v = \frac{\partial n}{\partial v}$ .

**Définition 2.2.1.1.** On appelle  $k_1$  et  $k_2$  les **courbures principales** de  $\Sigma$  en  $m$ .

Si  $k_1 = k_2 = k$ , alors  $W_m = kId_{T_m\Sigma}$ . Si  $k_1 \neq k_2$ , les deux droites propres sont appelées **directions principales** de  $\Sigma$  en  $m$ .

La **courbure de Gauss**<sup>2</sup> de  $\Sigma$  en  $m$  est

$$K(m) = k_1(m)k_2(m) = \det(W_m)$$

La **courbure moyenne** de  $\Sigma$  en  $m$  est

$$H(m) = \frac{1}{2}(k_1(m) + k_2(m)) = \frac{1}{2}\text{tr}(W_m)$$

**Remarque 2.2.1.1.** Les courbures principales sont les deux solutions réelles de l'équation de variable  $k$

$$k^2 - 2H(m)k + K(m) = 0$$

, alors

$$k_i = H(m) \pm \sqrt{H(m)^2 - K(m)}$$

## 2.2.2 Surface développable.

Une surface développable est une surface réglée telle que le plan tangent est le même le long d'une génératrice.<sup>3</sup>(Figure 2.1)

**Remarque 2.2.2.1.** — une surface développable est une surface réglée dont toute génératrice est stationnaire, «le plan tangent à la surface est le même en tout point de la génératrice».

— la courbure de Gauss d'une surface développable est nulle<sup>4</sup>.

Exemple.

— les cônes, les cylindres, et le ruban de mobius sont des surfaces développables.

— La sphère n'est pas une surface développable.

---

2. ou courbure totale.

3. Une telle surface peut être rouler sans glisser sur un plan, «contact le long d'une droite»

4. elle ne l'est pas pour une surface réglée quelconque

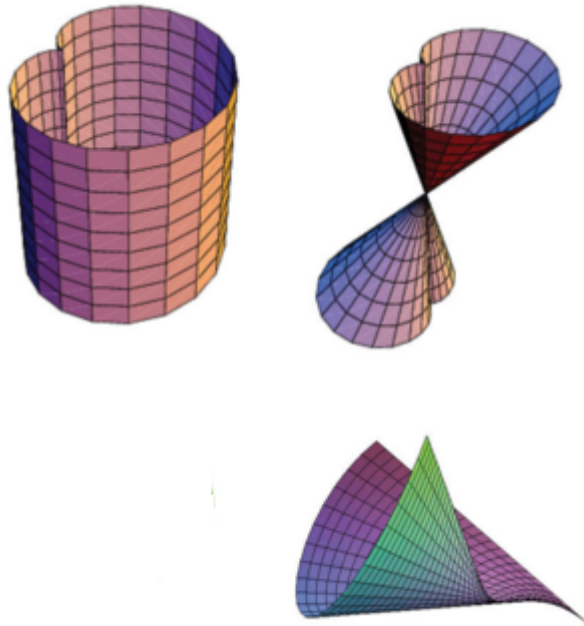


FIGURE 2.1 – Surface développables

Exemple 1 : le plan  $P$  défini par  $(O, i, j)$ –Soit le paramétrage  $(f, \mathbb{R}^2)$  tel que

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (u, v, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors  $E = G = 1, F = 0$  et  $L = M = N = 0$ .donc  $W_m = 0$  pour tout  $m \in P$  .

comme  $k_1 = k_2 = 0$  et  $K(m) = H(m) = 0$  ,alors toute direction de  $P$  est direction principale.

Exemple 2 : le cylindre. $\Sigma$  de paramétrisation  $(f, \mathbb{R}^2)$  telle que

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \begin{pmatrix} -\sin(u) \\ \cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \begin{pmatrix} -\cos(u) \\ -\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E = G = 1$  et  $F = 0$ .

on a

$$n(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

d'où  $L = -1, M = N = 0$

Dans la base  $(f_u, f_v)$  la matrice de  $W_m$  est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où  $K(m) = 0, H(m) = \frac{1}{2}, k_1 = -1$  et  $k_2 = 0$ .

Les directions principales sont données par  $f_u$  et  $f_v$ .

Exemple 3 : la sphère. – Soit la paramétrisation

$$f : \mathbb{R} \times ]0, \pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (\cos(u) \sin(v), \sin(u) \sin(v), \cos(v)).$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \begin{pmatrix} -\sin(u) \sin(v) \\ \cos(u) \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \begin{pmatrix} -\cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \begin{pmatrix} -\cos(u) \sin(v) \\ -\sin(u) \sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \begin{pmatrix} -\sin(u) \cos(v) \\ \cos(u) \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$E = \sin^2(v), F = 0$  et  $G = 1$

on a

$$n(u, v) = (-\cos(u) \sin(v), -\sin(u) \sin(v), -\cos(v)) = -f(u, v)$$

d'où

$$L = \sin^2(v), M = 0, N = 1$$

dans la base  $(f_u, f_v)$  la matrice de  $W_m$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



par conséquent

$$W_m = Id \text{ d'où } k_1 = k_2 = 1 \text{ et } K(m) = H(m) = 1.$$

Toute direction est direction principale.

### 2.2.3 Courbure de Gauss et position d'une surface par rapport à son plan tangent :

Soit  $p = f(u + du, v + dv) \in \Sigma$  un point voisin à  $m$  et appartenant à la même carte.

Soit  $d$  la projection du vecteur  $\vec{m}p$  sur la normal  $\vec{n}$ .  $d$  est positif si le point  $p$  se trouve audessus du plan tangent et négatif si il se trouve en dessous du plan tangent.

d'après la formule de Taylor-Young on à

$$f(u+du, v+dv) - f(u, v) = (f_u, f_v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(du, dv) \begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} + 0(du^2 + dv^2)$$

où  $0(r)$  est un vecteur tel que  $\frac{|0(r)|}{r} \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow 0$  puisque  $df = f_u du + f_v dv$ , et  $df^2 = f_{uu} du^2 + f_{uv} dudv + f_{vv} dv^2$ , alors  $f(u + du, v + dv) - f(u, v) = df + \frac{1}{2}d^2f + 0(du^2 + dv^2)$ .

$$\begin{aligned} d &= \vec{m}p \cdot \vec{n} \\ &= (f(u + du, v + dv) - (u, v)) \cdot n \\ &= (df + \frac{1}{2}d^2f + 0(du^2 + dv^2)) \cdot n \\ &= \underbrace{df \cdot n}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{d^2f \cdot n}_{=II} + 0(du^2 + dv^2) \cdot n \\ &= \frac{1}{2}II + 0(du^2 + dv^2) \\ &= \delta + 0(du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

la fonction

$$\delta = \frac{1}{2}II(du, dv) = \frac{1}{2}(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2) \quad (2.1)$$

s'appelle paraboloides[7] osculateur du point  $m$  et la nature de cette paraboloides dépend du signe de  $LN - M^2$  qui a le même signe que  $k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$

5

---

5. Puisque  $EG - F^2 > 0$ .

Selon le signe de  $K$  on distingue trois cas :

Si  $K > 0$  : Les courbures principales de  $\Sigma$  en  $m$  sont de même signe, et il n'y a pas de directions asymptotiques en  $m$ . Au voisinage de  $m$ , la surface se trouve d'un même côté du plan tangent.

On dit que  $m$  est **elliptique** (Figure 2.2).

