République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherchescientifique"

N Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Modélisation financière en temps discret

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité :Analyse Stochastique,Statistiques des processus et Application

par

Ouaref Aicha[1]

Sous la direction de

Mlle F. Benziadi

Soutenue le 29 Mai 2016 devant le jury composé de

F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
F. Benziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
T. Guendouzi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
A. Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

[1]e-mail : ouaref.aicha02@gmail.com

Remerciements

Avant tout, nous remercions Dieu, le tout puissant et le miséricordieux pour la volonté et la patience qu'il nous a attribué. Qu'il soit loué pour l'aide qu'il nous a fournie afin d'achever nos études et pour nous avoir guidé dans le droit chemin dans notre vie.

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à mon encadreur M^{elle}. **F. B**enziadi de nous avoir aidé à réaliser ce modeste travail.*

Tout l'encadrements de département de mathématiques qui nous ont recueillie toute l'année.

Tout ceux qui ont contribué de loin ou de prés à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

* *Mon père et ma mère qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.*
* *Mes grands parents , que mon Dieu les préserve.*
* *Mes frères : Abde-Allah, Ahmed, Nasro, abed-Elkader, bilal, Hamid, Yahya, Mohamed, abde-Elnour, Khalil, walid.*
* *Mes soeurs : Hadjira, Khaoula, Zahra, Rouya, Hafsa, Nada, Rekaya, Amina, Houriya, Fatna, Fouzia, bouhana, Fatima, Nadiya, Nabila, Imene, Fatima, Nour-Elhouda, Hind.*
* *Mes oncles et mes tantes, tous mes cousins et cousines.*
* *Tous mes amis : Zahra, D.Khadidja, Saadiya, Fatiha, H.Khadidja, M.Fatiha, Ikram, Imene, Kawtar. Mokhtaria, Djihad, Halima, jamila, Maghniya.*
* *Tous mes enseignants de département de mathématique et informatique.*
* *Tous mes camarades de promotion 2015 /2016, chacun à son nom.*

Table des matières

Résumé **6**

Introduction **7**

1 Petit dictionnaire financier **10**

1.1 Introduction aux mathématiques financières 10

1.1.1 Les intérêts 10

1.1.2 Les annuités 12

1.1.3 Les emprunts indivis 12

1.1.4 Les emprunts obligataires 13

1.1.5 Capitalisation et Actualisation 13

1.2 La structure du marché financier et les instruments de base 13

1.2.1 Généralisation pour les marchés financiers 14

1.2.2 Les instruments financiers échangés sur le marché financier 17

2 Calcul stochastique au temps discret **25**

2.1 Espérance conditionnelle 25

2.1.1 Une approche géométrique 25

2.2 Martingales à temps discret 26

2.2.1 Introduction à la notion des martingales 26

2.2.2 Premières propriétés 28

2.2.3 Exemples de martingales 28

2.2.4 Martingales de carré intégrables 29

2.2.5 Transformée de martingale 29

2.2.6 Convergence des martingales 30

2.2.7 Processus gaussien 31
2.2.8 loi normale 31
2.2.9 Loi des grands nombres 33
2.2.10 Théorème central-limite (TCL) 33

3 Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein 35
3.0.11 Description du modèle 35
3.1 Strategie de gestion d'un portefeuille 36
3.1.1 Le principe de diversification : 36
3.1.2 Stratégie autofinancée 37
3.1.3 Stratégie admissible et arbitrage 38
3.2 Modèle binomial à une période 39
3.2.1 Modélisation probabiliste du marché 40
3.2.2 probabilité risque neutre 41
3.3 modèle binomial à deux périodes 44
3.3.1 modélisation probabiliste de marché 44
3.4 modèle binomial à 3 périodes 45
3.4.1 modélisation probabiliste de marché 46
3.5 Les trajectoires dans le modèle de CCR 49
3.6 Modèle binomial à N période 50
3.6.1 Stratégie de couverture 52
3.7 Marchés viables et marchés complets 56
3.7.1 Notion de marché viable 56
3.7.2 Simulation des options dans un marché viable 58
3.7.3 Notion de marché complet 59
3.7.4 Relation de parité Call-Put pour les européennes 62
3.7.5 Application à la valeur d'un portefeuille 63

4 Exemples d'applications 65

Conclusion 70

Bibliographie 71

Résumé

Le but de cet mémoire est d'introduire le formalisme mathématique de la modélisation financière en temps discret en utilisant le langage rigoureux de la théorie du calcul stochastique.

Plus précisement, on ne donner les valeurs d'un call et d'un put, d'une option européenne en appliquant le modèle de Cox Ross et Rubinstien.

Introduction

La finance recouvre un domaine d'activité, celui du financement qui consiste à fournir l'argent nécessaire à la réalisation d'une opération économique. Ce domaine concerne aussi bien les individus, les ménages que les entreprises publiques ou privées, mais aussi les États. La recherche de financement obéit à deux types d'objectifs suivant le volume initial de capital, premièrement à niveau de capital restreint, on cherche à obtenir des capitaux nécessaires et suffisants pour entreprendre, maintenir ou développer une activité, et deuxièment à niveau de capital avéré. l'objectif de deux types est de trouver les placements les plus pertinents en performance et en sécurité en fonction de la valeur temps de l'argent.

À ce financement, la matière première constituant le socle de toute structure financière doit obéir à des règles et évoluer dans un environnement adéquat et encadré communément appelé marché financier.

De manière directe, le marché financier est un segment du marché des capitaux qui organise la rencontre directe entre les agents économiques ayant des excédents de capitaux avec ceux ayant des besoins de capitaux afin de financer leur investissement, l'expansion de leur activité ou leur déficit. Un tel besoin de financement peut provenir d'entreprises ou même d'organismes publics. On parle alors de financement direct et de ce fait le marché financier est un marché de l'épargne longue.

Aujourd'hui, les ingénieur des départements de recherche et développement des institutions financières manipulent au quotidien une large palette d'outils des mathématiques appliquées. Il consistent de faire une modélisation des taux d'intérêt et l'évolution des actifs financiers appelée modélisation stochastique en finance , qui nous a poussé a introduire la notion d'opportunité d'arbitrage. Cette modélisation a été étudier en deux cas, l'un c'est le cas continu (modèle de BS) et l'autre c'est le cas discret (modèle binomial) pour la dynamique de sous-jacent.

Dans notre cadre de travail on s'interesse au deuxième cas. Plus précisement, ce modèle fait suite à un modèle introduit en 1971 indépendement par Black et Scholes, et Merton, fondè sur une approche stochastique en temps continu. Le premier modèle de ce type remonte en fait à Louis Bachelier, dans sa thèse (1900), à laquelle Black et Scholes rendent hommage. On peut penser que c'est la sociologie des mathématiques qui explique la pause 1900-1971 de publication sur ce sujet. L'idée de l'approche discrete revient, selon les écrits de Cox et Rubinstein, à W. Sharpe, prix Nobel d'économie et auteur du fameux Capital Asset Pricing Model (1964).

En finance le modèle binomial (ou modèle de CRR du noms des ses auteurs) fournit une méthode numérique pour valoriser les options. Il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein en 1979 tel que l'évaluation de l'option est calculée par application de la probabilité risque-neutre pour laquelle les prix actualisés sont des martingales. La méthode binomial est trés largement utilisée car elle est capable de prendre en compte un nombre important de conditions pour les quelles l'application d'autres modèles n'est pas aisée. Cela vient en grande partie du fait que la méthode binomial prend en compte les variations de l'actif sous-jacent.

La méthode binomiale utilise un " cadre à temps discret " pour retracer l'évolution de l'actif sous-jacent, via un arbre, pour un nombre donné de " pas " qui correspond au temps entre la date d'évaluation et celle de l'éxpiration de l'option.

Pour mieux illustré la dynamique de ce modèle qui constitue l'objet essentiel de ce tavail on va structuré en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons tout d' abord un dictionnaire plus ou moins exhaustif des principales notions de la finance.

Dans des deuxième chapitre, on se propose de présenter la théorie de calcul stochastique, cela vient de donner des définitions pour les principaux outils mathématiques appliquées à la finance pour cette théorie.
Donc il s'agit de présenter de façon synthétique les principaux éléments de la théorie des martingales puisque cette dernière est très importante dans l'évaluation des actifs dérivés car elle occupe une place cruelle dans la notion d'arbitrage. Les martingales sont des variables aléatoires dont les variations futures sont imprévisibles avec l'information disponible en date présente c'est-à-dire la meilleure estimation que l'on peut faire de la valeur future d'une martingale est sa valeur actuelle. Ainsi que les processus prévisibles, les temps d'arrêts et quelques inégalités concernant ces notions pour aller vers l'analyse numérique de cet modèle.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons à la présentaion du modèle de Cox, Ross et Rubinstein (CCR) sous une forme trés large avec différentes périodes (une période, deux priodes, trois périodes, n périodes), cela se passe par une capitalisation des taux d'intrêts ainsi que la notion de strategie de portefeuille et l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage qui montre l'existance d'une unique mesure appelée probabilité risque neutre pour que le marché soit viable et complet, cette mesure est équivalente à la probabilité historique tels que la valorisation des actifs financiers (actifs de base et actifs dérivés) sous cette probabilité sont des martingales. La dernière partie se repose à traiter l'évaluation des options sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et à l'aide des foctions qui s'appèllent à la fois les " pay-off " qui donne la valeur d'un produit dérivé à son échéance en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.

Enfin, on présente quelques exemples d'applications de notre modèle.

Chapitre 1

Petit dictionnaire financier

Le système financier est l'ensemble des marchés et intermediaires qui sont utilisés par les ménages, les entreprises et les états pour mener à bien leurs décisions financières.

1.1 Introduction aux mathématiques financières

On regroupe sous l'appellation de mathématiques financière l'ensemble des techniques mathématiques permettant de traiter des phénomènes régissant les marchés financiers, tel que les calculs relatifs aux taux d'intérêt, les annuités, les emprunts..., mais ainsi la modélisation mathématique du comportement aléatoire des marchés financiers.

1.1.1 Les intérêts

Définition

l'intérêt (the interest rates) peut être définit comme la rémunération d'un prêt d'argent. C'est le prix à payer par " l'emprunteur " au " prêteur ", pour rémunérer le service rendu par la mise à disposition d'une somme d'argent appelé " capital " pendant une période de temps, trois facteurs essentiels déterminent le coût de l'intérêt :

1. la somme prêtée noté C_0.
2. la durée du prêt notée n.

3. le taux auquel cette somme est prêtée noté t ou i.

Remarque 1.1.1 *Il y a deux types d'intérêt :*
- *L'intérêt simple.*
- *L'intérêt composé.*

L'intérêt simple (the simple interest) :

Considérons un capitale C_0 placé aux taux t pendant une période déterminée n. Le montant des intérêts C_n au bout de cette période est donné par :

$$C_n = C_0 * t * n$$

Remarque 1.1.2 *L'intérêt simple concerne essentiellement les opérations à court terme (inférieures à un an).*

Exemples 1.1.1 *Une personne décide de placer 750 euro sur un compte qui rapporte* 6% *par an. Quel est le montant des intérêts touchés au bout de deux ans de placement ?*

Solution de l'exemple : d'aprés les données on a :

$$\begin{cases} C_0 & = 750 \text{ euro} \\ t & = 0{,}06 \\ n & = 2 \end{cases}$$

Alors on a : $\quad C_n = C_0 * t * n \quad \Leftrightarrow C_n = 750 \times 0,06 \times 2 = 90$ euro.

L'intérêt composé (the compound interest) :

un capitale est placé à intérêt composé lorsque le montant des intérêts produits à la fin de chaque période de placement s'ajoute au capital placé pour devenir productif d'intérêts de la période suivante.
La valeur acquise C_n par le capital initial C_0 au bout de n périodes de placement est égale :

$$C_n = C_0(1+t)^n \quad \text{(t c'est le taux d'intérêts sur une période.)}$$

Remarque 1.1.3 *L'intérêt composé est généralement appliqué lorsque la durée de placement dépasse un an.*

Exemples 1.1.2 *Un capital de 5000 euro est placé à intérêts composés au taux annuel de 4% pendant 5 ans.*
Quelle est la valeur du capital aprés cette dernière période ?

Solution de l'exemple :
D'aprés les données, la valeur du capital est :

$$C_5 = C_0(1+t)^n = 5000 \times (1,04)^5 = 6083,26 \text{ euro}.$$

1.1.2 Les annuités

Définition

On appelle annuités (annuities) une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux. Le terme " annuité" est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme "annuité" par " semestrialité ", " trimestrialité " ou " mensualité ".

Remarque 1.1.4 *:*
1) Les annuités peuvent être perçues ou versées au début d'une période ou à la fin d'une période.
2) Les annuités sont certaines si la période est constante, c'est-à-dire si le temps qui sépare deux versements est toujours le même et dans le cas contraire, la suite d'annuités est aléatoire.

1.1.3 Les emprunts indivis

Définition

On appelle emprunt indivis, un contrat d'emprunt entre un et un seul prêteur et un et un seul emprunteur.

1.1.4 Les emprunts obligataires

Définition

*Lorsque le montant de l'emprunt est trés élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés "**obligataires**" ou "**souscripteurs**". Dans ce cas on appelle ce type de contrat "**un emprunt obligataire**".*

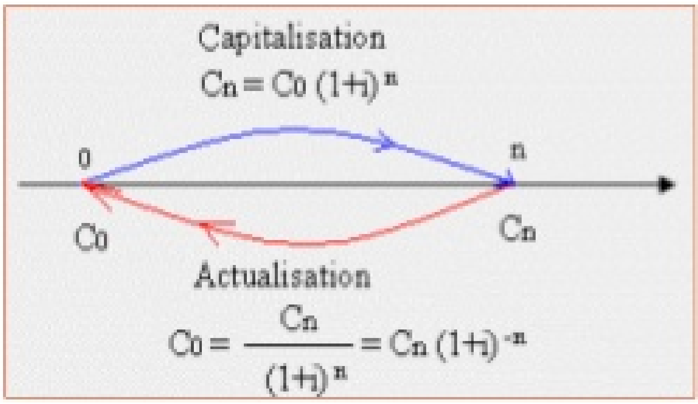
1.1.5 Capitalisation et Actualisation

Capitalisation (the capitalization) :

la capitalisation est le calcul de la valeur future par rapport à la valeur présente d'un montant d'argent.

