



N Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année Univ : 2015/2016



# LA MODÉLISATION FINANCIÈRE EN TEMPS CONTINU

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master Académique**

**Université Dr Tahar Moulay - Saïda**

**Discipline : MATHEMATIQUES**

**Spécialité : Analyse Stochastique, Statistiques des Processus et  
Applications**

par

**Meziane Mohamed**

Soutenu le 29 Mai 2016 devant le jury composé de :

**Mme : Dr.Benziadi Fatima**

**Mr : Dr.Kandouci Abdeljabar**

**Mr : Pr.Gendouzi Toufik**

**Mlle : Benziadi Fatima**

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Présidente

Examineur

Examineur

Encadreur

---

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

﴿...وَمَا تَوْفِیْقِیْ اِلَّا بِاللّٰهِ عَلَیْهِ تَوَكَّلْتُ وَاِلَیْهِ اُنِیْبُ﴾

الآیة 88 من سورة هود

صدق اللّٰه العظیم

---

## *Remerciements & Dédicace*

*Avant tout je remercie, le Dieu tout puissant de mon accordée la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

*Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, d'un grand nombre de personnes, je souhaite ici les en remercier.*

*Je tien d'abord à remercier très chaleureusement mon encadreur de mémoire de fin d'études M<sup>elle</sup> Fatima Benziadi, pour ses précieux conseils et son orientation tout au long de mes recherches.*

*Tous les membres de jury d'avoir participé à la commission des examinateurs en vue d'une évaluation prompte et à sa juste valeur.*

*Je remercie mes chers parents qui m'ont indiqué le bon chemin à entreprendre et qui m'ont encouragé et soutenue tout au long de mon parcours quotidien.*

*Les conseils que je me a prodigué, la patience, la confiance que je a témoignés ont été déterminants dans la réalisation de mon travail de recherche.*

*Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années des études. À ma familles et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.*

*Enfin, je tien à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.*

*Je dédie ce modeste travail à : mes parents*

*Tous mes oncles et tantes, tous mes cousins et cousines.*

*Tous mes enseignants de département de mathématiques.*

*Tous mes camarades de promotion 2015 /2016.*

## Table des figures

<b>Figure 1</b> : Marché financier (Bourse) . . . . .	<b>8</b>
<b>Figure 2</b> : Exemple (Action) . . . . .	<b>13</b>
<b>Figure 3</b> : Exemple (Obligation) . . . . .	<b>14</b>
<b>Figure 4</b> : Calcule sous R la volatilité Historique . . . . .	<b>43</b>
<b>Figure 5</b> : Valeur actuelle du call jusqu'à l'échéance . . . . .	<b>46</b>
<b>Figure 6</b> : Calcule sous R la volatilité implicite . . . . .	<b>47</b>
<b>Figure 7</b> : Calcule sous R la valeur du Call & Put de l'exemple . . . . .	<b>48</b>
<b>Figure 8</b> : Calcule sous R les valeurs Call & Put de l'application du modèle BS . . . . .	<b>50</b>
<b>Figure 9</b> : Simulation du modèle de Black Scholes par la méthode d'Euler . . . . .	<b>52</b>
<b>Figure 10</b> : Code R . . . . .	<b>52</b>
<b>Figure 11</b> : Simulation du modèle de Black Scholes . . . . .	<b>53</b>
<b>Figure 12</b> : Code R . . . . .	<b>53</b>

## Liste des tableaux

<b>Tableau 1</b> : Les données variation de cotations de BNP sur l'année 2011 . . . . .	<b>43</b>
<b>Tableau 2</b> : Les données pour calcul la valeur du contrat d'option par Modèle BS . .	<b>49</b>
<b>Tableau 3</b> : Détermination de la valeur de gain d'une option achat (Call) . . . . .	<b>49</b>
<b>Tableau 4</b> : Détermination de la valeur de gain d'une option vente (Put) . . . . .	<b>50</b>

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux Marchés Financiers</b>	<b>10</b>
1.1	Marché financier . . . . .	10
1.2	Le marché des capitaux . . . . .	10
1.2.1	Marché primaire . . . . .	10
1.2.2	Marché Secondaire . . . . .	11
1.3	Le Marché monétaire . . . . .	11
1.3.1	Le marché interbancaire . . . . .	11
1.3.2	Le marché des titres de créances négociables . . . . .	11
1.4	Classification des marchés financiers selon la liquidité . . . . .	12
1.4.1	Les propriétés des marchés liquides : . . . . .	12
1.4.2	Les propriétés des marchés émergents : . . . . .	12
1.5	Actifs financiers . . . . .	12
1.5.1	Produit primaire . . . . .	13
1.5.2	Produit dérivé . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Éléments de calcul stochastique</b>	<b>17</b>
2.1	Processus Stochastique . . . . .	18
2.1.1	Processus Stochastique en temps continue . . . . .	18
2.1.2	Les différentes notions de convergence . . . . .	20
2.1.3	Martingale . . . . .	21
2.1.4	Temps d'arrêt . . . . .	22
2.1.5	Mouvement Brownien . . . . .	22
2.1.6	Mouvement Brownien et martingales . . . . .	23
2.1.7	Variation totale et quadratique . . . . .	25
2.1.8	Probabilités équivalentes . . . . .	26
2.1.9	Théorème de Girsanov . . . . .	26
2.2	Intégrale stochastique et calcul d'Itô . . . . .	26
2.2.1	Construction de l'intégrale stochastique . . . . .	26
2.2.2	Équations Différentielles Stochastiques . . . . .	28
2.2.3	Calcul d'Itô . . . . .	28