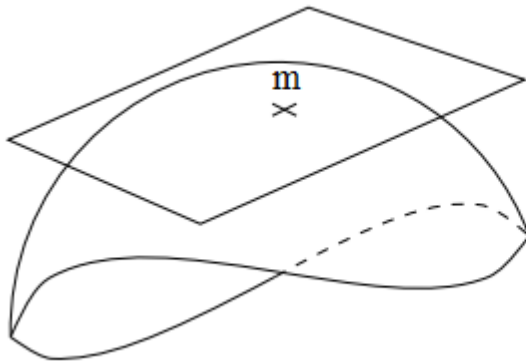


FIGURE 2.2 – Point elliptique.

Si  $K < 0$  : Les courbures principales de  $\Sigma$  en  $m$  sont de signe opposé. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions (au signe près) qui annulent la deuxième forme fondamentale (ce sont les directions asymptotiques). On dit que le point  $m$  est **hyperbolique** (Figure 2.3).

Si  $K = 0$  :  $k_1$  ou  $k_2$  s'annule, il y a deux possibilités :

\*  $k_1$  ou  $k_2 \neq 0$ .

Les courbures sont du même signe. Le plan tangent "colle" à la surface (linéairement) le long de la direction principale de courbure nulle (qui est donc une direction asymptotique), on dit que le point est **parabolique** (Figure 2.4).

\*\*  $k_1 = k_2 = 0$ .

Toutes les courbes passant par  $m$  ont une courbure nulle (i.e.  $I_m \equiv 0$ ), on dit que le point est **méplat**; une surface entièrement constituée de points méplats est une surface plane (i.e.  $II \equiv 0$ ).

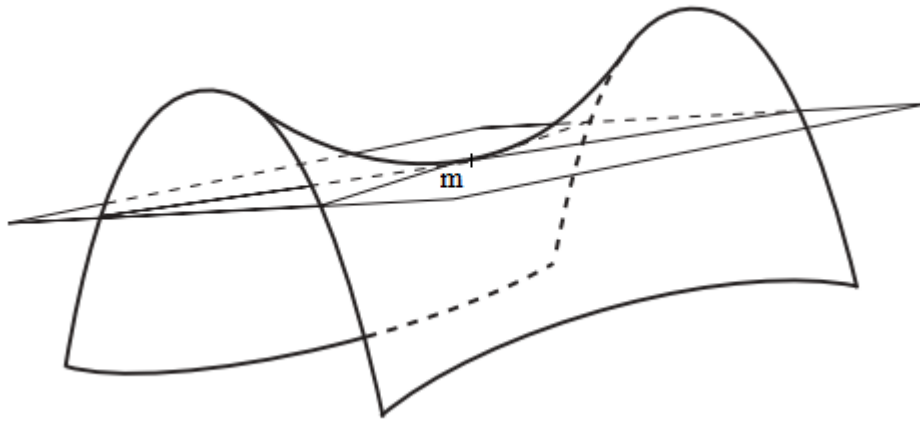


FIGURE 2.3 – Point hyperbolique.

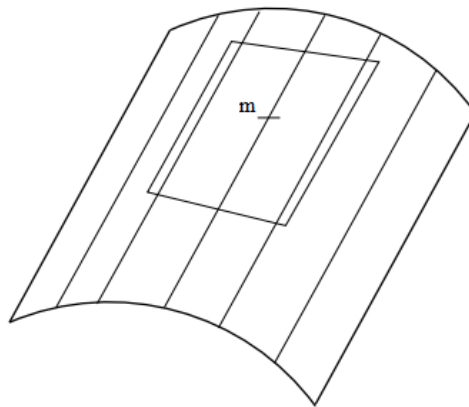


FIGURE 2.4 – Point parabolique.

## 2.3 Surfaces minimales.

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière orientée de classe  $\mathcal{C}^2$ , de support  $\Sigma$ .

**Définition 2.3.1.** On dit qu'une surface est minimale si sa courbure moyenne est identiquement nulle. [8]

Exemple1 :

- le plan  $P$  défini par  $f(u, v) = (u, v, 0)$  est une surface minimale «sa courbure moyenne est nulle pour tout point de  $P$ ».
- le cylindre définie par  $f(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$  n'est pas une surface minimales « $H = 1/2$  pour tout point de cylindre».
- La sphère définie par  $f(u, v) = (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))$  n'est pas une surface minimale « $H = 1$  pour tout point de la sphère».

Exemple2 :

Soit  $\Sigma$  la surface paramétrée par  $(f, I)$  telle que

$$\begin{aligned} f : I = \mathbb{R} \times [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), u) \end{aligned} \quad 6$$

$g$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

on a

$$f_u \begin{pmatrix} g'(u)\cos(v) \\ g'(u)\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix}, f_v \begin{pmatrix} -g(u)\sin(v) \\ g(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}, f_{uu} \begin{pmatrix} g''(u)\cos(v) \\ g''(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{vv} \begin{pmatrix} -g(u)\cos(v) \\ -g(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}, f_{uv} \begin{pmatrix} -g'(u)\sin(v) \\ g'(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = 1 + g'(u)^2, G = g(u)^2, F = 0$$

$$\vec{n} = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} = \frac{(-g(u)\cos(v), -g(u)\sin(v), g(u)g'(u))}{(1 + g'(u)^2)g(u)^2}$$

$$L = f_{uu} \cdot n = \frac{-g(u)g''(u)}{(1+g'(u)^2)(g(u))^2}, N = f_{vv} \cdot n = \frac{g(u)^2}{(1+g'(u)^2)g(u)^2}, M = f_{uv} \cdot n = 0$$

---

6. C'est une surface de revolution.

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{1 - \frac{-g(u)g''(u)}{(1+(g'(u))^2)}}{(1 + g'(u)^2)g(u)^2} = \frac{(1 + g'(u)^2) - g(u)g''(u)}{((1 + g'(u)^2))^2 g(u)^2}$$

cette surface est minimale si est seulement si  $H = 0$  qui est équivalent à  $(1 + g'(u)^2) - g(u)g''(u) = 0$ . ou  $\frac{g''(u)}{1+g'(u)^2} = \frac{1}{g(u)}$ .

en multipliant par  $2g'(u)$ , on obtient  $\frac{2g'(u)g''(u)}{1+g'(u)^2} = \frac{2g'(u)}{g(u)}$

par intégration on a  $\log(1 + g'(u)^2) = C + \log(g(u)^2)$ ,

donc  $(1 + g'(u)^2) = a^2 g(u)^2$ ,  $a^2 = \exp C$

alors  $\frac{g'(u)'}{\sqrt{a^2 g^2(u) - 1}} = \pm 1$ .

comme  $\frac{d}{du} \operatorname{Argcosh}(ag) = a \frac{g'(u)}{\sqrt{a^2 g(u)^2 - 1}}$

on obtient  $g(u) = \frac{1}{a} \cosh(a(u - u_0))$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$  <sup>7</sup>

alors la surface est définie par

$$f(u, v) = \left( \frac{1}{a} \cdot \cosh(au) \cos(v), \frac{1}{a} \cdot \cosh(au) \sin(v), u \right), a \in \mathbb{R}^* \text{ <sup>8</sup>}$$

**Proposition 2.3.1.** Si la paramétrisation  $f$  est donnée sous la forme  $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$  <sup>9</sup>. Alors

$$H = \operatorname{div} \frac{Dg}{\sqrt{1 + |Dg|^2}} = \frac{1}{2} \frac{(1 + g_u^2)g_{vv} + (1 + g_v^2)g_{uu} - 2g_u g_v g_{uv}}{(1 + g_u^2 + g_v^2)^{\frac{3}{2}}} [g]$$

Démonstration :

$\forall (u, v) \in U$ ,  $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$ .

