

Théorie de Morse et classification des surfaces

Slimani Mohamed
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Saida

Abstract

Dans ce travail on utilise la théorie de morse pour faire une classification topologique des surfaces compactes orientable, on donne une démonstration du théorème principal en utilisant les fonctions de morse.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université de Saida
Faculté des Sciences



Département de Mathématiques

memoire de master

intitulée

Théorie de Morse et Classification des Surfaces

Présentée

par

Slimani Mohamed

Spécialité: Mathématiques

Option : analyse géométrie et application

Soutenue le 02 Juin, devant le jury

Président	Mr. MCA Abbes Said à l'Univ.Dr Moulay Tahar saida
Examineur	Mr. MCA Ouakkas Seddik à l'Univ.Dr Moulay Tahar saida
Examineur	Mr. MAA Djebouri Djlloul à l'Univ.Dr Moulay Tahar saida
Rapporteur	Mr. MAA Djerfi Kouider à l'Univ.Dr Moulay Tahar saida

Contents

0.1	Introduction	1
I	Variétés différentiables	3
1	Variétés différentiables	3
1.1	Applications différentiables	6
1.2	Sous-variétés	9
2	Espaces tangent et cotangent	12
2.1	Vecteurs tangents	12
2.2	Dérivations	14
2.3	Différentielle d'une application	17
2.4	Coordonnées sur l'espace tangent	19
2.5	Cas des sous-variétés de \mathbb{R}^n	21
2.6	Espace cotangent	23
3	Champs de vecteurs	25
3.1	Fibrés tangent et cotangent	25
3.2	Champs de vecteurs	28
3.3	Équations différentielles	31
3.4	Flots et groupes de difféomorphismes	32
4	Familles de champs de vecteurs	36
4.1	Crochets et algèbre de Lie	36
II	Théorie de Morse	41
5	Théorie de Morse	41
5.1	Idée de la preuve	46
5.2	Rétracte par déformation	46
5.3	Opération de collage	49
5.4	Dernier point critique	50
5.5	Vue générale	50
6	Le Lemme de Morse	52
6.1	caractéristiques d'une fonction de Morse :	58
6.2	cas particuliers	59
6.3	Séparation des valeurs critiques	60

III	Classification des surfaces	65
7	sphères à anses	65
7.1	Franchissement d'une valeur critique	66
7.2	simplification de la fonction de Morse	70
8	Le théorème de classification	73
8.1	exemples	75

0.1 Introduction

L'étude des surfaces est devenue une branche indépendante dans la géométrie différentielle, qui trouve ses applications dans de nombreuses sciences et techniques, on cite notamment l'automatique robotique, et autres.

A cause de toutes ses applications, on a toujours besoin de faire une classification topologique et géométrique des surfaces, en se basant sur les différents outils de l'analyse mathématique

Un de ces outils est la théorie de Morse développée durant la seconde moitié du XX^e siècle, et qui porte le nom du mathématicien américain Marston Morse.

L'idée principale de cette théorie repose sur les lignes de niveau d'une fonction numérique définie sur une variété différentiable.

Notre travail est décomposé en trois parties, la première partie (chapitre 1) est consacrée aux variétés différentielles, c'est un chapitre élémentaire dans n'importe quel travail de connaissances utilise dans la suite.

Le deuxième chapitre est un chapitre qui s'adresse à l'aspect analyse de cette théorie de Morse, la plupart des résultats qui se trouvent dans ce chapitre sont basés sur le livre référence dans cette théorie, il s'agit bien du livre de J- Milnor " Morse théorie".

Le troisième chapitre est le chapitre principal de ce travail, c'est avoir une classification des surfaces compactes de \mathbb{R}^3 en utilisant la théorie de Morse.

Il faut signaler en fin, qu'il est possible d'aborder le sujet de classification en utilisant l'homologie de "MORSE", une chose qu'on n'aurait pas pu faire ici, à cause des circonstances et du temps réservé à cela, en espérant toujours pour suivre cette étude en perspectives.

Chapitre 1

Variétés Différentiables

Part I

Variétés différentiables

1 Variétés différentiables

On considère un espace topologique séparé M .

Définition. Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

- un ouvert $U \subset M$;
- un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

L'ouvert U est le domaine de la carte.

Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$: φ est appelée une fonction coordonnées.

Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Définition. Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si

$\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme entre $\psi(U \cap V)$ et $\varphi(U \cap V)$.

Remarque.

– A priori les dimensions des cartes n'ont pas été fixées. On pourrait donc avoir $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ et $\psi(V) \subset \mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$. Cependant, si $U \cap V \neq \emptyset$, le fait que $\varphi \circ \psi^{-1}$ et $\psi \circ \varphi^{-1}$ soient des difféomorphismes impose que les deux cartes soient de même dimension. (Théorème d'invariance du domaine)

– Signification en coordonnées. Une carte (U, φ) donne un système local de coordonnées. Sur $U \cap V$, on a donc deux systèmes de coordonnées : $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Comme ce sont des homéomorphismes, l'application $\varphi \circ \psi^{-1}$ est une bijection et son inverse est $\psi \circ \varphi^{-1}$. Ces deux applications s'écrivent

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, \dots, y^n) &\longmapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y)) \\ \psi \circ \varphi^{-1} : x = (x^1, \dots, x^n) &\longmapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^n = g^n(x)).\end{aligned}$$

– La compatibilité signifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe C^∞ .

Définition. Un atlas de dimension n de M est un ensemble $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension n tel que :

- les ouverts U_α recouvrent M ;
- toutes les cartes de A sont compatibles deux à deux.

Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur M . On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas, c'est-à-dire que $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $A' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sont équivalents si toutes les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (V_β, ψ_β) sont compatibles deux à deux.

Définition. Une structure différentiable de dimension n sur M est une classe d'équivalence d'atlas de dimension n de M .

En pratique on définit une structure différentiable en donnant un atlas représentant la classe.

Définition. Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé muni d'une structure différentiable de dimension n .

Remarque.

– Un même espace topologique peut être muni de plusieurs structures différentiables différentes. Par exemple, pour la topologie canonique, la sphère unité S^7 de dimension 7 peut être munie de 28 structures différentiables différentes, S^8 de 2, S^{31} de plus de 16 millions. En revanche \mathbb{R}^n , S^1 , S^2 , S^4 , S^5 et S^6 ont une unique structure différentiable. Pour S^3 , le problème reste ouvert.

– On peut définir de même la C^k -compatibilité en demandant que $\varphi \circ \psi^{-1}$ soit un difféomorphisme de classe C^k . On obtient alors des variétés différentiables de classe C^k .

Exemples. de variétés différentiables.

1. \mathbb{R}^n est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte (\mathbb{R}^n, id) .

2. Tout \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ) . De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ) .

3. L'espace euclidien E^n est une variété de dimension n : il est en bijection avec \mathbb{R}^n via le choix d'un système de coordonnées x . L'atlas à une carte (E^n, x) définit donc un structure différentiable.

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à \mathbb{R}^n .

4. Le cercle $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1 : cependant il n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} (puisque S^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= S^1 \setminus \{(1, 0)\} & U_2 &= S^1 \setminus \{(-1, 0)\} \\
 \varphi_1 : U_1 &\rightarrow]0, 2\pi[& \varphi_2 : U_2 &\rightarrow]-\pi, \pi[\\
 (\cos\theta, \sin\theta) &\longmapsto \theta & (\cos\theta, \sin\theta) &\longmapsto \theta
 \end{aligned}$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = S^1$.

De plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur S^1 .

5. La sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une variété de dimension 2 : on peut construire un atlas en utilisant les projections stéréographiques .

Les points S et N désignant respectivement les pôles sud et nord, on considère les ouverts $U_N = S^2 \setminus N$ et $U_S = S^2 \setminus S$ et les applications

$$\begin{aligned} \varphi_N : U_N &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \varphi_S : U_S &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p = (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) & (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right) \end{aligned}$$

On Montre que les cartes (U_N, φ_N) et (U_S, φ_S) forment un atlas de S^2 .

6. La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété de dimension n : pour définir une structure différentiable, on peut utiliser soit la projection stéréographique (2 cartes), soit les projections sur les hyperplans $\{x_i = 0\}$ ($2n + 2$ cartes).

7. **Opérations** Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui-même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par la restriction à Ω d'un atlas de M , c'est-à-dire par l'atlas $A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega})\}$, où $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de M . On dit parfois que Ω est une sous-variété ouverte de M .

8. L'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{R})$ est une variété en tant que sous-variété ouverte de $M_n(\mathbb{R})$ (qui est un espace vectoriel donc une variété).

Lemme 1.1 Soient M et N des variétés différentiables respectivement de dimension n et k et d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$.

Alors l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $n + k$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}, \text{ où } (\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Exemples.– Le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n , $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

Ce tore intervient en robotique en tant qu'espace des configurations d'un robot bras à n articulations planes.

– Le cylindre $\mathbb{R} \times S^1$ et le cylindre de dimension $n + 1$, $\mathbb{R} \times S^n$ sont des variétés.

– L'espace des configurations d'une voiture $\mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$ est une variété (\mathbb{R}^2 paramètre la position planaire du centre de gravité de la voiture, un S^1 paramètre la direction de la voiture dans le plan, et l'autre S^1 l'angle des roues).

1.1 Applications différentiables

On connaît les notions de différentiabilité et de difféomorphismes pour les applications entre espaces vectoriels normés. On va définir ces notions pour les applications entre variétés. Le principe est toujours le même : on dira qu'une application entre variétés est différentiable (ou est un difféomorphisme) si, lue dans une carte, elle l'est. Formalisons cette définition.

Soient M et N des variétés différentiables de dimension n et k et $F : M \rightarrow N$ une application. Si (U, φ) est une carte de M contenant p et (V, ψ) une carte de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, on dit que

$$F_{\varphi, \psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

est l'application F lue dans les cartes (U, φ) et (V, ψ) . Dans le cas particulier où M ou N est égal à \mathbb{R}^n , l'application de carte correspondante est l'identité et on note

$$g^\varphi = g^{\varphi id} = g \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$$

si $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ et

$$h^\psi = h^{id \psi} = \psi \circ h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^k$$

si $h : \mathbb{R}^n \rightarrow N$.

Définition. L'application F est différentiable (ou de classe C^∞) en $p \in M$ si il existe une carte (U, φ) de M contenant p et une carte (V, ψ) de N contenant $F(p)$, avec $F(U) \subset V$, telles que $F_{\varphi, \psi}$ est de classe C^∞ . On dit que F est une application différentiable de M dans N si elle est différentiable en tout point $p \in M$.

Cette définition est correcte car la notion de différentiabilité ne dépend pas des cartes choisies dans les variétés. En effet, si on choisit deux systèmes de coordonnées locales différents φ_1, φ_2 (resp. ψ_1, ψ_2) sur M (resp. N), on a

$$\psi_2 \circ F \circ \varphi_2^{-1} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1} \circ (\psi_1 \circ F \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1},$$

et les applications entre espaces vectoriels normés $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ et $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ sont de classe C^∞ .

Donnons quelques propriétés des applications différentiables.

– Toute application différentiable est continue.

(Car sur tout ouvert de carte U , on a $F|_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi$.)

– Soit $\cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert de M . Alors F est différentiable si et seulement si chaque restriction $F|_{U_i}, i \in I$, l'est.

– La composition d'applications différentiables est différentiable.

En effet, soient $F : M \rightarrow M'$, $G : M' \rightarrow M''$ et $G \circ F : M \rightarrow M''$. Alors, dans des cartes de M , M' et M'' ,

$$\varphi'' \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\varphi'' \circ G \circ \varphi'^{-1}) \circ (\varphi' \circ F \circ \varphi^{-1}).$$

Définition. Une application $F : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme de M sur N si F est une bijection et si F et F^{-1} sont différentiables. On a alors nécessairement $\dim M = \dim N$.

Notons que (U, φ) , avec U ouvert de M , est une carte de la variété si et seulement si φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Rang d'une application.

Rappel : soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ une application dérivable en $x \in \mathbb{R}^n$. Le rang de f en x est défini comme le rang de l'application linéaire $Df(x)$ (c'est-à-dire $\dim \text{Im} Df(x)$ ou encore $n - \dim \text{ker} Df(x)$).

Soient $F : M \rightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.

Proposition 1.1.2 (et définition). Le rang de $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$ ne dépend pas des cartes (U, φ) de M et (V, ψ) de N telles que $p \in U$ et $F(p) \in V$. Cette quantité est appelée le rang de F en p et est notée $\text{rg}_p F$.

Preuve. Soient (U', φ') et (V', ψ') d'autres cartes. Sur l'intersection des domaines :

$$\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})$$

et donc

$$D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(x) = D(\psi' \circ \psi^{-1}) \circ D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(x).$$

Comme $D(\psi' \circ \psi^{-1})$ et $D(\varphi' \circ \varphi^{-1})$ sont des isomorphismes, on obtient

$$\text{rg} D(\psi' \circ F \circ \varphi'^{-1})(\varphi'(p)) = \text{rg} D(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

■

Lue en coordonnées locales, l'application F devient

$$F^{\varphi\psi}(x^1, \dots, x^n) = (F^1(x^1, \dots, x^n), \dots, F^k(x^1, \dots, x^n))$$

et le rang de F en p est celui de la matrice jacobienne

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial F^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^k}{\partial x^n} \end{array} \right) \Big|_{x(p)}$$

Le rang permet de caractériser les submersions.

Lemme 1.1.3 Une application différentiable de M dans N est un difféomorphisme si et seulement si elle est bijective et de $\text{rang } n = \dim M = \dim N$ en tout point de M .

Preuve. (théorème du rang constant).

■

Il y a d'autres classes importantes d'applications différentiables caractérisées par leur *rang*.

Définition. – $F : M \rightarrow N$ est une immersion si F est différentiable et $\text{rg}F = \dim M$ en tout point de M . Dans ce cas, on a nécessairement $\dim M \leq \dim N$.

– $F : M \rightarrow N$ est une submersion si F est différentiable et $\text{rg}F = \dim N$ en tout point de M . On a alors $\dim M \geq \dim N$.

Une immersion n'est pas forcément injective.

Exemple.

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, est une immersion mais n'est pas injective puisque $F(t+k) = F(t)$ pour tout entier k .

De même pour $F(t) = (2\cos(t - \pi/2), \sin(2t - \pi))$.

Considérons maintenant une immersion injective $F : M \rightarrow N$. C'est une bijection de M dans $\widetilde{M} = F(M)$. Si on utilise F pour munir \widetilde{M} d'une topologie et d'une structure différentiable, F devient un difféomorphisme entre les variétés \widetilde{M} et M . Cependant la structure différentiable et la topologie sur \widetilde{M} ne dépendent que de M et de F . Il n'y a donc aucune raison en général pour que \widetilde{M} soit un sous-espace de la variété N (pour la topologie induite).

On introduit donc une nouvelle définition qui permet d'éviter ces problèmes.

Définition. On dit que $F : M \rightarrow N$ est un plongement si F est une immersion injective et un homéomorphisme de M dans $F(M)$ pour la topologie induite.

Remarquons qu'une immersion injective est déjà une bijection de M dans $F(M)$ et est continue, car différentiable. Pour qu'elle soit de plus un homéomorphisme, il suffit donc que F^{-1} soit continue sur $F(M)$.

Exemple.

Les applications $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, F(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ou $G :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2, G(t) = (\frac{1}{t}\cos 2\pi t, \frac{1}{t}\sin 2\pi t)$ sont des plongements.

1.2 Sous-variétés

Définition. Un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $k \leq n$ si, pour tout point x de N , il existe un ouvert $U_x \subset \mathbb{R}^n$ contenant x et un difféomorphisme $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k.$$

Autrement dit, une sous-variété de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble que l'on peut localement redresser en un sous-espace vectoriel \mathbb{R}^k .

Il est clair qu'une sous-variété de \mathbb{R}^n est une variété, les $(U_x \cap N, \varphi|_{U_x \cap N})$ forment un atlas pour N . La structure différentiable et la topologie sont induites par celles de \mathbb{R}^n .

Remarquons alors que l'inclusion de la variété N dans \mathbb{R}^n est un plongement (le terme sous-variété plongée est d'ailleurs souvent employé à la place de sous-variété).

De façon générale, l'image d'un plongement est une sous-variété.

Lemme 1.2.1 Soient $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un plongement. Alors $N = f(U)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension k .

Preuve. Soient $x_0 \in U$ et $f(x_0) \in N = f(U)$. Comme f est une immersion, sa différentielle $Df(x_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de rang k . Quitte à modifier l'ordre des coordonnées (x_1, \dots, x_n) , on suppose que $Df(x_0)$ s'écrit par blocs

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

où $A \in M_k(\mathbb{R})$ est une matrice inversible (c'est-à-dire que les dérivées partielles de f par rapport aux k premières coordonnées sont linéairement indépendantes). On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, z) &\longmapsto (f(x), z) \end{aligned}$$

Cette application vérifie $\varphi(x_0, 0) = f(x_0) = y_0$ et sa différentielle en $(x_0, 0)$ est inversible puisqu'elle s'écrit

$$D\varphi(x_0, 0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Il résulte alors du Théorème d'Inversion Locale qu'il existe un voisinage $U_{(x_0, 0)} \subset \mathbb{R}^n$ de $(x_0, 0)$ et un voisinage $V_{y_0} \subset \mathbb{R}^n$ de y_0 tels que φ restreinte à $U_{(x_0, 0)}$ est un difféomorphisme sur V_{y_0} .

On voudrait alors que le difféomorphisme φ^{-1} permette de définir N

comme une sous-variété. Il faut pour cela qu'il vérifie

$$\varphi^{-1}(V_{y_0} \cap N) = \varphi^{-1}(V_{y_0}) \cap \mathbb{R}^k = U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k,$$

c'est-à-dire que

$$V_{y_0} \cap f(U) = \varphi U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k.$$

Or ces deux ensembles ont pour définition

$$\begin{aligned} V_{y_0} \cap f(U) &= \{y \in V_{y_0} \text{ t.q. } \exists x \in U, f(x) = y\}, \\ (\varphi U_{(x_0,0)} \cap \mathbb{R}^k) &= \{y \in V_{y_0} \text{ t.q. } \exists x \in U_{(x_0,0)} \cap U, f(x) = y\}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant que f est un plongement : f est injective (pas de croisement) et f^{-1} est continue sur $f(U)$.

Il existe donc un voisinage $V'_{y_0} \subset V_{y_0}$ de y_0 tel que l'image de $V'_{y_0} \cap f(U)$ par f^{-1} est contenue dans $U_{(x_0,0)}$. En considérant maintenant le difféomorphisme φ^{-1} restreint à V'_{y_0} , il vérifie

$$\varphi^{-1}V'_{y_0} \cap f(U) = \varphi^{-1}(V'_{y_0}) \cap \mathbb{R}^k,$$

ce qui montre que $N = f(U)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n . ■

Lemme 1.2.2 Soient $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une application différentiable et $y \in F(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-k}$. Si F est une submersion sur $N = F^{-1}(y)$, alors N est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension k .

Preuve. Soit x_0 un point de $N = F^{-1}(y)$. Quitte à changer l'ordre des coordonnées dans \mathbb{R}^k , on peut supposer que la différentielle de F en x_0 s'écrit par blocs

$$DF(x_0) = (A \quad B)$$

où $A \in M_{n-k}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible. Considérons alors l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto (F(x) - y, x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

La différentielle de φ en x_0 s'écrit par blocs

$$D\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

et est donc inversible. Il résulte alors du Théorème d’Inversion Locale qu’il existe un voisinage $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 tel que l’application φ restreinte à U_{x_0} est un difféomorphisme.

De plus

$$\begin{aligned}\varphi(U_{x_0} \cap N) &= \varphi\{x \in U_{x_0} \text{ t.q. } F(x) = y\} \\ &= \{(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \text{ t.q. } x \in U_{x_0}\} \\ &= \{(0, \dots, 0, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \text{ t.q. } x \in U_{x_0}\} \\ &= \varphi(U_{x_0}) \cap \mathbb{R}^k.\end{aligned}$$

■

Ce lemme est très utilisé dans le cas suivant. Soient $f^1(x), \dots, f^p(x)$ des fonctions de classe C^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et S la “surface” définie par les zéros de ces fonctions :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f^1(x) = \dots = f^p(x) = 0\}.$$

Si, pour tout point x de S , la jacobienne $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$ est de rang p , alors S est une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension $n - p$.

Exemples.