Actualisation (the update) :

L'actualisation est le processus inverse de la capitalisation c'est-à-dire c'est la mesure de la valeur actuelle d'une somme d'argent dans le futur.

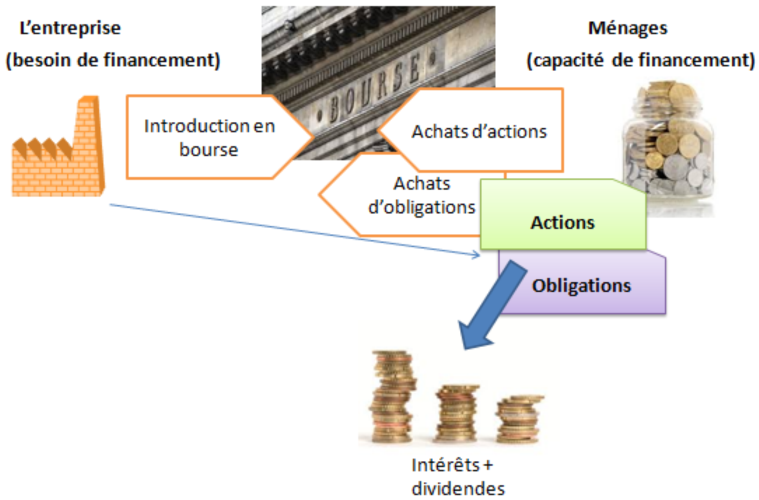


1.2 La structure du marché financier et les instruments de base

Dans la mesure où certains agents économiques investissent plus qu'il n'investissent et qu'il ont une capacité de financement à mettre à la disposition de ceux qui ont besoin, *il est nécessaire que s'organisent les transferts des uns vers les autres. Ces transferts s'opèrent par l'intermediaire du système financier en général qui comprend à la fois le marché financier et les institutions financières.*

1.2.1 Généralisation pour les marchés financiers

Economiquement, un marché financier est un mécanisme qui permet aux individus de négocier des titres (des actions ou des obligations, ...) mais aussi des matières premières (des métaux précieux, des produits agricoles, ...) et d'autres biens de valeur facilement échangeables. Ces transactions peuvent intervenir pour des coûts de transaction faibles et à des prix qui traduisent toutes les informations disponibles et les perspectives d'avenir.



Définition d'un marché financier :

Le marché financier (the financial market) est le lieu privilégié de confrontation entre l'offre et la demande des capitaux financier à moyen et à long terme, ces titres font l'objet de transaction au sein de la bourse ou en dehors de celle-ci.

Vocabulaire de marchés financiers :

Pour q'un marché financier contient une forme lourd, il est nécessaire d'existe certaines arguments. Donc il s'agit de :

- *Un titre financier est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.*
- *Un marché financier est un lieu où l'on achète et vend des titres financiers.*
- *La valeur d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs.*
- *Le prix d'un titre est un montant convenu entre deux parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse ce montant.*

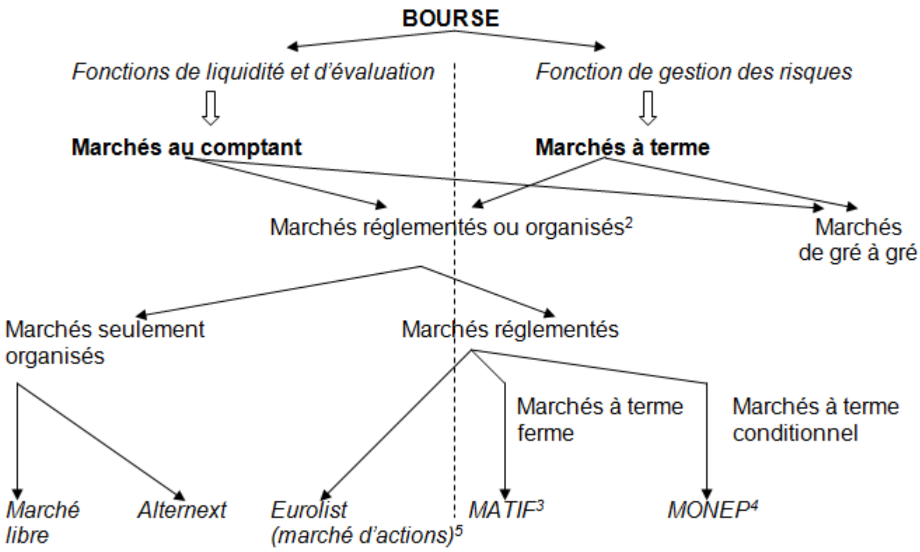
Les rôles des marchés financiers :

Le marché financier constitue un circuit spécialisé de financement de l'économie sur lequel s'opèrent les transactions de capitaux à long terme :

1. *Les marchés financiers jouent le double rôle d'être à la fois un lieu de financement et un lieu de placement.*
2. *Les marchés financiers permettent une allocation efficace des ressources dans le temps et dans l'espace : les entreprises y trouvent le financement nécessaire à leur expansion, l'état y finance le déficit et les investisseurs y trouvent des opportunités de placement.*
3. *Les marchés financiers permettent également l'allocation et la gestion des risques. La cession sur le marché d'une partie des actions composant le capital d'une entreprise permet de transférer le risque vers d'autres actionnaires sans accroître le risque total de l'entreprise.*
4. *Les marchés financiers permettent aux investisseurs de diversifier leurs engagements et donc leurs risques sans entamer leur espérance de rentabilité.*
5. *Les marchés financiers organisés assurent la liquidité des investissements.*
6. *Les marchés financiers jouent un rôle prépondérant dans la diffusion d'informations.*

Les types des marchés financiers :

Ce graphe donne la relation entre les marchés financiers :



Qlassification des marchés financiers selon la liquidité

La liquidité d'un marché ou d'un actif de marché peut être caractérisée par le fait que les échanges soient assez nombreux pour qu'un acheteur ou vendeur trouve toujours une contrepartie pour la proposition qu'il fait. Donc et en pratique, la liquidité (liquidity) est un indicateur de la fréquence et du volume des échanges réalisée pour un actif, reflétant le nombre d'offres de marché et la quantité d'intervenants.
Plus un titre est échangé (en fréquence et en volume), plus le marché de ce titre est dit ***liquide****. On peut donc aussi classer les marchés selon cette propriété.*

Les marchés liquides :
Les marchés liquides sont généralement établis depuis longtemps. Ils rassemblent l'intervention d'un grand nombre d'acteurs de marchés, et en particulier tous les types d'acheteur potentiels :

1. ***Des arbitragistes :*** *qui cherchent à exploiter des déséquilibres régionaux ou temporels de valeurs d'actifs pour obtenir un profit sûr basé sur leur analyse.*
2. ***Des gestionnaires de risque (ou Hedgeurs) :*** *dont l'objectif est de compenser au mieux les risques internes de leur portefeuille.*
3. ***Des spéculateurs :*** *qui font des paris sur la valeur futur d'un actif et obtiennent*

un bénéfice s'ils se réalisent, une perte dans le contraire.

Les marchés émergents :
Les marchés émergents (immatures en englais) ou non liquides, sont beaucoup moins stables historiquement, sans pour autant être toujours récents. Ils sont basés sur un environnement économique changeant.

1.2.2 Les instruments financiers échangés sur le marché financier

Les instruments financiers sont trés divers et leur complexité s'accoroît de jour en jour. Il est donc de plus en plus difficile de dresser une typologie des produits.

Définition :

Un actif ou instrument financier (a financial asset) est un moyen d'effectuer des transferts intertomporels de richesse. Plus précisement, un actif est un contrat entre deux parties (un"créditeur" et un "débiteur") aux terme du quel :

- *Le créditeur remet une somme d'argent* A_0 *au débiteur à une date* t_0.
- *Le débiteur s'engage à verser au créditeur des flux* A_t *dans l'avenir à des dates t, selon un certain échéancier convenu.*

Remarque 1.2.1 *Les actifs financiers sont appelés aussi " les biens ", " les titres " et " les instruments ".*

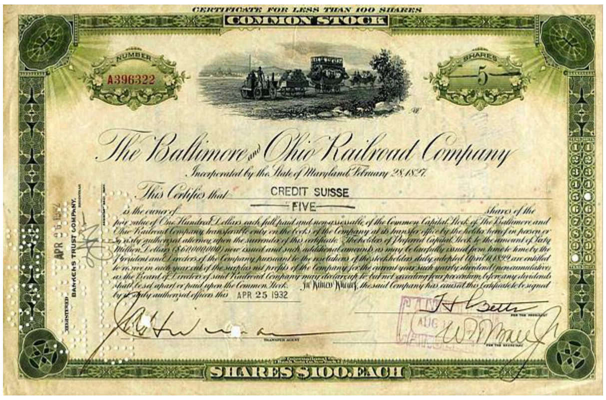
Typologie
On distingue deux grands groupes d'actifs : les actifs de base et les actifs dérivés.

Actifs de base (core assets) :
On distingue deux types de base dont on donnera pour chacun une discription.

Actions :
Une action (share) est un titre sous la forme d'un certificat de participation dans les capitaux propres d'une entreprise.

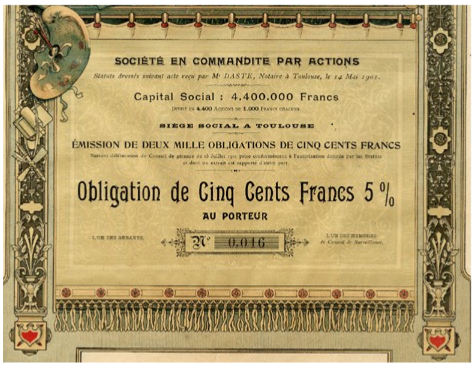
Les dividendes :

Les dividendes sont des sommes d'argent perçues par les détenteurs des actions à certains instants, en général quatre fois par an.



Obligations :

Une obligation (bond) est un titre sous la forme d'un titre de dette. Par l'émission d'une obligation, l'organisme émetteur peut attirer des capitaux étrangers, par exemple, pour des investissements. Une obligation donne droit au remboursement du principal à la fin de la durée et est généralement complétée par un taux d'intérêt fixe. Les émetteurs d'obligations peuvent être des entreprises, des institutions publiques et des autorités nationales et locales. Il existe différents types d'obligations avec, chacune, leur propre caractéristique : "obligation à coupon zéro", obligation participante, "obligation subordonnée", "obligation convertible", obligations à prime, ...etc.



Le coupon :
C'est le montant des intérêts des intérêt servi à chaque échéance, pour chaque obligation. Il est calculé par le produit du taux nominal et la valeur nominale.

Les actifs dérivés (Derivatives) :

On aborde maintenant les actifs contingents, c'est-à-dire les actifs dont les flux génères sont des fonctions.

Présentation des produits dérivées

Définition 1.2.1 *Les actifs dérivés sont de façon générale des contrats de vente ou d'achat d'actifs financiers de base. Ces intruments sont appelés "dérivés" parce qu'ils sont fondés sur le cours d'autres intruments financiers (actions, obligations) ou d'autres biens (matiéres premières), et qu'il dérivent donc leur valeur de ces autres actions, devises ou matières premières "sous-jacentes". Ils ont un effet de levier important et peuvent conduire trés vite à des gains ou à des pertes considérables. Actuellement, deux objectifs principaux motivent l'utilisation des produits dérivés, c'est la gestion du risque et la spéculation.*

Ces produits se subdivisent en deux classes, soit les produits fermes qui concernent les contrats à terme, les forwards et les swaps, et les produits optionnels qui couvrent les options et les warrants.

Les contrats à terme :

Définition 1.2.2 *Appelé également futures, correspondant à un engagement d'acheter, ou de vendre, un actif à un prix fixé à lavence, et à une date déterminée.*

Pour les contrats à terme, il existe trois types sont :

- Le contrat forward (OTC).
- Le contrat futures.
- Les swaps.

Les Options :
Une option est un contrat conclu entre deux parties moyennant immédiat de l'acheteur

au vendeur d'une prime appellée "Option". En vertu de ce contrat, l'acquéreur a le droit d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien, d'un actif ou d'un instrument financier appelé " support ou sous-jacent" à un prix fixé " prix de l'excercice" pendant une période limitée par une échéance préfixée.

Les caractéristiques d'un contrat d'options :

Afin de pouvoir en faire une évaluation correcte, les termes d'un contrat d'option doivent spécifier un certain nombre de caractéristiques :

- La date d'échéance.
- Le prix de marché.
- La prix d'excercice (Strike).
- La prime.

Pour ce produit on considèrons deux types, une option d'achat et une option de vente :

Un call : (ou option d'achat) est un contrat qui confère, contre paiement immédiat d'une prime, le droit mais non l'obligation d'acheter, pendant une période limitée, ou à une date donnée à un prix défini à l'avance une certaine quantité d'actifs sous-jacents.

Un put : (ou option de vente) est un contrat qui confère, contre paiement immédiat d'une prime, le droit mais non l'obligation de vendre, pendant une période limitée, ou à une date donnée à un prix défini à l'avance une certaine quantité d'actifs sous-jacents.

Les fonction pay-off

Le flux financier à T s'appelle la fonction de gain ou plus couramment le "**pay-off**" de l'option, il est aléatoire dans le sens où il dépend du prix de l'actif à l'instant T, inconnu à l'avance, rapporté au prix d'exercice K.