---

<b>3</b>	<b>Modèle de Black Scholes</b>	<b>31</b>
3.1	Notion d'arbitrage et la relation de parité call-put . . . . .	33
3.2	Description du modèle de Black et Scholes . . . . .	33
3.2.1	Stratégie financière . . . . .	37
3.2.2	Stratégie autofinancée . . . . .	37
3.2.3	Probabilité martingale . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Valorisation des options européennes</b>	<b>39</b>
4.1	Valeurs des options vanilles . . . . .	40
4.1.1	Valeur du call européen . . . . .	41
4.1.2	Valeur du put européen . . . . .	42
4.2	Estimation de la volatilité . . . . .	42
4.2.1	la volatilité historique . . . . .	42
4.2.2	la volatilité implicite . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Exemple et Application</b>	<b>48</b>
5.1	Exemple . . . . .	48
5.2	Application . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Simulation</b>	<b>51</b>



La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories :

la finance d'entreprise (corporate finance) et la finance de marché (market finance).

La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques.

Un marché financier est un marché sur lequel des personnes, des sociétés privées et des institutions publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.

Le marché financier primaire repose sur l'émission nouvelle d'actions et d'obligations alors que le marché financier secondaire est lui le marché où s'échangent les titres déjà émis.

C'est ce marché secondaire qui est traité par les bourses des valeurs mobilières (Wall Street par exemple).

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier intitulée « Théorie de la spéculation » et soutenu à la Sorbonne en 1900, après en 1960 Samuelson a eu l'idée de pendre l'exponentielle d'un brownien, jusqu'en 1973 Fisher Black et Myron Scholes publient leurs travaux sur la façon de couvrir une option grâce à la détention du sous-jacent et du cash, afin de construire un portefeuille sans risque, tout en donnant une formule d'évaluation des options, ils ne s'attendent peut être pas à rester dans les annales de la finance. Le modèle peut s'appliquer à un actif suivant un processus stochastique. Ces travaux marquent d'une part la naissance des processus stochastiques à temps continu, et d'autre part celle des stratégies à temps continues pour la couverture de risque en finance. Une des caractéristiques du modèle de Black-Scholes est que le prix de l'action est une fonction continue de temps.

En 1997, Robert Merton et Myron Scholes se voient finalement récompensés par le prix Nobel d'économie (Black ne pouvait être éligible car décédé en 1995).



---

Aujourd'hui, le modèle de Black-Scholes, bien que souvent décrié, est considéré comme une avancée fondamentale pour la finance moderne.

La formule de Black-Scholes est utilisée pour évaluer une option européenne ne payant pas de dividendes. Pour une option d'achat (call) et une option de vente (put).

Le but de ce travail est justement de comment valoriser les options européennes et de trouver l'évaluation des produits dérivés. Pour cela, on va introduire ces notions : calcul stochastique, mouvement Brownien, pour atteindre ce but.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Une introduction où on situe notre travail et son plan.

Le premier chapitre est consacré au vocabulaire du marché financier.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les principales notions de calcul stochastique qui est une extension du calcul différentiel et intégrale classique, dans laquelle les processus à temps continu remplacent les fonctions, et les martingales jouent le rôle des constantes utilisées dans le modèle de Black et Scholes à temps continu, qu'on va l'étudié en détail au prochain chapitre.

Dans le troisième chapitre, on définit le modèle de Black-Scholes dans le cas unidimensionnel avec son analyse mathématiques détaillés.

Le quatrième chapitre est consacré au valorisation des options européennes, pour une option d'achat et une option de vente.

Dans le cinquième chapitre, on donne quelques exemples d'applications.

Finalement nous étudions la simulation du Modèle de Black Scholes.

## Introduction aux Marchés Financiers

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : la finance d'entreprise (**corporate finance**) et la finance de marché (**market finance**). La finance d'entreprise utilise essentiellement des mathématiques simples alors que la finance de marché s'appuie sur des mathématiques complexes et génère de nombreux travaux mathématiques. Nous verrons dans ce chapitre que la notion fondamentale de la finance de marché est le risque et que les mathématiques produisent des outils efficaces de gestion de risque.

### 1.1 Marché financier

**Définition :** Un marché financier est un marché sur lequel des personnes, des sociétés privées et des institutions publiques peuvent négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'offre et la demande.

#### Rôle des marchés financiers :

Les principales caractéristiques d'un marché financier sont :

- La rencontre de deux contreparties (vendeurs et acheteurs).
- La cotation continue des produits financiers.
- L'élaboration de bonnes conditions pour les transactions, en prenant en compte les objectifs opposés des acteurs du marché.

### 1.2 Le marché des capitaux

le marché financier constitue le marché des capitaux à long terme sur lequel se négocient des valeurs mobilières (actions et obligations).

Le marché des capitaux se compose à deux marchés : marché primaire et un marché secondaire .

#### 1.2.1 Marché primaire

Défini comme étant "le marché du neuf " des valeurs mobilières sur lequel l'émetteur d'actions d'obligations ou d'autres types de valeurs lancent leurs opérations avec le concours des banques. ( émissions d'actions pour augmentation des fonds propres des

---

entreprises, lesancements d'emprunts obligataires). Le marché primaire n'a pas de lieu géographique en ce sens qu'il est immatériel et délocalisé.