– Soit $f(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2, x \in \mathbb{R}^n$. La sphère $f^{-1}(r^2)$ de rayon r est une sous-variété de dimension $n - 1$ car la différentielle de f ne s’y annule pas.

– Soit $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2}$. La surface $f^{-1}(1)$, qui peut être soit un ellipsoïde soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 .

– Soit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Le cône de sommet origine, $f^{-1}(0)$, n’est pas une sous-variété de \mathbb{R}^3 car la différentielle de f à l’origine est nulle. En revanche le cône privé de l’origine est une sous-variété.

Sous-variétés de variétés.

Définition. Une partie N d’une variété M de dimension n est une sous-variété de M de dimension $k \leq n$ si, pour tout point q de N , il existe une carte (U, φ) de M contenant x telle que

$$\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k.$$

La carte (U, φ) est dite adaptée à N . Elle vérifie

$$\varphi(U \cap N) = \{(x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U) \text{ t.q. } x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Les deux résultats suivants se montrent presque de la même façon que les lemmes 1.2.1 et 1.2.2 (il faut en plus passer par des cartes des variétés M et N).

Lemme 1.2.3 Soient M, N des variétés de dimension n, k et $F : N \rightarrow M$ un plongement. Alors $W = F(N)$ est une sous-variété de M de dimension k .

Lemme 1.2.4 Soient M, N des variétés de dimension n, k , $F : M \rightarrow N$ une submersion et $y \in F(M)$. Alors $W = F^{-1}(y)$ est une sous-variété de M de dimension $n - k$.

Définition. Un sous-ensemble W d'une variété M est une sous-variété immergée de M de dimension $k \leq n$ si il existe une immersion injective $f : N \rightarrow M$, où N est une variété de dimension k , dont l'image $f(N)$ est égale à W .

Remarque.

– Une sous-variété immergée peut aussi être définie comme une variété contenue dans M telle que l'inclusion $i : W \rightarrow M$ est une immersion

Des variétés aux sous-variétés. Soit M une variété et $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ un plongement. L'ensemble $f(M)$ est alors une sous-variété de \mathbb{R}^N . Les variétés M et $f(M)$ sont alors difféomorphes

Inversement, est-il possible de plonger toute variété dans un espace \mathbb{R}^N ? De façon équivalente, est-il possible de considérer n'importe qu'elle variété comme une sous-variété d'un \mathbb{R}^N ? La réponse est oui, et on peut de plus préciser N .

Théorème 1.2.5 (Plongement de Whitney). Toute variété de dimension n admet un plongement sur une sous-variété fermée de \mathbb{R}^{2n+1} .

2 Espaces tangent et cotangent

2.1 Vecteurs tangents

Le but de cette partie est de formaliser dans une variété la notion de direction de déplacement ou encore de mouvements possibles à partir d'un point donné.

Dans \mathbb{R}^n et E^n Regardons d'abord comment cette notion apparaît dans un espace vectoriel, \mathbb{R}^n par exemple. Dans \mathbb{R}^n , les directions possibles à partir d'un point x sont tous les vecteurs de \mathbb{R}^n . L'ensemble des déplacements est donc $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'ensemble des couples (x, v) formés d'un point de départ x et d'une direction v . Cette notation est cependant trompeuse : dans le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, les deux \mathbb{R}^n jouent des rôles différents puisque l'un est un espace de points et l'autre un espace de directions. La distinction entre ces deux rôles est également mise en évidence dans l'expression de la différentielle d'une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$:

$$Df : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x, v) \mapsto Df(x)[v]$$

Le cas de l'espace euclidien E^n est plus intéressant. Un mouvement est considéré ici comme une courbe $M(t)$ dans E^n . La vitesse en

$M_0 = M(0)$ est un vecteur $\dot{M}(0)$: ce n'est donc pas un élément de E^n , qui est un espace de points. En fait, si on regarde tous les mouvements possibles $M(t)$ à partir de M_0 , leurs tangentes $\dot{M}(0)$ forment un espace vectoriel de dimension n . Il s'agit de l'ensemble des segments orientés $\overrightarrow{M_0P}$.

Notons $T_{M_0}E^n$ cet espace vectoriel et appelons-le l'espace tangent à E^n en M_0 . À chaque point de E^n correspond un espace tangent différent, qui sont isomorphes deux à deux puisque de même dimension. De plus, et c'est propre à E^n et aux espaces affines, il y a un isomorphisme naturel de $T_M E^n$ dans $T_{M'} E^n$ induit par la translation de M à M' .

Cette propriété ne sera plus vraie pour les variétés.

Considérons maintenant une variété différentiable M et un point p de M . On s'intéresse aux courbes dans M qui sont différentiables et qui passent par p

$$c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M, \quad c(0) = p.$$

$$t \mapsto c(t)$$

Définition. Deux courbes c_1 et c_2 sont tangentes au point p si $c_1(0) = c_2(0) = p$ et si il existe une carte locale (U, φ) telle que $p \in U$ et

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0).$$

La définition est indépendante de la carte choisie. En effet si (V, ψ) est une autre carte autour de p , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\psi \circ c_1)(0) &= \frac{d}{dt}[(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)](0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_1)(0) \\ &= D(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c_2)(0) = \frac{d}{dt}(\psi \circ c_2)(0) \end{aligned}$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par p : $c_1 \sim c_2$ si elles sont tangentes en p .

Définition. Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p .

L'espace tangent à M en p , noté T_pM , est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p .

Exemples.

Dans \mathbb{R}^n , il est clair que deux courbes c_1, c_2 sont tangentes au point x dès que $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$. Il y a donc un isomorphisme canonique entre l'ensemble des classes de courbes tangentes $T_x\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des directions $\dot{c}(0)$. Ce qui est propre à \mathbb{R}^n c'est que cet isomorphisme ne dépend pas du point x .

On peut montrer que T_pM est un espace vectoriel en utilisant une carte. La structure vectorielle n'apparaît cependant pas clairement. De plus la définition de T_pM fait intervenir un espace très gros, l'ensemble des courbes passant par p , qui n'est pas aisé à manipuler. Nous allons voir maintenant qu'on peut donner une autre définition – équivalente – des vecteurs tangents qui résoudra ces difficultés.

2.2 Dérivations

Considérons l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, de classe C^∞ , définies sur un ouvert de M contenant p , dans lequel on identifie les fonctions qui sont égales sur un voisinage de p (on obtient ainsi des germes de fonctions). On note $C^\infty(p)$ cet ensemble. Notons que.

Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Définition. Une dérivation en p est une application linéaire $D_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_p est une dérivation si, pour tous réels α, β et toutes fonctions f, g dans $C^\infty(p)$,

$$\begin{aligned} (i) D_p.(\alpha f + \beta g) &= \alpha D_p.f + \beta D_p.g && \text{(linéarité),} \\ (ii) D_p.(fg) &= g(p)D_p.f + f(p)D_p.g && \text{(Leibniz).} \end{aligned}$$

L'ensemble $D(p)$ des dérivations en p est un espace vectoriel pour les opérations:

$$\begin{cases} (D_p + D'_p).f = D_p.f + D'_p.f \\ D_p.(\alpha f) = \alpha D_p.f \end{cases}$$

Remarque.

Toute dérivation vérifie $D_p.cte = 0$.

Nous allons montrer que l'espace vectoriel tangent T_pM s'identifie à $D(p)$. La première étape est de déterminer la dimension de l'espace vectoriel $D(p)$. Nous avons besoin pour cela du résultat suivant.

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Hadamard). Soit $(U, \varphi), \varphi = (x^1, \dots, x^n)$, une carte de M centrée en p . Pour toute fonction $g \in C^\infty(p)$, il existe $\chi_1, \dots, \chi_n \in C^\infty(p)$ telles que

$$g = g(p) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i$$

(autrement dit $g(q) = g(p) + \sum_{i=1}^n x^i(q) \chi_i(q)$ pour tout $q \in U$).

Remarque.

Dire qu'une carte (U, φ) est centrée en p signifie simplement que $\varphi(p) = 0$.

Preuve. Quitte à réduire U , on suppose $\varphi(U)$ convexe (par exemple une boule). On travaille sur la fonction g lue dans la carte φ , c'est-à-dire $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$. C'est une fonction de classe C^∞ de $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} .

On peut calculer g^φ

en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} g^\varphi(x^1, \dots, x^n) - g^\varphi(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [g^\varphi(tx^1, \dots, tx^n)] dt \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt. \end{aligned}$$

Posons alors $\chi_i^\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i}(tx) dt$. On a obtenu

$$g^\varphi(x) = g^\varphi(0) + \sum_{i=1}^n x^i \chi_i^\varphi(x).$$

Comme $g = g^\varphi \circ \varphi$ et $\varphi(p) = 0$, il suffit de composer la formule ci-dessus par φ pour achever la démonstration.

■

Utilisons ce lemme pour caractériser les éléments de $D(p)$. Fixons une carte (U, φ) centrée en p . Une dérivation s'écrit alors

$$\begin{aligned} D_p.g &= D_p.(g(p)) + \sum_{i=1}^n (\chi_i(p) D_p.x^i + x^i(p) D_p.\chi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \chi_i(p) D_p.x^i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ainsi la donnée de D_p est équivalente à la donnée des réels $D_p.x^i, i = 1, \dots, n$.

Lemme 2.2.2 $\dim D(p) = n = \dim M$.

Remarque.

Ce lemme montre que, sur \mathbb{R}^n , toute dérivation est une dérivée directionnelle. En effet, à toute direction $v \in \mathbb{R}^n$ est associée une dérivation

en x

$$g \longmapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x + tv) - g(x)), \quad (2.2)$$

qui est la dérivée directionnelle en x dans la direction v . L'ensemble des dérivées directionnelles en x est ainsi un sous-espace vectoriel de $D(x)$ de dimension n et est donc égal à $D(x)$.

Faisons maintenant le lien entre les dérivations et les vecteurs tangents.

Proposition 2.2.3 Soient $g \in C^\infty(p)$ et X_p un vecteur tangent en p . Alors la dérivée $\frac{d}{dt}(g \circ c)(0)$ est la même pour toutes les courbes $c(s)$ passant par p et appartenant à la classe d'équivalence X_p .

Preuve. Choisissons des coordonnées locales φ et écrivons $g \circ c$ comme la composée de $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$ avec $c^\varphi = \varphi \circ c$. On obtient alors

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = D(g \circ \varphi^{-1}) \circ \frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0).$$

La proposition résulte alors du fait que $\frac{d}{dt}(\varphi \circ c)(0)$ ne dépend que de la classe d'équivalence X_p .

■

On note $X_p.g$ la valeur de cette dérivée.

Proposition 2.2.4 L'application $g \longmapsto X_p.g$ est une dérivation.

Preuve. Il suffit de choisir des coordonnées locales φ et un représentant $c(t)$ de la classe X_p . La linéarité et Leibniz se déduisent aisément de l'expression

$$X_p.g = \frac{d}{dt}g^\varphi \circ c^\varphi(0).$$

■

Cette dérivation est en fait une généralisation des dérivées directionnelles. En effet on a vu que dans \mathbb{R}^n un vecteur tangent v_x est associé canoniquement à une direction $v = \dot{c}(0)$. La dérivation $g \longmapsto v_p.g$ est alors clairement égale à la dérivée directionnelle (2.2).

D'ailleurs on appellera par fois $g \longmapsto X_p.g$ dérivée directionnelle de g dans la direction X_p .

Théorème 2.2.5 L'ensemble des vecteurs tangents T_pM s'identifie à l'espace vectoriel $D(p)$ de dimension n des dérivations en p .

Cette identification permet de définir une structure vectorielle sur l'espace tangent T_pM (appelé également, en conséquence, espace vectoriel tangent). Notons que cette structure vectorielle coïncide avec celle que l'on peut obtenir à partir de la lecture dans une carte.

Preuve. Soit $\Psi : T_pM \rightarrow D(p)$ qui à un vecteur tangent X_p fait correspondre la dérivation définie par $X_p.g$. Ainsi, si c est un représentant de la classe d'équivalence $X_p = [c]_p$, $\Psi(X_p)$ est la dérivation

$$X_p.g = \frac{d}{dt}(g \circ c)(0).$$

Montrons d'abord que Ψ est injective. Soient $X_p = [c]_p$ et $X'_p = [c']_p$ des vecteurs de T_pM tels que $\Psi(X_p) = \Psi(X'_p)$, c'est-à-dire que, pour toute fonction $g \in C^\infty$, on a

$$\frac{d}{dt}(g \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(g \circ c')(0).$$

Fixons des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. On a, pour chaque i ,

$$\frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(x^i \circ c')(0),$$

ce qui implique $\dot{c}^\varphi(0) = \dot{c}'^\varphi(0)$ et donc $X_p = X'_p$. Ainsi l'application Ψ est injective.

Montrons qu'elle est aussi surjective. Soit D_p une dérivation. On a vu que, dans une carte φ donnée, D_p est déterminée par les réels $d^i = D_p.x^i, i = 1, \dots, n$. Considérons alors la courbe $c(t) = \varphi^{-1} \circ (td^1, \dots, td^n)$ et notons X_p son vecteur tangent en p .

On a

$$X_p.x^i = \frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = d^i = D_p.x^i,$$

ce qui montre que $D_p = \Psi(X_p)$ et donc que Ψ est surjective.

■

Dans la suite nous identifierons systématiquement T_pM et $D(p)$. Ainsi le terme vecteur tangent désignera indifféremment la classe d'équivalence de courbes tangentes ou la dérivation associée alors que l'espace tangent T_pM sera employé à la place de $D(p)$.

2.3 Différentielle d'une application

Soient M et N des variétés différentiables de dimension n et k et $F : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si $g : N \rightarrow R$ est une fonction sur N , F permet de lui faire correspondre une fonction sur M , $F^*g = g \circ F$, appelée image réciproque de g par F . On définit ainsi l'application :

$$F^* : C^\infty(F(p)) \rightarrow C^\infty(p)$$

$$g \longmapsto F^*g = g \circ F$$

Remarquons que le sens de F^* est l'inverse de celui de F .

Proposition 2.3.1 (et définition). L'application $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ définie par

$$dF_p(X_p).g = X_p.(F^*g), \quad \forall g \in C^\infty(F(p)),$$

est linéaire.

On l'appelle la différentielle de F en p (ou encore application linéaire

tangente à F en p).

Remarque.

L'élément $dF_p(X_p)$ de $T_{F(p)}N$ est donc un vecteur tangent à N . On peut également le caractériser de la façon suivante : soit la c courbe $c(s) \subset M$ passant par p de vecteur tangent X_p en p . Alors $dF_p(X_p)$ est le vecteur tangent en $F(p)$ de la courbe $F \circ c$ incluse dans N .

Preuve. La linéarité de dF_p découle immédiatement de celle de X_p . En effet

$$\begin{aligned} dF_p(\lambda X_p + \mu Y_p) \cdot g &= (\lambda X_p + \mu Y_p) \cdot (F^*g) \\ &= \lambda X_p \cdot (F^*g) + \mu Y_p \cdot (F^*g) \\ &= \lambda dF_p(X_p) \cdot g + \mu dF_p(Y_p) \cdot g. \end{aligned}$$

■

La définition de la différentielle ne fait appel qu'à des propriétés locales de la variété et de l'application. Comme localement une variété est difféomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n , toutes les propriétés des applications différentiables dans les espaces vectoriels normés sont vraies localement pour les applications différentiables sur les variétés (c'est le principe de base pour obtenir des résultats locaux dans les variétés). Citons les plus importantes de ces propriétés.

Théorème 2.3.2 (Théorème de composition). Soient $F : M \rightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ et $G : N \rightarrow W$ une application différentiable en $F(p) \in N$. Alors $G \circ F$ est différentiable en p et

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$$

Corollaire 2.3.3 Si $F : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors, pour tout $p \in M$, dF_p est un isomorphisme.

La réciproque à ce corollaire n'est vraie que localement. Elle nécessite d'introduire la notion de difféomorphisme local.

Définition. Une application $F : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme local en p s'il existe un voisinage $U \subset M$ de p et un voisinage $V \subset N$ de $F(p)$ tels que l'application $F|_U : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme.

Définition. (Théorème d'inversion locale). Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$ telle que $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ est un isomorphisme.

Alors F est un difféomorphisme local en p . De plus la réciproque du difféomorphisme $F|_U$ a pour différentielle

$$d(F|_U^{-1})_{F(p)} = (dF_p)^{-1}.$$

Ce théorème a une conséquence importante pour la détermination de coordonnées locales. En effet, un système de coordonnées locales n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme local de M dans \mathbb{R}^n . Ainsi une application différentiable $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit des coordonnées locales en p si et seulement si $d_{\varphi p}$ est un isomorphisme.

2.4 Coordonnées sur l'espace tangent

En utilisant les différentielles des cartes, nous allons étendre le calcul en coordonnées locales à l'espace tangent. On commence par traiter le cas de \mathbb{R}^n .

Description de $T_x\mathbb{R}^n$ On a vu plusieurs propriétés de $T_x\mathbb{R}^n$: il est canoniquement isomorphe à \mathbb{R}^n et il peut être identifié à l'ensemble des dérivées partielles en x . Il est temps maintenant d'en donner une description facile à utiliser.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Considérons les dérivées partielles en x , c'est-à-dire les dérivations sur \mathbb{R}^n

$$\frac{d}{dx^i} \Big|_x : g \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ces dérivées partielles forment une base de l'ensemble des dérivées directionnelles en x et donc une base de $T_x\mathbb{R}^n$ dite base naturelle. Ainsi tout vecteur tangent $v_x \in T_x\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$v_x = v^1 \frac{d}{dx^1} \Big|_x + \dots + v^n \frac{d}{dx^n} \Big|_x.$$

Ce vecteur est aussi la classe d'équivalence des courbes $c(t)$ passant par x telles que $\dot{c}(0) = (v^1, \dots, v^n)$.

L'identification canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ est définie alors comme l'isomorphisme $v_x \longmapsto (v^1, \dots, v^n)$.

Coordonnées sur T_pM Soient $p \in M$ et (U, φ) , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, une carte de M dont le domaine contient p . Comme φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$, sa différentielle

$d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ est inversible (corollaire 2.3.3) et $(d\varphi_p)^{-1} = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)}$ est un isomorphisme de $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ sur T_pM .

Nous allons nous servir de cet isomorphisme pour définir des coordonnées sur T_pM .

Soient $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ et $(\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x)$ la base canonique de $T_x\mathbb{R}^n$. L'image de cette base définit des vecteurs tangents à M en p , que l'on note

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right).$$

Ces vecteurs tangents $(\frac{\partial}{\partial x^1} |_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_x)$ forment une base de $T_p M$, appelée base naturelle associée aux coordonnées locales φ .

Remarquons que, si $g \in C^\infty(p)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x^i} |_p \cdot g = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} |_x \right) \cdot g = \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \cdot (g \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial g^\varphi}{\partial x^i} (\varphi(p)),$$

où $g^\varphi = g \circ \varphi^{-1}$ est la fonction g lue dans les coordonnées x^i .

Lemme 2.4.1 Dans la base naturelle associée aux coordonnées locales φ , un vecteur tangent $X_p \in T_p M$ s'écrit

$$X_p = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} |_p + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} |_p, \quad \text{avec } X^i = X_p \cdot x^i.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$ et que $X_p \cdot x^i = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}$.

■

Changement de coordonnées. Le lemme ci-dessus permet de trouver assez simplement les formules de changement de coordonnées dans l'espace tangent. Soient $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ des coordonnées locales autour de p et X_p un vecteur tangent en p de coordonnées X^1, \dots, X^n dans la base naturelle associée à φ : $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$. On note

$$\psi \circ \varphi^{-1} = (y^1(x), \dots, y^n(x))$$

l'application ψ lue dans la carte φ .

Dans la base naturelle associée à ψ , X_p a pour coordonnées $Y^j = X_p \cdot y^j$, $j = 1, \dots, n$. En écrivant tout dans les coordonnées φ , on obtient

$$Y^j = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial ((y^j)^\varphi)}{\partial x^i} (\varphi(p)) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial y^j(x)}{\partial x^i} |_{x=\varphi(p)}$$

ou encore, en écriture matricielle,

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial y^i(x)}{\partial x^j} |_{\varphi(p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

On peut enfin calculer la différentielle d'une application F en coordonnées locales.

Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable en $p \in M$. Choisissons $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ des coordonnées locales sur M centrées en p et $\psi = (y^1, \dots, y^k)$ des coordonnées locales sur N centrées en $F(p)$. Enfin soit $X^p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ un élément de $T_p M$.