Définition 1.2.3 *fonction* ***pay-off*** *est une fonction qui donne la valeur d'un produit dérivé à son échéance en fonction de la valeur de l'actif sous-jacent.*

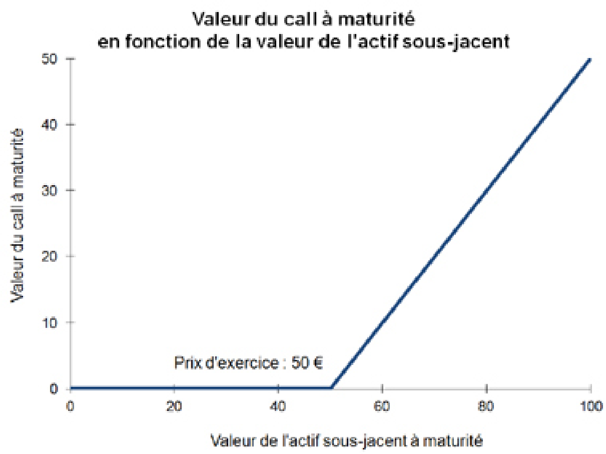
Remarque 1.2.2 *Les options sont classées selon la date d'exercice à :*

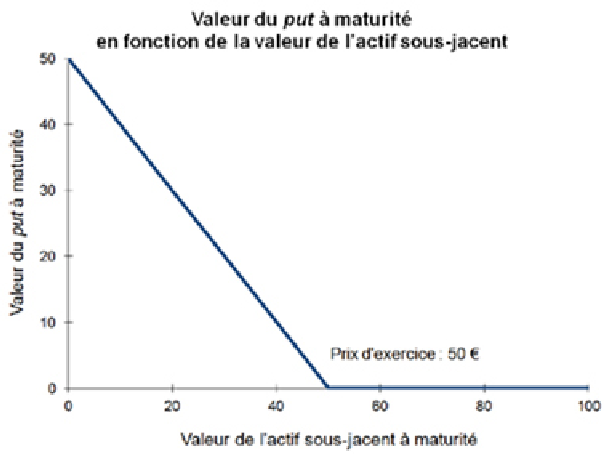
- *Options européennes.*
- *Options américaines.*

Définition 1.2.4 *Les options européenne sont des droits d'achats ou de vente, à une échéance fixe T, d'un actif à un prix d'exercice (ou* ***strike****) aussi fixé à l'avance que l'on note K. Dans le cas de l'option européenne, le pay-off est :*

- *Pour un droit d'achat (Call) européen :* $f_{call}^{Europ} = \max(0, S_T - K)$
- *Pour un droit de vente (put) européen :* $f_{put}^{Europ} = \max(0, K - S_T)$

Les fonction de pay-offs d'un call et put européennes sont tracées sur les deux figures ci-dessous :





Définition 1.2.5 *certaines options confèrent à leur détenteur le droit d'exercer à n'importe quelle date durant la période de maturité : on parle alors d'option américaine (american option). Encore un peu de terminologie. D'une manière générale, lorsque l'on a vendu à terme une certaine quantité d'un actif (option, action, taux, or, pétrole...), on dit que l'on détient une position courte (short position) sur cet actif. Dans le cas d'un achat, on parle de position longue (long position). Ainsi, quatre cas de figure peuvent se présenter :*

- *achat d'une option d'achat,*
- *vente d'une option d'achat,*
- *achat d'une option de vente,*
- *vente d'une option de vente.*

Remarque 1.2.3 *Les options européennes et les options américaines se nomées par " les options classiques ". Parallélement aux ces options, apparaissent depuis les années 90, sur les marchés de gré à gré, des options dites " exotiques ".*

Les warrants :
Un warrant est un produit financier dérivé qui représente un droit négociable d'acheter de nouvelles actions ou obligations auprès de l'organisme émetteur pendant une période déterminée à un prix déterminé. Il s'agit en fait d'une option mais avec une durée de vie plus longue.

Matières premières (Commodities or raw materials) :
Une matière première est un produit à l'état brut (matière extraite de la nature : notion de ressource naturelle), ou ayant subi une première transformation sur le lieu de production pour la rendre propre à l'échange international, utilisé dans la production de produits finis ou comme source d'énergie. Pour celles destinées à l'alimentation, on parle plutôt de denrées.

Pour le marché des matières premières a vu le développement de produits financiers permettant aux acteurs de se couvrir contre les variations de prix. Il s'agit essentiellement de contrat de vente et d'achat à terme.

Remarque 1.2.4 *La spécificité des matières premières par rapport aux actions et obligations est qu'elles ne peuvent généralement pas être stockées et peuvent être négociées de gré à gré, à travers des courtiers en ligne.*

Les marchés des produits dérivés :

1. **Le MATIF :**

   Le MATIF (Marché à Terme International de France) a été crée le 20 février 1986, la même année que le marché des valeurs du trésor. Proposant une large gamme de produits de couverture des risques financiers (taux d'intérêts, indices boursiers, marchandises). Le MATIF s'inscrit aujourd'hui parmi les plus grands marchés à terme internationaux. Son rôle est de proposer aux acteurs économiques et financiers, des instruments négociables de gestion des risques liés aux fluctuations des intérêts à long terme, aux variations du cours de certaines matières premières.

2. **Le MONEP :**

   Le MONEP (Marché des Options Négociables de Paris) a été crée le 10 septembre 1987. Il a pour objet de traiter les options négociables sur actifs (action et indice), alors que les options sur contrat à terme sont traitées sur le marché à terme.

3. **L'euronext :**

   Euronext gère des marchés au comptant et dérivés réglementés et transparents. Son offre recouvre des produits tels que les actions, les **ETFs** (Exchange Traded Funds), les warrants et certificats, les obligations, les dérivés sur actions, les dérivés sur matières premières et les indices. Euronext offre également des services à des tiers. Euronext opère le marché réglementé, **Alternext**, et le Marché libre. Elle a créé une filiale, EnterNext, dédiée à la promotion des marchés boursiers pour les PME ETI.
   Au Portugal, l'opérateur de marché offre également des services de compensation

et de règlement/livraison avec InterBolsa. Depuis le 20 juin 2014, euronext est une société cotée sur ses propres marchés à Paris, Amsterdam et Bruxelles. Il s'agit de l'aboutissement de plusieurs étapes complexes initiées par l'offre d'acquisition par **ICE** et permettant de repositionner euronext au coeur du financement des économies européennes.

Chapitre 2

Calcul stochastique au temps discret

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions de base du calcul stochastique et des mathématiques financières.

2.1 Espérance conditionnelle

Pour de nombreux problèmes concrets (prédiction, observation incomplète,..., etc) il est important de pouvoir estimer une variable aléatoire sur laquelle on n'a qu'une information partielle. Dès lors, on comprend l'importance de la notion d'espérance conditionnelle.

2.1.1 Une approche géométrique

Dans cette section, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on considère $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. Pour tout $p > 1$, on note

$$\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X \text{ variables aléatoires réelles définies sur } (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad \mathbb{E}(|X|^p) < \infty\}.$$

Proposition 2.1.1 *On se place sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et on considère* $\mathcal{G}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$.

1. $\mathbb{E}(\cdot/\mathcal{G}) : \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ *est une application linéaire de norme 1 c'est-à-dire* $\|\mathbb{E}(X/\mathcal{G})\|_1 \leq \|X\|_1$.

Soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2. *Si* X *est* $\mathcal{G}$*-mesurable, alors* $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = X$ *p.s..*
3. *Si* X *est indépendante de* $\mathcal{G}$*, alors* $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ *p.s..*
4. ***Positivité.*** *Si* $X \geq 0$*, alors* $\mathbb{E}(X/\mathcal{G}) \geq 0$ *p.s.. par conséquent,* $\mathbb{E}(\cdot/\mathcal{G})$ *est un opérateur croissant.*
5. ***Double conditionnement.*** *Si* $\acute{\mathcal{G}}$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{G}$*,* $\mathbb{E}(X/\acute{\mathcal{G}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})/\acute{\mathcal{G}})$ *p.s.. En prenant* $\acute{\mathcal{G}} = \{\emptyset, \Omega\}, \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X/\mathcal{G}))$ *p.s..*
6. ***Inégalité de Jehsen.*** *Soit* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe telle que* $\phi(X) \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, alors* $\phi(\mathbb{E}(X/\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(phi(X)/\mathcal{G})$ *p.s..*
7. *Si* Z *est une variable aléatoire réelle bornée* $\mathcal{G}$*-mesurable,* $\mathbb{E}(XZ/\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ *p.s.. Si on suppose de plus que* $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, alors si* $Z \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$*, on a* $\mathbb{E}(XZ/\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$ *p.s..*

2.2 Martingales à temps discret

Dans cette section, nous allons étudier un exemple particulier de suites de variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes mais telles que l'espérance conditionnelle à l'instant $n+1$ sachant le passé jusqu'à l'instant n vaut la valeur à l'instant n.

2.2.1 Introduction à la notion des martingales

• **Définitions**

Définition 2.2.1 *On appelle processus stochastique à temps discret défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *à valeur dans* (E, ξ) *toute suite* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *de variables aléatoires définies sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et à valeur dans* (E, ξ)*. Pour tout* $\omega \in \Omega$*, la suite* $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$ *est appelée trajectoire du processus* $(X_n, n \in \mathbb{N})$*.*

Définition 2.2.2 *On appelle filtration (discrète) de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *toute suite croissante* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *:* $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$*. On note* $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_n \mathcal{F}_n)$*.*

Notation : Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ est appelé espace de probabilité filtré et est noté $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 2.2.3 *Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un processus stochastique.*
- *On dit que $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ si pour tout n, la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*
- *On dit que $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est prévisible pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ si pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.*

Considérons deux filtrations $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ et $(\acute{\mathcal{F}}_n, n \in \mathbb{N})$. On dit que $(\acute{\mathcal{F}}_n, n \in \mathbb{N})$ est une sous filtration de $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, si pour tout n, $\mathcal{F}_n \subset \acute{\mathcal{F}}$. Soit $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et définissons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$.
$(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ est la plus petite filtration rendant le processus X adapté et elle est sous filtration de toute autre filtration rendant X adapté.
On peut en fait voir un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, comme une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ telle que $X(\omega) = (X_n(\omega), n \in \mathbb{N})$.

Définition 2.2.4 *Un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs réelles est dit :*
- *intégrable, si pour $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
- *de carré intégrable, si pour $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
- *borné, si pour $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ est bornée.*

Définition 2.2.5 *(Martingales). Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un processus stochastique et $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ ou une $(\mathcal{F}_n)$-martingale si*

1. *$(X_n, n \in \mathbb{N})$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$.*
2. *pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$.*
3. *pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ p.s.*

Remarque 2.2.1 *Lorsque $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ est la filtration naturelle de $(X_n, n \in \mathbb{N})$, on dit que c'est une martingale sans préciser pour quelle filtration.*

Définition 2.2.6 *(Sur et sous martingale). Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ un processus stochastique adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une sur-martingale (resp. sous-martingale) pour la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$, si pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$ p.s. (resp.$\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$ p.s.).*

Remarque 2.2.2 *On remarque qu'un processus qui est à la fois sous et sur-martingale est une martingale.*

2.2.2 Premières propriétés

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale et f une fonction mesurable convexe telle que $f(X_n)$ soit intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(f(X_n), n \in \mathbb{N})$ est une sous-martingale.
En particulier, $(X_n^+, n \in \mathbb{N}), (|X_n|, n \in \mathbb{N}), (|X_n|^2, n \in \mathbb{N})$ sont des sous-martingales.

Démonstration : Le processus $(f(X_n), n \in \mathbb{N})$ est bien adapté pour la filtration naturelle de $(X_n, n \in \mathbb{N})$ et est intégrable. Notons $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ pour tout n. Grâce à l'inégalité de Jehsen pour l'espérance conditionnelle, $\mathbb{E}(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) \geq f(\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \geq f(X_n)$.

Définition 2.2.7 *On dit qu'un processus est un processus $(A_n, n \in \mathbb{N})$ **croissant prévisible** si $A_0 = 0, A_n \leq A_{n+1}$ et si A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2.2.3 Exemples de martingales

• Martingales fermées

Soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Considérons une filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et définissons $X_n = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, grâce à la propriété d'emboîtement des espérances conditionnelles, le processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une martingale.

• Varibles aléatoires indépendantes

Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires centrées indépendantes et intégrables. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$. Le processus $(S_n, n \in \mathbb{N})$ par $S_n = 0$ et pour $n \geq 1, S_n = X_1 + ... + X_n$ est une martingale si les variables aléatoires X_n sont centrées.

Le processus$(P_n, n \in \mathbb{N})$ par $P_0 = 1$ et pour $n \geq 1, P_n = \Pi_{k=1}^{n} X_k$ est une martingale si les variables aléatoires X_n sont de moyenne 1.

2.2.4 Martingales de carré intégrables

Définition 2.2.8 *Soit* $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_n, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité filtré.*

- ▷ *Une martingale* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *pour la filtration* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *est dite de carré intégrable, si pour tout* $n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.
- ▷ *Une martingale* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *pour la filtration* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ *est dite borné dans* $\mathbb{L}^2$*, si pour tout* $n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.

Proposition 2.2.1 *(Crochet d'une martingale). Soit* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *une martingale de carré intégrable sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni de la filtration* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$*. Il existe un unique processus* $(C_n, n \in \mathbb{N})$ *prévisible croissant nul en 0 tel que le processus* $(X_n^2 - C_n, n \in \mathbb{N})$ *soit une* $\mathcal{F}_n$*-martingale.*
On note $(\langle M_n\rangle_n, n \in \mathbb{N})$ *ou* $(\langle M, M\rangle_n, n \in \mathbb{N})$ *est unique processus croissant* $(C_n, n \in \mathbb{N})$ *qui est appelé crochet de la martingale* $(X_n, n \in \mathbb{N})$*, tel que :*

$$\langle M\rangle_0 = 0 \quad \langle M\rangle_n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} \mathbb{E}((X_{\mathrm{k}+1} - X_{\mathrm{k}})^2/\mathcal{F}_n).$$

Démonstration : On a $X_{n+1}^2 = X_n^2 + 2X_n(X_{n+1} - X_n) + (X_{n+1} - X_n)^2$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_{n+1}^2/\mathcal{F}_n) = X_n^2 + \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2/\mathcal{F}_n)$. Soit $(C_n, n \in \mathbb{N})$ une suite prévisible telle que $(X_n^2 - C_n, n \in \mathbb{N})$ soit une martingale. $X_n^2 - C_n = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 - C_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n^2 + \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2/\mathcal{F}_n) - C_{n+1}$. Ainsi, $C_{n+1} - C_n = \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2/\mathcal{F}_n)$. Ceci prouve à la fois l'existence et l'unicité.