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} \end{pmatrix}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}, f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} \end{pmatrix}, f_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

$$, f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \end{pmatrix}.$$

$$n = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} = \frac{(-g_u, -g_v, 1)}{\sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}}$$

7. Déterminer par Euler les années 1740.

8. J. Plateau a donné à cette surface le nom de caténoïde

9. Localement une surface de  $\mathbb{R}^3$  est le graphe d'une fonction lisse.

alors

$$\begin{aligned}
E &= f_u^2 = 1 + g_u^2, \quad G = f_v^2 = 1 + g_v^2, \quad F = f_u f_v = g_u g_v. \\
L &= f_{uu} \cdot n = (0, 0, g_{uu}) \cdot \frac{(-g_u, -g_v, 1)}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} = \frac{g_{uu}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} \\
N &= f_{vv} \cdot n = (0, 0, g_{vv}) \cdot \frac{(-g_u, -g_v, 1)}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} = \frac{g_{vv}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} \\
M &= f_{uv} \cdot n = (0, 0, g_{uv}) \cdot \frac{(-g_u, -g_v, 1)}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} = \frac{g_{uv}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1+g_u^2) \frac{g_{vv}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} + (1+g_v^2) \frac{g_{uu}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} - 2g_u g_v \frac{g_{uv}}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}}}{(1+g_u^2)(1+g_v^2) - (g_u g_v)^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(1+g_u^2)g_{vv} + (1+g_v^2)g_{uu} - 2g_u g_v g_{uv}}{(1+g_u^2+g_v^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{div} \frac{Dg}{\sqrt{1+|Dg|^2}}
\end{aligned}$$

remarquons que

$$Dg = g_u du + g_v dv \text{ et } \sqrt{1+|Dg|^2} = \sqrt{1+g_u^2+g_v^2}$$

$$\frac{Dg}{\sqrt{1+|Dg|^2}} = \frac{g_u}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} du + \frac{g_v}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} dv$$

$$\operatorname{div} \frac{Dg}{\sqrt{1+|Dg|^2}} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{g_u}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{g_v}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}} \right)$$

$$= \frac{g_{uu} \sqrt{1+g_u^2+g_v^2} - g_u \frac{g_{uu}g_u + g_{uv}g_v}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}}}{1+g_u^2+g_v^2} + \frac{g_{vv} \sqrt{1+g_u^2+g_v^2} - g_v \frac{g_{uv}g_u + g_{vv}g_v}{\sqrt{1+g_u^2+g_v^2}}}{1+g_u^2+g_v^2}$$

$$= \frac{(1+g_u^2)g_{vv} + (1+g_v^2)g_{uu} - 2g_u g_v g_{uv}}{(1+g_u^2+g_v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H = 0 \text{ est equivalent à } \operatorname{div} \frac{Dg}{\sqrt{1+|Dg|^2}} = 0.$$

$$\text{c.à.d } (1 + g_u^2)g_{vv} + (1 + g_v^2)g_{uu} - 2g_u g_v g_{uv} = 0. \text{ }^{10}$$

**Définition 2.3.2.** Une surface de  $\mathbb{R}^3$  est minimale si et seulement si elle est localement le graphe d'une solution de l'équation [10]

$$(1 + g_u^2)g_{vv} + (1 + g_v^2)g_{uu} - 2g_u g_v g_{uv} = 0 \quad (2.2)$$

### Exemple

les fonctions affines  $g(u, v) = au + bv + c$  (où  $a, b, c$  sont des constantes arbitraires), sont solutions de cette équation. Les surfaces minimales correspondantes sont les plans.

## 2.3.1 Cas particulier (Paramétrisation Isothermes).

Soit  $\Sigma$  une surface définie dans  $\mathbb{R}^3$ , paramétrée par la fonction vectorielle  $f$  telle que :

$$f(u, v) \begin{cases} x = f_1(u, v) \\ y = f_2(u, v) \\ z = f_3(u, v) \end{cases}$$

### Paramétrisation Isothermes.

$f$  est dite une paramétrisation conforme (isotherme) de  $\Sigma$  si on a : [11]

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0 \end{cases}$$

C-à-d : les coefficients de la première forme fondamentale sont telles que :  $E = G$  et  $F = 0$ . <sup>11</sup>

**Remarque 2.3.1.0.1.** — chaque surface peut être paramétriser par des coordonnées isothermes.

---

10. Equation de Lagrange .C'est l'équation satisfaite par les surfaces de la forme  $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$  qui minimisent l'aire pour des variations fixant un contour.

11. Géométriquement ça veut dire que  $\frac{\partial f}{\partial u}$  et  $\frac{\partial f}{\partial v}$  sont orthogonaux «les angles sont préservées».

— Dans ce cas.

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN+EL}{2E^2} \\ &= \frac{N+L}{2E} \\ &= \frac{(f_{uu}+f_{vv})n}{2E} \\ &= \frac{\Delta f \cdot n}{2E} \end{aligned}$$

alors

$$\Delta f = (2EH)n$$

### Fonction Harmonique.

Soit  $f$  une application de  $U \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on dit que  $f$  est harmonique si :

$$\forall (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0 \text{ }^{12}$$

**Définition 2.3.3.** *Considérons une surface  $\Sigma$  de paramétrisation conforme*

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (f_1, f_2, f_3) \end{aligned}$$

*Cette surface est minimale si et seulement si ses fonctions coordonnées  $f_1, f_2, f_3$  sont harmoniques.*[\[12\]](#)

$$c\text{-à-d } : \Delta f_i = \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) f_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Preuve :

D'après la remarque (2.3.1.0.1) on a :  $\Delta f = (2EH)n$

Si  $\Sigma$  est minimale ( $H = 0$ ), alors  $\Delta f = EH \cdot n = 0$  donc  $f_1, f_2, f_3$  sont harmoniques

Si  $f_1, f_2, f_3$  sont harmoniques.,  $0 = \Delta f = EH \cdot n$  et puisque  $n \neq 0$  «vecteur normal unitaire» ,  $E = |f_u|^2 \neq 0$  alors  $H = 0$  donc la surface est minimale.

---

12. la fonction  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$  est notée  $\Delta f$  et est appelée «laplacien» de  $f$ .



## 2.3.2 Surfaces Minimales et Analyse Complexe.

### Fonction Holomorphe.

Soient  $U$  un ouvert de l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes et  $f$  une application de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

Posons :  $z = u + iv$  et  $f(z) = P(u, v) + iQ(u, v)$ , où  $P(u, v) = \operatorname{Re}f(z)$  et  $Q(u, v) = \operatorname{Im}f(z)$ , on est donc ramené à une application  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , et ceci en posant  $\varphi(u, v) = (P(u, v), Q(u, v))$ .

**Définition 2.3.2.0.1.** On dit que  $f$  est dérivable (au sens complexe) ou holomorphe en un point  $z_0$  de  $U$  si la limite suivante, appelée dérivée de  $f$  en  $z_0$  existe :  $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

On dit que  $f$  est holomorphe sur l'ouvert  $U$  si elle est holomorphe en tout point  $z_0$  de  $U$ .

En particulier, on appelle fonction entière une fonction holomorphe dans tout le plan complexe.