Pour tout $g \in C^\infty(F(p))$, on écrit

$$dF_p(X_p).g = X_p.(g \circ F) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial ((g \circ F)^\varphi)}{\partial x^i}(0). \quad (2.4)$$

Écrivons $(g \circ F)^\varphi = g^\psi \circ F^{\varphi\psi}$, où $F^{\varphi\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ et $g^\psi = g \circ \psi^{-1}$ sont les applications F et g lues dans les cartes.

Notons $F^{\varphi\psi}(x) = (F^1(x), \dots, F^k(x))$. Pour $i = 1, \dots, n$, on a

$$\frac{\partial ((g \circ F)^\varphi)}{\partial x^i}(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g^\psi}{\partial y^j}(0) \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}.g.$$

En insérant cette valeur dans (2.4), qui est valable pour tout $g \in C^\infty(F(p))$, on obtient l'expression suivante pour la différentielle de F en p :

$$dF_p(X_p) = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(0) X^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}.$$

Lemme 2.4.2 Si $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ dans la base naturelle de $T_p M$ associée aux coordonnées locales φ , alors $dF_p(X_p) = \sum_{j=1}^k Y^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$ dans la base naturelle de $T_{F(p)} N$ associée à ψ , avec

$$\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^k \end{pmatrix} = JF_{\varphi,\psi}(0) \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}.$$

Cette formulation en coordonnées permet de calculer le *rang* de F .

Corollaire 2.4.3 Le *rang* de F en p est égal à la dimension de $dF_p(T_p M)$.

Ceci nous donne d'ailleurs une définition intrinsèque du *rang* d'une application.

2.5 Cas des sous-variétés de \mathbb{R}^n

L'espace tangent à une sous-variété est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent à la variété ambiante : si N est une sous-variété de M et $p \in N$,

alors $T_p N \subset T_p M$. L'espace tangent à une sous-variété de \mathbb{R}^n est donc un sous-espace vectoriel de $T_x \mathbb{R}^n$. Il sera en fait plus pratique de le voir comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n en utilisant l'identification canonique $T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Sa caractérisation dépend de la façon dont a été définie la sous-variété.

Cas général. Une sous-variété N de \mathbb{R}^n est définie au voisinage de chacun de ses points x par un difféomorphisme $\varphi : U_x \rightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(U_x \cap N) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^k$.

En tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , l'espace tangent à N est alors

$$T_x N = D\varphi^{-1}(\varphi(x)) [\mathbb{R}^k \times \{0\}_{\mathbb{R}^{n-k}}].$$

Plongement. Soit N une sous-variété de \mathbb{R}^n définie comme $N = F(U)$, où $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement. Alors, en tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , son espace tangent est

$$T_x N = DF(F^{-1}(x)) [\mathbb{R}^k].$$

Exemple.

Considérons une courbe $c(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ dans \mathbb{R}^n , de classe C^∞ , qui est un plongement sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. L'ensemble de la courbe $C = c(I)$ est alors une sous-variété. En $t_0 \in I$, la différentielle $Dc(t_0)$ a pour matrice

$$\dot{c}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}^1(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}^n(t_0) \end{pmatrix}$$

et l'espace tangent à C est $T_{c(t_0)} C = \mathbb{R} \dot{c}(t_0)$.

Ainsi l'espace tangent correspond à l'espace vectoriel engendré par la tangente à la courbe, comme on s'y attendait.

On peut également retrouver ce résultat en construisant une base de $T_{c(t_0)} C$. Soit $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0}$ la base de $T_{t_0} \mathbb{R}$. Pour $i = 1, \dots, n$, on a

$$Dc(t_0) \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right] \cdot x^i = \left. \frac{d}{dt} (x^i(t)) \right|_{t_0} = \dot{x}^i(t_0),$$

et l'image de la base de $T_{t_0} \mathbb{R}$ est

$$Dc(t_0) \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right] = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(t_0) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

C'est bien le vecteur vitesse (ou vecteur tangent) de la courbe.

Submersions Soit $N \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété définie comme $N = F^{-1}(y)$, où $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est une submersion.

Proposition 2.5.1 En tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , l'espace tangent à la sous-variété N est $T_x N = \ker DF(x)$.

Preuve. Par définition, $T_x N$ est l'ensemble des vecteurs tangents $\dot{c}(0)$ pour toutes les courbes différentiables $c(t)$ tracées sur N passant par x . Une telle courbe vérifie en particulier $F \circ c(t) = y = cte$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} (F \circ c) (0) = DF(x) [\dot{c}(0)] = 0.$$

Ainsi $T_x N$ est inclus dans $\ker DF(x)$. Comme ces espaces vectoriels ont même dimension, ils sont égaux. ■

C'est la façon la plus pratique de déterminer les espaces tangents.

Exemple.

La sphère de dimension n : $S^n = F^{-1}(1)$,
où $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$
est la forme quadratique $F(x) = \langle x, x \rangle = (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2$, qui est une submersion. Comme
 $DF(x)[h] = 2 \langle x, h \rangle$, l'espace tangent à la sphère est

$$T_x S^n = \ker DF(x) = (\mathbb{R}x)^\perp,$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x .

2.6 Espace cotangent

On définit maintenant le dual de l'espace tangent à une variété M .

Définition. – Une 1-forme (ou covecteur) en $p \in M$ est une forme linéaire sur $T_p M$, c'est-à-dire une application linéaire

$$\begin{aligned} \omega_p : T_p M &\rightarrow \mathbb{R} \\ X_p &\longmapsto \omega_p(X_p) \end{aligned}$$

On note $\omega_p(X_p) = \langle \omega_p, X_p \rangle$, le crochet étant ici le crochet de dualité.

– L'espace cotangent à M en p , noté $T_p^* M$, est l'espace vectoriel des 1-formes en p .

C'est l'espace vectoriel dual de $T_p M$ (c'est-à-dire $T_p^* M = (T_p M)^*$).

Exemple.

Soit $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M . Alors, en identifiant $T_t \mathbb{R}$ avec \mathbb{R} , la différentielle de g en p , $dg_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, peut être vue comme une 1-forme. Cet exemple justifie les notations ci-dessous en coordonnées.

Rappelons d'abord que, si e_1, \dots, e_n est la base d'un espace vectoriel V , il existe une unique base duale e^{*1}, \dots, e^{*n} du dual V^* telle que $e^{*i}(e_j) = \delta_{ij}$. Considérons maintenant des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ en p et $dx_p^i : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ la différentielle de la i -ème coordonnée (on identifie de nouveau $T_t \mathbb{R}$ avec \mathbb{R}). Par définition, $dx_p^i(X_p) = X_p x^i$. En particulier, pour tout couple i, j ,

$$\left\langle dx_p^i, \frac{d}{dx^j} \Big|_p \right\rangle = dx_p^i \left(\frac{d}{dx^j} \Big|_p \right) = \frac{dx^i}{dx^j} \Big|_p = \delta_{ij}.$$

Ainsi dx_p^1, \dots, dx_p^n est une base de $T_p^* M$, duale de la base $\frac{d}{dx^1} \Big|_p, \dots, \frac{d}{dx^n} \Big|_p$ de $T_p M$.

Dans cette base, toute 1-forme de $T_p^* M$ s'écrit

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_p^i, \quad \text{où } \omega_i = \omega_p \left(\frac{d}{dx^i} \Big|_p \right),$$

puisque $\omega_p \left(\frac{d}{dx^i} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \omega_j \left\langle dx_p^j, \frac{d}{dx^i} \Big|_p \right\rangle$. De même, tout vecteur de $T_p M$ s'écrit

$$X_p = \sum_{i=1}^n X^i \frac{d}{dx^i} \Big|_p \quad \text{où } X^i = dx_p^i(X_p).$$

Les formules de changement de coordonnées pour les 1-formes s'obtiennent comme les formules (2.3) pour les vecteurs tangents : on choisit des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ et on note $\varphi \circ \psi^{-1} = (x^1(y), \dots, x^n(y))$ l'application φ lue dans la carte ψ . Soit ω_p une 1-forme, $\omega_1, \dots, \omega_n$ ses coordonnées dans la base de $T_p^* M$ associée à φ et μ_1, \dots, μ_n ses coordonnées dans la base associée à ψ . En écrivant que $\mu_j = \omega_p \left(\frac{d}{dy^j} \Big|_p \right)$, on obtient, en écriture matricielle,

$$(\mu_1 \dots \mu_n) = (\omega_1 \dots \omega_n) \left(\frac{dx^i(y)}{dy^j} \Big|_{\psi(p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Remarque.

Cette formule est l'inverse de celle pour les vecteurs tangents. En effet, en notant A la matrice des dérivées partielles des y^i par rapport à x (c'est-à-dire la matrice qui intervient dans (2.3)), on obtient

$$Y = AX \quad \text{et} \quad \mu = \omega A^{-1},$$

X, Y étant des vecteurs colonnes et μ, ω des vecteurs lignes.

On a vu dans la section 2.3 qu'à une application différentiable correspond une application linéaire entre espaces tangents, la différentielle. De la même façon, il lui correspond également

une application linéaire entre espaces cotangents. Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable et $p \in M$.

Définition. L'application réciproque de F en p est l'application linéaire $F^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ telle que

$$F^*\omega_{F(p)}(X_p) = \omega_{F(p)}(dF_p(X_p)).$$

C'est l'application duale de dF_p :

$$\langle (F^*\omega)_p, X_p \rangle = \langle \omega_{F(p)}, dF_p(X_p) \rangle,$$

le membre de droite utilisant le crochet de dualité dans T_pM alors que celui de gauche utilise celui dans $T_{F(p)}M$.

3 Champs de vecteurs

Jusqu'à maintenant nous avons vu les notions d'espace et vecteur tangents en un point, qui correspondent aux mouvements infinitésimaux à partir d'une configuration donnée. En considérant toutes les configurations possibles, nous sommes maintenant en mesure de définir des mouvements sur toute la variété : ces mouvements vont être introduits comme des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des équations différentielles. Du point de vue des espaces de configurations, cela signifie que l'on caractérise les mouvements par la donnée en tout point de la vitesse.

L'outil principal sera ainsi la notion de champ de vitesse, ou plutôt de champ de vecteurs : il s'agit d'une application assignant à chaque point p de la variété un vecteur X_p de l'espace tangent. Avant d'aller plus loin dans la définition, il faut préciser l'espace auquel appartient l'image de cette application.

3.1 Fibrés tangent et cotangent

On s'intéresse à l'ensemble de tous les vecteurs tangents en tous les points de la variété.

Définition. L'ensemble $TM = \{(p, X_p), p \in M, X_p \in T_pM\}$ est appelé le fibré tangent de la variété M .

De même, l'ensemble $T^*M = \{(p, \omega_p), p \in M, \omega_p \in T_p^*M\}$ est appelé le fibré cotangent de M .

Le fibré tangent est l'union des espaces tangents

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

mais il faut bien préciser que cette union est disjointe : on ne peut pas additionner des éléments X_p et $Y_{p'}$ appartenant à des espaces tangents différents.

On appelle projection canonique sur TM la projection

$$\begin{aligned}\pi : TM &\rightarrow M \\ (p, X_p) &\longmapsto p\end{aligned}$$

et la fibre au-dessus de p est l'ensemble $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M$ d'un point p .

Théorème 3.1.1 Le fibré tangent (resp. cotangent) a une structure naturelle de variété différentiable de dimension $2n$.

Preuve. Soit (U, φ) une carte de M et $\pi^{-1}(U)$ l'ensemble des fibres au-dessus d'un point de U , i.e. $\pi^{-1}(U) = \{\{p\} \times T_p M, p \in U\}$. L'application

$$\begin{aligned}\Phi : \pi^{-1}(U) \subset TM &\rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \\ (p, X_p) &\longmapsto (\varphi(p), d\varphi_p(X_p))\end{aligned}$$

est une bijection d'après le corollaire 2.3.3 (notons que l'on a utilisé ici l'identification $T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ puisque $d\varphi_p(X_p) \in T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ est identifié à ses coordonnées dans la base naturelle).

Nous allons montrer que les couples $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ forment un atlas de TM et définissent donc une structure différentiable. La preuve se fait en deux étapes.

(i) Il faut d'abord munir TM d'une topologie : on la définit en posant que les applications Φ (pour toutes les cartes de M) sont des homéomorphismes (c'est-à-dire que les ouverts de TM sont les parties $W \subset TM$ telles que $\Phi(W \cap \pi^{-1}(U))$ est ouvert dans \mathbb{R}^{2n}). Pour que cela soit possible, il suffit de montrer que, si Φ et Ψ sont les applications correspondant à des cartes (U, ϕ) et (V, ψ) , alors

$$\Psi \circ \Phi^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$$

est un homéomorphisme. Or, sur son ensemble de définition,

$$\Psi \circ \Phi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, D(\psi \circ \varphi^{-1})),$$

et est donc un difféomorphisme (pour la structure différentiable de \mathbb{R}^{2n}). C'est donc a fortiori un homéomorphisme.

(ii) L'expression ci-dessus montre de plus que les couples $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ sont des cartes compatibles entre elles. Comme elles recouvrent TM elles forment donc un atlas et définissent une structure différentiable.

On montre de même que T^*M est une variété en utilisant les applications

$$\Phi' : (p, \omega_p) \longmapsto (\varphi(p), (\varphi^{-1})^* \omega_p).$$

■ La projection canonique $\pi : TM \rightarrow M$ apparaît maintenant comme une application différentiable. C'est de plus une submersion surjective.

Remarquons également que l'on peut définir un difféomorphisme $h : \pi^{-1}(U) \subset TM \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ en posant $h(p, X_p) = (p, d\varphi_p(X_p))$, qui est de plus linéaire sur les fibres. Ainsi le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit : $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (h est ce qu'on appelle une trivialisatation locale).

En revanche, en général TM n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de difféomorphisme de TM dans $M \times \mathbb{R}^n$ linéaire le long des fibres.

Exemples.

– Le fibré tangent à \mathbb{R}^n admet une trivialisatation globale $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identification canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

– Le fibré tangent au cercle S^1 admet une trivialisatation globale car il est difféomorphe au cylindre : $TS^1 \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. En revanche le fibré tangent TS^2 n'admet pas de trivialisatation globale.

Remarquons que l'application Φ permet de définir des coordonnées locales sur TM en utilisant les coordonnées de l'espace tangent construites dans la section 2.4. En effet, si (U, φ) est une carte de M , avec $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, le difféomorphisme Φ sur $\pi^{-1}(U)$ s'écrit

$$\Phi(p, X_p) = (x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

avec $(x^1, \dots, x^n) = \varphi(p)$ et $X^i = X_p x^i$. Ce sont bien des coordonnées locales sur TM .

En s'appuyant sur la construction de Φ , on peut prolonger une application entre deux variétés en un application entre leurs fibrés tangents.

Définition. Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable. On définit le prolongement (ou différentielle) de F comme l'application différentiable :

$$\begin{aligned} dF : TM &\rightarrow TN \\ (p, X_p) &\longmapsto (F(p), dF_p(X_p)) \end{aligned}$$

Il est clair que Φ est le prolongement de l'application de carte $\varphi : \Phi = d\varphi$. Le prolongement vérifie de plus les propriétés suivantes

– Le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

c'est-à-dire $F \circ \pi = \pi \circ dF$.

– La restriction de dF aux fibres est linéaire car $dF|_{T_p M} = dF_p$.

– Si $F : M \rightarrow W$ et $G : W \rightarrow N$ sont des applications différentiables, alors

$$d(G \circ F) = dG \circ dF.$$

– Si $F : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors le prolongement $dF : TM \rightarrow TN$ est un difféomorphisme également et

$$(dF)^{-1} = d(F^{-1}).$$

3.2 Champs de vecteurs

Considérons une variété M de dimension n .

Définition. Un champ de vecteurs différentiable (ou champ de vecteurs) sur M est une application différentiable $X : M \rightarrow TM$ qui, à un point $p \in M$, associe un couple formé de p et d'un vecteur tangent à M en $p : X(p) = (p, X_p)$. Autrement dit, $\pi \circ X = id_M$.

On notera $X(M)$ l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur M .

De même qu'un vecteur tangent en p définit une dérivation sur l'ensemble des germes $C^\infty(p)$, un champ de vecteur définit une dérivation sur l'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions de M dans \mathbb{R} de classe C^∞ . En effet l'application

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto X.g, \text{ t.q. } X.g(p) = X_p.g \end{aligned}$$

définie par un champ de vecteurs X est linéaire et vérifie la règle de Leibniz. L'ensemble $X(M)$ s'identifie donc avec l'espace vectoriel de dimension infinie des dérivations sur $C^\infty(M)$.

Exemples.

(Champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n). En utilisant la base naturelle de $T_x \mathbb{R}^n$, tout champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n s'écrit comme

$$X(x) = \left(x, \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right), \quad (3.1)$$

où X^i est une fonction différentiable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . En particulier, pour $i = 1, \dots, n$, l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : x \longmapsto \left(x, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \right)$$

est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n . Bien entendu, en tant que dérivation, ce champ est tout simplement la dérivée partielle par rapport à x^i , c'est-à-dire l'application $g \longmapsto \frac{\partial g}{\partial x^i}$. On pourra donc réécrire le champ de

vecteur X donné en (3.1) comme la dérivation

$$X = X^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial}{\partial x^n} : g \mapsto \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Enfin un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n peut aussi être considéré comme une application de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en l'identifiant à $x \mapsto (X^1(x), \dots, X^n(x))$.

Considérons maintenant une carte (U, φ) de M , avec $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. Sur le domaine U de la carte, tout champ de vecteurs X sur M s'écrit

$$X : p \in U \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right), \quad (3.2)$$

où $X^i = X.x^i \in C^\infty(M)$.

En particulier, comme U est lui-même une variété, l'application de U sur $\pi^{-1}(U)$:

$$\frac{\partial^M}{\partial x^i} = d\varphi^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x^i} \circ \varphi : p \mapsto \left(p, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) \in T_p M = T_p U$$

définit un champ de vecteurs sur U . On l'appelle champ de coordonnées.

En utilisant les champs de coordonnées, le champ X donné par (3.2) s'écrit également, en tant que dérivation sur $C^\infty(M)$,

$$X = X^1 \frac{\partial^M}{\partial x^1} + \dots + X^n \frac{\partial^M}{\partial x^n} : g \mapsto \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial^M g}{\partial x^i}.$$

Définissons le champ X lu dans la carte φ comme le champ de vecteur sur $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

$$X^\varphi(x) = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X^n(x) \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Considérons alors d'autres coordonnées locales $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, dans lesquelles le champ X se lit

$$X^\psi(y) = Y^1(y) \frac{\partial}{\partial y^1} + \dots + Y^n(y) \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

Alors, en notant $y(x) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$, on obtient la formule suivante pour le changement de coordonnées :

$$Y^j(y) = X^\varphi.y_j (\varphi \circ \psi^{-1})(y).$$

Exemples. Champ de gravité d'un objet de masse m : la variété est ici $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et le champ de vecteurs est

$$X(x) = \frac{m}{r^3} x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

où $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$.

Comment trouver d'autres champs de vecteurs? Une première possibilité est de restreindre les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n aux sous-variétés de \mathbb{R}^n . Le résultat suivant indique sous quelle condition une telle restriction est possible.

Lemme 3.2.1 Soient N une sous-variété de M et X un champ de vecteurs sur M tel que,

$$\forall p \in N, X(p) \in T_p N.$$

Alors la restriction $X|_N$ de X à N est un champ de vecteurs sur N .

Preuve. La restriction $X|_N : p \in N \mapsto X(p) \in T_p N$ est une application de N dans TN . Il suffit donc de montrer qu'elle est différentiable.

Comme N est une sous-variété de M , on peut choisir des cartes (U, φ) sur M ($\dim M = n$) et (V, ψ) sur N ($\dim N = k$) telles que $V = U \cap N$, $\psi(V) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k$ et $\psi = \varpi \circ \phi|_V$, où ϖ est la projection canonique de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^k .

On obtient alors une carte $(\pi^{-1}(U), d\varphi)$ sur TM et une carte $(\pi^{-1}(V), d\psi)$ sur TN , telles que $\pi^{-1}(V) \subset \pi^{-1}(U)$ et $d\psi = d\varpi \circ d\varphi|_{\pi^{-1}(V)}$. Notons $d\varphi = (x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n)$. Un couple (p, Y_p) appartient à $\pi^{-1}(V)$ si et seulement si

$$d\varphi(p, Y_p) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0, \alpha^1, \dots, \alpha^k, 0, \dots, 0),$$

et dans ce cas $d\psi(p, Y_p) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^1, \dots, \alpha^k)$.