2.2.5 Transformée de martingale

Considérons une filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On se donne un processus réel $(H_n, n \in \mathbb{N})$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ et une martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ pour cette filtration. On définit alors le processus $((H \cdot X)_n, n \in \mathbb{N})$ par

$$(H \cdot X)_n = \sum_{k=0}^{n-1} H_k(X_{k+1} - X_k)$$

Ce processus est **l'intégrale stochastique discrète** du processus $(H_n, n \in \mathbb{N})$ par rapport à la martingale $(X_n, n \in \mathbb{N})$ et il s'agit d'un processus $\mathcal{F}_n$-adapté.

Proposition 2.2.2 *Si $(H_n, n \in \mathbb{N})$ est un processus réel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ soit une variable aléatoire bornée, le processus $((H \cdot X)_n, n \in \mathbb{N})$ est une (F_n)-martingale.*

Démonstration :

Puisque $|(H \cdot X)_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |H_k||X_{k+1} - X_k|$, le processus $(H_n, n \in \mathbb{N})$ est intégrable. Par ailleurs, il est clairement adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$. Pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}((H \cdot X)_{n+1}/\mathcal{F}_n) = (H \cdot X)_n + \mathbb{E}(H_n(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{F}_n) = (H \cdot X)_n.$$

Donc, le processus $((H \cdot X)_n, n \in \mathbb{N})$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.

2.2.6 Convergence des martingales

Nous admettrons le théorème suivant dû à Doob.

Théorème 2.2.1 *Toute sur-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$ converge p.s.. De plus sa limite est dans $\mathbb{L}^1$ et est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.*

Remarque 2.2.3 *Ce théorème ne dit pas qu'une sur-martingale bornée dans $\mathbb{L}^1$ converge dans $\mathbb{L}^1$. Cette conclusion hâtive est fausse.*

• **Martingales dans $\mathbb{L}^2$**

Théorème 2.2.2 *Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une $\mathcal{F}_n$-martingale réelle de carré intégrable telle que $\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, alors X_n converge p.s. et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable aléatoire X_∞ qui est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(X_\infty/\mathcal{F}_n)$ p.s.*

Démonstration : Pour tout $k \geq 0, \mathbb{E}((X_{n+k}-X_n)^2) = \mathbb{E}(X_{n+k}^2)-\mathbb{E}(X_n^2)$. Donc, d'une part, la suite $\mathbb{E}(X_n^2)$ est croissante, or comme elle est bornée elle converge. D'autre part, on a $\sup_n \mathbb{E}((X_{n+k}-X_n)^2) = \sup_k \mathbb{E}(X_{n+k}^2) - \mathbb{E}(X_n^2)$. Le terme de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ puisque $\mathbb{E}(X_n^2)$ converge et donc est de Cauchy. Ainsi, la suite X_n est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ qui est un espace complet donc elle converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ vers une variable aléatoire X_∞ qui est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.

2.2.7 Processus gaussien

Définition 2.2.9 *Un processus X est dit gaussien si toute combinaison linéaire $a_1X_{t_1} + \ldots + a_nX_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in T$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$).*

Exemples des processus gaussiens

1. Mouvement brownien.
2. Pont brownien ($Y_t = W_t - tW_1$).
3. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck ($U_t = e^{-t/2}W(e^t)$).
4. Brownien géométrique ($S_t = x\exp(\mu t + \sigma W_t - \sigma^2 t/2)$)
5. Mouvement brownien fractionnaire ($K(s,t) = 1/2(|s|^{2H} + |t|^{2H} + |s-t|^{2H})$) (si H=1/2 le mBf devient le MB standard).

2.2.8 loi normale

On dit qu'une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ^2 si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) pour \ \ tout \ \ x.$$

On dénote ceci $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Moyenne et variance de la loi normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

1. $\mathbb{E}(X) = \mu, \;\; V(X) = \sigma^2$.

La loi normal centrée réduite

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$, la loi normal $\mathcal{N}(0,1)$ est appellée centrée réduite et on la note par Z. Sa fonction de densité est

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;\; \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

Sa fonction de répartition est

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \;\; \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \; dt.$$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

On peut donc ramener toute loi normale à une loi centrée réduite.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale. Alors X est la somme de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Si n est grand alors X suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np\;(1-p))$.

Loi lognormale

Une variable aléatoire aléatoire X suit une loi lognormale de paramètres μ_Y et σ_Y^2 si : $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. C'est équivalent à définir $X = \exp(Y)$.

La fonction de densité d'une variable aléatoire lognormale X de paramètres μ_Y , σ_Y^2 est

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln(x)-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire lognormale X de paramètres μ_Y, σ_Y^2 est

$$F_X(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln(x)-\mu_Y}{\sigma_Y}\right), & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire lognormale de paramètres μ_Y, σ_Y^2, alors :

1. $\mathbb{E}(X) = \exp(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2)$
2. $V(X) = \exp(2\mu_Y + \sigma_Y^2)\ (\exp(\sigma_Y^2) - 1)$.

2.2.9 Loi des grands nombres

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même distribution, avec $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right] = 0.$$

2.2.10 Théorème central-limite (TCL)

Cet indispensable théorème montre que les moyennes d'échantillons indépendants qui suivent une même loi de probabilité tendent vers une distribution normale pour peu qu'elles soient suffisamment nombreuses.

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes , avec $\mathbb{E}(X_i) = \mu_i$ et $V(X_i) = \sigma_i^2$ pour $i = 1, 2, ..., n$.

Alors la variable aléatoire $\quad Z = \dfrac{\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\Sigma_{i=1}^{n}\sigma_i^2}}$

suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ si n est grand.

Chapitre 3

Le modèle de Cox-Ross-Rubinstein

En finance, le modèle binomial (ou modèle CRR du nom de ses auteurs) fournit une méthode numérique pour l'évaluation des options. Il a été proposé pour la première fois par Cox, Ross et Rubinstein (1979). Le modèle est un modèle discret pour la dynamique du sous-jacent. L'évaluation de l'option est calculée par application de la probabilité risque-neutre pour laquelle les prix actualisés sont des martingales ce qui permet à nous de souligner les stratégies de gestion d'un portefeuille. ce modèle sert souvent d'approximation au modèle en temps continu.




3.0.11 Description du modèle

La méthode binomiale utilise un "cadre à temps discret" pour retracer l'évolution de l'actif sous-jacent, via un arbre, pour un nombre donné de "pas" qui correspond au temps entre la date d'évaluation et celle de l'expiration de l'option. Chaque nœud de l'arbre (intersection de deux branches de l'arbre) est un prix possible du sous-jacent à un moment précis dans le temps. Cette évolution des prix constitue la base de l'évaluation des options. Le processus d'évaluation est **itératif**. On part du nœud final de chaque branche et ensuite on "remonte" jusqu'au premier nœud (date d'évaluation), où le résultat du calcul est la valeur de l'option. Cette méthode utilise donc le processus suivant :

1. Créaton de l'arbre.
2. Calcul de la valeur de l'option au nœud final de chaque branche.
3. Calcul progressif de la valeur de l'option à partir du nœud précédent, la valeur du premier nœud étant la valeur de l'option.

3.1 Strategie de gestion d'un portefeuille

3.1.1 Le principe de diversification :

Ce principe permet de réduire le risque de la perte de quelque chose d'entièrement.

" *Ne mettent pas ses oeufs dans le même panier* "

Définition 3.1.1 *Un portefeuille est un ensemble des contrats possédés par un agent intervenant sur des marchés, ce sont des positions sur les marchés, c'est-à-dire le nombre d'actifs et de produits dérivés qu'il possède.*

Alors selon le principe de **Diversification** on suppose que le portefeuille se comporte deux quantité d'actif **"risqué et non-risqué"**.

Donc, la valeur ξ_n du portefeuille est donner à chaque instant par :

$$\xi_n(\phi_n^c, \phi_n) = \phi_n^c R_n + \phi_n S_n$$

Où $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}, (\phi_n^c)_{0\leq n\leq N}$ et $(S_n)_{0\leq n\leq N}$ sont des suites aléatoires, alors que $(R_n)_{0\leq n\leq N}$ est une suite déterministe de valeur :

$$R_n = R_0(1+r)^n$$

Définition 3.1.2 *Une stratégie de gestion est définie par une suite aléatoire* Φ *:*

$$\Phi = [(\phi_0^c, \phi_0), ..., ((\phi_n^c, \phi_n), ..., ((\phi_N^c, \phi_N)]$$

qui donne à chaque instant n *la quantité d'actif risqué* ϕ_n *et q'actif sans risqué* ϕ_n^c *dans le portefeuille.*

Remarque 3.1.1 *Le portefeuille est constitué au vu des informations disponibles à l'instant* $n-1$ *et conservé tel quel au moment des cotations à l'instant* n*. C'est-à-dire qu'à l'instant* $n-1$*, aprés les cotations, le portefeuille vaut :*

$$\xi_{n-1}^+ = \phi_n^c R_{n-1} + \phi_n S_{n-1}$$

Remarque 3.1.2 *Au moment des cotation de l'instant* n*, la composition du portefeuille n'étant pas modifiée, sa valeur est donée par :*

$$\xi_n^- = \phi_n^c R_n + \phi_n S_n$$

donc, on s'autorise à modifier le portefeuille et :

$$\xi_n^+ = \phi_{n+1}^c R_n + \phi_{n+1} S_n.$$

3.1.2 Stratégie autofinancée

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux portefeuille autofinancés pour lesquels $\xi_n^+ = \xi_n^-$. Donc ce cas, on note simplement ξ_n pour ξ_n^+ et ξ_n^-.

Définition 3.1.3 *Un portefeuille est* ***autofinancé*** *lorsque sa valeur ne varie entre deux instant de cotation successifs que par un réajutement de sa composition, sans apport ni soustraction d'argent.*

Pour un portefeuille autofinancé on a donc :

$$t = 0 \qquad \xi_0 = \phi_1^c R_0 + \phi_1 S_0$$

alors, pour $t = \tau$:

$$\xi_1 = \phi_1^c R_1 + \phi_1 S_1 = \phi_2^c R_1 + \phi_2 S_1$$

soit encore pour $t = (n-1)\tau$:

$$\xi_{n-1} = \phi^c_{n-1} R_{n-1} + \phi_{n-1} S_{n-1} = \phi^c_n R_{n-1} + \phi_n S_{n-1}$$

d'où pour $t = n\tau$

$$\xi_n = \phi^c_n R_n + \phi_n S_n = \phi^c_{n+1} R_n + \phi_{n+1} S_n$$

on en déduit pour $t = N\tau$ que :

$$\xi_N = \phi^c_N R_N + \phi_N S_N = \phi^c_{N+1} R_N + \phi_{N+1} S_N.$$

Donc, pour un portefeuille autofinancé, la stratégie de gestion est complètement définie par la suite aléatoire prévisible à N éléments $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_N)$.

Remarque 3.1.3 *Une stratégie de gestion est donc simplement identifiée à une suite aléatoire prévisible $(\phi_n)_{1\leq n\leq N}$. On parle alors de **stratégie autofinancée**.*

3.1.3 Stratégie admissible et arbitrage

Aprés la notion de stratégie autofinancée, l'espace des stratégies utilisées est encore restreint en leur imposant d'être "admissibles" selon la définition suivante :

Définition 3.1.4 *Une stratégie est dit **admissible** si elle est aufinancée et si elle garantit que la valeur du portefeuille soit positive ou nulle à tout instant.*

Exemples 3.1.1 *On se parle dans un modèle à un pas de temps avec deux instants 0 et 1. À l'instant 0, le prix de l'actif sous-jacent est S_0. On suppose qu'à l'instant 1, l'actif sous-jacent peut valoir soit un prix $S_1^+ = S_0.u\ (u > 1)$ avec la probabilité p, soit un prix $S_1^- = S_0.d\ (d > 1)$ avec la probabilité $1-p$.*
On suppose, sans perte de généralité, que le taux d'intérêt sans risque est nul ($r = 0$, donc $R_1 = R_0$). On constitue un portefeuille en répartissant la valeur ξ_0 à l'instant initial entre l'actif risqué et l'actif sans risque :

$$\xi_0 = \phi_1 S_0 + \phi_1^c R_0$$

La valeur de portefeuille à l'instant 1 est donc : $\xi_1 = \phi_1 S_1 + \phi_1^c R_0$

soit encore en éléminant $\phi_1^c R_0$*, on obtient :*

$$\xi_1 = \phi_1(S_1 - S_0) + \xi_0$$

On retrouve donc qu'une stratégie autofinancée est simplement définie par ϕ_1*. Ce porte-feuille a deux valeurs possible à l'instant 1 :*

$$\begin{array}{rcl} \xi_1^+ & = & \phi_1 S_0(u-1) + \xi_0 \\ \xi_1^- & = & \phi_1 S_0(d-1) + \xi_0 \end{array}$$

Les stratégies admissibles sont donc les valeurs de ϕ_1 *telles que* $\xi_1^+ \geq 0$ *et* $\xi_1^- \geq 0$*.*
Soit, en utilisant les deux équations ci-dessus :

$$-\frac{\xi_0}{S_0(u-1)} \leq \phi_1 \leq \frac{\xi_0}{S_0(1-d)}$$

Cela définit des valeurs limites hautes et basses pour ϕ_1 *à l'intérieur des quelles on doit rester si l'on souhaite définir une stratégie admissible.*

Une autre notion, sur laquelle repose une hypothèse fondamentale de la théorie classique des risques financiers, est celle d'arbitrage :

Définition 3.1.5 *Une stratégie **d'arbitrage** est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle dans tous les cas.*

Sous cette notion, nous permet de construire une nouvelle notion qui s'appelle à la fois "**opportunité d'arbitrage**" qui signifie la possibilité d'obtenir un profit sans risque, c'est-à-dire certain. Puisque nous ne pouvons pas de construire cette stratégie , ce que l'on appelle "**absence d'opportunité d'arbitrage**".