**Remarque 2.3.2.0.1.**  $f$  est dérivable si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

### Conditions de Cauchy-Riemann.

**Théorème 2.3.2.0.1.** La fonction  $z \longrightarrow f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  est différentiable dans le champ complexe, au point  $z_0 = x_0 + iy_0$  si et seulement si, les fonctions  $(x, y) \longrightarrow P(x, y)$  et  $(x, y) \longrightarrow Q(x, y)$  sont différentiables au point  $(x_0, y_0)$  et si leurs dérivées vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial Q}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial P}{\partial v}(u_0, v_0) = -\frac{\partial Q}{\partial u}(u_0, v_0) \end{cases}$$

La dérivée, donc en un point  $z$  quelconque est donnée par :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial P}{\partial u}(u, v) + i\frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial v}(u, v) - i\frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.2.0.2.** Une fonction holomorphe est analytique (théorie de Cauchy) : elle est indéfiniment dérivable et est égale au voisinage de tout point de l'ouvert à la somme de sa série de Taylor.

### Fonction Meromorphique.

une fonction complexe  $g(z)$  est meromorphique sur une region si elle est holomorphe sur cette region sauf pour des points singuliers isolés qui sont tous des poles. <sup>13</sup>.

**Théorème 2.3.2.0.2.** Soit  $f$  une fonction holomorphe et telle que  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ , alors les deux fonctions réelles  $P$  et  $Q$  sont harmoniques. <sup>14</sup>

**Théorème 2.3.2.0.3.** Soit  $P$  une fonction harmonique de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , alors il existe une fonction  $f$  holomorphe de  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que  $Re(f) = P$ . (ou  $Im(f) = P$ ).

### 2.3.3 Représentation de Weierstrass-Enneper pour les surfaces minimales.

En 1866, K. Weierstrass introduisit une méthode générale de construction de surfaces minimales en utilisant la théorie des fonctions de la variable complexe. Cette méthode a permis la construction de nombreuses surfaces minimales.

**Théorème 2.3.3.1.** Soit  $X$  une surface minimale non plane définie sur un domaine simplement connexe  $D \subset \mathbb{C}$ . Il existe une fonction méromorphe  $g$  et une fonction holomorphe  $f$  sur  $D$ , non identiquement nulles, telles que  $gf^2$  soit holomorphe, et telle que

$$X(z, \bar{z}) = Re\left(\int (f(1 - g^2), if(1 + g^2), 2fg)dz\right) \quad (2.3)$$

Reciproquement, de telles fonctions  $g, f$  définissent une surface minimale  $X : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$  si  $D$  est simplement connexe. [13]

#### Démonstration

Soit  $\Sigma$  une surface minimale définie par une paramétrisation isotherme  $(X, U)$  tel que

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) \end{aligned}$$

---

13. Un point  $z_0$  est un pole si  $f \rightarrow \infty$  lorsque  $z \rightarrow z_0$ .

14. La démonstration est une application directe des conditions de Cauchy-Riemann.

il est clair que  $\mathbb{R}^2$  est homéomorphe à  $\mathbb{C}$ .

posons  $z = u + iv$  et  $\bar{z} = u - iv$ , alors  $u = \frac{z+\bar{z}}{2}$  et  $v = \frac{z-\bar{z}}{2i}$   
on peut écrire

$$X(z, \bar{z}) = (X^1(z, \bar{z}), X^2(z, \bar{z}), X^3(z, \bar{z})) \quad (2.4)$$

rappelons que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad (2.5)$$

posons  $\phi = \frac{\partial X}{\partial z}, \phi^j = \frac{\partial X^j}{\partial z}, j \in \{1, 2, 3\}$ .

la dérivée de la  $j^{\text{ème}}$  composante est

$$\phi^j = \frac{\partial X^j}{\partial z} = \frac{1}{2}(X_u^j - iX_v^j) \quad (2.6)$$

,alors

$$\phi = \frac{\partial X}{\partial z} = (X_z^1, X_z^2, X_z^3) \quad (2.7)$$

$$(\phi)^2 = (X_z^1)^2 + (X_z^2)^2 + (X_z^3)^2 \quad (2.8)$$

puisque

$$(\phi_z^j)^2 = \left( \frac{1}{2}(X_u^j - iX_v^j) \right)^2 = \frac{1}{4}(((X_u^j)^2 - (X_v^j)^2 - 2iX_u^jX_v^j))$$

alors

$$\begin{aligned} (\phi)^2 &= \frac{1}{4}(\sum_{j=1}^3((X_u^j)^2 - (X_v^j)^2 - 2iX_u^jX_v^j)) \\ &= \frac{1}{4}(|X_u|^2 - |X_v|^2 - 2iX_uX_v) \\ &= \frac{1}{4}(E - G - 2iF). \end{aligned}$$

Comme  $X$  est isotherme on a

$$(\phi)^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$(\phi^1 + i\phi^2)(\phi^1 - i\phi^2) = -(\phi^3)^2 \quad (2.10)$$

Posons

$$f = \phi^1 - i\phi^2 \text{ et } g = \frac{\phi^3}{(\phi^1 - i\phi^2)},$$

alors d'après les équations (2.9) et (2.10) on a

$$\phi_3 = fg$$

$$(\phi_1 + i\phi_2)f = -(fg)^2 \implies \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$$

donc

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg$$

La démonstration du théorème réclame le lemme suivant

**Lemme 2.3.3.1.**

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) = \frac{1}{4} \Delta X$$

Preuve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) + i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial u} - i \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - i \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + i \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \Delta X. \end{aligned}$$

( $\implies$ )

Si  $\Sigma$  est minimale ,alors d'après la définition (2.3.3)  $X^j$  est harmonique pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

( $\impliedby$ )

$X^j$  harmonique ,alors

$$\begin{aligned} \Delta X = 0 &\implies \frac{1}{4} \Delta X = 0 \\ &\implies \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right) = 0 \\ &\implies \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} = 0 \end{aligned}$$

$\phi^j$  est holomorphe d'après la remarque (2.3.2.0.1)

conclusion

$\phi^j$  holomorphe  $\iff \Sigma$  est minimale.

Notons que f est holomorphe et g est méromorphe ,telle que fg soit holomorphe.

maintenant on va démontrer que chaque surface minimale est représentée par une fonction holomorphe  $\phi$  avec  $(\phi)^2 = 0$  et comment ses coordonnées isothermes sont elles construites ?

**Corollaire 2.3.3.1.**

$$X^j(z, \bar{z}) = c_j + 2Re \left( \int \phi^j dz \right)$$

Preuve

$$z = u + iv \implies dz = du + idv$$

$$\phi^j dz = \frac{1}{2}(X_u^j - iX_v^j)(du + idv) = \frac{1}{2}((X_u^j du + X_v^j dv) + i(X_u^j dv - X_v^j du))$$

et

$$\bar{\phi}^j d\bar{z} = \frac{1}{2}(X_u^j + iX_v^j)(du - idv) = \frac{1}{2}((X_u^j du + X_v^j dv) - i(X_u^j dv - X_v^j du))$$

, alors on a

$$\begin{aligned} dX^j &= \frac{\partial X^j}{\partial z} dz + \frac{\partial X^j}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \\ &= \phi^j dz + \bar{\phi}^j d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2}(X_u^j du + X_v^j dv) + \frac{1}{2}(X_u^j du + X_v^j dv) \\ &= X_u^j du + X_v^j dv \\ &= 2\operatorname{Re}(\phi^j dz) \end{aligned}$$

$$\implies X^j = 2\operatorname{Re}(\int \phi^j dz) + c_j$$

la meilleure façon de construire  $\phi$  pour qu'elle soit holomorphe et  $(\phi)^2 = 0$

et la suivante

soit  $f$  une fonction holomorphe et  $g$  une fonction méromorphe telles que  $fg^2$  soit holomorphe

on a

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{2}f(1 - g^2) \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1 + g^2) \\ \phi^3 &= fg \end{aligned}$$

, alors  $\phi^1$ ,  $\phi^2$  et  $\phi^3$  sont holomorphes

et

$$(\phi)^2 = \frac{1}{4}f^2(1 - g^2)^2 - \frac{1}{4}f^2(1 + g^2)^2 + f^2g^2 = 0$$

Posons

$$X(z, \bar{z}) = \operatorname{Re}\left(\int ((1 - g^2)f, i(1 + g^2)f, 2fg)dz\right)$$

Exemples

— Plan :  $D = \mathbb{C}$ ;  $f(z) = 1$ ;  $g(z) = 0$ .