### 1.2.2 Marché Secondaire

Lieu où se confronte l'offre et la demande de titres entre les entreprises en quête de financement et les épargnants et les investisseurs institutionnels ayant des fonds qu'ils souhaitent placer dans des titres (actions et obligations) inscrits à la cote.

investir en bourse revient à acheter ou vendre des titres en fonction des objectifs recherchés, tels que réaliser un profit rapide en prenant des risques ou avoir une épargne rentable sur le long terme. Au cours de chaque séance de bourse, une même valeur peut voir son cours fluctuer de façon importante.

## 1.3 Le Marché monétaire

Marché où se transigent les titres de dette à court terme dont les caractéristiques sont :

- Échéance d'un an ou moins (sauf pour les obligations fédérales dont l'échéance est moins de 3 ans) ;

- Très surs (le risque est faible) ;

- Liquide.

### 1.3.1 Le marché interbancaire

Les banques qui ont des liquidités excédentaires viennent placer leurs excédents pour dégager une rémunération. Les banques qui ont besoin de monnaie viennent se procurer des fonds soit auprès des banques excédentaires soit auprès de la banque centrale.

### 1.3.2 Le marché des titres de créances négociables

Lieu de rencontre entre les agents disposant de capitaux à court ou à très court terme et des agents ayant besoin de liquidités pour de courte durée. Trois catégories de titres sont négociées : Certificats de dépôts, Billets de trésorerie et Bons du trésor.

#### Les instruments du marché monétaire :

- Les bons du trésor ;

- Les certificats de dépôt ;

- Les papiers commerciaux et financiers ;

- Les acceptations bancaires.

#### Principaux marchés

Il s'agit, par ordre de volumes négociés décroissants :

- **Marchés de taux d'intérêt** : c'est-à-dire les marchés de la dette, qu'il est d'usage de séparer en :

- ▶ **Marché monétaire** : pour les dettes à court terme (moins d'un, deux ou mêmes parfois trois ans à son émission).

---

► **Marché obligataire** : pour les dettes originellement à moyen ou long terme ;

– **Marché des changes** : ou Forex, où l'on échange des devises les unes contre les autres ;

– **Marchés d'actions** : c'est-à-dire des titres de propriété des entreprises .

Et enfin, par tradition, à la frontière avec les marchés organisés de produits de base (en anglais : **commodities**), les marchés de deux métaux précieux, or et argent, bien que ceux-ci soient de moins en moins monétisés et que leurs marchés soient en fait minuscules en regard de la taille désormais atteinte par les autres marchés.

## 1.4 Classification des marchés financiers selon la liquidité

La liquidité d'un marché ou d'un actif de marché peut être caractérisée par le fait que les échanges soient assez nombreux pour qu'un acheteur ou vendeur trouve toujours une contrepartie pour la proposition qu'il fait. Donc et en pratique, la liquidité (liquidity) est un indicateur de la fréquence et du volume des échanges réalisées pour un actif, reflétant le nombre d'offres de marché et la quantité d'intervenants.

Plus un titre est échangé, plus le marché de ce titre est dit liquide. On peut donc aussi classer les marchés selon cette propriété.

### 1.4.1 Les propriétés des marchés liquides :

Les marchés liquides sont généralement établis depuis longtemps. Ils rassemblent l'intervention d'un grand nombre d'acteurs de marchés, et en particulier tous les types d'acheteur potentiels :

**1. Des arbitragistes** : qui cherchent à exploiter des déséquilibres régionaux ou temporels de valeurs d'actifs pour obtenir un profit sûr basé sur leur analyse.

**2. Des gestionnaires de risque (ou Hedgeurs)** : dont l'objectif est de compenser au mieux les risques internes de leur portefeuille.

**3. Des spéculateurs** : qui font des paris sur la valeur futur d'un actif et obtiennent un bénéfice s'ils se réalisent, une perte dans le contraire.

### 1.4.2 Les propriétés des marchés émergents :

Les marchés émergents (immatures en anglais) ou non liquides, sont beaucoup moins stables historiquement, sans pour autant être toujours récents. Ils sont basés sur un environnement économique changeant.

## 1.5 Actifs financiers

Les actifs financiers sont des contrats où les parties s'échangent des flux d'argent :

– **Une quantité donnée d'un actif financier** (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, ou un autre produit dérivé), appelé **actif sous-jacent (underlying asset)**.

- **Prix d'un titre financier (price)** : est le montant convenu entre les deux parties en échange du titre.
- **Maturité ou échéance (Maturity)** : c'est la date à laquelle l'échange doit avoir lieu.
- **Prix de livraison ou prix à terme (dettlement price or forward price)** : le prix auquel l'actif sous-jacent est échangé.

Les transactions peuvent être directes entre le **broker** et le client (**over the counter**) ou sur une place financière organisée telle qu'une bourse (**stock exchange**).

Une bourse est un marché financier institutionnel avec un règlement spécifique choisi de manière à améliorer les conditions des transactions.

### 1.5.1 Produit primaire

un produit primaire est un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre. Il existe deux types de produits primaires : les actions et les obligations.