Notation : La propriété d'absence d'opportunité d'arbitrage sera abrigée en "**AOA**".

3.2 Modèle binomial à une période

L'objectif du modèle est de trouver la valeur de l'actif financier à la date $t = 0$ (son prix) telle qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage dans le marché financier.

3.2.1 Modélisation probabiliste du marché

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de trois choses :

- Ω est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d, c'est-à-dire $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$.

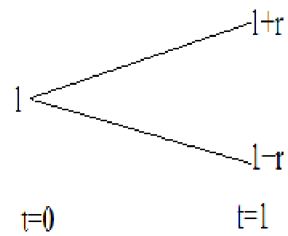
- $\mathbb{P}$ est la probabilite historique sur Ω. $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilite réelle p de monter et $1 - p$ de descendre.
- $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de deux tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instant $t = 0$ et $t = 1$ et que :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \qquad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}$$

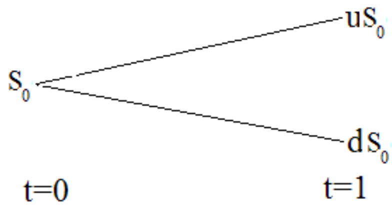
On considère un marché à deux dates, notées 0 et 1, et trois actifs dans l'économie :

i) L'actif sans risque : qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)$ en $t = 1$, qui represente l'argent place a la banque au taux r (dans une obligation), il est sans risque dans le sens ou l'on connait en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$

$$1 \quad \longrightarrow \quad R = 1 + r$$



ii) L'actif risqué : il vaut S_0 en $t = 0$ et à l'instant 1, il peut avoir pris deux valeurs différentes : soit il est monté $S_1^u = u.S_0$, soit il est descendu $S_1^d = d.S_0$ avec d < u.



iii) une option d'achat (call) de type européen, dont le sous-jacent est l'action. Elle vaut :

$$\begin{aligned} C_u &= \max(0, u.S_0 - K) \\ P_u &= \max(0, d.S_0 - K) \end{aligned}$$

Le prix de l'actif à l'instant $t = 1$:

$$S_1 = \begin{cases} S_0.u, & \text{avec probabilité p ;} \\ S_0.d, & \text{avec probabilité 1-p.} \end{cases}$$

Ainsi,
$$\mathbb{E}(S_1) = p.u.S_0 + q.d.S_0 = (up + dq)S_0$$

Considérons maintenant le processus actualisés du prix $\tilde{S}_n = \frac{1}{(1+r)^n} S_n$. Peut on trouver les probabilités de hausse et de baisse telles que $(\tilde{S}_n)_n$ soit une martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$?

3.2.2 probabilité risque neutre

On s'intéresse à la suite actualisée des prix définie par le modèle binomial. Si r est le taux d'intérêt "sans risque", la suite actualisée des prix est définie par : $\forall n, \quad 0 \leq n \leq N$,

$$\tilde{S}_n = S_n \frac{1}{(1+r)^n}$$

On cherche si la suite des prix actualisés $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie anisi est une martingale sous la probabilité P dont est munie l'espace Ω des évènement possible. On rappelle que :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) = \frac{1}{(1+r)^1} \left(pu + \frac{1-p}{u} \right) \tilde{S}_n$$

Et donc en général :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}) \neq \tilde{S}_n$$

Alors, l'équation ci-dessus montre que la suite $(\tilde{S}_n)$ n'est pas une martingale. On définit alors une nouvelle mesure de probabilité π tel que $(\tilde{S}_n)$ devienne une martingale sous cette nouvelle probabilité, c'est à dire :

$$\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = \tilde{S}_n$$

On va démontrer que : $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = \tilde{S}_n$

Preuve : On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) & = & \mathbb{E}_\pi(S_{n+1}\frac{1}{(1+r)^{n+1}}) \\ & = & \frac{1}{(1+r)^n}\frac{1}{(1+r)\mathbb{E}_\pi(S_{n+1})} \\ & = & \frac{1}{(1+r)}(\pi u + (1-\pi)d)S_n \\ & = & \frac{1}{(1+r)}(\pi u + (1-\pi)d)\tilde{S}_n \end{array}$$

donc pour que $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) \neq \tilde{S}_n$, il est reste de montre que :

$$(\pi u + (1-\pi)d) = (1+r)$$

Avec $1 + r = R$.
Alors le calcul donne que :

$$\pi = \frac{R-d}{u-d}$$

Et on en déduit facilement que :

$$1 - \pi = \frac{u-R}{u-d}$$

Remarque 3.2.1 *La mesure de probabilité π s'appelle mesure de martingale ou mesure corrigée du risque puisque, sous cette probabilité, le rendement espéré de l'actif risqué est égal au rendement de l'actif sans risque.*

Remarque 3.2.2 *La condition $u > 1 + r > d$ est donc equivalente à l'existence de probabilité π.*

Alors, la probabilité de survenance de l'état up (π) et l'état down ($1-\pi$) sont les relations ci-dessus. Alors, dans ce cas et sous l'hypothèse d'**AOA** on peut vérifier que :

$$\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_1/\mathcal{F}_0) = \tilde{S}_0 = S_0$$

Ainsi, la valeur actuelle de l'action, qui correspond à la espérance actualisé de sa valeur future s'écrit :

$$C = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; c_u + (1-\pi) \;\; c_d)$$

C'est à dire

$$C = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; max(0, u.S_0 - k) + (1-\pi) \;\; max(0, d.S_0 - k))$$

De la même manière, une option de vente (Put) dont le sous-jacent est S et dont le prix d'exercice est K, vaut :

$$P = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; p_u + (1-\pi) \;\; p_d)$$

C'est à dire

$$P = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; max(0, k - u.S_0) + (1-\pi) \;\; max(0, k - d.S_0))$$

Stratégie de couverture

Dans le portefeuille de couverture de l'option, la quantité d'actif risqué est donnée par :

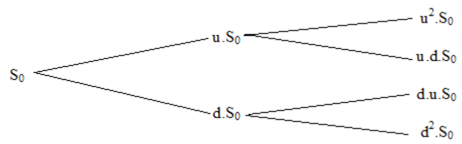
$$\Delta = \frac{C_1^u \;\; - \;\; C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{\phi(S_1^u) \;\; - \;\; \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}$$

3.3 modèle binomial à deux périodes

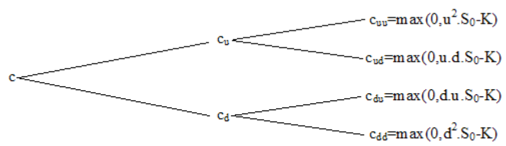
Dans cette section on s'interrèse à modèle binomial pour deux périodes c'est à dire que l'option arrive à échéance 2 périodes aprés son émission.

3.3.1 modélisation probabiliste de marché

- A chaque période, l'action sous-jacente peut avoir un rendement u ou d :



- Et dans chaque état terminal le call dérivé de cette action vaut donc



Le cas du call européen

- Dans le cas d'un call européen, l'option ne peut pas être exercée à la date 1.
- La valeur de l'action à chaque noeud de la date 1 est donc égale à l'espérance actualisée de la valeur finale conditionnellement au bloc considéré :

$$C_u = \frac{1}{(1+r)}(\pi \ \ c_{uu} + (1-\pi) \ \ c_{ud})$$

et

$$C_d = \frac{1}{(1+r)}(\pi \ \ c_{du} + (1-\pi) \ \ c_{dd})$$

- La valeur initiale est alors égale à l'espérance actualisée des valeurs futures (à $t = 1$ ou $t = 2$)

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; c_u + (1-\pi) \;\; c_d) \\ &= \frac{1}{(1+r)}(\pi^2 \;\; c_{uu} + 2\pi(1-\pi) \;\; c_{ud} + (1-\pi)^2 \;\; c_{dd}) \end{aligned}$$

Le cas du put européen

On a :

$$p_u = \max(0; K - u^2 S_0)$$

$$p_{ud} = p_{du} = \max(0; K - u.d.S_0)$$

$$p_{dd} = \max(0; K - d^2 S_0)$$

Alors

$$p_u = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; p_{uu} + (1-\pi) \;\; p_{ud})$$

$$p_d = \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; p_{du} + (1-\pi) \;\; p_{dd})$$

Ainsi, le put européen vaut :

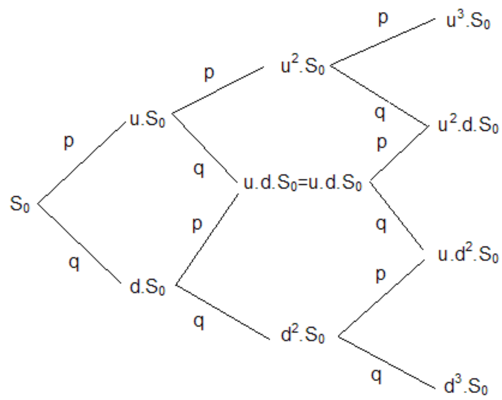
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(1+r)}(\pi \;\; p_u + (1-\pi) \;\; p_d) \\ &= \frac{1}{(1+r)}(\pi^2 \;\; p_{uu} + 2\pi(1-\pi) \;\; p_{ud} + (1-p)^2 \;\; p_{dd}) \end{aligned}$$

3.4 modèle binomial à 3 périodes

Toujours et chaque fois que nous suivons le même principe, mais dans cette partie avec 3 périodes.

3.4.1 modélisation probabiliste de marché

Considérons un actif valant S_0 à la période initiale et qui, à chaque période, peut être haussier (et avoir un rendement u) avec une probabilité p ou baissier (rendement d) avec une probabilité $q = (1 - p)$. Sur 3 périodes on a :



L'ensembles des états finaux est $\Omega = \{uuu, uud, udu, udd, duu, dud, ddu, ddd\}$.

Le prix de l'actif à chaque période (sauf à $t = 0$) est une variable aléatoire.

$$S_1 = \begin{cases} S_0.u, & \text{avec probabilité p} \\ S_0.d, & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} S_0.u^2, & \text{avec probabilité } p^2 \\ S_0.u.d, & \text{avec probabilité } 2p(1-p) \\ S_0.d^2, & \text{avec probabilité } (1-p)^2 \end{cases}$$

Remarque 3.4.1 *2 états finaux donnent $S_2 = u.d.S_0$: $\{ud\}$ et $\{du\}$*

$$S_3 = \begin{cases} S_0.u^3, & \text{avec probabilité } p^3 \\ S_0.u^2.d, & \text{avec probabilité } 3p^2(1-p) \\ S_0.d^2.u, & \text{avec probabilité } 3p(1-p)^2 \\ S_0.d^3, & \text{avec probabilité } (1-p)^3 \end{cases}$$

Remarque 3.4.2 i) *3 états finaux donnent $S_3 = u^2.d.S_0$: $\{uud, udu, duu\}$.*

ii) *3 états finaux donnent* $S_3 = d^2.u.S_0$: $\{ddu, dud, udd\}$.

Ainsi, le prix de l'actif à $t = 1$ est

$$\mathbb{E}(S_1) = p.u.S_0 + q.d.S_0 = (up + dq)S_0$$

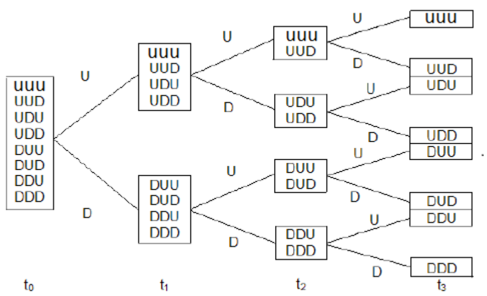
et pour $t = 2$ on a

$$\mathbb{E}(S_2) = p^2.u^2.S_0 + 2.p.q.u.d.S_0 + q^2.d^2.S_0 = (up + dq)^2 S_0$$

De même pour $t = 3$

$$\mathbb{E}(S_3) = p^3.u^3.S_0 + 3.p^2.q.u^2.d.S_0 + 3.p.q^2.u.d^2.S_0 + q^3.d^3.S_0 = (up + dq)^3 S_0$$

Chaque valeur S_t est une v.a. c'est à dire une fonction de Ω vers $\mathbb{R}, \omega \mapsto S_t(\omega)$.
Si on fixe l'état final ω, on obtient une suite $\{S_0(\omega), S_1(\omega), S_2(\omega), S_3(\omega)\}$ appellée **trajectoire** du processus (du prix), par exemple, si $\omega = udu$, on obtient la trajectoire $\{S_0, S_0.u, S_0.u.d, S_0.u^2.d\}$.
La trajectoire du prix de l'actif est révéllée progressivement au cours du temps. À $t = 0$, il a 8 trajectoires possibles. À $t = 1$ on observe S_1 et il reste 4 trajectoires possibles...
L'information est donc révélée progressivement sur la trajectoire du prix. On obtient ainsi une filtration de $\Omega, \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ avec $(\mathcal{F}_0 \prec \mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2 \prec \mathcal{F}_3)$.