— surface d'Enneper :  $D = \mathbb{C}$ ;  $f(z) = 1$ ;  $g(z) = z$ , alors

$$\phi = (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z)$$

### Une deuxième écriture pour la représentation de Weierstrass :

Il existe une autre façon d'écrire la représentation de Weierstrass en utilisant seulement une fonction composée holomorphe.

Si  $g$  est une fonction holomorphe telle que  $g^{-1}$  est aussi holomorphe, si on pose  $\tau = g$ , alors  $\frac{d\tau}{dz} = \frac{dg}{dz}$ , donc  $dz = dg$ .

Par définition

$$F(\tau) = \frac{f}{\frac{dg}{dz}} = f \frac{dz}{dg},$$

alors

$$F(\tau)d\tau = f\left(\frac{dz}{dg}\right)(dg) = f dz.$$

substituons  $g$  par  $\tau$  et  $f$  par  $F(\tau)d\tau$  dans la représentation de Weierstrass-Enneper.

**Théorème 2.3.3.2.** *Pour toute fonction holomorphe  $F(\tau)$ , une surface minimale est définie par*

$$X(z, \bar{z}) = (X^1(z, \bar{z}), X^2(z, \bar{z}), X^3(z, \bar{z}))$$

telle que

$$\begin{cases} X^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re}(f(1 - \tau^2)F(\tau)dz) \\ X^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re}(f i(1 + \tau^2)F(\tau)dz) \\ X^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re}(f 2\tau F(\tau)dz). \end{cases} \quad (2.11)$$

#### Exemple

Pour  $\tau = e^z$  et  $F(\tau) = \frac{i}{2\tau^2}$  on obtient une surface minimale appelée «helicoid».

notons que  $\tau = e^z, \tau^{-1} = \operatorname{Log}z$ , et  $F(e^z) = \frac{i}{2e^{2z}}$  sont toutes holomorphe sur le domaine de  $\operatorname{Log}(z)$  <sup>15</sup>

---

15.  $\operatorname{Log}(z)$  au lieu de  $\log(z)$  parceque  $\operatorname{Log}(z)$  est la branche principale de  $\log$  et les branches de  $\log$  sont holomorphe mais  $\operatorname{Log}$  lui même n'est pas holomorphe.

# Chapitre 3

## Quelques Surfaces Minimales Connues.

Nous allons introduire des surfaces minimales complètes célèbres. en utilisant la représentation de Weierstrass.

### 3.1 Surface d'Enneper.

La surface d'Enneper<sup>1</sup> est la surface minimale obtenue en prenant  $f(z) = 1$ ,  $g(z) = z$  dans la paramétrisation de Weierstrass.(Figure 3.1)[14]

#### 3.1.1 Aspect géométrique.

Elle peut être définie géométriquement comme l'enveloppe des plans médiateurs de deux points situés sur deux paraboles homofocales (i. e. des paraboles dont les plans sont perpendiculaires et dont le sommet de l'une passe par le foyer de l'autre

La surface d'Enneper est invariante par un retournement, ici d'axe  $x = y, z = 0$  (échanger  $u$  et  $v$  dans la paramétrisation) qui échange les deux faces de la surface.(Figure 3.2)

---

1. Alfred Enneper (1830 -1885) : mathématicien allemand. Surface étudiée en 1863 par Enneper.

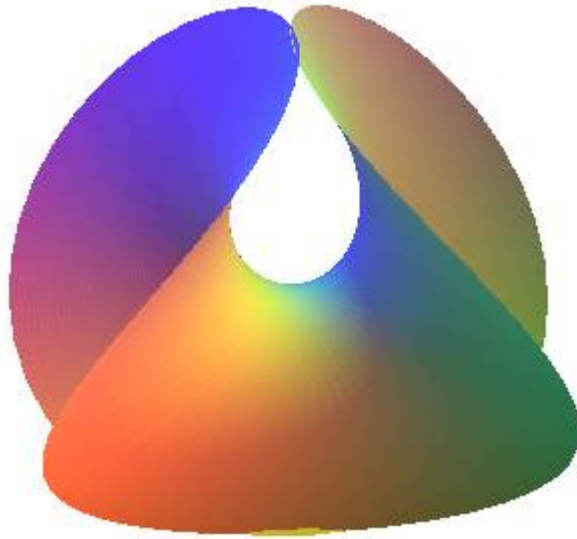


FIGURE 3.1 – Surface d’Enneper, limitée au niveau de sa courbe d’auto-intersection.

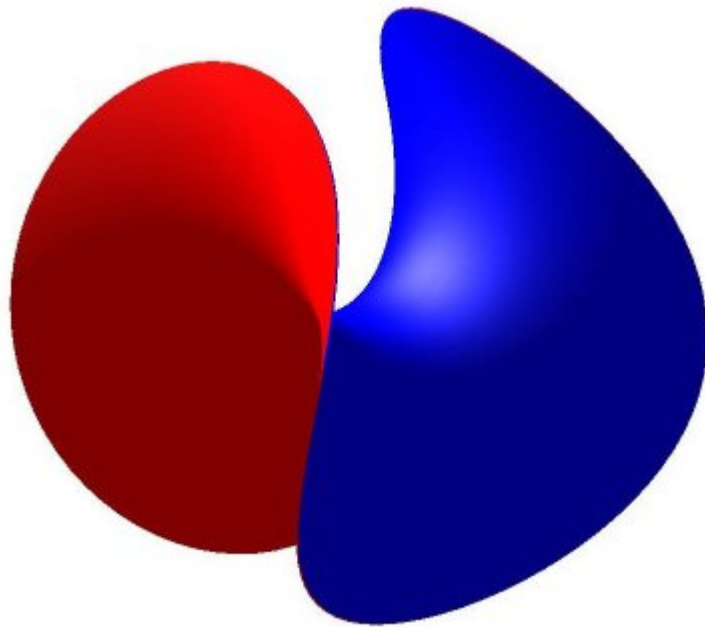


FIGURE 3.2 – les deux faces(rouge-bleue) sont identiques.



### 3.1.2 Caractéristiques.

Paramétrisation cartésienne .

$$X(z) = \operatorname{Re} \begin{bmatrix} \int f(z)(1 - g(z)^2)dz \\ \int if(z)(1 + g(z)^2)dz \\ \int 2f(z)g(z)dz \end{bmatrix} = \operatorname{Re} \begin{bmatrix} z - \frac{z^3}{3} \\ iz + \frac{iz^3}{3} \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

$$z = u + iv$$

Première forme quadratique fondamentale .