#### Action (share)

- Une action est un titre de propriété d'une entreprise qui n'est pas remboursable.
- Le prix d'une action est défini par sa cotation en bourse. Une action peut être vendue ou achetée à n'importe quel moment (pendant les heures d'ouverture de la bourse).
  - Le détenteur d'une action devient un associé, proportionnellement au nombre de titres qu'il détient. De plus, l'actionnaire a des droits sur :
    - Le management,
    - Les bénéfices,
    - L'actif social.
  - Les émetteurs des actions sont des entreprises. L'émission d'actions permet de recouvrir son investissement initial et ses bénéfices.
  - Une action est un produit très volatile, lié à la fois aux performances de l'entreprise et à la situation du marché. Sa cotation est constamment réévaluée en fonction de l'offre et de la demande sur les marchés financiers.

#### Type des actions :

##### Actions privilégiées :

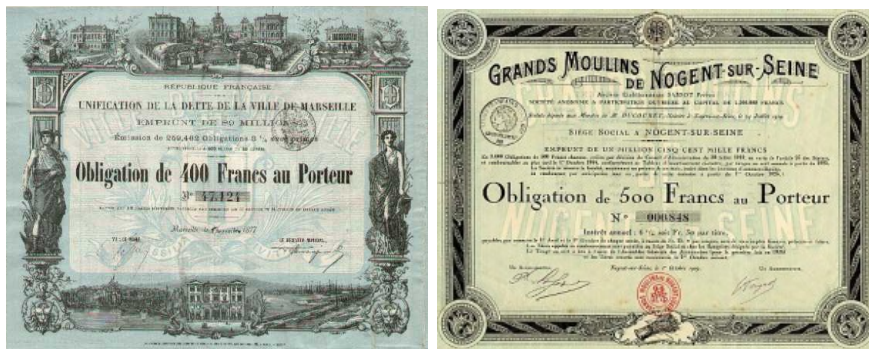
- Versent généralement un dividende trimestriel fixe ;
- Valeur nominale habituellement de 25 \$ ou 50 \$ ;
- Pas de droits de vote ;

- Plus risquées que les obligations et autres titres de dette de la compagnie ;
- Moins risquées que les actions ordinaires.

### Actions ordinaires :

- Versent généralement un dividende trimestriel qui peut varier d'année en année, elles donnent à leurs détenteurs :
  - droit de vote ;
  - droit de recevoir des dividendes ;
  - droit d'être informé, régulièrement, sur la situation présente de l'entreprise, ses perspectives de croissance ;
  - droit au produit de la liquidation de la société.

### Obligation (bond)



L'obligation est un titre financier correspondant à un emprunt pendant un temps fixé dont le risque de défaut (**default risk**) est supposé inexistant lorsque l'obligation est émise par l'état, celle-ci est échangée sur **les marchés obligataires**.

Elle est vendue sur le marché primaire à un prix proche du **montant nominal (la somme empruntée)** puis elle est échangée sur le marché secondaire à un prix qui fluctue. Une obligation est déterminée par :

- Une durée,
- Un taux d'intérêt.

**Remarque :** Le taux d'intérêt d'une obligation est choisi en fonction du risque de faillite de l'institution. Ce risque est évalué grâce à des notations faites par des institutions indépendantes.

Le prix d'une obligation dépend du montant nominal  $M$ , de la date d'échéance, et des coupons.

**Coupons :** ce sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance et qui correspondent à des intérêts sur le nominal.

D'autre terme, le revenu perçu par le détenteur d'une obligation est dit "**intérêt**" et d'une action est "**dividende**".

**Obligation zéro-coupon (zero-coupon bond) :** est une obligation qui ne verse pas des coupons donc à l'échéance, seul le nominal est remboursé.

Lorsqu'il y a suffisamment de zéro-coupons, il est possible de construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, appelée courbe des **taux zéro-coupon** par terme (**zero-rate curve**).

---

Lorsque cette courbe est croissante, cela signifie que le marché attend une rentabilité d'autant plus grande que l'échéance est lointaine, c'est à dire le risque de taux est important. Au contraire, une courbe décroissante signifie que le marché anticipe une baisse des taux. Une courbe plate n'existe jamais en pratique mais signifierait qu'un taux d'intérêt constant dans le temps.

On va considérer cette dernière comme hypothèse par la suite pour simplifier les modèles.

## 1.5.2 Produit dérivé

Un produit dérivé (derivative) ou actif contingent est un titre dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé l'actif sous-jacent.

Il existe une multitude de produits dérivés. Les principaux exemples sont :

**Les forwards, les futures et les options.**

### Contrat a terme (forward)

Est un contrat qui donne à l'investisseur l'obligation d'acheter ou de vendre un titre à un prix défini à l'avance pendant une période fixée.

### Future (futur)

Ce sont des contrats à terme négociables.

Il y a une petite différence entre les contrats à terme et les futures :

- Le forward est payé à maturité, alors que le futures est marqué au marché.
- Le contrat futur est échangé sur un marché organisé, le contrat à terme est de gré à gré.
- Les prix du future et celui du forward sont différents lorsque les taux sont stochastiques.

### Option

Une option est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un bien ou un actif à un cours convenu à l'avance, appelé prix d'exercice à (ou jusqu'à) une date fixée, dite échéance de l'option.

En contrepartie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur de l'option une prime qui est le prix de l'option.

Un tel titre est appelé **option d'achat (call)** ou **option de vente (put)**.

Le sujet porte sur le prix d'une option. Nous nous concentrons maintenant sur ce produit.