Conditionnelement à cette partition, on a :

$$\mathbb{E}(S_3/\mathcal{F}_1) = \begin{cases} \mathbb{E}(S_3/\mathcal{B}_u), & \text{sur } \mathcal{B}_u = \{uuu, uud, udu, udd\}\,; \\ \mathbb{E}(S_3/\mathcal{B}_d), & \text{sur } \mathcal{B}_d = \{duu, dud, ddu, ddd\}. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(S_3/\mathcal{B}_u) = p^2.u^3.S_0 + 2.p.q.u^2.d.S_0 + q^2.u.d^2.S_0 = (up+dq)^2.u.S_0$$

$$\mathbb{E}(S_3/\mathcal{B}_d) = p^2.u^2.d.S_0 + 2.p.q.u.d^2.S_0 + q^2.d^3.S_0 = (up+dq)^2.d.S_0$$

Donc, sous la probabilité risque neutre π on a : $\forall \mathrm{j} \leq i \qquad \mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_i/\mathcal{F}_j) = \tilde{S}_j$
Par exemple :

1. $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_1/\mathcal{F}_0) = \tilde{S}_0 = S_0$
2. Vérifions qu'alors $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_2/\mathcal{F}_1) = \tilde{S}_1$

Car :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_2/\mathcal{F}_1)(\omega) = \begin{cases} \mathbb{E}(\tilde{S}_2/\mathcal{B}_u), & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_u = \{uuu, uud, udu, udd\}\,; \\ \mathbb{E}(\tilde{S}_2/\mathcal{B}_d), & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_d = \{duu, dud, ddu, ddd\}. \end{cases}$$

Et

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_2/\mathcal{B}_u) = \frac{1}{1+r}u.S_0$$

De même $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_2/\mathcal{B}_d) = \dfrac{1}{1+r}d.S_0$.
Comme

$$\tilde{S}_1(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+r}u.S_0, & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_u\,; \\ \dfrac{1}{1+r}d.S_0, & \text{si } \omega \in \mathcal{B}_d. \end{cases}$$

On a bien $\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_2/\mathcal{F}_1) = \tilde{S}_1$

D'aprés les propriétés de l'espérance conditionnelle par rapport à une partiction on a ensuite :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_3/\mathcal{F}_1) = \mathbb{E}[\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_3/\mathcal{F}_2)/\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_2/\mathcal{F}_1) = \tilde{S}_1$$

3.5 Les trajectoires dans le modèle de CCR

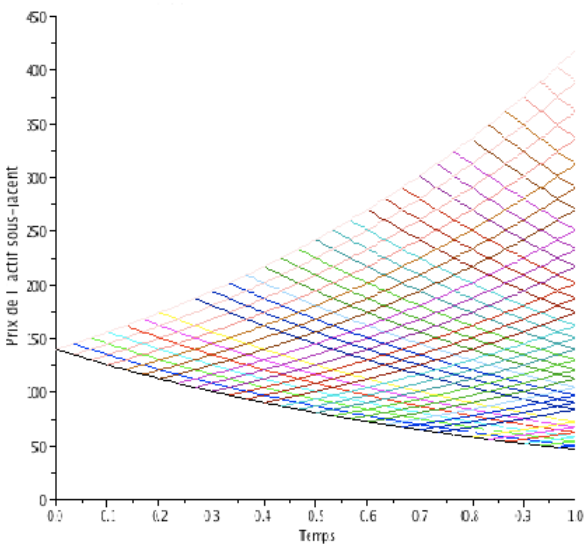
Dans cette partie, nous nous intéressons à l'impact des hypothèses faites dans le modèle de Cox Ross Rubinstein sur les trajectoires de l'actif sous-jacent.

La marche de CRR, S_n est définie par sa valeur initiale S_0 et la relation : $S_{n+1} = US_n$ où $U \in \{up = e^{\sigma/\sqrt{N}}, down = e^{-\sigma/\sqrt{N}}\}$, avec σ est une constante strictement positive appelée **volatilité** de l'actif et N est le nombre d'étapes.

$(\ln(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$ définit donc une marche aléatoire sur $\frac{\sigma}{N}\mathbb{Z}$. Autrement dit, la marche de CRR est une marche aléatoire géométrique.

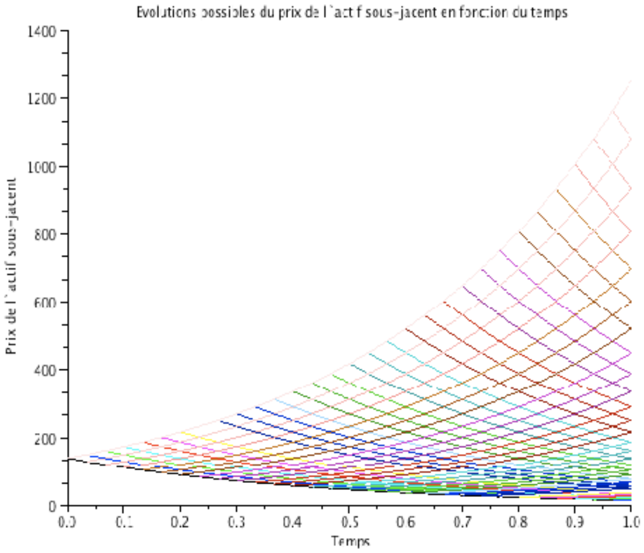
Remarque 3.5.1 *dans le modèle de Black-Scholes, l'évolution du cours de l'actif sous-jacent est modélisée par les trajectoires d'un mouvement brownien géométrique. Or, le mouvement brownien géométrique peut être vu comme la limite continue d'une marche aléatoire géométrique.*

Dans un premier temps on s'intéresse à l'allure générale de l'arbre de CRR : On prend $S_0 = 140, N = 30, \sigma = 0.2$ et $p = 0.5$. On obtient l'arbre suivant :



On voit que le prix de l'actif sous-jacent prend des valeurs entre comprises 46.8 euro et 418.7 euro. Voyons maitenant l'impact d'une augmentation de la volatilité sur les évolutions des cours de l'actif sous-jacent.

Pour $\sigma = 0.4$ on obtient :



La volatilité passe de 20% à 40%. On observe que le prix de l'actif sous-jacent prend des valeurs comprises entre 15.6 et 1252. On constate à partir de ces arbres que plus **la volatilité** de l'actif est grande plus la variance de la loi de l'actif sous-jacent est grande.

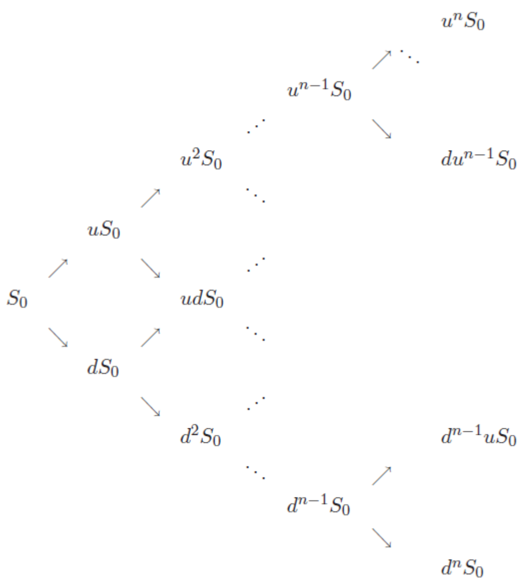
3.6 Modèle binomial à N période

On reprend la même modélisation que dans les sections précédentes mais dans un monde a n période. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divise en N périodes $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$. Le marché est compose de 2 actifs,

1. un actif sans risque S_t^0 :

$$1 \quad \longrightarrow \quad (1+r) \quad \longrightarrow \quad (1+r)^2 \quad ... \quad (1+r)^N$$

2. et un actif risqué S_t :



Alors pour N période :

1. Un call européen vaut :

$$C = \frac{1}{(1+r)^N} \left[\sum_{k=0}^{N} C_N^k \pi^k (1-\pi)^{N-k} \max\left(0; u^k d^{N-k} S_0 - K\right) \right]$$

D'où
$$C = \frac{1}{(1+r)^N} \left[\sum_{k=m}^{N} C_N^k \right] \pi^k (1-\pi)^{N-k} \left(u^k d^{N-k} S_0 - K\right)$$

On peut la réecrire sous la forme suivante :

$$C = S_0 \left[\left(\sum_{k=m}^{N} C_N^k \right) \left(\tfrac{\pi\, u}{(1+r)} \right)^k \left(\frac{(1-\pi)d}{1+r} \right)^{N-k} \right] - \frac{K}{(1+r)^N} \left[\sum_{k=m}^{N} C_N^k \pi^k (1-\pi)^{N-k} \right]$$

On note θ la fonction : $\quad \theta(m,N,\pi) = \displaystyle\sum_{k=m}^{N} C_N^k \pi^k (1-\pi)^{N-k}.$

Donc, la formule s'ecrit :

$$C = S_0\, \theta \left(m, N, \tfrac{\pi(u)}{(1+r)} \right) - \frac{K}{(1+r)^N}\, \theta\,(m,N,\pi)$$

et m est le plus petit entier tel que : $u^m\, d^{N-m} > K$, c'est à dire, $m > \dfrac{\ln(\frac{K}{s_0.d^N})}{\ln(\frac{u}{d})}$

2. Un put européen vaut

$$P = \frac{1}{(1+r)^N} \left[\sum_{k=0}^{N} C_N^k \pi^k \,(1-\pi)^{N-k} max \left(0; k - u^k d^{N-k} S_0\right) \right]$$

3.6.1 Stratégie de couverture

En notant $f_{[\omega]}$ la valeur de l'option (call ou put) dans l'état $[\omega]$, le nombre de sous-jacent nécessaire à la couverture de l'option dans l'état $[\omega]$:

$$\frac{f_{[\omega]u} - f_{[\omega]d}}{u.N_u([\omega]).N_d([\omega]).S_0 - d.N_u([\omega]).N_d([\omega]).S_0}$$

Lorsque N tend vers l'infini : Le passage au continu

On commence par introduire les notations suivantes : R représente 1 plus le taux dintérêt instantané entre les instants 0 et T, r désigne 1 plus le taux d'intérêt sur une période et plus $r^N = R^T$, d'où

$$r = e^{\ln(R)T/N}$$

Si $R = 1 + \mathfrak{R}$ avec $\mathfrak{R}$ petit on a :

$$r = e^{\mathfrak{R}T/N}$$

Alors, nous avons aussi besoin de définir p, u et d, donc notons J la variable aléatoire représentant le nombre de fois où le cours de l'action a monté dans l'arbre. On a :

$$\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right) = \ln\left(u^J d^{N-J}\right) = J\ \ln\left(\frac{u}{d}\right) + N\ \ln(d)$$

D'où :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\ln\left(\frac{S_N}{S_0}\right)\right] = \ln\left(\frac{u}{d}\right)\ \mathbb{E}(J) + N\ \ln(d) \\ Var\left[\ln(\frac{S_N}{S_0})\right] = \ln\left(\frac{u}{d}\right)^2\ Var[J] \end{cases}$$

Par définition on a $\mathbb{E}[J] = Np$ et $Var[J] = Np(1-p)$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathbb{E}\left[\ln(\frac{S_N}{S_0})\right] = \left(p\ \ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln(d)\right) N = \tilde{\mu}N \\ Var\left[\ln(\frac{S_N}{S_0})\right] = p(1-p)\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2 N = \tilde{\sigma}^2 N \end{cases}$$

Si on veut maintenant faire tendre N vers l'infini au doit faire face au problème suivant : trouver u, d et p tels que les deux valeurs ci dessus ne tendent ni vers 0 ni vers l'infini quand N tend vers l'infini.

Autrement dit on veut choisir u, d et p tels que : $\begin{cases} \left(p\ \ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln(d)\right) N \ \longrightarrow_{N\to\infty}\ \mu T \\ p(1-p)\ln\left(\frac{u}{d}\right)^2 N \ \longrightarrow_{N\to\infty}\ \sigma^2 T \end{cases}$

Ces relations sont vérifiées pour : $\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\ p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}} \end{cases}$

On peut maintenant étudier le comportement asymptotique de $\theta\,(m, N, \pi)$. La méthode étant identique pour le terme $\theta\left(m, N, \dfrac{\pi(u)}{(1+r)}\right)$.

On note $(X_1, ..., X_N)$ un échantillon de N variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre π.

$$\theta(m, N, \pi) = \Sigma_{k=m}^{N} C_N^k\ \pi^k\ (1-\pi)^{N-k} = P\left(\Sigma_{i=1}^{N}\ X_i \geq m\right)$$

On a donc :

$$\theta(m, N, \pi) = P\left(\Sigma_{i=1}^{N}\ X_i \geq m\right) = P\left[\frac{\Sigma_{i=1}^{N} X_i - N\ \pi}{\sqrt{N\ \pi(1-\pi)}} \geq \frac{m - N\ \pi}{\sqrt{N\ \pi(1-\pi)}}\right]$$

.

Et $\dfrac{\Sigma_{i=1}^{N}\ X_i - N\ \pi}{\sqrt{N\ \pi(1-\pi)}} \longrightarrow_{N\to\infty} \mathcal{N}(0,1)$ (Théorème central limite).

Déterminons la limite de $\dfrac{m - N\ \pi}{\sqrt{N\ \pi(1-\pi)}}$ quand N tend vers l'infini.

Par définition on a : $m = \inf\{k \in \{0, ..., N\},\ u^k\ d^{N-k} > K\}$

On a donc : $\begin{cases} u^m\ d^{N-m} > K \\ u^{m-1}\ d^{N-m+1} < K \end{cases}$

Avec : $\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} \end{cases}$

On en déduit : $\begin{cases} m \geq \dfrac{N}{2} + \sqrt{\dfrac{N}{T}}(\dfrac{\ln(K)}{2\sigma}) \\ m < \dfrac{N}{2} + \sqrt{\dfrac{N}{T}}(\dfrac{\ln(K)}{2\sigma}) + 1 \end{cases}$

D'où : $m = \dfrac{N}{2} + \sqrt{\dfrac{N}{T}}(\dfrac{\ln(K)}{2\sigma}) + o(\sqrt{N})$

De plus comme $\pi = \dfrac{(1+r)-d}{u-d}$, avec $r = e^{\frac{RT}{N}}$ on obtient par un développement limité que :

$$\pi = \frac{\dfrac{RT}{N} + \sigma\sqrt{\dfrac{T}{N}} - \dfrac{\sigma^2 T}{N} + o(\dfrac{1}{N})}{\dfrac{2\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{N}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{N}})}$$

Alors,

$$\pi = \frac{R}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{N} + o(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

On en déduit que : $\quad m - N\,\pi = \dfrac{\sqrt{NT}}{2\sigma}(\dfrac{\ln(K)}{T} - R) + \dfrac{\sigma\sqrt{NT}}{2} + o(\sqrt{N})$

et

$$\sqrt{N\,\pi(1-\pi)} = \frac{\sqrt{N}}{2}\sqrt{1 + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}$$

D'où :

$$\frac{m - N\,\pi}{\sqrt{N\,\pi(1-\pi)}} \;\longrightarrow\; \frac{\dfrac{\ln(K)}{\sqrt{T}} - R\sqrt{T}}{\sigma} + \sigma\sqrt{T} = -\zeta + \sigma\sqrt{T}$$

Donc, $\theta(m, N, \pi) \;\longrightarrow\; F(\zeta - \sigma\sqrt{T})$ quand N tend vers l'infini, où F est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. On montre de la même manière que

$$\theta\left(m, N, \frac{\pi(u)}{(1+r)}\right) \;\longrightarrow\; F(\zeta)$$

.