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2(du^2 + dv^2).$$

Elément d'aire .

$$d\Sigma = (1 + u^2 + v^2)^2 dudv.$$

Deuxième forme quadratique fondamentale.

$$2(du^2 + dv^2).$$

Courbure totale.

$$K = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Courbure moyenne nulle (surface minimale).

$$X(u, v) = \begin{bmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix}$$

alors

$$X_u = \begin{bmatrix} 1 - u^2 + v^2 \\ 2uv \\ 2u \end{bmatrix}, X_v = \begin{bmatrix} 2uv \\ 1 - v^2 + u^2 \\ -2v \end{bmatrix}$$

$$X_u \cdot X_v = 2uv - 2u^3v + 2uv^3 + 2uv + 2u^3v - 2uv^3 - 4uv = 0,$$

$$X_u^2 = X_v^2 = (1 + u^2 + v^2)^2, X_{uu} = -X_{vv}$$

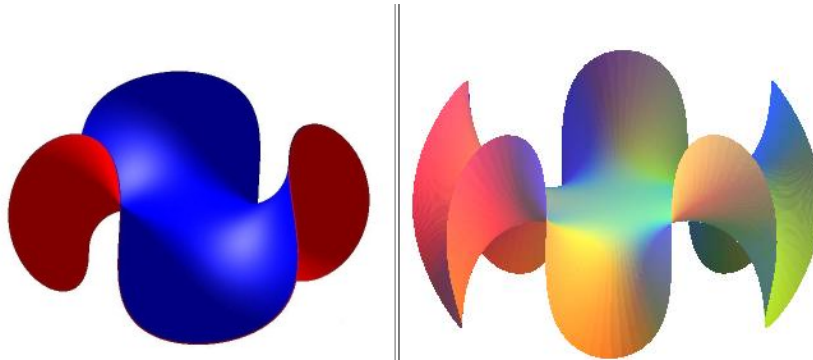


FIGURE 3.3 – Cas  $n = 3$  à gauche (la selle pour singe) à droite  $n=5$

alors

$$X_v^2 X_{uu} - 2(X_u \cdot X_v) X_{vv} + X_u^2 X_{vv} = 0$$

donc

$H = 0$  et la surface d'Enneper est minimale.

**Rayons de courbure principaux.**

$$R_1 = -R_2 = \frac{1}{2}(1 + u^2 + v^2).$$

### 3.1.3 Surface d'Enneper d'ordre $n$ :

Si l'on prend dans la paramétrisation de Weierstrass,  $f(z) = 1$ ,  $g(z) = z^n$  on obtient la surface d'Enneper d'ordre  $n$ .

La surface d'Enneper classique est obtenue pour  $n = 2$ , et le cas  $n = 3/2$  donne la surface de Bour.(Figure 3.3)

## 3.2 Le caténoïde.

La caténoïde<sup>2</sup> est la surface minimale obtenue en prenant  $f(z) = \frac{-i}{2} \exp(-iz)$ ,  $g(z) = \exp(iz)$  dans la paramétrisation de Weierstrass.(Figure 3.4)

---

2. Surface étudiée par Euler en 1740. Le nom vient de catena : chaîne, qui est aussi le nom latin de la chaînette.

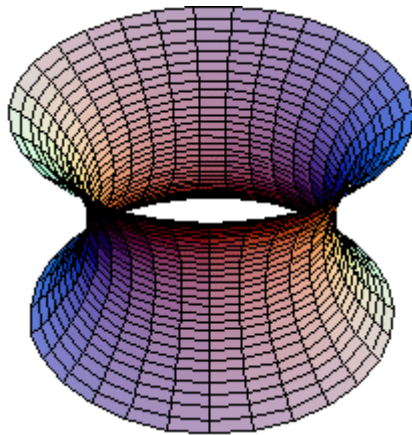


FIGURE 3.4 – Représentation d'un caténoïde

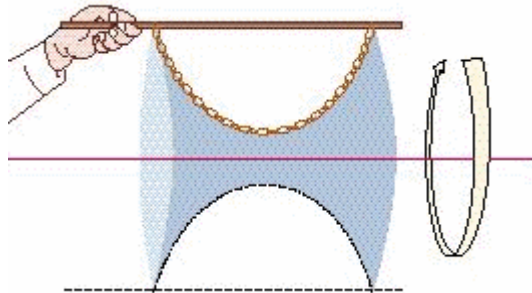


FIGURE 3.5 – Rotation d'une chaînette

### 3.2.1 Aspect géométrique.

Le caténoïde est la surface de révolution<sup>3</sup> engendrée par la rotation d'une chaînette<sup>4</sup> autour de sa base.(Figure 3.5)

### 3.2.2 Caractéristiques :

**Paramétrisation cartésienne :**

$$X(z) = \begin{bmatrix} ch(v)\cos(u) \\ ch(v)\sin(u) \\ v \end{bmatrix}$$

3. C'est la seule surface de révolution minimale.

4. La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince homogène inextensible suspendu entre deux points

$$z = u + iv$$

**Première forme quadratique fondamentale .**

$$ds^2 = ch^2(z)(dz^2 + d\theta^2).$$

**Elément d'aire .**

$$d\Sigma = ch(z)d\theta dz.$$

**Deuxième forme quadratique fondamentale.**

$$2(d\theta^2 - dz^2).$$

**Courbure totale.**

$$K = \frac{-1}{ch^4(z)}.$$

**Courbure moyenne nulle (surface minimale).**

### 3.3 L' hélicoïde.

L' hélicoïde<sup>5</sup> est la surface s'appuyant sur une hélice et sur un axe. C'est une surface minimale sans intersections C'est, avec le plan, la seule surface minimale réglée<sup>6</sup>(Figure 3.6)[15]

#### 3.3.1 Caractéristiques.

**Paramétrisation cartésienne .**

$$X(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \rho \cos(\theta) \\ \rho \sin(\theta) \\ h\theta \end{bmatrix}$$

h est un paramètre positif

**Equation cartésienne :**

---

5. Surface découverte par Meusnier en 1776. Autres noms : hélicoïde de Meusnier, surface de la vis à filet carré..

6. Surface pouvant être obtenue par déplacement d'une droite dans l'espace.

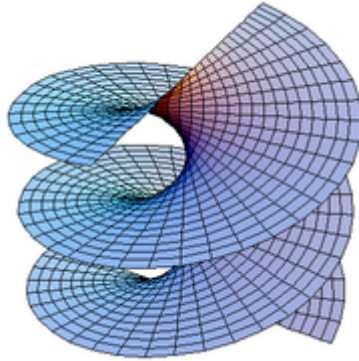


FIGURE 3.6 – Hélicoïde droit

$$y = x \operatorname{tag}\left(\frac{z}{h}\right)$$

**Première forme quadratique fondamentale .**

$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + h^2)d\theta^2.$$

**Elément d'aire .**

$$d\Sigma = \sqrt{\rho^2 + h^2}d\rho d\theta.$$

**Deuxième forme quadratique fondamentale .**

$$\frac{-2h}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}d\rho d\theta.$$

**Courbure totale .**

$$K = \frac{h^2}{\rho^2 + h^2}.$$

**Courbure moyenne nulle (surface minimale).**

**Remarque 3.3.1.0.1.** *Un hélicoïde droit peut être transformé continûment et isométriquement en un caténoïde<sup>7</sup>, la surface restant constamment minimale (Figure 3.7).*