Ses principales caractéristiques sont :

- **Le strike**, noté  $K$  : prix d'exercice de l'option, qui est choisi et fixé à l'instant initial.
- **Le prix de l'option** : prime de risque plus marge de l'intermédiaire.
- **La date d'expiration** : notée  $T$  : fin de la période, elle aussi fixée à l'instant initial.
- **La fonction payoff** : fonction qui détermine la transaction finale.
- **Des contraintes annexes**. Par exemple, si le sous-jacent passe un certain niveau, le contrat s'annule (option barrière).

Les options les plus simples, et généralement les plus liquides (les plus vendues), sont les calls et les puts de type européens ou américains. Ces options sont souvent appelées options vanilles. Les autres options, appelées options exotiques, sont généralement beaucoup plus difficiles à préciser.

Les options peuvent être utilisées :

- Soit en couverture de risque de baisse ou hausse,

- 
- Soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse du sous-jacent,
  - Soit pour spéculer sur la volatilité.

On distingue deux grands types des options :

**Option européenne :** Contrat qui donne à son détenteur (celui qui achète le contrat) le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier (sous-jacent) à un prix fixé ou prix d'exercice (strike price) à une date fixée à l'avance (maturité).

**Option américaine :** Contrat qui donne à son détenteur le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif financier à un prix et jusqu'à une date fixé à l'avance.

Ce droit lui même s'achète ou se vend, cela sur un marché d'options (une bourse spécialisée, ou au gré à gré), contre un certain prix, appelé prime en français et premium en anglais.

### **Call et Put européens :**

#### **Option d'achat (call) :**

On appelle option d'achat européenne, ou call européen, le contrat qui confère à son acheteur le droit (mais pas l'obligation) d'acheter un actif risqué à un cours  $K$  fixé à la signature du contrat (prix d'exercice), à la date future  $T$  appelée échéance. L'actif risqué peut être une action, une obligation, un taux de change ou encore une matière première.

#### **Option de vente (put) :**

On appelle option de vente européenne, ou put européen, le contrat qui donne à son détenteur le droit (mais non l'obligation) de vendre une action à la date  $N > 0$  (échéance) au prix  $K$  (prix d'exercice ou strike) fixé à l'avance. Ce contrat a un prix ; il est échangé sur le marché.



## Éléments de calcul stochastique

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'internet, de la télécommunication et bien entendu dans les domaines économiques et financiers.

L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilités dont elle constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très compliqués. Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et les propriétés des processus stochastiques à temps continu accompagnées de quelques exemples qui nous semblent nécessaires pour les chapitres suivants.

Le concept des équations différentielles stochastiques (EDS) en anglais; stochastic differential equations (SDE) généralise celui des équations différentielles ordinaires aux processus stochastiques. La formalisation théorique a posé d'énormes problèmes aux mathématiciens et il a fallu donc attendre les années 1940 et les travaux du célèbre mathématicien Itô sur l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue-Stieljes aux processus stochastiques selon un mouvement brownien. Notre but consiste à la présentation d'une étude sur les équations différentielles stochastiques et ses applications dans le modèle de Black scholes (chap.3) et pour atteindre ce but, il est nécessaire d'illustrer les propriétés de l'intégrale stochastique .

Dans ce chapitre on va donner quelques notions mathématiques qui seront utiles dans le prochain chapitre

Dans ce contexte, on construira cette intégrale et on donnera un sens à l'expression de l'intégrale :  $\int_s^T X(s)dW(s)$  où  $X(s)$  est un processus stochastique satisfaisant les propriétés suffisamment régulières. à partir de la théorie de l'intégration, on formule les expressions des EDS qui se sont utilisées dans les différentes branches des sciences fondamentales et dans la théorie de la modélisation stochastique. Ces équations ayant la forme suivante :

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dW(t) \quad (2.1)$$

où  $(W(t); t \geq 0)$  est un mouvement brownien, Par une simple intégration, on trouve

$$X(t) = X(0) + \alpha \int_0^t X(s)ds + \beta \int_0^t X(s)dW(s). \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) représente l'évolution exponentielle d'une population à un taux  $\alpha$  avec une incertitude proportionnelle à la taille de population. C'est également l'équation du modèle de Black-Scholes pour l'évaluation du prix  $X(t)$  d'une option sous-jacente à une action de volatilité  $\beta$ , lorsque le taux d'intérêt est  $\alpha$ .

## 2.1 Processus Stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastiques (ou aléatoire) est l'étude des phénomènes aléatoires qui dépendent du temps  $T$ .

### 2.1.1 Rappels de probabilité

#### Espace de probabilité :

Un espace de probabilité est un triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  où :

- $\Omega$  est un ensemble,
- $\mathcal{F}$  est une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $\Omega$ ,
- $\mathbb{P}$  est une (mesure de) probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

#### Tribu :

Pour tout ensemble  $X$  on note  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de ces parties,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  est une tribu ou  $\sigma$ -algèbre si :

- 1)  $\Omega \in \mathcal{A}$ ,
- 2)  $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$  ( stabilité par passage au complémentaire),
- 3)  $\forall i \in N : A_i \in \mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{i \in N} A_i \in \mathcal{A}$  (stabilité par réunion dénombrable).

#### filtration :

On appelle filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  toute famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de sous tribus  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T$ .