Conclusion :

Dans le modèle de Cox Ross Rubinstein à N périodes le prix du Call Européen à l'instant 0 converge vers la limite

$$C = S_0.F(\zeta) - K.\tfrac{1}{(1+r)^N}.F(\zeta - \sigma\sqrt{T})$$

On reconnaît la formule obtenue dans le modèle de Black-Scholes. On remarque que cette formule dépend uniquement de la volatilité. Ce résultat souligne l'intérêt du modèle de Cox-Ross-Rubinstein comme approximation du modèle en temps continue de Black-Scholes. En effet, les calculs dans CRR peuvent s'effectuer de manière purement algorithmique.

3.7 Marchés viables et marchés complets

Cette section est consacrée aux résultats qui permettront d'attribuer une valeur théorique aux produits dérivés.

3.7.1 Notion de marché viable

Définition 3.7.1 *On dit que le marché viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.*

Théorème 3.7.1 *Un marché est viable si et seulement si il existe une probabilité π équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Exemple de marché viable

Exemples 3.7.1 *Cet exemple à deux parties :*
Première partie : *On suppose que le taux d'intérêt de l'actif sans risque est nul ($r = 0$). Dans cet exemple, les prix actualisés et non-actualisés sont les mêmes. Entre deux instants successifs, les prix peuvent évoluer du prix S_n vers deux valeurs définies comme suit :*

1. *Soit $S_{n+1} = S_n u$ avec une probabilité p compris entre 0 et 1.*
2. *Soit $S_{n+1} = S_n d$ avec une probabilité $1 - p$.*

On suppose que $u > d > 0$, on cherche pour quelles valeurs de u et d le marché ainsi défini est viable.
La condition pour que la suite des prix actualisés de l'actif risqué soit une martingale sous π s'écrit :

$$\mathbb{E}_\pi(\tilde{S}_{n+1}) = (\pi u + (1 - \pi)d) = \tilde{S}_n.$$

Soit encore :

$$\pi = \frac{1-d}{u-d}$$

Comme on cherche $\pi \in]0,1[$ *et que l'on a supposé* $u > d > 0$*, la condition ci-dessus est équivalente aux deux conditions suivantes :*

$$u > 1 \qquad \text{et} \qquad d < 1$$

Le marché est donc viable lorsque $0 < d < 1 < u$*.*

Deuxième partie : *On cheche à établir le même résultat mais sans utiliser le théorème sur les marchés viables. Différents cas sont étudiés.*
Alors, on suppose que $d > 0$ *dans tous les cas :*
Premier cas : *on suppose que* $d > 1$ *et* $u > d$*, il suffit de décider de placer toute la valeur du portefeuille sur l'actif risqué pour avoir, à coup sûr. Un portefeuille de valeur terminale supérieure à sa valeur initiale. En effet on a alors :*

$$\xi_0 = \phi_0 S_0$$

et

$$\xi_N = \phi_0 S_N$$

Et comme :

$$S_N \geq S_0 d^N > S_0$$

On a, quelle que soit la réalisation de la suite $(S_n)_n$ *:*

$$\xi_N = \xi_0$$

On a donc mis en évidence une stratégie d'arbitrage consistant à tout investir sur l'actif risqué.

Deuxième cas : *on suppose* $u < 1$ *et toujours* $0 < d < u$*.*
Si $u < 1$*, alors on peut construire une stratégie d'arbitrage comme suit. On choisit* ϕ_0 *négatif. Par exemple* $\phi_0 = -1$ *et on garde le portefeuille ainsi constitué jusqu'à l'instant* N *:*

$$\xi_0 = -S_0 + \phi_0^c R_0$$

Dans tous les cas possibles, $S_N \leq S_0 u^N < S_0$. On a alors :

$$\xi_N = -S_N + \phi_0^c R_0 > \xi_0$$

Remarque 3.7.1 *On rappelle que dans cet exemple $R_n = R_0$ pour tout n car $r = 0$.*

Troisième cas : *on suppose que $d < 1 < u$.*
La valeur du portefeuille (autofinancé) constitué varie d'un instant à l'autre comme suit :

$$\xi_{n+1} - \xi_n = \phi_n(S_{n+1} - S_n)$$

et comme S_{n+1} peut être inférieur ou supérieur à S_n, on ne peut choisir ϕ_n permettant de gagner à coup sûr : il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.
Alors, on vient de trouver que le modèle défini dans cet exemple est viable lorsque $d < 1 < u$.

3.7.2 Simulation des options dans un marché viable

Définition 3.7.2 *On dit qu'un actif est* ***simulable*** *s'il existe une stratégie admissible dont la valeur à l'instant N est égale à celle de l'actif, quelles que soient les réalisations de la suite aléatoire des prix du sous-jacent.*

Définition 3.7.3 *Un actif* ***conditionnel*** *est un contrat qui procure à son détenteur un gain à l'échéance, qui est une variable aléatoire connue à cet instant final et dépendante du sous-jacent.*

L'orsqu'un actif conditionnel est simulable, il existe une stratégie admissible de valeur finale la valeur **h** de l'actif conditionnel. Cela équivaut à l'existance d'une suite prévisible $\bar{\phi} = (\bar{\phi}_1, ..., \bar{\phi}_n)$ telle que :

$$\xi_0 = \bar{\phi}_1 S_0 + \bar{\phi}_1^c R_0$$

et

$$\xi_N = \bar{\phi}_N S_N + \bar{\phi}_N^c R_N = h$$

On suppose que l'on a un actif conditionnel simulable dans un marché viable et on se place sous la probabilité π on a :

$$\tilde{\xi}_N(\bar{\phi}) = \frac{h}{(1+r)^n}$$

Et comme :

$$\tilde{\xi}_{n+1} - \tilde{\xi}_n = \bar{\phi}_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n)$$

le portefeuille apparaît comme une transformée de la martingale $(\tilde{S}_n)_n$ sous π. C'est donc aussi une martingale sous π. On note $\mathbb{E}_\pi$ les espérances calculées sous la mesure de probabilité π. On a ici :

$$\mathbb{E}^0_\pi(\tilde{\xi}_N(\bar{\phi})) = \tilde{\xi}_0(\bar{\phi}) = \xi_0(\bar{\phi})$$

Donc finalement :

$$\xi_0(\bar{\phi}) = \mathbb{E}^0_\pi(\frac{h}{(1+r)^n})$$

Résultat : cette realation signifie que, dans un marché viable, la valeur initiale d'un portefeuille de simulation d'un actif conditionnel est égale à l'espérance sous la probabilité martingale du pay-off de cette option (européenne). Autrement dit, si on dispose à l'instant 0 d'une somme d'argent égale à cette espérance , on constitue un portefeuille qui peut être géré de manière admissible et qui a à l'instant final, de manière sûre c'est la valeur de l'option.
Notation : Ce résulat nous permet de parler aussi à "**portefeuille de simulation**" que de "**portefeuille de réplication**" ou encore de "**stratégie de réplication**".

3.7.3 Notion de marché complet

Les marchés viables dans lesquels les actifs conditionnels sont caractérisés comme des marchés complets.

Définition 3.7.4 *On dit que le marché est complet si tout actif conditionnels défini par son pay-off à l'échance h est simulable.*

Théorème 3.7.2 *Un marché viable est complet si et seulement si, il existe une seule probabilité π équivalente à P sous lesquels les prix actualisés des actifs sont des martingales.*

Exemple de marché complet

A l'instant 0, le prix de l'actif sous-jacent est S_0. On suppose qu'à linstant 1, l'actif suos-jacent peut valoir soit $S_1^+ = S_0 u$ ($u \geq 1$) avec la probabilité p, soit $S_1^- = S_0 d$ avec la probabilité $1-p$. A l'instant initial, on vend un call européen, option d'achat dont le prix d'exercice, ou strike, est K. L'échéance correspond à l'instant 1. On suppose que $K = S_0$, c'est-à-dire que l'option est "à la monnaie". On vend l'option à un prix égal à C_0 à l'instant 0. On utilise cette somme d'argent C_0 pour constituer un portefeuille de valeur initial ξ_0 qui contient une certaine quantité d'actif sous-jacent ϕ_0 et une somme d'argent placée sur un compte à revenu sûr et égal au taux d'intérêt pour un placement sans risque. On suppose, toujours pour simplifier mais aussi sans perte de généralité, que le taux sans risque est égal à 0%. On a donc :

$$C_0 = \xi_0 = \phi_0 S_0 + \phi_0^c R_0.$$

A l'échéance, il y a deux possibilités :

1) soit $S_1 = S_0 u \geq K$: dans ce cas, l'acheteur va exercer l'option et il faut lui remettre la somme d'argent $S_0 - K$. Donc, $C_1^+ = S_0 u - K = S_0(u-1)$. Cette possibilité est affectée de la probabilité p.

2) soit $S_1 = S_0 d \leq K$: dans ce cas, l'acheteur ne va pas exercer l'option et aucune somme d'argent ne lui remise. Donc $C_1^- = 0$. Cette possibilité est affectée de la probabilité $1-p$.

⋆ **Première approche : constitution d'un portefeuille de couverture**

Dans une première approche, il faut essayer de constituer le portefeuille de couverture ou de simulation afin que sa valeur ξ soit égal à celle de l'option à l'échéance, quel que soit le prix du marché. Donc on voudrait que :

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_1^+ & = & S_0(u-1) & = & \phi_0 S_1^+ + \phi_0^c R_0 & = & \phi_0 S_0 u + \phi_0^c R_0 \\ \xi_1^- & = & 0 & = & \phi_0 S_1^- + \phi_0^c R_0 & = & \phi_0 S_0 d + \phi_0^c R_0 \end{array}$$

Les deux équations ci-dessus définissent un système de deux équations à deux inconnues ϕ_0 et ϕ_0^c. Alors, la résolution de système donne :

$$\phi_0 \quad = \quad u\frac{u-1}{u^2-1} \quad = \quad \frac{u}{u+1}$$

et

$$\phi_0^c R_0 \quad = \quad -\frac{u-1}{u^2-1}S_0 \quad = \quad -\frac{S_0}{u+1}$$

La valeur initiale du portefeuille , qui est aussi la valeur de l'option, est donc :

$$C_0 = \phi_0 S_0 + \phi_0^c R_0 = S_0\frac{u-1}{u+1}$$

Ce qui entraîne à dire que tous les actifs du marché (actif sans risque, actif sous-jacent et actif conditionnel) sont simulables. Le marché est donc **complet**.

$\star$ **Seconde approche : utilisation des caractérisations de marché complet et viables**

On sait qu'un marché est complet si et seulement si il existe une unique probabilité π équivalente à P sous laquelle les prix des actifs sont des martingales, alors :

$$\mathbb{E}_\pi^0(S_1) = S_0$$

soit :

$$\pi u + (1-\pi)d = 1$$

soit encore :

$$\pi = \frac{1}{1+u}$$

Ainsi la valeur π est définie de manière unique par l'équation ci-dessus : le marché est viable et complet. On sait alors que la valeur de l'option est égal à l'espérance du pay-off sous la probabilité risque neutre :

$$C_0 = \mathbb{E}_\pi^0(\max(S_1-K,0)) = \pi(S_0u - S_0) + (1-\pi)\times 0 = S_0\frac{u-1}{u+1}$$

On trouve donc la valeur du **portefeuille de réplication**.

3.7.4 Relation de parité Call-Put pour les européennes

Dans un modèle discret de marché complet, la valeur théorique d'un call européen à l'instant initial (t = 0) est donnée par :

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\,\mathbb{E}^0_\pi(\max(S_N - K, 0))$$

Pour un put, on a la relation équivalente :

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\,\mathbb{E}^0_\pi(K - \max(S_N, 0))$$

La différence entre ces deux relations donne :

$$C_0 - P_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\,\mathbb{E}_{0\pi}(\max(S_N - K), 0) - \max(K - S_N, 0))$$

Or on a :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad \max(x - K, 0) - \max(K - x, 0) = x - K$$

Donc, la différence de valeur entre le call et le put se simplifie :

$$\begin{aligned} C_0 - P_0 &= \frac{1}{(1+r)^n}\,\mathbb{E}^0_\pi(S_N - K) \\ &= \frac{1}{(1+r)^n}\,\mathbb{E}^0_\pi(\tilde{S}_N(1+r)^n) - \frac{k}{(1+r)^n} \\ &= \mathbb{E}^0_\pi(\tilde{S}_N) - \frac{k}{(1+r)^n} \end{aligned}$$

Comme de plus la suite $(\tilde{S}_n)_n$ des prix actualisés est une martingale sous la probabilité π, on a simplement :

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{k}{(1+r)^n}$$

Cette relation est connue sous le nom de relation de **parité call-put**. Elle permet de calculer la valeur d'une des options pour déterminer l'autre.