Ainsi, si $d\varphi(X) = (x, \alpha^1(x), \dots, \alpha^n(x))$ sont les composantes du champ de vecteurs X , on a $\alpha^{k+1}(x) = \dots = \alpha^n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, puisque $p = \varphi^{-1}(x) \in N$ et $X(p) \in T_p N$. Ceci implique que $X|_N$ a pour coordonnées

$$d\psi(X|_N) = (x^1, \dots, x^k, \alpha^1(x), \dots, \alpha^k(x))$$

et est différentiable puisque les α^i le sont. ■

Remarque.

Il est rare en général qu'il existe une famille de champs de vecteurs sur une variété dont les valeurs en tout point forment une base de l'espace tangent. Une variété possédant cette propriété est dite parallélisable. Les seules sphères parallélisables sont S^1, S^3 et S^7 . Aucune sphère de dimension paire ne peut l'être puisque tout champ de vecteurs s'y annule au moins une fois ("on ne peut pas peigner la sphère"). En revanche tout ouvert de carte est parallélisable (avec les champs de coordonnées).

Notons enfin qu'une variété est parallélisable si et seulement si son fibré tangent admet une trivialisation.

On peut enfin se demander si il est possible de "transporter" un champ de vecteurs : étant donnée une application différentiable $F : M \rightarrow N$ et un champ de vecteurs X sur M , existe-t-il un champ de vecteurs sur N dont les valeurs soient les images de celles de X par dF ?

En général la réponse est non (prendre par exemple

$M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, F =$ la projection sur la première coordonnée et $X(x) = (x^2, 0)$). Ce n'est possible que dans certains cas, en particulier quand F est un difféomorphisme.

Définition. Soient $F : M \rightarrow N$ un difféomorphisme et X un champ de vecteurs sur M . Alors le transport de X par F , noté F_*X , est le champ de vecteurs sur N défini par

$$F_*X = dF(X) \circ F^{-1} \text{ ou } F_*X(q) = dF_{F^{-1}(q)}(X(F^{-1}(q))).$$

Exemple.

Les champs de coordonnées s'écrivent

$$\frac{\partial^M}{\partial x^i} = \varphi^{-1} * \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

3.3 Équations différentielles

Nous allons maintenant étudier le mouvement sur une variété.

Définition. On appelle équation différentielle sur la variété M une équation de la forme

$$\dot{q} = X(q), q \in M,$$

où X est un champ de vecteurs sur M .

La donnée d'une équation différentielle est ainsi équivalente à celle du champ de vecteurs X . Une solution de l'équation différentielle, c'est-à-dire une courbe intégrale du champ X , est une courbe $c(t) \in M$, définie sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, telle que

$$\frac{dc}{dt}(t) = X(c(t)), \forall t \in J.$$

Comme pour les équations différentielles dans les espaces vectoriels normés, nous allons avoir des résultats d'existence et d'unicité pour les solutions et une dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales.

Théorème 3.3.1 (Existence et unicité des solutions).

Soit $\dot{q} = X(q), q \in M$, une équation différentielle sur M . Pour tout point $p \in M$, si $\eta > 0$ est suffisamment petit il existe une unique courbe

intégrale $c_p(t)$ de X , définie pour $t \in]-\eta, \eta[$, satisfaisant la condition initiale $c_p(0) = p$.

Preuve. Le résultat est local : il suffit donc de le prouver dans une carte, c'est-à-dire dans un ouvert de \mathbb{R}^n . C'est alors un résultat classique.

■

Dans la suite, nous parlerons de la courbe intégrale de X issue de p : il s'agit de la solution $c_p(t)$ pour laquelle l'intervalle de définition $]a, b[\supset]-\eta, \eta[$ est maximal.

Mentionnons ici une conséquence du théorème d'existence et d'unicité qui sera utile pour les sous-variétés.

Corollaire 3.3.2 Soient $\dot{q} = X(q)$ une équation différentielle sur M et $N \subset M$ une sous-variété de M tels que, pour tout $q \in N$, $X(q) \in T_q N$. Alors la courbe intégrale de X issue d'un point $p \in N$ est incluse dans N pour t suffisamment petit.

Preuve. D'après le lemme 3.2.1, la restriction $X|_N$ est un champ de vecteurs sur N . L'équation différentielle $\dot{q} = X|_{N(q)}$, $q \in N$, a donc une solution $c_p(t) \subset N$ pour $p \in N$ et t suffisamment petit.

Or cette courbe est aussi solution de l'équation différentielle $\dot{q} = X(q)$ sur M , pour la condition initiale p . Le théorème d'unicité montre que c'est bien une courbe intégrale de X . ■

Théorème 3.3.3 (Dépendance par rapport aux conditions initiales). La solution d'une équation différentielle $\dot{q} = X(q)$ sur M dépend de façon différentiable de la condition initiale : pour tout $p \in M$, il existe un voisinage $U_p \subset M$ de p et un intervalle $I = \{|t| < \varepsilon_p\}$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \phi : I \times U_p &\rightarrow M \\ (t, q) &\longmapsto \phi(t, q) = c_q(t) \end{aligned}$$

est différentiable, ainsi que $p \longmapsto \varepsilon_p$.

Preuve. Comme pour le théorème 3.3.1, il suffit de se restreindre à une carte et d'utiliser les résultats sur \mathbb{R}^n . ■

3.4 Flots et groupes de difféomorphismes

Étant donné un point $p \in M$, on peut définir pour chaque $t \in I$ une application

$$\begin{aligned} \phi_t : U_p &\rightarrow M \\ q &\longmapsto \phi_t(q) = \phi(t, q). \end{aligned}$$

Il résulte des deux précédents théorèmes que pour chaque t l'application ϕ_t est un difféomorphisme sur U_p , autrement dit un difféomorphisme lo-

cal sur M . La famille de ces difféomorphismes locaux ϕ_t est appelée le flot de X .

Remarque.

Il est parfois pratique de se représenter X comme le champ de vitesse d'un fluide se déplaçant sur M . Le flot transporte alors une particule de liquide de la position q au temps 0 à la position $\phi_t(q)$ au temps t . Par définition de ϕ , et donc de ϕ_t , le flot peut également être caractérisé comme la famille de difféomorphismes locaux solution de

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t, \quad \phi_0 = id.$$

Cette caractérisation permet de montrer que les flots se transportent par conjugaison.

Lemme 3.4.1 Soient $F : M \rightarrow N$ un difféomorphisme et X un champ de vecteurs sur M , de flot ϕ_t . Le flot du transport F_*X de X par F est $F \circ \phi_t \circ F^{-1}$, c'est-à-dire le conjugué du flot de X .

Preuve. Posons $\phi'_t = F \circ \phi_t \circ F^{-1}$. Comme $\phi'_0 = id_N$, il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial \phi'_t}{\partial t} = F_*X \circ \phi'_t.$$

Avec les notations du théorème 3.3.3, $\phi'_t(q) = F \circ \phi(t, F^{-1}(q))$, et la dérivée partielle par rapport à t s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi'_t}{\partial t}(q) &= dF \circ \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, F^{-1}(q)) \\ &= dF \circ X \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) \\ &= dF \circ X \circ F^{-1} \circ F \circ \phi_t \circ F^{-1}(q) = F_*X \circ \phi'_t(q). \end{aligned}$$

■

Le flot forme un groupe local à un paramètre de difféomorphismes de M . Un tel groupe est défini par les propriétés suivantes :

- (i) ϕ_t est un difféomorphisme local $\forall t \in I$;
- (ii) $t \mapsto \phi_t$ est différentiable;
- (iii) $\phi_0 = id$;
- (iv) $\phi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}, \forall t, s, t+s \in I$.

Pour le flot, les trois premières propriétés viennent des théorèmes 3.3.1 et 3.3.3. Pour la quatrième, on remarque que $c(t) = \phi_{t+s}(q)$ et $c'(t) = \phi_t(\phi_s(q))$ sont solutions de la même équation différentielle avec la condition initiale $c(0) = c'(0) = \phi_s(q)$, ce qui montre l'égalité. Résumons ceci dans une proposition.

Proposition 3.4.2 Tout champ de vecteurs sur M engendre un groupe local à un paramètre de difféomorphismes sur M .

Champs de vecteurs complets.

Définition. Un champ de vecteurs X sur M est complet si, pour tout $p \in M$, la courbe intégrale de X issue de p est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque.

Même dans \mathbb{R} tous les champs ne sont pas complets. Par exemple $X(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ est complet mais $X(x) = x^2$ ne l'est pas (la solution est de la forme $x(t) = \frac{x_0}{1-tx_0}$).

Un champ de vecteurs complet engendre un flot constitué de difféomorphismes (globaux) de M . Ce flot forme un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur M (défini comme un groupe local par les propriétés (i)–(iv) dans lesquelles on remplace local par global et I par \mathbb{R}).

Dans la suite de ce cours nous ferons souvent l'hypothèse de complétude pour simplifier les résultats et les preuves. Il est généralement aisé de retrouver le résultat sans cette hypothèse. Il faut remarquer toute fois qu'en mécanique la plupart des champs de vecteurs hamiltoniens ne sont pas complets. On peut également noter qu'il existe une condition suffisante simple : si M est une variété compacte, tout champ sur M est complet.

On se pose maintenant la question de la réciproque de la proposition 3.4.2: étant donné un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur M , est-ce le flot d'un champ de vecteurs?

Lemme 3.4.3 Tout groupe à un paramètre de difféomorphismes ϕ_t sur M est le flot d'un champ de vecteurs, appelé générateur infinitésimal du groupe et obtenu comme

$$X = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Preuve. Notons ϕ_t les difféomorphismes de ce groupe. En tout point $p \in M$, on définit un vecteur tangent à M :

$$X(p) = \left. \frac{\partial \phi_t}{\partial t} (p) \right|_{t=0} \in T_p M.$$

Comme la famille ϕ_t dépend de façon différentiable de t et de p (propriétés (i) et (ii) des groupes à un paramètre), $p \mapsto X(p)$ définit bien un champ de vecteurs X sur M .

Montrons maintenant que le flot de X est ϕ_t . Comme $\phi_0 = id$ (propriété (iii)), il suffit de montrer que $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = X \circ \phi_t$. Or, d'après la propriété (iv),

$$\frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial t} (p) = \frac{\partial \phi_{t+s}}{\partial s} (p) = \frac{\partial}{\partial s} (\phi_s \phi_t (p)).$$

En choisissant $s = 0$ dans cette relation, on obtient

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(p) = \frac{\partial}{\partial s} (\phi_s(\phi_t(p)))|_{s=0} = X(\phi_t(p)),$$

ce qui prouve le lemme. ■

Le tableau ci-dessous résume les relations entre les champs de vecteurs et les groupe de difféomorphismes.

$$\begin{aligned} \text{Champ de vecteurs} & \implies \text{Groupe à 1 paramètre} \\ & \not\Rightarrow \text{Groupe global à 1 paramètre} \\ \text{Champ de vecteur complet} & \iff \text{Groupe global à 1 paramètre} \end{aligned}$$

Exemple.

– Dans $M = \mathbb{R}^3$: soient $a \in \mathbb{R}^3$ et le groupe de translations à 1 paramètre $\phi_t(x) = x + ta$.

Le générateur infinitésimal de ce groupe est $X(x) = a$, ou plus exactement

$$X(x) = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Inversement, considérons l'équation différentielle dans \mathbb{R}^3 :

$\dot{x} = X(x) = a$. La courbe intégrale issue d'un point x_0 est $\phi_t(x_0) = x_0 + ta$.

– Dans $M = GL_2(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\phi_t(A) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A, t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble de ces applications forme un groupe à un paramètre de difféomorphismes sur $GL_2(\mathbb{R})$ (le montrer). Le générateur infinitésimal de ce groupe est

$$X(A) = \frac{d}{dt} \phi_t(A)|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A.$$

Inversement, l'équation différentielle sur $GL_2(\mathbb{R})$

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A$$

est linéaire et a donc pour solution issue de A_0 :

$$A(t) = \exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] A_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_0.$$

– Plus généralement, si $M = \mathbb{R}^n$ (ou un ouvert de \mathbb{R}^n) et si le champ de vecteurs X est linéaire, c'est-à-dire $X(x) = Ax$, alors X est complet et son flot est $\phi_t(x) = \exp(tA)x$.

4 Familles de champs de vecteurs

4.1 Crochets et algèbre de Lie

Rappelons (§ 3) qu'un champ de vecteurs $X \in X(M)$ peut être considéré comme une dérivation sur l'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions à valeurs réelles sur M :

$$X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$g \longmapsto X.g$$

On définit alors le produit de deux champs de vecteurs X et Y comme l'opérateur

$$XY : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

$$g \longmapsto (XY).g = X.(Y.g).$$

Cet opérateur n'est pas une dérivation, XY n'est donc pas un champ de vecteurs. En effet, il ne vérifie pas la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned} XY.(fg) &= X.(fY.g + gY.f) \\ &= fXY.g + gXY.f + \underbrace{(X.f)(Y.g) + (X.g)(Y.f)}_{\text{termes en trop}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Il s'agit en fait d'un opérateur du second ordre.

Exemple.

Dans \mathbb{R}^n , avec $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^2}$, on a $XY.g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^1 \partial x^2}$.

Il est cependant possible de définir un champ de vecteurs à partir du produit.

Définition. Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs $X, Y \in X(M)$ est le champ de vecteurs

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Pour que cette définition soit correcte il faut montrer que $XY - YX$ est bien un champ de vecteurs, c'est-à-dire une dérivation sur $C^\infty(M)$. Or la linéarité est évidente et la règle de Leibniz se déduit du calcul (4.2) :

$$[X, Y].(fg) = XY.(fg) - YX.(fg)$$

$$\begin{aligned}
&= fXY.g + gXY.f - fYX.g - gYX.f \\
&= f[X, Y].g + g[X, Y].f.
\end{aligned}$$

En coordonnées locales, un champ de vecteurs étant donné sous la forme $X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, les composantes du crochet de Lie $[X, Y](x)$ sont

$$[X, Y]^i(x) = \sum_{j=1}^n \left(X^j(x) \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j(x) \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right) = X.Y^i(x) - Y.X^i(x).$$

Matriciellement, en notant $JX(x) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) \right)$ la matrice jacobienne du vecteur des composantes de X , on obtient

$$\begin{pmatrix} [X, Y]^1(x) \\ \vdots \\ [X, Y]^n(x) \end{pmatrix} = JY(x) \begin{pmatrix} X^1(x) \\ \vdots \\ X^n(x) \end{pmatrix} - JX(x) \begin{pmatrix} Y^1(x) \\ \vdots \\ Y^n(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple.

– Si $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, alors $[X, Y] = 0$. Plus généralement si X et Y sont constants dans un système de coordonnées, c'est-à-dire $X^1(x), \dots, X^n(x)$ et $Y^1(x), \dots, Y^n(x)$ tous constants, alors $[X, Y] = 0$ sur le domaine des coordonnées.

– Dans \mathbb{R}^n , considérons des champs de vecteurs linéaires, c'est-à-dire que, dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}$, ils s'écrivent matriciellement comme

$$X(x) = Ax \text{ et } Y(x) = Bx, x \in \mathbb{R}^n$$

A et B étant des matrices ($n \times n$) à coefficients constants. Le crochet de Lie de ces champs s'écrit alors

$$[X, Y](x) = JY(x)X(x) - JX(x)Y(x) = (BA - AB)x.$$

Autrement dit le crochet de Lie s'écrit en fonction du commutateur $BA - AB$ des matrices A et B .

Proposition 4.1.1 Soient X_1, X_2 des champs de vecteurs sur M de flots respectifs ϕ_t^1, ϕ_t^2 et p un point de M . On considère la courbe

$$\gamma(t) = \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 \circ \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p)$$

pourt suffisamment petit.

Alors, dans des coordonnées locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ centrées en p ,

$$\gamma^\varphi(t) = t^2[X_1, X_2]^\varphi(p) + o(t^2),$$

où l'on a identifié le champ $[X_1, X_2]^\varphi$ sur R^n avec le vecteur de ses coordonnées.

Preuve. Pour t suffisamment petit, on peut se placer dans un système local de coordonnées centré en p (c'est-à-dire que p a pour coordonnées 0), et on identifie vecteurs tangents et champs de vecteurs aux vecteurs colonnes de leurs composantes. On va faire un développement limité de $\gamma(t)$ et montrer que

$$\gamma(t) = t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2),$$

ce qui prouvera la proposition.

Nous commençons par calculer

$$\phi_t^1 \circ \phi_t^2(\gamma(t)) = \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p).$$

Remarquons tout d'abord que, si ϕ_t désigne le flot d'un champ de vecteurs X ,

$$\begin{aligned} \phi_t(x) &= x + t \frac{d\phi_t}{dt}(x)|_{t=0} + \frac{t^2}{2} \frac{d^2\phi_t}{dt^2}(x)|_{t=0} + o(t^2) \\ &= x + tX(x) + \frac{t^2}{2} JX(x)X(x) + o(t^2). \end{aligned}$$

En choisissant $\phi = \phi^1$ et $x = 0$ puis $\phi = \phi^2$ et $x = \phi_t^1(p)$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) &= tX_1(p) + \frac{t^2}{2} JX_1(p)X_1(p) + tX_2(p) + t(JX_2(p)X_1(p)) + \\ &+ \frac{t^2}{2} JX_2(p)X_2(p) + o(t^2). \end{aligned}$$

On peut faire le même calcul en échangeant les rôles de X_1 et de X_2 , ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} \phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p) &= t^2 (JX_2(p)X_1(p) - JX_1(p)X_2(p)) + o(t^2) \\ &= t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2), \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \phi_{-t}^2 \circ \phi_{-t}^1 (\phi_t^2 \circ \phi_t^1(p) - \phi_t^1 \circ \phi_t^2(p)) \\ &= t^2[X_1, X_2](p) + o(t^2). \end{aligned}$$

■

Cette proposition met en évidence le lien entre le crochet et la non-commutation des flots. Nous avons en fait la caractérisation suivante.

Lemme 4.1.2 Deux champs de vecteurs X_1, X_2 sur M satisfont $[X_1, X_2] = 0$ si et seulement si leurs flots ϕ_t^1, ϕ_s^2 commutent pour tous t, s suffisamment petits.

Une autre propriété importante du crochet de Lie est qu'il est préservé par un difféomorphisme.

Lemme 4.1.3 Soient $F : M \rightarrow N$ un difféomorphisme entre variétés et X, Y des champs de vecteurs sur M . Alors

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

Preuve. Rappelons que, en tant que dérivation, le champ F_*X s'écrit

$$\begin{aligned} F_*X : C^\infty(N) &\rightarrow C^\infty(N) \\ g &\longmapsto X(g \circ F) \circ F^{-1}. \end{aligned}$$

Le transport par F du crochet $[X, Y]$ vérifie donc

$$\begin{aligned} F_*[X, Y].g &= [X, Y].(g \circ F) \circ F^{-1}, \forall g \in C^\infty(N) \\ &= (X.(Y.(g \circ F)) - Y.(X.(g \circ F))) \circ F^{-1}, \forall g \in C^\infty(N). \end{aligned}$$

Or $Y.(g \circ F)$ est égal à $F_*Y.g$ (de même avec X). L'égalité ci-dessus devient donc, pour toute fonction $g \in C^\infty(N)$,

$$F_*[X, Y].g = F_*X.(F_*Y.g) - F_*Y.(F_*X.g) = [F_*X, F_*Y].g,$$

ce qui montre que les champs de vecteurs $F_*[X, Y]$ et $[F_*X, F_*Y]$ sont égaux.

■

Chapitre 2

Théorie de Morse

Part II

Théorie de Morse

5 Théorie de Morse

Définition. Soient M une variété C^∞ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M . Un point critique de f est un point $p_0 \in M$ tel que $df_{p_0} \equiv 0$.

Définition. On définit la matrice hessienne de f en p_0 comme :

$$H_f(p_0) := (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ avec } h_{ij} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$$

par rapport au système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) .

On remarque que $H_f(p_0)$ est une matrice symétrique.

Définition. Un point critique p_0 de f est non dégénéré si

$$\det H_f(p_0) \neq 0$$

Lemme 5.1 La propriété d'un point critique p_0 d'être non-dégénéré ne dépend pas du choix du système de coordonnées.