A chaque processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  on peut associer une filtration :  $\forall t \geq 0 \mathcal{F}_t = \sigma(X_u : 0 \leq u \leq t)$ . La suite  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  est appelée filtration naturelle de  $(X_t)_{t \geq 0}$  si elle est la plus petite filtration formée de tribus complète à laquelle  $(X_t)_{t \geq 0}$  est adapté.

### 2.1.1 Processus Stochastique en temps continue

**Définition 2.1.1** On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{B}$ , une famille  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans  $(E; \mathcal{B})$ .

**Remarque 2.1.1** Dans la pratique l'indice  $t$  représente le temps.

- 1) Un processus peut aussi être vu comme une fonction aléatoire, i.e, à chaque  $w \in \Omega$  on associe la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $E$ ,  $t \rightarrow X(t; w)$ , appelée trajectoire du processus
- 2) Un processus peut être considéré comme une application de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  dans  $E$ , nous supposons toujours que cette application est mesurable lorsque l'on munit  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  de la tribu  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{F}$  et  $E$  de la tribu  $\mathcal{B}$ .

3) En considérera aussi des processus indexés par un intervalle de temps  $[0, T]$  borné. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

**Définition 2.1.2** Un processus  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  réel est dit stochastiquement continu (ou continu en probabilité) si  $\mathbb{P} \lim_{s \rightarrow +t} X(s) = X(t)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}_+$ , i.e,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$  et  $\forall \varepsilon > 0$ , on a  $\lim_{s \rightarrow +t} \mathbb{P} |X(t) - X(s)| > \varepsilon = 0$ .

De la définition précédente, on peut déduire facilement les propriétés suivantes.

Soient  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  et  $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  deux processus réels continus en probabilité, alors

- Propriété 2.1.1**
1. Le processus  $(X(t) + Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continu en probabilité
  2. Le processus  $(-X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continu en probabilité
  3. Le processus  $(X(t) - Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continu en probabilité
  4. Le processus  $(|X(t)|)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continu en probabilité
  5. Le processus  $(X(t) Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est continu en probabilité

**Remarque 2.1.2** Si dans la définition précédente, la notion de la continuité en probabilité est remplacée par celui de la continuité p.s, il existe une parties  $D \in \mathcal{F}$  négligeable et  $\lim_{s \rightarrow +t} X(t, \omega) = X(s, \omega)$  pour tout  $\omega \in D^c$ . On définit également la continuité à droite (rep. à gauche) en probabilité et p.s et cependant les propriétés 1 jusqu'à 5 restent vraies.

### Processus adapté :

On dit que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est adapté à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $t \geq 0$ .

### Processus prévisible :

Un processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est dit  $\mathcal{F}_n$  adapté si  $X_n$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Enfin un processus  $(H_n)_{n \geq 0}$  est dit  $\mathcal{F}_n$ -prévisible si  $H_0$  est  $\mathcal{F}_0$ -mesurable et  $H_n$  est  $\mathcal{F}_{n-1}$ -mesurable pour tout  $n - 1$ .

### processus càd-làg :

Un processus est dit càd-làg (continue à droite, limité à gauche) s'il existe un ensemble négligeable  $N \subset \Omega$  telque pour tout  $\omega \notin N$ ; la trajectoire  $t \rightarrow X_t(\omega)$  est continue pour à droite en tout  $t \geq 0$  et admet une limite à gauche en tout  $t$

### processus progressivement mesurable :

Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est dite progressivement mesurable par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si pour tout  $t \geq 0$ ; l'application

$$(s; \omega) \rightarrow X_s(\omega) \text{ de } [0; t] \times \Omega \text{ dans } \mathbb{R}^d$$

est mesurable par rapport à  $\mathcal{B}([0; t] \otimes \mathcal{F}_t)$  et  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

---

### Processus à accroissements indépendantes :

Un processus  $X$  est dite à accroissement indépendantes si on a :

- 1)  $X_0 = 0$  P-ps.
- 2)  $\forall n \geq 1, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+$ , telle que :  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires :  $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  sont indépendants.

### Processus à accroissements indépendantes stationnaires :

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  à accroissements indépendantes stationnaires si :  $\forall s, t \in \mathbb{R}^+$ , tel que  $0 \leq s < t$ , la variable aléatoire  $X_t - X_s$  à la même loi que  $X_{t-s}$ , Autrement dit :

$$\forall h \geq 0 : X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

### Processus uniformément intégrable :

Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique .

- 1) On dit que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est uniformément intégrable si :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \int_{(|X_t| > \alpha)} |X_t| dP = 0.$$

- 2) Si  $p \geq 1$ , on dit que  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  est borné dans  $L^p$  si :

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p] < \infty.$$

### Modification :

soit  $X$  et  $Y$  deux processus définie sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ,  $X$  est une modification de  $Y$  si pour tout  $t > 0$  les variables aléatoires  $X_t$  et  $Y_t$  sont égales P-ps.

$$\forall t \geq 0; \quad \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$$

### Indistinguabilité :

Deux processus  $(X_t)_{t \in T}$  et  $(Y_t)_{t \in T}$  sont dit indistinguable si et seulement si :

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega; \forall t \in T; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1$$

Clairement si  $X$  et  $Y$  sont indistinguables alors l'un est une modification de l'autre.

## 2.1.2 Les différentes notions de convergence

On s'intéresse ici à des v.a.r.