---

7. Les surfaces intermédiaires sont les hélicoïdes minimaux.

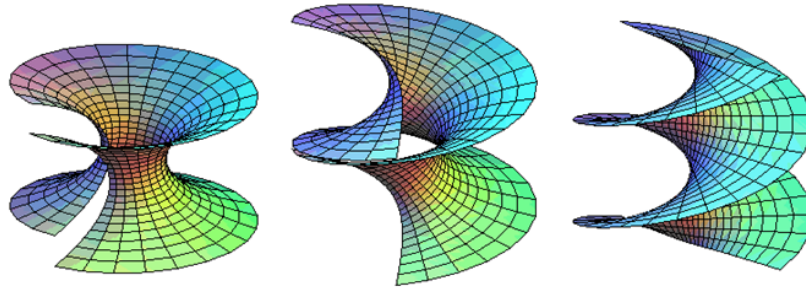


FIGURE 3.7 – Transformation de l'hélicoïde droit en caténoïde

### 3.4 Surfaces de Scherk.

Les surfaces de Scherk<sup>8</sup> sont les solutions de l'équation de Lagrange de la forme  $h(u, v) = f(u) + g(v)$

#### 3.4.1 Première surface de Scherk

la première surface de Scherk est une surface minimale sans intersections doublement périodique. (Figure 3.8)

**Paramétrisation de Weierstrass.**

$$f(z) = \frac{2}{1-z^4} \text{ et } g(z) = z$$

**Equation cartésienne.**

$$e^z \cos(x) = \cos(y)$$

soit

$$z = \ln\left(\frac{\cos(y)}{\cos(x)}\right)$$

#### 3.4.2 Deuxième surface de Scherk

la deuxième surface de Scherk est une surface minimale sans intersections simplement périodique. (Figure 3.9)

---

8. Surfaces étudiées par Scherk en 1834. Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885) : mathématicien allemand.

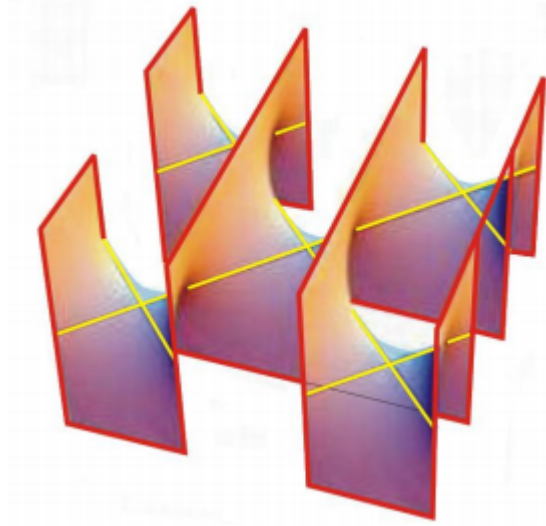


FIGURE 3.8 – Première surface de Scherk

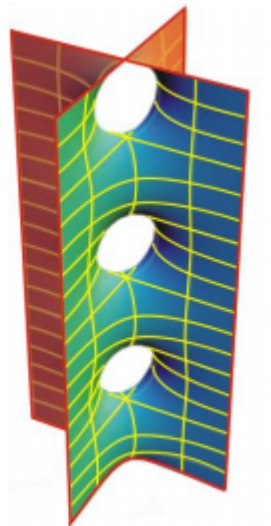


FIGURE 3.9 – Deuxième surface de Scherk

**Equation cartésienne.**

$$\sin(z) = sh(x)sh(y).$$

### 3.5 Surface de révolution

Une surface de révolution  $\Sigma$  est une surface paramétrée par une application  $f$  de la forme

$$f(u, v) = (h(v)\cos(u), h(v)\sin(u), v)$$

où  $u \in ]0, 2\pi[$ ,  $v \in ]0, 2\pi[$  et  $h(v) \succ 0$ ,

alors on a :

$$f_u \begin{pmatrix} -h(v)\sin(u) \\ h(v)\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, f_v \begin{pmatrix} h'(v)\cos(u) \\ h'(v)\sin(u) \\ 1 \end{pmatrix}, f_{uu} \begin{pmatrix} -h(v)\cos(u) \\ -h(v)\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{vv} \begin{pmatrix} h''(v)\cos(u) \\ h''(v)\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}, f_{uv} \begin{pmatrix} -h'(v)\sin(u) \\ h'(v)\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

donc

$$f_u^2 = h(v)^2 \sin^2(u) + h(v)^2 \cos^2(u) = h(v)^2,$$

$$f_v^2 = h'(v)^2 \cos^2(u) + h'(v)^2 \sin^2(u) + 1 = h'(v)^2 + 1,$$

$$f_u \cdot f_v = -h(v)h'(v)\sin(u)\cos(u) + h(v)h'(v)\cos(u)\sin(u) = 0.$$

$$E = h^2(v), \quad G = h'^2(v) + 1, \quad F = 0.$$

$$EG - F^2 = h(v)^2(h'(v)^2 + 1).$$

On a :

$$f_u \wedge f_v \begin{pmatrix} h(v)\cos(u) \\ h(v)\sin(u) \\ -h(v)h'(v) \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
|f_u \wedge f_v| &= \sqrt{h(v)^2 \cos^2(u) + h(v)^2 \sin^2(u) + h(v)^2 h'(v)^2} \\
&= \sqrt{h(v)^2 (1 + h'(v)^2)} \\
&= h(v) \sqrt{1 + h'(v)^2}
\end{aligned}$$

$$\vec{n} = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|},$$

alors

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{h(v) \cos(u)}{\sqrt{h(v)^2 (1 + h'(v)^2)}} \\ \frac{h(v) \sin(u)}{\sqrt{h(v)^2 (1 + h'(v)^2)}} \\ \frac{h'(v)}{\sqrt{h(v)^2 (1 + h'(v)^2)}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
L &= f_{uu} \cdot \vec{n} \\
&= \frac{-h(v)h'(v)\cos^2(u) - h(v)h'(v)\sin^2(u)}{h(v)\sqrt{(1+h'(v)^2)}} \\
&= \frac{-h^2(v)}{h(v)\sqrt{(1+h'(v)^2)}} \\
&= \frac{-h(v)}{\sqrt{(1+h'(v)^2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N &= f_{vv} \cdot \vec{n} \\
&= \left( \frac{h''(v)h(v)\cos^2(u) + h''(v)h(v)\sin^2(u)}{h(v)\sqrt{(1+h'(v)^2)}} \right) \\
&= \frac{h''(v)}{\sqrt{(1+h'(v)^2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M &= f_{uv} \cdot \vec{n} \\
&= \frac{-h(v)h'(v)\sin(u)\cos(u) + h'(v)h(v)\cos(u)\sin(u)}{h(v)\sqrt{(1+h'(v)^2)}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{h^2(v) \frac{h''(v)}{\sqrt{(1+h'(v)^2)}} + (1+h'(v)^2) \frac{-h(v)}{\sqrt{(1+h'(v)^2)}}}{h(v)^2(h'(v)^2+1)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{h^2(v)h''(v) - (1+h'(v)^2)h(v)}{h(v)^2(h'(v)^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{h(v)h''(v) - (1+h'(v)^2)}{h(v)(h'(v)^2+1)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

$$H = 0 \iff h(v)h''(v) - h'(v)^2 - 1 = 0$$

La surface de révolution  $\Sigma$  est minimale si et seulement si

$$h(v)h''(v) - h'(v)^2 - 1 = 0 \tag{3.1}$$

Exemple

Si on prend

$$h(u) = \frac{1}{a}ch(au), \quad a > 0$$

On a :

$$h'(u) = sh(au), \quad h''(u) = ach(au)$$

Remplaçons dans l'équation (3.1).

$$\begin{aligned} h(u)h''(u) - h'(u)^2 - 1 &= \left(\frac{1}{a}ch(au)\right)(ach(au)) - (sh(au))^2 - 1 \\ &= ch^2(au) - sh^2(au) - 1 \\ &= 0 \end{aligned} ,$$

alors la surface de révolution paramétrée par l'application

$$f(u, v) = \left(\frac{1}{a}ch(au)\cos(u), \frac{1}{a}ch(au)\sin(u), v\right). \tag{3.2}$$

est une surface minimale, elle s'appelle « **caténoïde** », elle est avec le plan la seule surface minimale de révolution.