Preuve. Soient

la matrice hessienne $H_f(p_0)$ de f en p_0 selon les coordonnées (x_1, \dots, x_n) et $\mathfrak{R}_f(p_0)$ la matrice hessienne de f en p_0 selon les coordonnées (X_1, \dots, X_n) . Les matrices sont alors reliées par la relation suivante :

$$\mathfrak{R}_f(p_0) = J_f^t(p_0) \cdot H_f(p_0) \cdot J_f(p_0)$$

Où

$$J_f(p_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de (x_1, \dots, x_n) vers (X_1, \dots, X_n) .

Il est essentiel ici que p_0 soit un point critique de f

On sait d'après l'analyse vectorielle que $J_f(p_0)$ est inversible (car il s'agit d'un changement de coordonnées). Ainsi :

$$\det H_f(p_0) \neq 0 \iff \det \mathfrak{R}_f(p_0) \neq 0$$

■

Définition. On appelle indice d'un point critique x de f la dimension du plus grand sous-espace de \mathbb{R}^n sur lequel la matrice Hessienne est définie négative.

Lemme 5.2 (Lemme de Morse cas de \mathbb{R}^n)

Soit p_0 un point critique non dégénéré d'une fonction $f : u \rightarrow \mathbb{R}$ avec $u \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. on peut alors choisir un système de coordonnées locales (X_1, \dots, X_N) de p_0 telle que la représentation de f par rapport à ce système de coordonnées est de la forme suivante:

$$f = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_n^2 + c$$

où $c = f(p_0)$, on appelle λ est l'indice de f au point p_0

Preuve.

On peut tout d'abord admettre, sans perte de généralités, que $f(p_0) = 0$ et que $p_0 = 0$.

Tout d'abord, si u n'est pas étoilé de centre 0, on restreint notre étude à un ouvert $U \subset u$ étoilé de centre 0, de préférence assez grand pour que l'étude soit intéressante, et qui existe car $u \subset \mathbb{R}^n$

(si u est étoilé de centre 0, on choisit évidemment $U = u$)

On peut alors définir la fonction, pour $x \in U$ fixé :

$$h_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(tx)$$

On sait alors que :

$$h'_x(t) = \frac{\partial h_x}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot \frac{\partial tx_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i$$

$$h''_x(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \right) \cdot x_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) \cdot x_i x_j$$

par le théorème de dérivations des fonctions composées.

On sait donc que : $h_x(0) = 0$ et $h'_x(0) = 0$.

En effectuant une intégration par parties, on a le résultat suivant :

$$f(x) = h_x(1) = \int_0^1 (1-t)h''_x(t)dt$$

On a donc :

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt$$

Or, en posant

$$m_{ij}(x) := \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) dt$$

$$M(x) = (m_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

qui est une matrice symétrique réelle C^∞ , on arrive au résultat :

$$f(x) = {}^t x \cdot M(x) \cdot x.$$

On notera dorénavant $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles de taille $n \in \mathbb{N}$ et Sym_n l'ensemble des matrices réelles symétriques de taille $n \in \mathbb{N}$.

Il est utile de remarquer qu'on peut identifier $M_n(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^{n^2} et Sym_n avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

On utilise le lemme de géométrie différentielle suivant : ■

Lemme 5.3 Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{R}^n$ tel que df_x est surjective.

Alors

- $\exists V$ voisinage de $f(x)$ dans \mathbb{R}^p .
- $\exists s : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $f \circ s = id_V$

On a donc une application :

$$M : U \rightarrow Sym_n : x \mapsto M(x)$$

définie comme précédemment avec U un voisinage ouvert de 0.

Il y a deux cas à traiter :

1) $\exists \lambda \in \{0, \dots, n\}$ tel que $M(0) = \underbrace{diag(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)}_{\lambda \text{ fois}}$

On peut alors définir une application :

$$K : M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{C^\infty} Sym_n : P \mapsto {}^t A \cdot M(0) \cdot A$$

On montre que dK_I est surjective, en effet, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$dK_I(A) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (K(I + sA) - K(I))$$

Or $\frac{1}{s} (K(I + sA) - K(I)) = sK(A) + M(0) \cdot A + {}^t (M(0) \cdot A)$

Ainsi $dK_I(A) = M(0) \cdot A + {}^t (M(0) \cdot A)$ qui est clairement surjective, car comme $\det M(0) \neq 0$, il suffit de voir que $\forall B \in Sym_n$,

$$B = \frac{1}{2}B + {}^t \left(\frac{1}{2}B \right) = M(0) \cdot (M(0)^{-1} \cdot \frac{1}{2}B) + {}^t \left(M(0) \cdot (M(0)^{-1} \cdot \frac{1}{2}B) \right)$$

Alors d'après le lemme ci-dessus,

- $\exists V$ voisinage de $M(0)$ et
- $\exists s : V \xrightarrow{C^\infty} M_n(\mathbb{R})$ tels que

$$K \circ s = id_{Sym_n}$$

ce qui veut dire que

$${}^t s(A) \cdot M(0) \cdot s(A) = A, \forall A \in V.$$

On définit alors

$$P := s \circ M : U' \xrightarrow{C^\infty} M_n(\mathbb{R}), \text{ avec } 0 \in U' \subset U \text{ tel que } M(U') \subset V$$

$$\varphi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto P(x) \cdot x$$

On voit que $\varphi(0) = 0$.

En revenant au raisonnement plus haut, on arrive à :

$$f(x) = {}^t \varphi(x) \cdot M(0) \cdot \varphi(x), \forall x \in U'$$

On montre que $d\varphi_0$ est inversible, en effet :

$$d\varphi_0(X) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\varphi(0 + sX) - \varphi(0))$$

Or $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(sX) = P(sX) \cdot sX$, ainsi :

$$d\varphi_0(X) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} P(sX) \cdot sX = \lim_{s \rightarrow 0} P(sX) \cdot X = P(0) \cdot X$$

Alors $d\varphi_0 = P(0)$ qui est inversible, car $\det P(0) \neq 0$.

Ainsi, selon le théorème de la fonction inverse, il existe un voisinage ouvert $U'' \subset U'$ tel que $\varphi|_{U''}$ soit un difféomorphisme, et donc en particulier un changement de coordonnées locales.

Ainsi, en posant :

$$(X_1, \dots, X_n) := \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$

on aura :

$$f(X_1, \dots, X_n) = -X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_\lambda^2 + X_{\lambda+1}^2 + \dots + X_n^2$$

2) Dans le cas où $M(0) \in \text{Sym}_n$ quelconque, le théorème de Sylvester nous dit que $\exists \lambda \in \{0, \dots, n\}$ et $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M(0) = {}^t Q \cdot \underbrace{\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)}_{\lambda \text{ fois}} \cdot Q$$

On peut alors définir

$$M'(x) := {}^t (Q^{-1}) \cdot M(x) \cdot Q^{-1}, C^\infty$$

On aura alors que $M'(0) = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_{\lambda \text{ fois}}, 1, \dots, 1)$ et que

$$f(x) = {}^t(Q \cdot x) \cdot M'(x) \cdot (Q \cdot x)$$

Comme la matrice Q est inversible, on peut se ramener au cas 1) et la démonstration est achevée.

Remarque.

Une conséquence importante de ce lemme est que tous les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés.

En effet, soit a un point critique de f . D'après le lemme de Morse, il existe un voisinage V de a , $\lambda \in \{0, \dots, n\}$ et un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) tels que $f = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 + f(a)$ sur V .

Ainsi, $a = (0, \dots, 0)$ dans ce système de coordonnées. Nous savons d'après l'analyse vectorielle que $\text{grad}f(x) = 0$ est une condition nécessaire pour que x soit un point critique de f .

Or $\text{grad}f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)_{1 \leq i \leq n} = (-2x_1, \dots, -2x_\lambda, 2x_{\lambda+1}, \dots, 2x_n)$ sur V .

On voit donc clairement que pour $x \in V$,

$$\text{grad}f(x) = 0 \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0), \text{ ie } x = a$$

Ainsi, il existe un voisinage ouvert de a sur le quel f admet a comme unique point critique.

Lemme 5.4 (lemme de Morse cas d'une variété)

Soit M une variété C^∞ .

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Théorème 5.5 (Théorème de Morse).

Toute variété C^∞ compacte munie d'une fonction de Morse est un rétracte par déformation d'un CW-Complexe.

Remarque.

Voici l'exemple que nous suivrons durant ce travail : Il s'agit d'un tore, vu verticalement, dans \mathbb{R}^3 (il s'agit donc d'une variété de dimension 2) et la fonction de Morse associée est la fonction de hauteur. Il est clair qu'elle possède quatre points critiques isolés, qu'on appellera désormais A, B, C et D . On admet sans preuve qu'ils sont non-dégénérés.

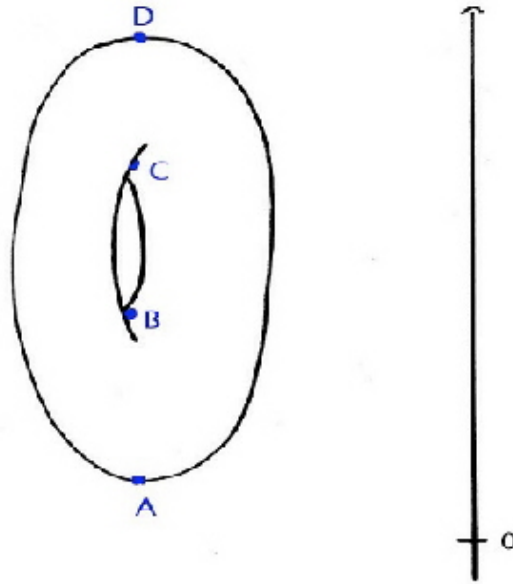


FIG.4.1-Le tore avec sa fonction de hauteur

5.1 Idée de la preuve

Le travail que nous allons effectuer peut être divisé en plusieurs étapes.

On a tout d'abord besoin des définitions suivantes :

– Soit M une variété C^∞ compacte et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse.

– Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. On définit $M_a := f^{-1}((-\infty, a])$

– $M_{ab} := f^{-1}([a, b]) = M_b \setminus \text{int}(M_a)$ et $L_a := f^{-1}(\{a\})$

La première partie consiste en étudier M_a et M_b quand M_{ab} ne contient aucun point critique de f . On construira une rétraction par déformation de M_b vers M_a , dont l'idée sera de "tirer" les points de M_{ab} vers M_a le long de courbes dont le vecteur tangent est $-\nabla f$, c'est-à-dire dans le sens où f décroît.

La seconde partie est plus compliquée, on étudie à nouveau M_a et M_b , mais cette fois quand M_{ab} contient un point critique de f (qui sera isolé d'après le lemme de Morse). le champ de vecteurs $-\nabla f$ n'est pas défini en un point critique de f . C'est à ce moment qu'apparaîtra la structure de CW-complexe.

5.2 Rétracte par déformation

Supposons que M_{ab} ne contient pas de point critique de f . Alors M_a est un rétracte par déformation de M_b .

Preuve.

Rappel :

$r : M_b \rightarrow M_a$ est une rétraction par déformation si

- r est une application continue surjective
- $r \circ i_{M_a} = id_{M_a}$ ($i_{M_a} : M_a \hookrightarrow M_b$ est ici l'inclusion.)
- $i_{M_a} \circ r$ est homotope à id_{M_b}

Soit $x \in M_{ab}$, on sait que :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ et } \exists ! \varphi_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_{ab} \text{ vérifiants:}$$

- $\varphi_x(0) = x$
- $\varphi'_x(t) = -\nabla f(\varphi_x(t)), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Or, on sait que $f(\varphi_x(h)) = f(x) - h$ pour $h > 0$ suffisamment petit.

Ainsi, φ_x , parcourue dans le sens positif, indique en quelque sorte la décroissance de f .

Deux cas sont alors possibles :

- $\exists \zeta \in [0, \varepsilon)$ tel que $\varphi_x(\zeta) \in L_a$. On définit alors

$$\mu_x : [0, 1] \longrightarrow M_{ab} : \mu_x(\tau) := \varphi_x(\zeta \cdot \tau)$$

- $\varphi_x([0, \varepsilon)) \subset M_{ab}$, ie $f(\varphi_x(t)) > a, \forall t \in [0, \varepsilon)$

On étudie alors sa restriction au sous-intervalle $[0, \varepsilon)$.

Grâce aux propriétés suivantes :

- φ_x est continue sur $[0, \varepsilon)$
- M_{ab} est compact, car fermé dans M
- $\varphi'_x(t) = \nabla f(\varphi(t))$ est borné $\forall t \in [0, \varepsilon)$

On sait que φ_x peut être prolongée par continuité en ε . Par unicité de la solution à une équation différentielle, on peut prolonger φ_x en ε pour obtenir $\delta > \varepsilon$ et une nouvelle courbe $\widetilde{\varphi}_x : [0, \delta] \longrightarrow M_{ab}$ vérifiant $\widetilde{\varphi}_x|_{[0, \varepsilon]} = \varphi_x$.

Ainsi, en procédant de cette manière autant de fois que nécessaire, on obtiendra finalement $\eta > 0$ et une courbe $\widetilde{\mu}_x : [0, \eta] \longrightarrow M_b$ telle que $\exists \zeta \in [0, \eta]$ avec $\widetilde{\mu}_x(\zeta) \in L_a$. On définit alors

$$\mu_x : [0, 1] \longrightarrow M_{ab} : \mu_x(\tau) := \widetilde{\mu}_x(\zeta \cdot \tau)$$

D'après la démarche précédente, on obtient dans les deux cas une courbe

$\mu_x : [0, 1] \rightarrow M_{ab}$ continue vérifiant :

- $\mu_x(0) = x$
- $\mu_x(1) \in L_a$

On définit alors : $r : M_b \rightarrow M_a$ par

$$r(x) = \begin{cases} \mu_x(1) & \text{si } x \in M_{ab} \\ x & \text{si } x \in M_a \end{cases}$$

- r est clairement surjective. En ce qui concerne la continuité, elle découle de la continuité de l'application qui envoie x vers μ_x , cette dernière étant une conséquence du théorème sur les équations différentielles. Une illustration de cette assertion est donnée dans la prochaine figure.
- $r \circ i_{M_a} = id_{M_a}$ par définition de r .
- On définit l'homotopie de id_{M_b} vers $i_{M_a} \circ r$:

$$H : M_b \times [0, 1] \rightarrow M_a$$

$$H(x, t) = \begin{cases} \mu_x(t) & \text{si } x \in M_{ab} \\ x & \text{si } x \in M_a \end{cases}$$

qui vérifie $H(-, t)|_{M_a} = id_{M_a}$, $\forall t \in [0, 1]$, ie qui laisse M_a fixe.

On voit ainsi que l'application r est une rétraction par déformation de M_b vers M_a . Ainsi, topologiquement parlant, M_b et M_a sont essentiellement le même objet.

On voit sur la figure 4.3 une illustration de la continuité de μ_x en fonction de x , ie pour x et y suffisamment "proches", les courbes μ_x et μ_y le sont aussi. ■

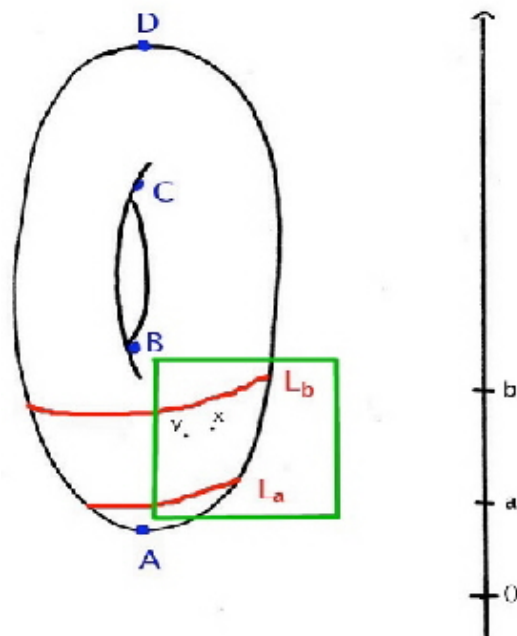


FIG.4.2-vue générale

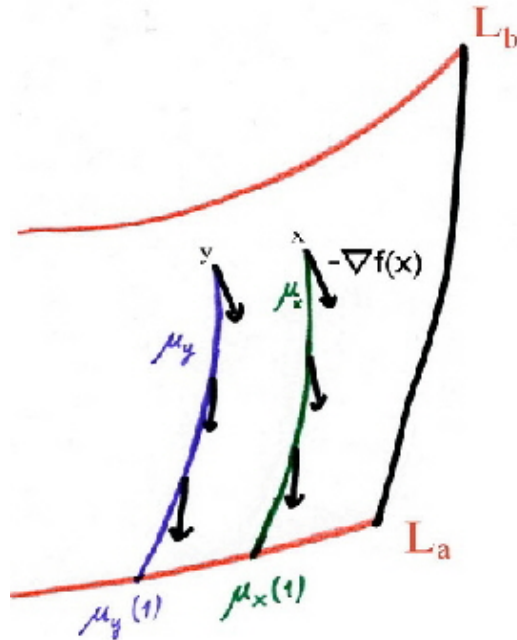


FIG.4.3-détail

5.3 Opération de collage

Supposons que M_{ab} contienne un unique point critique de f , que l'on nomme x_0 . Soit λ l'indice de f en x_0 .

Alors il existe une application $g : D^\lambda \rightarrow M_{ab}$ telle que M_b est un rétracte par déformation de

$$M_a \cup D^\lambda / \sim := M_a \cup gD^\lambda$$

où

$$g(z) \sim z, \forall z \in S^\lambda$$

On reconnaît ici la structure sous-jacente de CW-Complexe. Dans le cas présent, nous ne donnerons pas de preuve. Nous nous contenterons d'expliquer la démarche dans l'exemple de l'illustration précédente.

Ici, nous prenons le point critique B situé en bas du "trou". Nous avons ici $\lambda = 1$ et posons $p := f(B)$.

La démarche est la suivante : On choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On sait alors que $M_{p-\varepsilon}$ est un rétracte par déformation de M_a et ressemble visuellement à un bol.

En suite, en fixant une "bande" Δ à $M_{p-\varepsilon}$, $B \in \Delta \subset M_{ab}$, on obtient un rétracte par déformation de $M_{p+\varepsilon}$ et visuellement, le résultat ressemble à un panier avec une poignée. (La rétraction suit les mêmes courbes que la rétraction du point précédent, la différence est qu'on bloque ici les point sarrivant sur Δ).

Cependant, $\Delta \simeq D^1$, et l'application de collage g est clairement définie. Ainsi, comme M_b est un rétracte par déformation de $M_{p+\varepsilon}$, on obtient que M_b est un rétracte par déformation de $M_a \cup_g D^1$

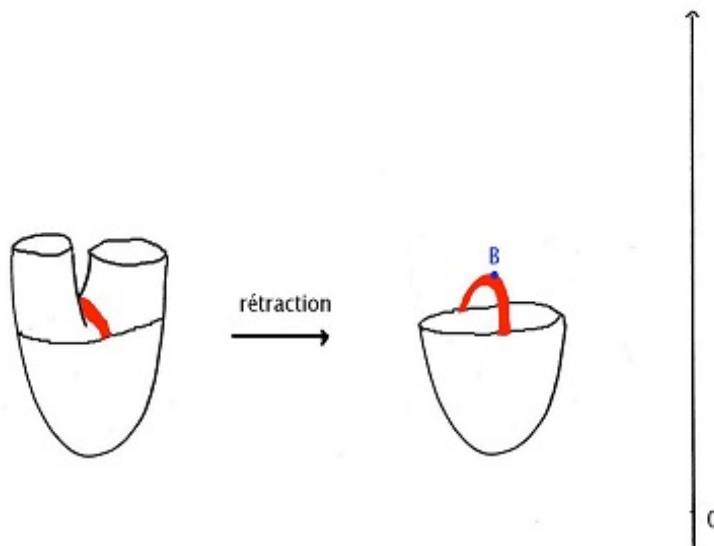


FIG.4.4- M_b serétractesur $M_a \cup_g D^1$

5.4 Dernier point critique

Lorsqu'on arrive au dernier point critique D , il s'agit dans notre cas d'un maximum. On sait donc que son indice vaut 2. On va donc coller, de façon assez intuitive, D^2 à $M_{f(D)-\varepsilon}$ par son bord, c'est-à-dire par S^1 . Visuellement, on va poser un "chapeau" sur $M_{f(D)-\varepsilon}$.