Soient  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite des variables aléatoires et  $X$  une autre variable aléatoire toutes définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ .

Pour simplifier les choses on se place dans le cas  $d = 1$ , on distingue plusieurs types de convergence :

**Convergence presque sûrement :** On dit que  $X_n$  converge presque sûrement vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.s} X$  si

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X\}) = 1.$$

On peut dire aussi que ,

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P.s} X$$

**Convergence dans  $L^p$**  : Soit  $p > 0$ , on dit que  $X_n$  converge dans  $L^p$  vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$  si

$$\|X_n - X\|_p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

i.e

$$\mathbb{E}(|X - X_n|^p) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Convergence en probabilité** : On dit que  $X_n$  converge en probabilité vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{Proba} X$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - X_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Convergence en loi** : On dit que  $X_n$  converge en loi vers  $X$  et on note  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{loi} X$  si

$$\forall \phi \text{ continue bornée de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbb{E}(\phi(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(\phi(X)).$$

### 2.1.3 Martingale

En calcul stochastique, une martingale désigne un type de processus stochastique, ce type de processus  $X$  ; est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date à une certaine date  $s$ , dénotée  $\mathcal{F}_s$  est la valeur à cette même date :

$$\mathbb{E}(X_t / \mathcal{F}_s) = X_s, \quad (s \leq t)$$

(tel que  $X$  est un processus adapté à la Filtration  $\mathcal{F}$ ).

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espace probabilisé et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  une filtration de cet espace. Une martingale en temps continu par rapport à une Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si  $X_t$  complète et continue à droite sera pour nous un processus  $(M_t)_{t \geq 0}$  ; càd-làg et vérifiant les conditions suivantes :

1. Pour tout  $t \geq 0$  ;  $M_t$  est intégrable (c'est à dire :  $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$  pour tout  $t$ ) ;
2. Pour tout  $t \geq 0$  ;  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$  - mesurable (ou  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$  - adapté) ;
3. Pour tout  $t \geq s \geq 0$  ;  $\mathbb{E}[M_t / \mathcal{F}_s] = M_s$ .

► une martingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) = M_s$  ;

► une surmartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) \leq M_s$  ;

► une soumartingale si, pour tout  $s \leq t$ ,  $\mathbb{E}(M_t / \mathcal{F}_s) \geq M_s$ .

**Remarque 2.1.3** On déduit que,

- Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale, alors :  $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$  , pour tout  $t$ .
- $X_t$  est une martingale si et seulement si :  $\mu = 0$

---

## 2.1.4 Temps d'arrêt

**Définition 2.1.3** On dit qu'une v.a  $\tau$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$  est un temps d'arrêt si  $\forall t \in [0, +\infty[ \tau \leq t \in \mathcal{F}_t$ .

On dit que  $\tau$  un temps d'arrêt fini si :  $\tau < +\infty$  p.s.

**Proposition 2.1.1** 1) Si  $S$  et  $T$  sont des temps d'arrêt, et si  $A \in \mathcal{F}_S$ , alors  $A \cap S \leq T \in \mathcal{F}_T$ .

2) Si  $S \leq T$ , alors  $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ .

3) Si  $S$  et  $T$  sont des temps d'arrêt, alors  $\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$ .

4) Si  $T$  est un temps d'arrêt, alors :

$$\mathcal{F}_T = \sigma(A \cap \{n \leq T\}, A \in \mathcal{F}_n)$$

5) Si  $T$  et  $S$  sont des temps d'arrêt, alors la variable  $X_T$  définie par :

$$X_{T(\omega)} = X_{T(\omega)}(\omega) \mathbf{1}_{(T < \infty)} = \sum_n X_n \mathbf{1}_{(T) = n}$$

est  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

**Théorème "théorème d'arrêt" :**

Si  $(M_t)_{t \geq 0}$  est une martingale continue par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , et si  $\tau_1, \tau_2$  sont deux temps d'arrêt tels que  $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$ ,  $K$  une constante réelle finie, alors  $M_{\tau_2}$  est intégrable et  $\mathbb{E}(M_{\tau_2} / \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1}$  Pp.s.

## 2.1.5 Mouvement Brownien

**Historique :**

En 1828, Robert Brown a observé le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau. Ce mouvement aléatoire, dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion, ou diffusion, du pollen dans l'eau. Par la suite, Delsaux (1877) explique ces changements incessants de direction de trajectoire par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau ; ce type de mouvement est qualifié de "mouvement au hasard". Bachelier (1900), en étudiant les cours de la bourse, a mis en évidence le caractère markovien du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant  $t+s$  dépend de sa position en  $t$  et ne dépend pas de sa position avant  $t$ . En 1905, Einstein, par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur, a déterminé la densité de transition du mouvement Brownien et relie par la suite le mouvement Brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ensuite, Smoluchowski (1906) a décrit ce mouvement comme une limite de promenades aléatoires.

La première étude mathématique rigoureuse sur la continuité et la nondérivabilité des trajectoires du mouvement Brownien est faite par Wiener (1923). Le mouvement Brownien passionne les probabilistes, tant pour l'étude de ses trajectoires qu'en théorie de l'intégration stochastique.

Pour définir formellement le mouvement Brownien, soit un espace  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  sur lequel nous définissons le processus  $(B_t)_{t \geq 0}$ .