---

9. Equation différentielle de second ordre.

### 3.6 Surface de translation

Les surfaces de translations se sont les surfaces  $(f, U)$  paramétrées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : U = I \times J &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{array}{l|l} \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \longmapsto \alpha(u) & v \longmapsto \beta(v) \end{array}$$

sont des courbes dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Cas particulier :**

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= (u, v, f(u) + g(v)) \\ &= \underbrace{(u, 0, f(u))}_{\alpha(u)} + \underbrace{(0, v, g(v))}_{\beta(v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'(u) \end{pmatrix}, \quad \varphi_v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g'(v) \end{pmatrix}, \quad \varphi_{uu} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''(u) \end{pmatrix}, \\ \varphi_{uv} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{vv} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g''(v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$E = 1 + f'^2(u), \quad F = f'(u)g'(v), \quad G = 1 + g'^2.$$

$$\vec{n} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}.$$

$$\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \begin{pmatrix} -f'(u) \\ -g'(v) \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ alors } \varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v) \neq \vec{0},$$

donc la surface est régulière sur  $\mathbb{R}^2$

$$|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| = \sqrt{1 + f'^2(u) + g'^2(v)},$$

alors

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{-f'(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)+g'^2(v)}} \\ \frac{-g'(v)}{\sqrt{1+f'^2(u)+g'^2(v)}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)+g'^2(v)}} \end{pmatrix},$$

donc

$$L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u) + g'^2(v)}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{g''(v)}{\sqrt{1 + f'^2(u) + g'^2(v)}}$$

La courbure moyenne :

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} \\ &= \frac{\frac{(1+f'^2(u))g''(v)}{\sqrt{1+f'^2(u)+g'^2(v)}} + \frac{(1+g'^2(v))f''(u)}{\sqrt{1+f'^2(u)+g'^2(v)}}}{1+f'^2(u)+g'^2(v)} \\ &= \frac{(1+f'^2(u))g''(v) + (1+g'^2(v))f''(u)}{(1+f'^2(u)+g'^2(v))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

La surface est minimale si et seulement si :

$$(1 + f'^2(u))g''(v) + (1 + g'^2(v))f''(u) = 0 \quad (3.3)$$

Exemple : La première surface de Scherk (Figure : 3.8)

Pour

$$\begin{aligned}\varphi(u, v) &= \ln\left(\frac{\cos(u)}{\cos(v)}\right) \\ &= \ln(\cos(u)) - \ln(\cos(v)),\end{aligned}$$

où  $u, v \in ]-\pi, \pi[$

Dans ce cas, on a :

$$f(u) = \ln(\cos(u)) \quad g(v) = -\ln(\cos(v)),$$

$$f'(u) = \frac{-\sin(u)}{\cos(u)} \quad f''(u) = \frac{-1}{\cos^2(u)},$$

$$g'(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)} \quad g''(v) = \frac{1}{\cos^2(v)}.$$

Remplaçons dans l'équation (3.3)

$$\begin{aligned}(1 + f'^2(u))g''(v) + (1 + g'^2(v))f''(u) &= \left(1 + \left(\frac{-\sin(u)}{\cos(u)}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\cos^2(v)} + \left(1 + \left(\frac{\sin(v)}{\cos(v)}\right)^2\right) \frac{-1}{\cos^2(u)}, \\ &= 0\end{aligned}$$

alors la première surface de Scherk est une surface minimale de translation.

# Table des figures

1.1	Courbe paramétrée . . . . .	7
1.2	Tangente à une courbe paramétrée . . . . .	8
1.3	Repère de Serret-Frenet $R_i(\gamma_i(s), \vec{T}_i(s), \vec{N}_i(s))$ . . . . .	9
1.4	Dérivée première et seconde d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne . . . . .	10
1.5	Trièdre de Frenet . . . . .	13
1.6	Plans associés à une courbe . . . . .	14
1.7	Surface paramétrée . . . . .	18
1.8	Courbes coordonnées . . . . .	20
1.9	Espace tangent d'une surface paramétrée régulière . . . . .	21
2.1	Surface développables . . . . .	31
2.2	Point elliptique. . . . .	34
2.3	Point hyperbolique. . . . .	35
2.4	Point parabolique. . . . .	35
3.1	Surface d'Enneper, limitée au niveau de sa courbe d'auto-intersection. . . . .	48
3.2	les deux faces(rouge-bleue) sont identiques. . . . .	48
3.3	Cas $n = 3$ à gauche (la selle pour singe) à droite $n=5$ . . . . .	50
3.4	Représentation d'un caténoïde . . . . .	51
3.5	Rotation d'une chaînette . . . . .	51
3.6	Hélicoïde droit . . . . .	53
3.7	Transformation de l'hélicoïde droit en caténoïde . . . . .	54
3.8	Première surface de Scherk . . . . .	55
3.9	Deuxième surface de Scherk . . . . .	55

# Bibliographie

- [1] Pierre Lecomte. *Courbes et surfaces*.
- [2] Boris Thibert *Courbes et Surfaces* Université Joseph-Fourier, Grenoble I .
- [3] Didier Boutloup *Cours de Géodésie*. ENSG,Version 2.0 ,01/03/2003.
- [4] Thierry Guesta *Courbes Surfaces(étude métrique locale)* DEUG MIAS ,Deuxième année ,4 décembre 2005.
- [5] Hassan Emamirad *Courbes et Surfaces Cours de M1* Université de Poitiers.
- [6] Vincent Borrelli *Courbures*. Université de Lyon.
- [7] Jean Voedts. *Cours de Mathématiques MP-MP\** ellipses,2002.
- [8] William H. and Meeks III Joaquin Pérez *A survey on classical minimal surface theory* .
- [9] Tobias Holck Colding and William P.Minicozzi II. *A Course in Minimal Surfaces*. American Mathematical Society,2011.
- [10] Pierre Bérard. *Surfaces minimales*. Université Joseph-Fourier , Grenoble , 2012.
- [11] Matthias Weber. *Classical Minimal Surfaces in Euclidean Space by Examples* . September 25,2001.
- [12] Myla Kilchrist and Dave Packard *The Weierstrass-Enneper Representations*. Department of Mathematics Colorado State University ,Spring ,2012.
- [13] Alexis Michelat et Sheng Yuan Zhao. *Quelques aspects des surfaces minimales*. ENS ,2013-2014.



- [14] Roshan Sharma. *The Weierstrass representation always gives a minimal surface* Volume 14, No. 1, Spring 2013.
- [15] J. Lucas M.Barbosa and A.Gervasio Colares. *Minimal Surfaces in  $R^3$*  Springer-Verlag , 1986.
- [16] A. Pressley *Elementary Differential Geometry* Springer Undergraduate Mathematics Series, 2001.
- [17] André Lieutier et Boris Thibert *Calcul des propriétés différentielles des courbes et des surfaces* . 11 décembre 2008.
- [18] David Renard *Courbures d'une surface*. 30 mai 2014.
- [19] Min Ji and Guang Yin Wang *Minimal Surfaces in Riemannian Manifolds* American Mathematical Society, July 1993.