5.5 Vue générale

La démarche est, dans l'exemple, visuellement parlante, cependant le fonctionnement peut être vu de façon plus générale :

On fixe, autour du point critique x qui est isolé, car il s'agit d'une fonction de Morse, un système de coordonnées donné par le lemme de Morse. On fixe en suite un voisinage V de x (la bande dans l'exemple) et on rétracte (comme dans la première partie de la preuve), de M_b sur $M_{f(x)-\varepsilon} \cup_g D^\lambda$ pour une certaine fonction $g : D^\lambda \rightarrow M_b$ avec λ l'indice de f en x . Finalement, on observe que $V \simeq S^\lambda$ et le tour est joué.

Le point essentiel de cette étape est de bien appliquer le lemme de Morse, car l'indice de f en x détermine le système de coordonnées en x et par conséquent détermine la dimension de la cellule du CW-complexe.

On note également au passage que le nombre de cellule de dimension λ du CW-complexe est égal au nombre de point critique d'indice λ .

Voici une illustration de la démarche :

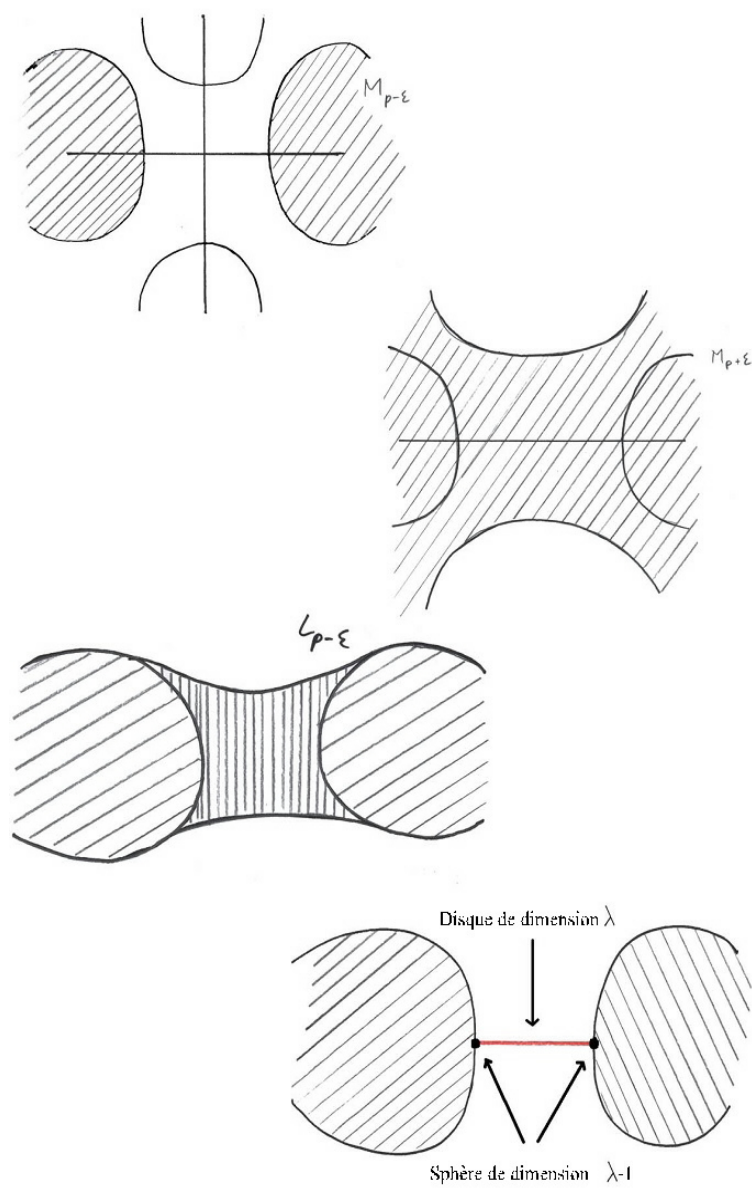


FIG.4.5-Lignes de niveau de fau voisinage du point critique

6 Le Lemme de Morse

Dans ce paragraphe, on considère M une variété différentiable de dimension n

et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse.

Lemme 6.1 (lemme de Morse)

Supposons qu'il existe p dans M tel que p soit un point critique non dégénéré de f . Alors il existe U un voisinage ouvert de p et

$$(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

un système de coordonnées locales de M tel que :

$$\forall q \in U, f(q) = f(p) - x_1(q)^2 - x_2(q)^2 - \dots - x_\lambda(q)^2 + x_{\lambda+1}(q)^2 + \dots + x_n(q)^2,$$

où λ est l'indice de p pour f .

Pour la démonstration, nous aurons besoin de cet autre lemme :

Lemme 6.2 Soient V un ouvert convexe de \mathbb{R}^n contenant 0 et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ .

Supposons $g(0) = 0$.

Alors il existe g_1, g_2, \dots, g_n des fonctions de classes C^∞ définies sur V telles que :

$$\forall i = 1 \dots n, g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \text{ et } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

.

Les démonstrations du lemme 6.2 et du lemme de Morse sont largement inspirées de celles proposées par John Milnor dans son ouvrage "Morse Théory",

cependant quelques points sont plus détaillés ici pour faciliter la lecture d'un élève de Master.

Preuve. de lemme 6.2 :

Comme $g(0) = 0$:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{dg(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt.$$

D'où :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{i=n} x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{i=n} x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

où

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

Or g est de classe C^∞ et $[0, 1]$ est compact, donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, g_i est C^∞ pour tout i , $1 \leq i \leq n$. Le résultat suit. ■

Preuve. de lemme de Morse :

On garde les notations de l'énoncé.

1ere étape :

Supposons qu'il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in N$ tels que:

$$\forall q \in U, f(q) = f(p) - x_1(q)^2 - x_2(q)^2 - \dots - x_\lambda(q)^2 + x_{\lambda+1}(q)^2 + \dots + x_n(q)^2.$$

Montrons alors que λ est l'indice de p .

$$f(q) = f(p) - x_1(q)^2 - x_2(q)^2 - \dots - x_\lambda(q)^2 + x_{\lambda+1}(q)^2 + \dots + x_n(q)^2$$

Donc

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(q) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

et donc la Hessienne de f en p est :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

λ est donc l'indice de p .

2eme étape :

Montrons qu'un tel système de coordonnées existe :

En plongeant M dans un espace vectoriel, on peut supposer $p = 0$. De plus, quitte à remplacer f par $f - f(p)$, on peut supposer $f(p) = 0$.

Soit $(U, (x_1, \dots, x_n))$ une carte de M dans un voisinage de 0. D'après le lemme 6.2, comme $f(p) = 0$, on peut fixer (f_1, \dots, f_n) des fonctions lisses définies sur U et telles que :

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} x_i f_i(x_1, \dots, x_n).$$

D'autre part, p est un point critique de f donc :

$$\forall i = 1..n, \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0.$$

D'où

$$\forall i = 1..n, f_i(0) = 0.$$

En réappliquant le lemme 6.2 aux fonctions f_i , on peut déterminer les $g_{i,j}$, des fonctions lisses définies sur U et telles que

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{i,j=0}^{i,j=n} x_i x_j g_{i,j}(x_1, \dots, x_n).$$

Enfin, en posant $h_{i,j} = \frac{1}{2}g_{i,j} + \frac{1}{2}g_{j,i}$, on obtient :

$$\forall x \in U, f(x) = \sum_{i,j=0}^{i,j=n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n), \text{ avec } h_{i,j} = h_{j,i}$$

On notera que la Hessienne de f en 0 est alors:

$$\begin{pmatrix} h_{0,0}(0) & \dots & \dots & \dots & h_{0,n}(0) \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & h_{i,j}(0) & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ h_{n,1}(0) & \dots & \dots & \dots & h_{n,n}(0) \end{pmatrix}$$

On va alors procéder par récurrence sur k pour démontrer que :

$\forall k \in [1, n] \exists (U_k, (y_1, \dots, y_n))$ une carte au voisinage de 0 et $f_{i,j}, i, j = k+1 \dots n$ des fonctions lisses définies sur U_k telles que :

$$\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in U_k, f(y) = \varepsilon_1 y_1^2 + \dots + \varepsilon_k y_k^2 + \sum_{i,j=k+1}^n y_i y_j f_{i,j}(y_1, \dots, y_n),$$

avec $\varepsilon_i = 1$ ou $\varepsilon_i = -1$.

D'après ce qui précède, le résultat est vrai pour $k = 1$.

Supposons alors le résultat vrai pour k fixé et démontrons le résultat pour $k+1$: Par hypothèse, $\exists (U_k, (y_1, \dots, y_n))$ et $f_{i,j}, i, j = k+1 \dots n$ telles que:

$$\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in U_k, f(y) = \varepsilon_1 y_1^2 + \dots + \varepsilon_k y_k^2 + \sum_{i,j=k+1}^n y_i y_j f_{i,j}(y_1, \dots, y_n),$$

avec $\varepsilon_i = 1$ ou $\varepsilon_i = -1$.

De plus, dans ces coordonnées, la Hessienne de f en 0 est :

$$\begin{pmatrix} 2\varepsilon_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & f_{k+1,k+1}(0) & \dots & f_{k+1,n}(0) & \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & f_{n,k+1}(0) & & f_{n,n}(0) \end{pmatrix}$$

Par hypothèse, cette matrice est non dégénérée donc on peut supposer $f_{k+1,k+1}(0) \neq 0$ à changements linéaires près sur les $n - k + 1$ dernières coordonnées.

Posons alors

$$\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in U, g(y_1, \dots, y_n) = \sqrt{|f_{k+1,k+1}(y_1, \dots, y_n)|}$$

g est une fonction lisse qui ne s'annule pas sur $U'_k \subset U_k$ pour U'_k assez petit.

On introduit alors les nouvelles coordonnées (u_1, \dots, u_n) définies comme suit:

$$\begin{cases} u_i = y_i & \text{si } i \neq k+1 \\ u_{k+1} = g(y_1, \dots, y_n) \left(y_{k+1} + \sum_{i=k+2}^n y_i \frac{f_{i,k+1}(y_1, \dots, y_n)}{f_{k+1,k+1}(y_1, \dots, y_n)} \right) & \text{si } i = k+1 \end{cases}$$

définies sur U'_k .

Ces nouvelles coordonnées induisent un changement de carte sur un voisinage de 0 inclus dans U'_k . En effet, elles sont de classes C^∞ et le calcul montre que le Jacobien de l'application $(y_1, \dots, y_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_n)$ est égal à $g(0) \neq 0$.

Par le théorème d'inversion local, il existe U_{k+2} tel que $(U_{k+2}, (u_1, \dots, u_n))$ soit une carte de M .

De plus, dans cette nouvelle carte :

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= \varepsilon_1 u_1^2 + \dots + \varepsilon_k u_k^2 + y_{k+1,k+1}^2 f_{k+1,k+1}(y_1, \dots, y_n) \\ &\quad + 2 \sum_{i=k+2}^n y_{k+1} u_i f_{i,k+1}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{i,j=k+2, i \neq j}^n u_i u_j f_{i,j}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} u_{k+1}^2 &= \varepsilon f_{k+1,k+1}(y_1, \dots, y_n) y_{k+1}^2 + 2 \sum_{i=k+2}^n y_{k+1} u_i f_{i,k+1}(u_1, \dots, u_n) \\ &\quad + \sum_{i=k+2}^n u_i^2 f'_{i,j}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

pour $f'_{i,j}$ convenablement choisies.
 Donc on retrouve l'expression désirée:

$$f(u_1, \dots, u_n) = \varepsilon_1 u_1^2 + \dots + \varepsilon_{k+1} u_{k+1}^2 + \sum_{i,j=k+2}^n u_i u_j f'_{i,j}(u_1, \dots, u_n)$$

On a donc exhibé une nouvelle carte qui détermine l'expression recherchée pour f .

Ceci clos la démonstration de l'hérédité de l'hypothèse et donc la démonstration. ■

En effet, au rang n , on obtient le résultat recherché.

Grâce au lemme de Morse, on peut connaître le comportement local d'une surface au voisinage de ses points critiques.

Nous allons démontrer l'existence d'une fonction lisse dont tous les points critiques sont non dégénérés, le choix des valeurs critiques distinctes sera expliqué dans une section suivante. on a besoin du lemme suivant.

Lemme 6.3 (lemme de Sard)

Si M_1 et M_2 sont deux variétés différentiables de même dimension au plus dénombrable, et si $g : M_1 \rightarrow M_2$ est de classe C^1 , alors l'image par g de l'ensemble de ses points critiques est de mesure nulle.

Corollaire 6.4 L'ensemble des points focaux de M est de mesure nulle.

Preuve.

On considère $E : N \rightarrow \mathbb{R}^3$, E est de classe C^1 et N est de dimension 3. D'après le théorème de Sard, l'ensemble des points critiques de E est de mesure nulle, d'où le résultat.

Nous allons maintenant démontrer que si p n'est pas un point focal de M , alors la fonction $L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $L_p(q) = \|\vec{pq}\|^2$ n'a pas de point critique dégénéré. ■

Définition. (1ère et 2ème de formes fondamentales)

Soit q un point de M et soit P un paramétrage de M dans un voisinage de q . La première forme fondamentale de M en q , relativement au paramétrage P est la restriction du produit scalaire canonique au plan tangent à M en q . Cette forme bilinéaire est définie par la matrice :

$$G(q) := [g_{i,j}], \text{ où } g_{i,j} = \left\langle \frac{\partial P}{\partial x_i}, \frac{\partial P}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Soit v un vecteur normal à M en q . La seconde forme fondamentale est la forme bilinéaire définie par la matrice :

$$H(q) := [h_{i,j}], \text{ où } h_{i,j} = \left\langle \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j}, v \right\rangle$$

Elle représente le comportement de M par rapport à TqM au voisinage de q , à l'ordre 2.

Quitte à changer de paramétrage en q , on peut supposer que $G(q)$ est la matrice identité. Alors les valeurs propres de $H(q)$ sont les courbures principales de M en q . Leurs inverses, s'ils sont définis, sont les rayons de courbure principaux en q .

Soit v un vecteur normal à M en q et posons $l = \{q + tv, t \in \mathbb{R}\}$.

Lemme 6.5 Les points focaux de (M, q) sur l sont exactement les points : $q + r_i^{-1}v$, où les r_i sont les rayons de courbure principaux de M en q .

Preuve.

On garde les notations précédentes, en notant $v(x, y)$ le vecteur normal unitaire défini dans un voisinage de q de manière continue et tel que $v(0, 0) = v$.

Pour tout (m, v) proches de (q, v) appartenant à N , on peut fixer $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$

tel que $(m, v) = (P(x, y), tv)$. Alors (x, y, t) définit un système de coordonnées locales sur N . Dans ce système, $E(x, y, t) = P(x, y) + tv$. Donc la matrice Jacobienne de E en (x, y, t) dans la base $(\partial_x P(x, y), \partial_y P(x, y), v(x, y))$ est la matrice suivante, où les vecteurs sont évalués en (x, y) :

$$\begin{bmatrix} \langle \partial_x P, \partial_x P \rangle + t \langle \partial_x v, \partial_x P \rangle & \langle \partial_y P, \partial_x P \rangle + t \langle \partial_y v, \partial_x P \rangle & 0 \\ \langle \partial_x P, \partial_y P \rangle + t \langle \partial_x v, \partial_y P \rangle & \langle \partial_y P, \partial_y P \rangle + t \langle \partial_y v, \partial_y P \rangle & 0 \\ t \langle \partial_x v, v \rangle & t \langle \partial_y v, v \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

Car

$$\langle \partial_x P(x, y), v(x, y) \rangle = \langle \partial_y P(x, y), v(x, y) \rangle = 0$$

De plus, en dérivant cette relation selon x on obtient:

$$\langle \partial_x v(x, y), \partial_x P(x, y) \rangle = - \langle v(x, y), \partial_x^2 P(x, y) \rangle$$

En procédant de même par rapport à y et en considérant un paramétrage tel que G soit l'identité en $P(x, y)$, on obtient:

$$\begin{bmatrix} 1 - t \langle v(x, y), \partial_x^2 P(x, y) \rangle & -t \langle v(x, y), \partial_{x,y}^2 P(x, y) \rangle & 0 \\ -t \langle v(x, y), \partial_{x,y}^2 P(x, y) \rangle & 1 - t \langle v(x, y), \partial_y^2 P(x, y) \rangle & 0 \\ t \langle \partial_x v(x, y), v(x, y) \rangle & t \langle \partial_y v(x, y), v(x, y) \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $(P(x, y), tv(x, y))$ est un point focal de M si et seulement si le \ker de la matrice $Id - tH(x, y)$ n'est pas réduit à zéro. C'est à dire si t^{-1} est valeur propre de $H(x, y)$. D'où le résultat par définition des rayons de courbures principaux. ■

Remarque.

La démonstration prouve également que la multiplicité d'un point focal de M est la multiplicité de la courbure principale correspondante. De plus, il y a au plus 2 points focaux pour (M, q) le long de l .

Lemme 6.6 Le point q de M est un point critique dégénéré de L_p si et seulement si p est un point focal de (M, q) .

Preuve.

Posons $f = L_p$ et $q = P(x, y)$. f est une fonction lisse sur M et $f(q) = \|\vec{pq}\|^2$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \left\langle \frac{\partial P(x, y)}{\partial x}, \vec{pq} \right\rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \left\langle \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \vec{pq} \right\rangle.$$

Donc q est un point critique de f si et seulement si \vec{pq} est normal à M en q .

De plus, la Hessienne de f en un point critique q dans la base $(\partial_x P(x, y), \partial_y P(x, y))$ est :

$$\begin{bmatrix} 2(\langle \partial_x P, \partial_x P \rangle + \langle \partial_x^2 P, \vec{pq} \rangle) & 2(\langle \partial_x P, \partial_y P \rangle + \langle \partial_{x,y}^2 P, \vec{pq} \rangle) \\ 2(\langle \partial_y P, \partial_x P \rangle + \langle \partial_{x,y}^2 P, \vec{pq} \rangle) & 2(\langle \partial_y P, \partial_y P \rangle + \langle \partial_y^2 P, \vec{pq} \rangle) \end{bmatrix}$$

où $\partial_x P$ et $\partial_y P$ sont évalués en.

En posant $p = P(x, y) + tv(x, y)$, on obtient la matrice $2(Id - tH(x, y))$.

D'où le résultat d'après le lemme 6.5.

On obtient alors le théorème : ■

Théorème 6.7 (existence de fonctions de Morse)

Pour presque tout $p \in M$, la fonction L_p est une fonction lisse sans point critique dégénéré.

Preuve.

D'après le corollaire 6.4 du lemme de Sard et le lemme précédent, le résultat est immédiat.

Nous verrons par la suite comment distinguer les valeurs critiques d'une telle fonction. ■

6.1 caractéristiques d'une fonction de Morse :

Soit f une fonction de Morse. Ses points critiques sont alors isolés et en nombre fini. En effet, d'après le lemme de Morse, on peut décrire le comportement de f sur un voisinage des points critiques. L'écriture de f sur ces voisinages (du type $f = -x_1^2 + \dots + x_n^2$) prouve que sa différentielle ne s'annule qu'au point critique considéré. M étant compacte, si f admettait une suite de points critiques distincts, on pourrait en extraire une suite qui convergerait vers un point critique. Celui-ci ne serait pas isolé, ce qui est absurde. f admet donc un nombre fini de points critiques distincts et isolés.

Une fonction de Morse ordonnée est une fonction de Morse dont les valeurs critiques sont fonction croissante de l'indice des points critiques. C'est à dire que les valeurs critiques d'indice 0 sont plus petites que celles d'indice 1 et 2. Nous démontrerons plus loin comment obtenir une telle fonction.

6.2 cas particuliers

Dans cette partie, on décrit des voisinages des points critiques qui seront pratiques à utiliser par la suite. M étant de dimension 2, l'indice de ses points critiques ne peut être que 0, 1 ou 2.

Posons alors

$$g_0(X, Y) = X^2 + Y^2,$$

$$g_1(X, Y) = X^2 - Y^2$$

et

$$g_2(X, Y) = -X^2 - Y^2.$$

Soit q un point critique de f . D'après le lemme de morse, il existe un ouvert U de \mathbb{R}^2 contenant 0 et un diéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ tels que :

$$\forall x \in \varphi(U), f(x) = f(q) + g_i(\varphi^{-1}(x)),$$

où i est l'indice de q .