3.7.5 Application à la valeur d'un portefeuille

On reprend le portefeuille autofinancé $\xi(\phi)$ dont la valeur dépend de la stratégie de gestion ϕ. On note $\tilde{\xi}_n$ sa valeur à chaque instant n actualisée à l'instant initial 0. On a alors :

$$t = 0 \qquad \tilde{\xi}_0 = \phi_1^c R_0 + \phi_1 S_0$$

alors, pour $t = \tau$:

$$\tilde{\xi}_1 = \phi_1^c R_0 + \phi_1 \tilde{S}_1 = \phi_2^c R_0 + \phi_2 \tilde{S}_1$$

soit encore pour $t = (n-1)\tau$:

$$\tilde{\xi}_{n-1} = \phi_{n-1}^c R_0 + \phi_{n-1} \tilde{S}_{n-1} = \phi_n^c R_0 + \phi_n \tilde{S}_{n-1}$$

d'où pour $t = n\tau$

$$\tilde{\xi}_n = \phi_n^c R_0 + \phi_n \tilde{S}_n = \phi_{n+1}^c R_0 + \phi_{n+1} \tilde{S}_n$$

on en déduit pour $t = N\tau$ que :

$$\tilde{\xi}_N = \phi_N^c R_0 + \phi_N \tilde{S}_N = \phi_{N+1}^c R_0 + \phi_{N+1} \tilde{S}_N.$$

On rappelle que l'on choisit $(\phi_n)_{1 \leq n \leq N}$ à chaque date $n-1$, ce qui veut dire que la suite $(\phi_n)_n$ est prévisible. Ce choix détermine, en fonction de la réalisation S_n de la suite $(S_n)_n$, la valeur de portefeuille :

$$\tilde{\xi}_{n-1} = \phi_n^c R_0 + \phi_n \tilde{S}_{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\xi}_n = \phi_n^c R_0 + \phi_n \tilde{S}_n$$

D'où :

$$\tilde{\xi}_n - \tilde{\xi}_{n-1} = \phi_n (\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})$$

Et donc pour la valeur du portefeuille à l'instant N :

$$\tilde{\xi}_N(\phi) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \Delta \tilde{S}_n + \tilde{\xi}_0(\phi)$$

D'aprés l'équation ci-dessus, on constate que si la suite des prix actualisés de l'actif risqué $(\tilde{S}_n)_n$ est une martingale, alors la suite des valeurs actualisées du portefeuille est la transformée de la stratégie de gestion $(\phi_n)_n$ par la martingale des prix actualisés de l'actif risqué.

Théorème 3.7.3 *Si la suite des prix actualisés $(\tilde{S}_n)_{0\leq n\leq N}$ est une martingale alors la suite des valeurs actualisées du portefeuille $(\tilde{\xi}_n(\phi))_{0\leq n\leq N}$ est aussi une martingale.*

Preuve : En effet, dans l'équation ci-dessus, la suite apparaît comme une transformée de la martingale et :

$$\mathbb{E}(\tilde{\xi}_{n+1} - \tilde{\xi}_n) = \mathbb{E}(\phi_{n+1}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n)) = \phi_{n+1}(\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n))$$

Alors, la suite $(\tilde{\xi}_n(\phi))_{0\leq n\leq N}$ est une martingale.

Chapitre 4

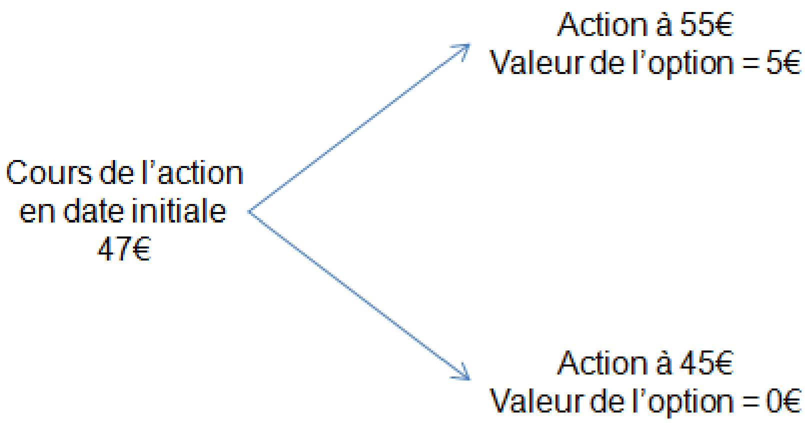
Exemples d'applications

Dans ce chapitre , nous allons traduire les concepts mentionnés précédemment sous la forme d' exemples illustratives et expliquer la dinamyque de l'actif financier sous le modèle de Cox-Ross et Rubinstein.

Pour cet exemple on va présenter tout simplement le groupe **Safran** comme suit :
Safran est un grand groupe industriel et technologique français, présent au niveau international dans les domaines de **l'aéronautique**, **astronautique**, de la défense et de la sécurité. Il fut créé en 2005 lors de la fusion entre **Snecma** et **Sagem**, depuis septembre 2011.

Exemples 4.0.2 *Prenons l'exemple d'une option d'achat sur le groupe industriel Safran. Ce call européen porte sur une échéance de 6 mois, avec un prix d'exercice de 50 euro. Le cours de l'action est actuellement de 47 euro et le taux d'intérêt sans risque pour une période de 6 mois est de* 5% *per annum. Les analystes qui suivent le titre pensent que celui-ci peut évoluer vers seulement deux prix dans un semestre : soit 55 euro si les résultats financiers sont à la hauteur des espérances, soit 45 euro si la compagnie n'atteint*

pas ses objectifs. Le call européen ne sera donc dans la monnaie que dans le premier cas de figure, et il revêtira alors une valeur de $55 - 50 = 5$ *euro. Dans l'autre cas, il termine hors de la monnaie et sa valeur sera nulle.*



S'il n'existe aucune opportunité d'arbitrage, il est alors possible de constituer un portefeuille sans risque contenant à la fois une certaine quantité de l'action et une unité de l'option, de façon à ce que ce portefeuille ait une rentabilité égale au taux sans risque. Puisque le marché ne contient que ces deux actifs, il est dit " complet ". Combien faut-il d'unités Δ *d'actions ?*

Pour répondre à cette question, il suffit simplement de résoudre l'équation où un portefeuille contient Δ *actions pour une option vendue, et de constater les deux valeurs finales potentielles du portefeuille. Premier scénario,* Δ *actions à 47 euro sont achetées initialement et deviennent* Δ *actions à 55 euro à l'échéance, avec un call ayant une valeur de 5 euro. Deuxième scénario,* Δ *actions à 47 euro sont achetées initialement et deviennent* Δ *actions à 45 euro à l'échéance, avec un call n'ayant aucune valeur puisqu'ayant terminé en dehors de la monnaie. Autrement dit :*

$$55\Delta - 5 = 45\Delta$$

D'où :

$$\Delta = 0,5$$

En détenant $0,5$ *action pour un call vendu, un portefeuille serait donc sans risque. Dans le cas où l'action grimperait à 55, un tel portefeuille vaudrait* $55 * 0,5 - 5 = 22,5$ *euro.*

Dans le cas où l'action descendrait à 45, un tel portefeuille vaudrait $45 * 0,5 = 22,5$ *euro une valeur équivalente à l'autre scénario, ce qui est bien ce que nous cherchions.*

Ce portefeuille sans risque doit être actualisé, logiquement, au taux sans risque, afin de connaître sa valeur initiale. Celle-ci est de :

$$22,5 * e^{-5\% * 6/12} = 21,94 \ \ euro$$

Avec f comme valeur de l'option en date initiale, le portefeuille est ainsi constitué :

$$47 * 0,5 - f = 23,5 - f$$

Ce portefeuille est égal à la valeur présente du portefeuille sans risque calculé précédemment. Autrement dit :

$$21,94 = 23,5 - f$$

et

$$f = 1,56 \ \ euro$$

L'option d'achat ayant un prix d'exercice à 50 euro et une maturité de 6 mois, calculé à l'aide de cet arbre binomial à une période, et sous réserve d'absence d'opportunité d'arbitrage, vaut 1,56 euro.

Exemples 4.0.3 *On cherche a évaluer un call européen d'échance 3 mois et de prix d'exercice 21 euro . Le cours de l'action est actuellement 20 euro. Pour simplifier, on suppose que, dans 3 mois, le cours de l'action pour augmenter de* 10% *au baisser de* 10%*. On suppose par ailleurs que le taux sans risque est de* 12% *annuel.*
Ici, $K = 21, \quad u = 1,1, \quad d = 0,9, \quad r = 0,12, \quad \Delta t = 1/4,$

- $c_u = \max(0; (1,1 * 20) - 21) = 1,$
- $c_d = \max(0; (0,9 * 20) - 21) = 0$

On a donc $\quad \pi = \frac{(1+0,12)^{1/4} - 0,9}{1,1-0,9} = 0,64,$ *alors :*
$c = \frac{1}{(1+0,12)^{1/4}}(0,64 * 1 + 0,36 * 0) = 0.622$ *euro*

Exemples 4.0.4 *Le cours actuel d'une action est de 100 euro. Sur chacun des 2 prochains mois on estime que les cours vont hausser de* 1% *ou baisser de* 1%*. Le taux sans* *risque est de 1%. Quelle est la valeur d'une option européenne d'achat (call) d'échéance 2 mois avec prix d'exercice 99 euro ?*

On a, $S_0 = 100, \Delta t = 12, u = 1,01, d = 0,99, r = 0,01, K = 99$

Donc : $\pi = \frac{(1,01)^{1/6} - 0,99}{1,01 - 0,99} = 0,54$

Par ailleurs,

$$c_{uu} = \max(0; (1,01)^2(100) - 99) = 3,01$$

et

$$c_{ud} = c_{du} = \max(0; (1,01)(0,99)(100) - 99) = 0,99$$

et

$$c_{dd} = \max(0; (0,99)^2(100) - 99) = \max(0; 98,01 - 99) = 0$$

Ainsi le call européen considéré vaut :

$$c = \frac{1}{(1 + 0,01)^{1/6}}[(0,54)^2 * 3,01 + 2(0,54)(0,46)0,99] \simeq 1,37 \ \ euro$$

Stratégie de couverture

- On se sert de ce qu'on connait c'est à dire c_{uu}, c_{ud}, c_{du} et c_{dd}
- En répliquant la méthodologie exposé dans le modèle à une période, il apparait que :
  - Si on est dans l'étatu en première période, en détenant Δ action du sous-jacent, le portefeuille du vendeur du call vaut :
    - $\longrightarrow 102,1\Delta - 3,01$ dans l'état uu.
    - $\longrightarrow 99,9\Delta - 0,99$ dans l'état ud.
  - Il s'agit donc d'un portefeuille sans risque si
    $$102,1\Delta - 3,01 = 99,9\Delta - 0,99 \Leftrightarrow \Delta = \frac{3,01 - 0,99}{102,1 - 99,9}$$
  - De manière analogue on obtient, en cas de baisse du cours en première période
    $$\Delta = \frac{c_{du} - c_{dd}}{u.d.S_0 - d^2.S_0} = \frac{0,99 - 0}{99,99 - 98,01} = 0,5$$
- Il appaarait anisi que la couverture nécessaire à la vente d'un call varie selon la réalisation de la première période

- Question : Combien le vendeur du call doit-il détenir de sous-joucent à la date initiale ?
- Réponse : On calcule c_u et c_d et on applique la même méhodologie :

$$\text{en } t = 0, \quad \Delta = \frac{c_u - c_d}{u.S_0 - d.S_0}$$

- Ici $c_u = \dfrac{1}{(1+0,01)^{1/12}}[(0,54)3,01 + (0,46)0,99] \simeq 2,079$ et

  $c_d = \dfrac{1}{(1+0,01)^{1/12}}[(0,54)0,99 + (0,46)0] \simeq 0,534$
- Ainsi, en $t = 0, \quad \Delta \simeq \dfrac{2,079 - 0,534}{101 - 99} = 0,7725.$

Conclusion

Le développement des options a d'abord été une réponse aux demandes des investisseurs en matière de gestion du risque et de protection face aux fluctuations du marché. La grande souplesse d'utilisation des options et leurs diversités permettent de répondre parfaitement aux besoins des investisseurs, tant sur le choix des couvertures que des spéculations.

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques exemples d'options vanilles (classiques), réparties en deux grandes parties dont on évaluait le prix suivant le modèle binomial de Cox Ross et Rubinstein.

Comme nous l'avons vu, le principal but de ce modèle est de fournir une bonne compréhension des méthodes d'évaluations des options, néanmoins un nombre trop faible de périodes ne permet pas une évaluation correcte de ce prix, mais il faut rappeler que l'informatique ne s'est développée que depuis une vingtaine d'années, et que ce modèle construit en 1979 permettait de se faire rapidement une idée des prix de l'option durant sa période de vie.

Aujourd'hui les options sont des outils indispensables pour tous les professionnels des marchés financiers de plus en plus importants.

Bibliographie

[1] Renaud Bourlès, Mathématiques pour la finance, École Centrale Marseille.

[2] Romuald ELIE, Calcul stochastique appliqué à la finance, Avril 2006.

[3] PR C.MAMOGHLE, OPTIONS ET CONTRATS À TERME, UNIVERSITÉ DE CARTAGE

[4] Mr.Bouasabah Mohammed, Mathématique financières, École Nationale de commerce et de Gestion de Kénitra, 2013-2014.

[5] Bruno *Bouchard*[1], Introduction à lévaluation d'actifs financiers par l'absence d'oportunité d'arbitrage, Université Paris IX-Ceremade-et- CREST-Paris-France, Janvier 2007.

[6] Philippe Bougerol, Modèles stochastiques ET Applications À la finance, 30 Mars 2011.

[7] TAPE GUSTAVE Flaubert : Expert comptable.

[8] M'HAMED EDDAHBI, Marchés financiers à temps discret (Modélisation), Université Cadi ayyad, Mars 2010.

[9] John HULL, Options, futures et autres actifs dérivés, 28 Décembre 2008.

[10] Nicole EL Karoui, Couverture des risques dans les marchés financiers, Ecole Polytechnique-CMAP-Palaiseux cedex, 2003-2004.

[11] E.Temam-P.Tankov, Mathématiques financières (partie I), Université Paris Diderot, 2008/2009.

[12] Huyên PHAM, Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers, Université Paris 7, 2006/2007.

[13] MTH2302D, Loi normale et théorème central limite, S. Le Digabel , École Polytechnique de Montréal, H2016.