On appellera alors voisinage modèle pour la fonction g_i un tel ouvert $U(\varepsilon)$ centré en 0 et délimité par ε . C'est à dire:

si $i = 0$, $U(\varepsilon)$ est limité par le cercle $g_0 = \varepsilon, U(\varepsilon) = B(0, \sqrt{\varepsilon})$.

si $i = 1$, $U(\varepsilon)$ est limité par $|X^2 - Y^2| \leq \varepsilon$ et $|XY| \leq \varepsilon$. $U(\varepsilon)$ est homéomorphe à un octogone.

si $i = 2$, $U(\varepsilon)$ est limité par le cercle $g_0 = -\varepsilon, U(\varepsilon) = B(0, \sqrt{\varepsilon})$.

Un voisinage canonique de q est la donnée d'une paramétrisation

$$\varphi : U(\varepsilon) \rightarrow M,$$

centrée en q , d'image notée U et telle que

$$\forall (X, Y) \in U(\varepsilon), f(\varphi(X, Y)) = f(q) + g_i(X, Y).$$

6.3 Séparation des valeurs critiques

Par la suite, nous verrons qu'il peut être nécessaire de modifier la valeur critique d'un point critique de f . Les propositions 6.3.1 et 6.3.2 qui suivent expliquent dans quelle mesure on peut faire varier ces valeurs critiques en modifiant f dans un voisinage du point considéré. Leurs démonstrations sont issues du livre d'André Gramain: topologie des surfaces. Les figures 4 et 5 illustrent ces changements de fonctions.

Soit q un point critique de f d'indice i et U un voisinage canonique de q .

Proposition 6.3.1 Supposons $i = 0$ et U délimité par la courbe de niveau $f = a, a \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout $b < a$, il existe g une fonction de Morse coïncidant avec f en dehors de U et telle que q soit le seul point critique de g sur U , de même indice que pour f mais avec $g(q) = b$.

Preuve.

Fixons une fonction lisse ϕ définie sur un voisinage ouvert de $[f(q), a]$ à valeur dans \mathbb{R} et telle que

$$\phi' > 0, \phi(f(q)) = b$$

et

$$\varphi(t) = t \text{ sur un voisinage de } a.$$

Si $\varphi : U(\varepsilon) \rightarrow U$ est une paramétrisation du voisinage canonique, on peut définir la fonction $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$\forall x \in M \quad \begin{array}{ll} g(x) = \phi(f(q) + g_0(\varphi^{-1}(x))) & \text{si } x \in U \\ g(x) = f(x) & \text{si } x \in M \setminus U \end{array}$$

g est une fonction lisse sur M par choix de ϕ . De plus, le seul point critique de g dans U est bien q car ϕ' ne s'annule pas, $g(q) = b$ et g coïncide avec f en dehors de U . ■

Remarque.

Si $i = 2$, on obtient la même proposition avec $g(q) \geq b$ où b est le niveau inférieur de U . La démonstration est immédiate en considérant $-f$.

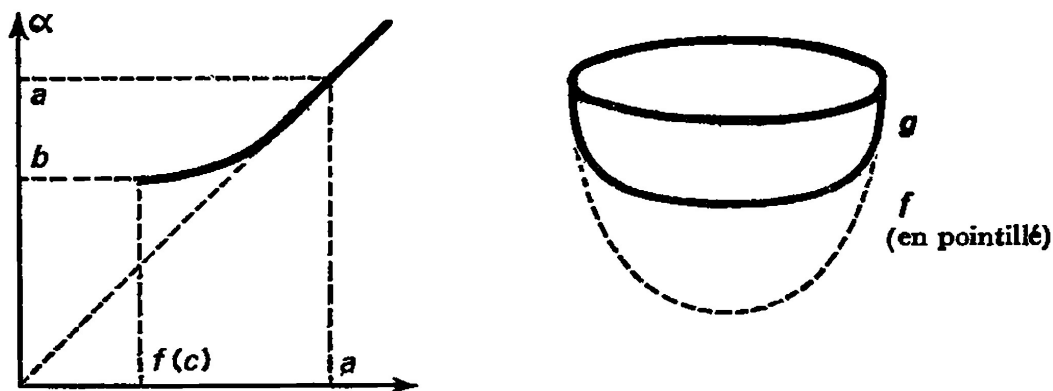


Figure 4 : cas où $i = 0$

Proposition 6.3.2 Supposons $i = 1$ et U délimité par $f = a$ au niveau inférieur et $f = b$ au niveau supérieur.

Alors $\forall d \in]a, b[$,

il existe g une fonction de Morse coïncidant avec f en dehors de U et telle que q soit le seul point critique de g sur U , de même indice que pour f mais avec $g(q) = d$.

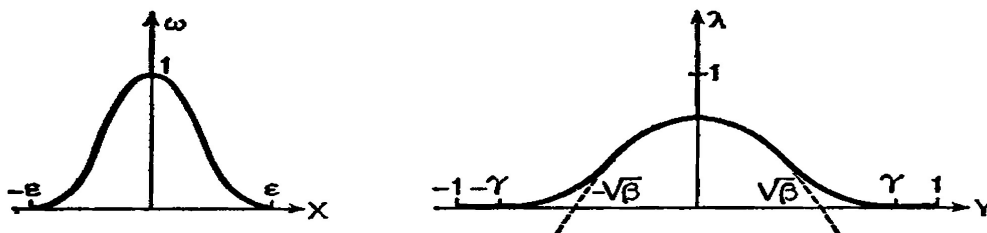


Figure 5 : cas où $i = 1$

Preuve.

On va modifier la fonction $g_1(X, Y) = X^2 - Y^2$ dans un voisinage de q . Quitte à multiplier par un scalaire, on peut supposer que le voisinage modèle de q est $U(1)$. On va alors construire une fonction H définie sur $U(1)$, coïncidant avec g_1 sur le bord de $U(1)$ et telle que $H(0, 0) = -\beta$, pour $\beta \in]0, 1[$.

La démonstration reste analogue si l'on désire réhausser la valeur de $f(q)$, on montre que H existe avec $H(0, 0) = \beta > 0$ en échangeant les variables X et Y .

Soit $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse positive ou nulle et à support dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ telle que

$$\omega(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, x\omega'(x) \leq 0.$$

Soit ensuite $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse positive ou nulle et à support dans $[-\gamma, \gamma]$, avec

$$\gamma \in]\beta, 1[$$

telle que

$$\sigma(0) = \beta$$

et telle que la dérivée σ' vérifie :

$$2y + \sigma'(y) > 0 \text{ si } y > 0 \text{ et } 2y + \sigma'(y) < 0 \text{ si } y < 0.$$

Notez qu'on peut obtenir σ à partir de la fonction $y \mapsto \beta - y^2 + \eta y^2$ en "règlant" η et en lissant cette fonction aux voisinages de ses zéros.

Alors, pour ε et γ assez petits, $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\gamma, \gamma] \subset U(1)$. On pose alors

$$H(X, Y) = X^2 - Y^2 - \sigma(Y)\omega(X).$$

H est une fonction lisse définie sur $U(1)$ et qui coïncide avec g_1 sur un voisinage de la frontière de $U(1)$.

De plus, par construction de ω et σ , $H(0, 0) = -\beta$.

$$\frac{\partial H}{\partial X}(X, Y) = 2X - \omega'(X)\sigma(Y)$$

donc

$$\frac{\partial H}{\partial X}(X, Y) = 0 \text{ si et seulement si } X = 0$$

car

$$\omega'(X) \text{ est d'usage de } -X \text{ pour } X \neq 0.$$

Alors on a

$$\frac{\partial H}{\partial Y}(0, Y) = -2Y - \sigma'(Y) = 0$$

si et seulement si $Y = 0$.

Donc le seul point critique de H est $(0, 0)$.

Pour conclure, on considère g définie sur U par

$$g(x) = f(q) + h(\varphi^{-1}(x))$$

où $\varphi : U(1) \rightarrow U$ est une paramétrisation du voisinage canonique. On prolonge g à M par f et g convient.

Le nombre de points critiques d'une fonction lisse étant fini, on peut

alors modifier cette fonction de telle sorte que toutes les valeurs critiques soient distinctes deux à deux. Ceci clos la démonstration de l'existence d'une fonction de morse.

On rappelle qu'une fonction de Morse ordonnée sur M est une fonction de Morse $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que ses valeurs critiques soient fonction croissante des indices . ■

Théorème 6.3.3 Si M est une variété compacte de dimension 2, elle admet une fonction de Morse ordonnée.

Preuve.

D'après ce qui précède, on peut fixer f une fonction de Morse sur M . M étant compacte, f admet un nombre fini de points critiques. Soit alors a un minorant des valeurs critiques des points d'indices 1 et b un majorant de ces valeurs. D'après la proposition 6.3.1, on peut déterminer une fonction de Morse g sur M qui coïncide avec f en dehors des voisinages des points critiques d'indices 0 et 2 et telle que les valeurs des points critiques d'indices 0 soient inférieures à a , celles d'indices 2 supérieures à b . Une telle fonction convient.

Nous allons alors montrer que la donnée d'une fonction de Morse sur une variété compacte connexe et orientable de l'espace permet une caractérisation de cette dernière. ■

Chapitre 3

Classification des surfaces

Part III

Classification des surfaces

Dans toute la suite de cette section, M désigne une surface compacte, connexe et orientable de dimension 2 et f une fonction de Morse ordonnée sur M .

7 sphères à anses

On notera M_n la sphère à n anses. M_0 est la sphère, M_1 le tore puis on obtient M_n , $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, en enlevant un disque au tore et à M_{n-1} puis en recollant ces derniers le long du bord de ces disques. Ceci fournit une structure topologique de M_n . Nous allons maintenant munir ces espaces d'une structure différentiable.

Pour $M_0 = S^2$, on peut considérer les coordonnées sphériques qui nécessitent deux cartes sur la sphère pour la décrire. Ainsi,

$$\forall (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[, (\theta, \varphi) \rightarrow (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi)$$

et

$$\forall (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[, (\theta, \varphi) \rightarrow (\sin\varphi, \cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta)$$

définissent une structure différentiable sur S^2 . En effet on peut vérifier que ces applications définissent des paramétrages de S^2 .

Pour M_1 le tore, on utilise la même méthode avec deux paramétrages dont :

$$\forall (\theta, \varphi) \in]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[, (\theta, \varphi) \rightarrow ((R+r\cos\varphi)\cos\theta, (R+r\cos\varphi)\sin\theta, r\sin\varphi)$$

qui définit un tore dès que $R > r$.

Enfin pour le cas général, on procède comme pour la définition de la structure topologique, par récurrence, et en utilisant le lemme de recollement.

On va alors démontrer que toute variété différentiable de dimension 2, compacte, connexe et orientable est difféomorphe à l'une des variétés définies précédemment. Notez que ceci démontrera de plus qu'il n'existe qu'une seule structure différentiable sur M_n à difféomorphisme près.

7.1 Franchissement d'une valeur critique

On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}, M^a$ désigne l'ensemble des points de M situés sous la ligne de niveau $f = a$. De plus, on notera cette dernière $V(a)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Nous allons observer le lien entre M^a et M^b s'il existe une valeur critique de f dans $]a, b[$.

Supposons alors que f admette un unique point critique $q \in f^{-1}(]a, b[)$.

Les démonstrations des propositions 7.1.1 et 7.1.2 suivent le schéma des preuves contenues dans l'ouvrage "topologie des surfaces" de M.Gramain. Cependant, elles diffèrent de ces dernières car leur résultat est plus fort. En effet, on obtient ici des difféomorphismes et non pas des homéomorphismes, c'est cette différence qui est expliquée dans la suite.

Proposition 7.1.1 Supposons que l'indice de q soit 0.

Alors M^b est difféomorphe à la réunion disjointe de M^a et d'un disque.

Remarque.

Si q est d'indice 2, on obtient le même résultat et la démonstration est analogue en considérant $-f$.

Preuve.

Soit $U(2\varepsilon)$ un voisinage canonique de q . D'après le théorème 6.7, on peut supposer a et b aussi proche que l'on veut de $f(q)$. Supposons alors

$$a = f(q) - \varepsilon \text{ et } b = f(q) + \varepsilon.$$

D'après la proposition 6.3.2, on peut fixer g une fonction de Morse sur M coïncidant avec f hors de $U(2\varepsilon)$ et telle que

$$g(q) \in]f(q) + \varepsilon, f(q) + 2\varepsilon[.$$

Alors $g^{-1}([a, b])$ est compacte et ne contient aucun point critique. Donc d'après le théorème 1, $g^{-1}(]-\infty, b])$ est difféomorphe à $g^{-1}(]-\infty, a])$. Mais alors $M^b \setminus U(\varepsilon)$ est difféomorphe à M^a par choix de g . Or $U(\varepsilon)$ est difféomorphe à un disque.

D'où le résultat. ■

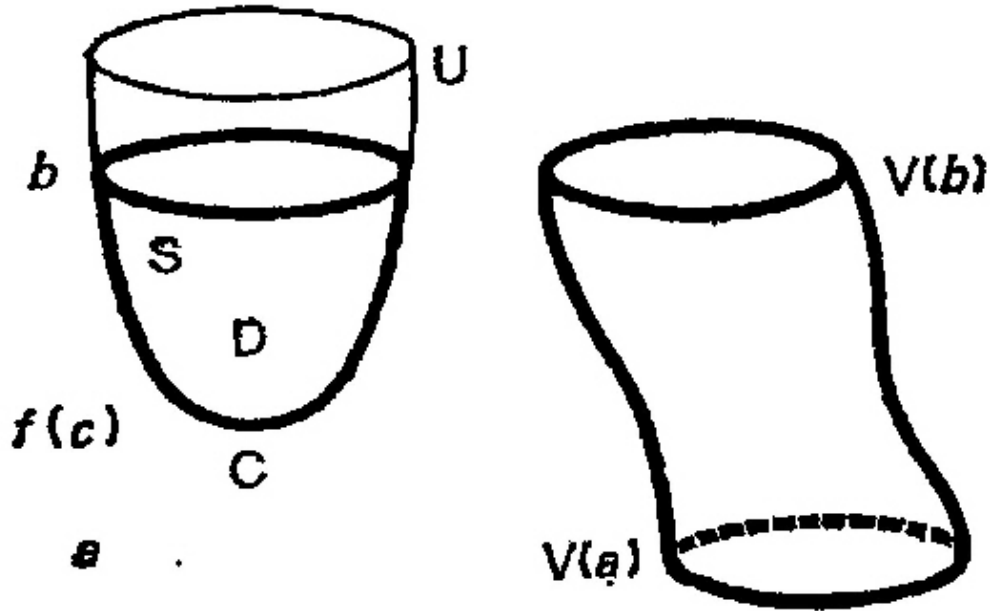


Figure 6 : valeur critique d'indice 0

Proposition 7.1.2 Supposons que l'indice de q soit 1. Alors M^b est difféomorphe à M^a auquel on recolle une bande selon deux segments de $V(a)$.

Preuve.

Trois cas sont envisageables lors du franchissement de q . En effet, d'après le lemme de Morse, il existe des coordonnées locales telles que dans un voisinages de q , la fonction f est du type $X^2 - Y^2$. Alors, soit $V(b)$ a une composante connexe de plus que $V(a)$, soit une de moins, soit le même nombre. Dans le dernier cas, la surface n'est pas orientable. En effet, si le nombre de composantes connexes est le même pour $V(a)$ et $V(b)$, la surface n'est pas orientable en q . On peut comprendre ce problème d'orientation avec la figure suivante. Sur la figure, on observe un champ de vecteurs normaux à M qui définissent une orientation de M en tout point. Pour que la surface soit orientable, ce champ doit être continu. Mais alors cette continuité impose l'annulation du champ en q , la surface n'est pas orientable en q . Nous allons alors démontrer la proposition dans le premier cas, la démonstration étant identique pour le second en considérant $-f$. ■

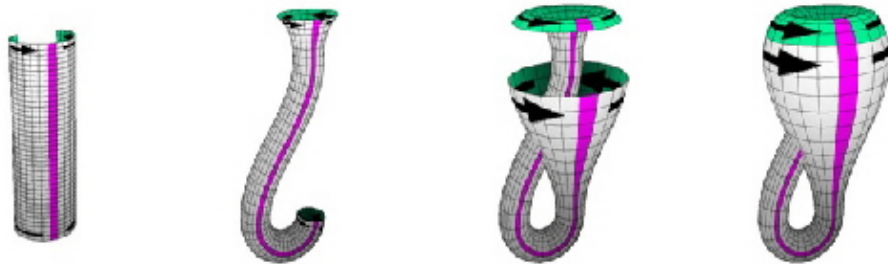


Figure 7: non orientation au voisinage de q

Comme pour la proposition précédente, on peut supposer $a = f(q) - \varepsilon$ et $b = f(q) + \varepsilon$. Posons $W_{a,b} = f^{-1}([a, b])$ et soit $\varphi : U(\varepsilon) \rightarrow M$ un voisinage canonique de q tel que $U := \varphi(U(\varepsilon))$ soit inclus dans $W_{a,b}$, de niveau supérieur b et de niveau inférieur a . Posons $T = \overline{W_{a,b} - U}$.

M^b est le recollement de M^a et de $W_{a,b}$ et $W_{a,b}$ est le recollement de T et de U . Ces recollements conservent la structure différentiable de M .

Nous allons démontrer que T est difféomorphe à deux rectangles et que U se décompose en trois parties P, Q et \mathbb{R} (voir sur la figure suivante). Ensuite, nous verrons que M^a est difféomorphe au recollement de M^a avec T, P et Q . Enfin, M^b sera alors obtenue par recollement de M^a et de la partie \mathbb{R} .

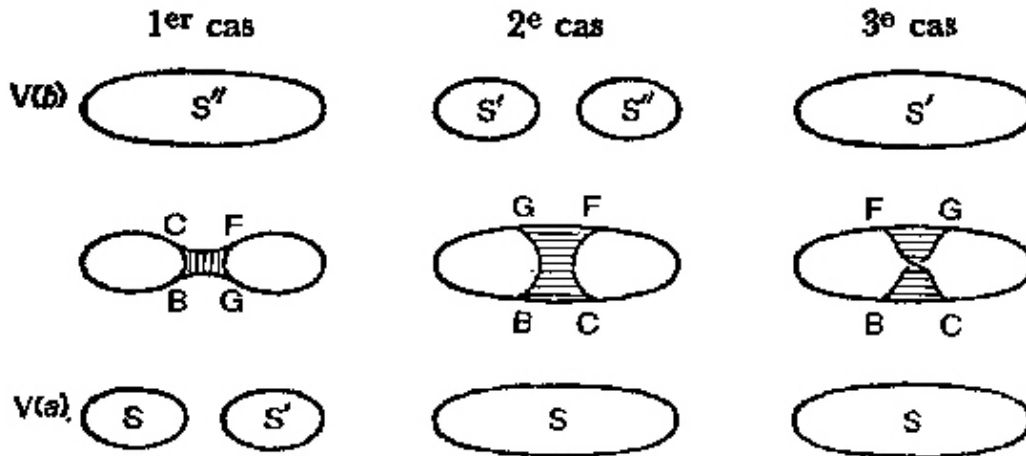


Figure 8: démonstration de la proposition 7.1.2

$U \cap V(a)$ est constitué de deux composantes connexes I et J qui correspondent à $\varphi(\{X^2 - Y^2 = \varepsilon\})$. Posons $K := T \cap V(a) = \overline{V(a)} \setminus (I \cup J)$. Alor T est difféomorphe à $K \times [a, b]$.

Nous allons définir un groupe à un paramètre ψ , engendré par un champ de vecteur sur T transverse aux lignes de niveaux de f et tel que les lignes $\{\psi t(x), t \in [a, b]\}$ pour $x \in K$ restent dans T . Alors $\psi' : K \times [a, b] \rightarrow T$ défini par $\psi'(x, t) = \psi_{t-a}(x)$ sera un difféomorphisme.

Les courbes intégrales du champ de vecteur passant dans T restent dans T si et seulement si les courbes intégrales de ce champ passant par U restent dans U . Soit alors Z le champ de vecteur sur $U(2\varepsilon)$ défini par $Z(x, y) = (x, -y)$. Ce champ est nul en 0, transverse aux lignes de niveaux de f et dirigé dans le sens f croissante. Soit alors Z' le champ de vecteur image de Z par D_φ sur M . Z' a les mêmes propriétés que Z et ces courbes intégrales sont les images par φ des hyperboles $XY = \text{constante}$, celles qui sont issues d'un point de U sont en entier dans U entre a et b .

Soit alors χ une fonction lisse de M vers \mathbb{R} qui soit égale à 1 sur U et à 0 en dehors de $\varphi(U(3/2\varepsilon))$. Soit enfin X_0 un champ de vecteur sur M , transverse aux courbes de niveaux de f , nul aux points critiques de f . Définissons alors X le champ de vecteur sur M tel que :

$$\forall x \in M \quad \begin{cases} X(x) = \chi(x)Z'(x) + (1 - \chi(x))X_0(x) & \text{si } x \in \varphi(U(2\varepsilon)) \\ X(x) = X_0(x) & \text{si } x \in M \setminus \varphi(U(2\varepsilon)) \end{cases}$$

Le champ X ainsi défini est égal à Z' sur U . Ses courbes intégrales passant par U restent dans U entre a et b . De plus M est compacte donc X engendre un unique groupe à un paramètre sur M . Ce dernier convient pour définir ψ' , donc $K \times [a, b]$ est difféomorphe à T .

On considère maintenant $U(\varepsilon)$. Posons P', Q' et \mathbb{R}' les parties de $U(\varepsilon)$ délimitées par $A'B'C'D', E'F'G'H'$ et $D'E'H'A'$ (voir sur la figure 9 page suivante). Posons P, Q et \mathbb{R} leurs images respectives par φ . P' et Q' sont difféomorphes à des rectangles donc P et Q sont difféomorphes à $I \times [a, b]$ et $J \times [a, b]$. On peut alors exhiber un difféomorphisme de $T \cup P \cup Q$ vers $(K \cup I \cup J) \times [a, b] = V(a) \times [a, b]$. En effet, en modifiant le champ de vecteur X sur Q et P , on peut définir un nouveau groupe à un paramètre qui conviendra.

A partir de là, M^a est difféomorphe à $M^b \setminus \mathbb{R}$. Enfin, M^b est obtenu par recollement de M^a et \mathbb{R} , on admettra qu'on peut obtenir ici une structure différentiable, d'où le résultat.

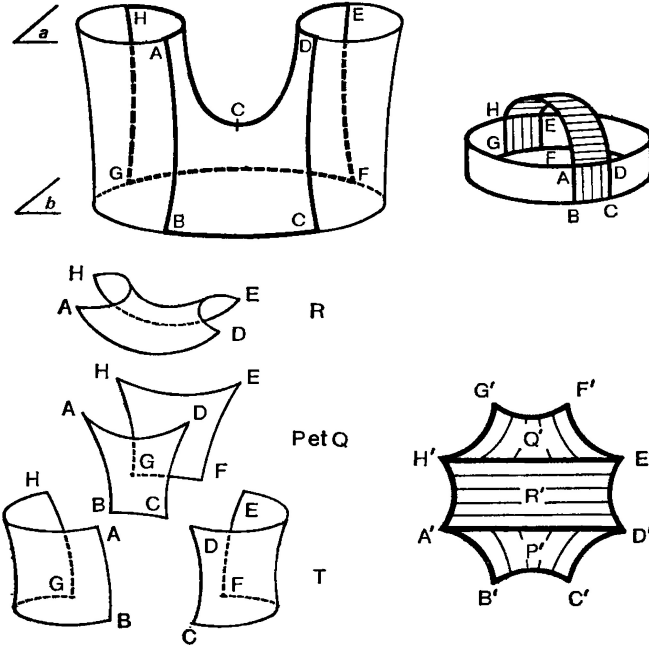


Figure 9: découpage de $U(\varepsilon)$

7.2 simplification de la fonction de Morse

Soit $(b, c) \in \mathbb{R}^2$ tel qu'entre les niveaux b et c la fonction f a exactement deux points critiques q_0 et q_1 d'indice respectif 0 et 1. On dit que q_0 et q_1 sont en bonne position si q_0 a un voisinage canonique U_0 de niveau supérieur $d \in]b, c[$ et q_1 un voisinage canonique U_1 de niveau inférieur d tels qu'il existe une unique composante connexe de $U_1 \cap V(d)$ qui soit incluse dans $U_0 \cap V(d)$ (voir figure 10 page suivante). Dans ce cas, on a la proposition :

Proposition 7.2.1 Si q_0 et q_1 sont en bonne position, alors M^c et M^b sont difféomorphes.

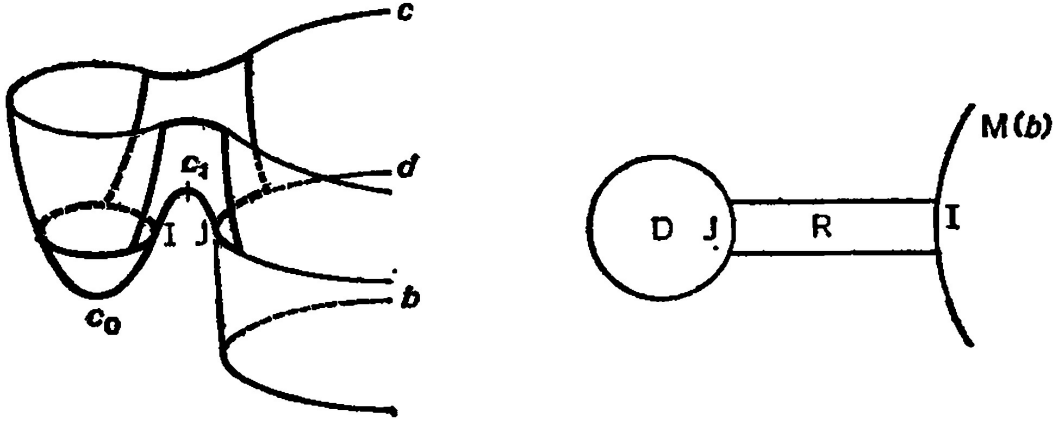


Figure 10: deux points en bonne position

Preuve.

D'après la proposition 7.1.2, M^c est difféomorphe à M^d auquel on a recollé une bande. Nécessairement, le passage du point critique q_1 relie deux composantes connexes de $V(d)$ car il existe une unique composante connexe de $U_1 \cap V(d)$ qui soit incluse dans $U_0 \cap V(d)$. Posons $E := M^d \setminus U_0$, on retire à M^d sa composante connexe contenant le point critique d'indice 0. D'après la proposition 7.1.1, M^d est la réunion disjointe de E et de U_0 . Alors M^c est difféomorphe au recollement de E et d'un disque par une bande et d'après le théorème 6.7, E est difféomorphe à M^b .

Donc M^c est difféomorphe au recollement de M^b et d'un disque par une bande. Montrons alors que nous pouvons "rétracter cette bande dans M^b ".

Tout d'abord, le disque en question est difféomorphe à un carré, donc à un rectangle, quitte à dilater un côté. Nous pouvons alors considérer le recollement d'une bande à M^b selon la partie I incluse dans V_b . On peut supposer que la bande est incluse dans V_b et paramétrée par $P : (x, y) \rightarrow (x, y, h(x, y))$ où P a pour départ un rectangle de \mathbb{R}^2 tel que le côté C soit envoyé sur I . Soit alors U un voisinage de I dans M^b et soit le champ de vecteur X sur M image par DP du champ $(1, 0)$ normal à C sur le rectangle et qui soit nul en dehors de U . Ce champ engendre un unique groupe à un paramètre et grâce à ce dernier, on peut rétracter la bande dans M^b , d'où le résultat.

On va maintenant montrer comment M est obtenue à partir de disques et de rectangles.

Etendons la définition de voisinage canonique en admettant des voisinages modèles pour les points critiques d'indice 1 du type $-r \leq X^2 -$

$Y^2 \leq s$ et $|XY| \leq t$, où $(r, s, t) \in \mathbb{R}^3$. Les propositions qui précèdent restent valables.

Soit a un niveau supérieur à tous les points critiques d'indice 0 et inférieur à ceux d'indice 1, et b un niveau inférieur à tous ceux d'indice 2, supérieur à ceux d'indice 1. Alors M^a est une union disjointe de disques, tous voisinages canoniques d'un point critique d'indice 0, de même que pour $f^{-1}([b, +\infty[)$ avec les points critiques d'indice 2. Ces disques sont bien disjoints si non f admettrait un autre point critique dans l'intersection et son indice ne coïnciderait pas. De même, pour les points critiques d'indice 1, on admettra qu'il existe pour chacun de ces points un voisinage canonique de niveau inférieur a et de niveau supérieur b , ces voisinages étant deux à deux disjoints. De plus, chacun de ces voisinages est un octogone, difféomorphe à un rectangle.

Nous noterons par la suite $U(x)$ le voisinage canonique de x un point critique décrit ci-dessus.

Soient n_0, n_1 et n_2 le nombre respectif de points critiques d'indices 0, 1 et 2. Notez que n_0 et n_2 sont non nuls car f admet un maximum et un minimum.

D'après ce qui précède, M^b est obtenu en recollant n_0 disques disjoints à n_1 bandes. En effet, en partant de M^a , et en franchissant une à une les valeurs critiques d'indice 1 dans l'ordre croissant, d'après la proposition 7.1.2, on recolle une bande à chaque franchissement. De plus, ces recollements sont des difféomorphismes.

On obtient ensuite M en recollant à M^b les disques de $f^{-1}([b, +\infty[)$.

On va alors se ramener au cas d'une fonction n'admettant qu'un seul point critique d'indice 0 et qu'un seul point critique d'indice 2. ■

Proposition 7.2.2 Il existe une fonction de Morse g sur M ayant les mêmes points critiques que f , avec mêmes indices, et admettant deux niveaux c et d tels que:

- i) $M^c := g^{-1}(]-\infty, c])$ contient n_0 points critiques d'indice 0 et $n_0 - 1$ points critiques d'indice 1. De plus, M^c est difféomorphe à un disque.
- ii) $M^d := g^{-1}([d, \infty[)$ contient n_2 points critiques d'indice 2 et $n_2 - 1$ points critiques d'indice 1. De plus, M^d est difféomorphe à un disque.
- iii) $W(c, d) := g^{-1}([c, d])$ contient $n_1 - n_0 - n_2 + 2$ points critiques d'indice 1.

Preuve.

Cette démonstration provient du livre "topologie des surfaces".

Pour démontrer cette proposition, il suffit de démontrer la première assertion

en modifiant f en-dessous de b . Ainsi, en considérant $-f$ en-dessous de c , on obtiendra, en réitérant le procédé, les deux autres assertions.

Si $n_0 = 1$, le résultat est vrai pour $f = g$ et $a = c$. Supposons $n_0 \geq 2$ et

soit p_1 le point critique d'indice 0 de niveau le plus élevé.

M^b est alors le complémentaire dans M de disques disjoints. M étant connexe, M^b l'est nécessairement aussi. Or M^a est lui aussi la réunion de disques disjoints. Donc il existe un point critique q_1 d'indice 1 et un point critique p_2 d'indice 0 tels que le voisinage $U(q_1)$ relie les voisinages $U(p_1)$ et $U(p_2)$. D'après la proposition 6.3.2, quitte à changer f à l'intérieur de $U(p_1)$, on peut supposer que $f(q_1)$ est la plus faible des valeurs critiques d'indice 1. Alors $f^{-1}(]f(p_1), f(q_1)[)$ ne contient pas de point critique et $U(p_1) \cap V(a)$ contient une et une seule composante connexe de $U(q_1) \cap V(a)$.

Les points p_1 et q_1 sont donc en bonne position. Soient alors a' et b' deux niveaux tels que $f(p_1)$ et $f(q_1)$ soient les deux seules valeurs critiques de l'intervalle $]a', b'[$. D'après la proposition 7.2.1, $M^{a'}$ et $M^{b'}$ sont difféomorphes.

L'espace $M^{b'}$ est donc la réunion disjointes de $n_0 - 1$ composantes connexes difféomorphes à des disques. L'une de ces composantes contient p_1, q_1 et p_2 .

Si $n_0 = 2$, la proposition est démontrée.

Si non, on peut alors modifier f dans les $n_0 - 2$ autres composantes de $M^{b'}$ de telle sorte que les valeurs critiques des points correspondants soient plus grandes que $f(q_1)$. En effet, il suffit d'appliquer la proposition 6.3.1 avec les voisinages canoniques de niveaux supérieurs b' .

On réitère alors le procédé de réduction en déterminant p_3 le point critique d'indice 0 de valeur la plus élevée. n_0 étant fini, le processus se termine et le dernier niveau noté b' correspond au niveau c recherché et la fonction g est la fonction f toutes modifications effectuées. ■

8 Le théorème de classification

Théorème 8.1 (classification des surfaces compactes, connexes et orientables):

Soit M une surface compacte, connexe et orientable.

Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que M soit difféomorphe à M_n .

Plus précisément, si f est une fonction de Morse sur M admettant un point critique d'indice 0, un d'indice 2 et m d'indice 1, alors $m = 2n$ et M est difféomorphe à M_n .

Remarque.

Chacune des surfaces M_n est une surface différentiable compacte, connexe et orientable. Le caractère orientable de ces surfaces provient de l'existence d'un champ continu de vecteurs normaux non nuls sur chacune de ces dernières.

Ces surfaces ne sont pas homéomorphes les unes aux autres, de telle sorte qu'on a exhibé toutes les classes d'équivalences à difféomorphismes

près. On admettra ce dernier résultat dont la démonstration repose sur le calcul de l'homologie des M_n .

Preuve.

Soit f une fonction de morse sur M telle que f admette 1 point critique d'indice 0, un d'indice 2 et m d'indice 1. Une telle fonction existe d'après la proposition 7.2.2.

On va alors procéder en plusieurs étapes. Tout d'abord, on va montrer que le nombre de points critiques d'indice 1 est paire. Ensuite, on va ordonner ces points par paires, de telle sorte que chaque paire forme un tore. Puis on obtiendra le résultat.

Premier cas: si $m = 0$, d'après le théorème de Reeb, M est diffeomorphe à M_0 .

Supposons $m \geq 0$. Alors m est paire. En effet, si on pose a et b , $a < b$, deux niveaux séparant les points critiques d'indices 0, 1 et 2, comme f n'admet qu'un point critique d'indice 0, $V(a)$ n'a qu'une composante connexe et il en va de même pour $V(b)$. Or comme on l'a vu précédemment, les points critiques d'indices 1 sont ceux qui change la parité du nombre de composantes connexes des niveaux. Donc entre a et b , il y a un nombre paire de points critiques d'indice 1, d'où m est pair.

Posons alors $m = 2n$.

Nécessairement, pour la même raison, il y a autant de points critiques d'indice 1 séparant les composantes connexes que reliant deux de ces dernières. Alors, quitte à changer leurs valeurs critiques en utilisant la proposition 6.3.2, on peut supposer que ces dernières sont ordonnées de telle sorte que les points critiques sont classés par paire de points, le plus bas séparant et le plus haut reliant les composantes connexes des niveaux correspondants. Suite à ces modifications, nous allons démontrer le résultat par récurrence sur n .

Supposons $n = 1$ et montrons que M est diffeomorphe au tore.

Soit d un niveau situé entre les valeurs critiques des deux points d'indice 1.

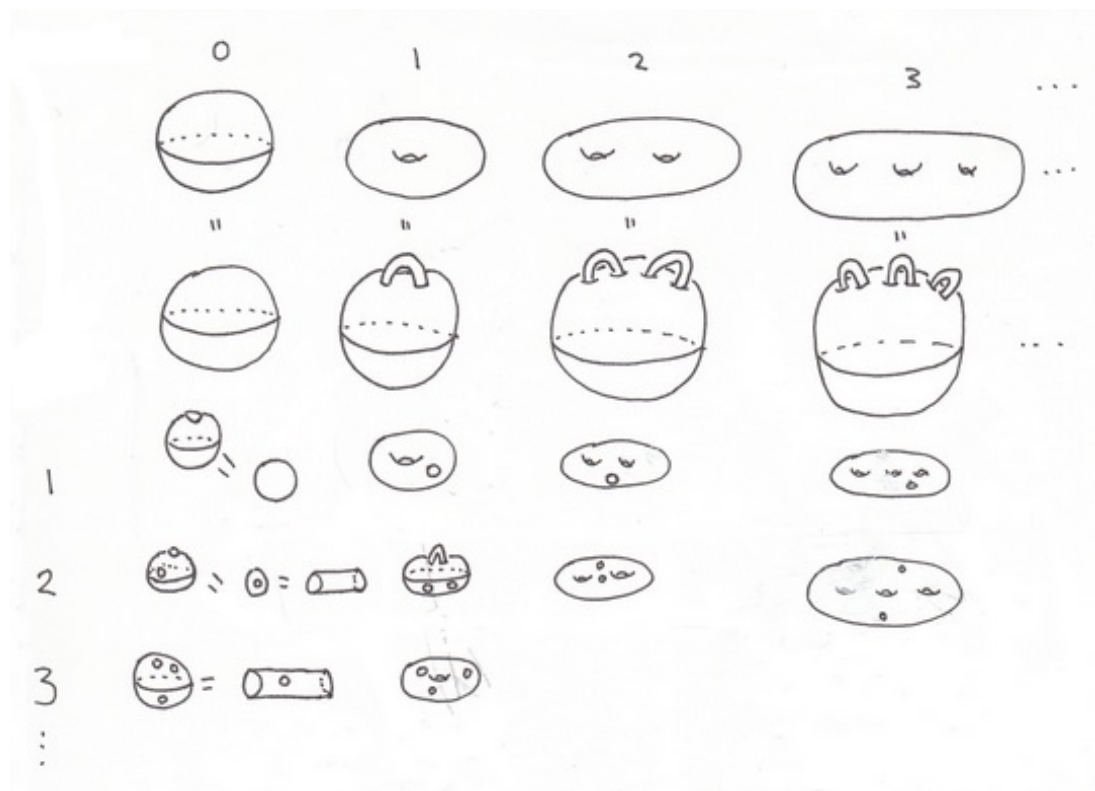
D'après la proposition 7.1.2, M^d est diffeomorphe au recollement d'une bande sur un disque selon deux arcs de ce dernier. Donc M^d est diffeomorphe à la moitié d'un tore, comme illustré sur la figure suivante. De même, $f^{-1}([d, +\infty[)$ est elle aussi diffeomorphe à un demi-tore. Donc M est diffeomorphe au recollement de ces derniers selon des cercles, en respectant l'orientation car M est orientable. Ce recollement respecte la structure différentiable de M d'après le lemme de recollement.

Supposons le résultat vrai au rang $r \geq 1$ et montrons que si $n = r + 1$, alors M est diffeomorphe à M_{r+1} .

Soit d un niveau supérieur à la deuxième valeur critique d'indice 1 et inférieur à la troisième, celles-ci étant classées comme précédemment.

Alors comme pour le cas $n = 1$, M^d est difféomorphe à un tore privé d'un disque. De même, par hypothèse de récurrence, $f^{-1}([d, +\infty[)$ est difféomorphe à M_r privé d'un disque. Donc M est difféomorphe au recollement de ces deux parties selon un cercle, ce qui donne M_{r+1} , on utilise à nouveau le lemme de recollement. Ceci achève la démonstration de la récurrence et donc la preuve du théorème. ■

8.1 exemples



Bibliographie.

- [1] J. Milnor, Morse Theory, Princeton University Press, 1968.
 - [2] Jacques Lafontaine, Introduction aux variétés différentiables, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
 - [3] Yukio Matsumoto, An Introduction to Morse Theory, American Mathematical Society, 2000.
 - [4] Antoine Derighetti, Cours d'Analyse IV, EPFL, 2004.
 - [5] A. A. Agrachev and Y. L. Sachkov. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Springer-Verlag, 2004.
 - [6] W. Boothby. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Academic Press, 1986.
 - [7] F. Jean. Systèmes dynamiques. Stabilité et commande. Cours AO102, ENSTA.
 - [8] V. Jurdjevic. Geometric Control Theory. Cambridge University Press, 1997.
 - [9] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, Inc., second edition, 1979.
 - [10] Y. Talpaert. Geo Diff. Cépaduès-Editions, 1993.
 - [11] Frédéric Jean, AOT 13 Géométrie Différentielle et Application au Contrôle Géométrique, Notes de cours, édition 2011/2012.
 - [12] Carl Tipler, introduction à la théorie de Morse, le théorème de Reeb et la classification des surfaces, Juin 18, 2007.
- site internet :
- wikipedia.fr