---

**Définition 2.1.4** : [8] Un mouvement Brownien est un processus  $(B_t)_{t \geq 0}$  tel que :

- 1)  $B_0 = 0$  presque sûrement ;
- 2)  $B$  est continu, c'est à dire  $t \rightarrow B_t(\omega)$  est continue pour presque tout  $\omega$  ;
- 3)  $B$  est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_s)_{s \leq t}$  ;
- 4) les accroissements sont stationnaires (pour  $s < t$  l'accroissement  $W_t - W_s$  ne dépend que de la valeur de  $t-s$ ), Gaussiens, et tels que si  $s \leq t$ , on a  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

**Théorème 2.1.1** : (Caractérisation du mouvement Brownien) Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien si et seulement s'il est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance  $\text{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ .

### Mouvement Brownien standard :

Soit  $X$  un processus stochastique, on dit que  $X$  est un mouvement Brownien standard si :  $X_0 = 0$  P.p.s ;  $\mathbb{E}(X_t) = 0$  ;  $\mathbb{E}(X_t^2) = t$ .

Dans ce cas, la loi de  $X_t$  est une loi normale

**Définition 2.1.5** Le processus  $(X_t, t, 0)$  est un mouvement Brownien standard si :

- a)  $P(X_0 = 0) = 1$  (le mouvement Brownien est issu de l'origine).
- b)  $\forall s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance  $(t - s)$ .
- c)  $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1, \dots, \leq t_n$ , les variables  $(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_1} - X_{t_0}; X_{t_0})$  sont indépendantes.

### Représentations des martingales Browniennes :

Soit  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  une martingale de carré intégrable, par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  la filtration naturelle de  $B_t$ , il existe un processus adapté  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $\mathbb{E}(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty$  et

$$\forall t \in [0, T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s dB_s \quad \text{p.s}$$

**Remarque 2.1.4** Cette présentation n'est possible que pour les martingales de la filtration naturelle du mouvement Brownien.

## 2.1.6 Mouvement Brownien et martingales

**Propriété 2.1.2** : [8] Si  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien standard alors :

- $X_t$  est une  $\mathcal{F}_t$  - martingale.
- $X_t^2 - t$  est une  $\mathcal{F}_t$  - martingale.
- $\exp(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t)$  est une  $\mathcal{F}_t$  - martingale,  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

**Preuve 2.1.1** - Si  $s \leq t$  alors  $X_t - X_s$  est indépendante de la tribu  $\mathbb{F}_s$ . Donc

$$\mathbb{E}(X_t - X_s / \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s)$$

Mais un mouvement brownien standard est centré donc

$$\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$$

on déduit que

---


$$\mathbb{E}(X_t - X_s/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_s) - X_s = 0$$

d'où le résultat.

– Pour démontrer la deuxième assertion remarquons que :

$$\mathbb{E}(X_t^2 - X_s^2/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s)/\mathcal{F}_s)$$

comme l'espérance conditionnelle est linéaire on :

$$= \mathbb{E}((X_t - X_s)^2/\mathcal{F}_t) + 2X_s\mathbb{E}(X_t - X_s)/\mathcal{F}_s$$

Mais comme  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale

$$\mathbb{E}(X_t - X_s/\mathcal{F}_s) = 0$$

et donc :

$$\mathbb{E}((X_t^2 - X_s^2)/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((X_t - X_s)^2/\mathcal{F}_s)$$

La stationnarité et l'indépendance des accroissements du mouvement brownien permettent de plus, d'affirmer que :

$$\mathbb{E}((X_t - X_s)^2/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_{t-s}^2) = t - s.$$

La dernière égalité est due au fait que  $X_t$  suis une loi gaussienne centrée de variance  $t$ .  
On en déduit que

$$\mathbb{E}(X_t^2 - t/\mathcal{F}_s) = X_s^2 - s \quad \text{si } s \leq t.$$

– Pour démontrer le dernier point, rappelons, tous d'abord, que, si  $N$  est une gaussienne centrée réduite, on :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda N}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

De plus, si  $s \leq t$  :

$$\mathbb{E}(e^{(\sigma X_t - (\sigma^2/2)t})/\mathcal{F}_s) = e^{(\sigma X_s - (\sigma^2/2)t)} \mathbb{E}(e^{(\sigma X_t - X_s)}/\mathcal{F}_s)$$

car  $X_s$  est  $\mathcal{F}_s$ -mesurable, et comme  $X_t - X_s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_s$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{(\sigma X_t - X_s)}/\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(e^{(\sigma X_t - X_s)}), \\ &= \mathbb{E}(e^{(\sigma X_{t-s})}) \\ &= \mathbb{E}(e^{(\sigma N \sqrt{t-s})}) \\ &= e^{\frac{\sigma^2(t-s)}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat énoncé.



## 2.1.7 Variation totale et quadratique

**Définition 2.1.6** : [16] La variation infinitésimale d'ordre  $p$  d'un processus  $X_t$  défini sur  $[0, T]$  associée à une subdivision  $\Pi_n = (t_1^n, \dots, t_n^n)$  est définie par :

$$V_T^p(\Pi_n) = \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p$$

Si  $V_T^p(\Pi_n)$  a une limite dans un certain sens (convergence presque sûre, convergence  $L^p$ ) lorsque

$$\pi_n = \|\Pi_n\|_\infty = \max_{i \leq n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \longrightarrow 0.$$

La limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons alors la variation d'ordre  $p$  de  $X_t$  sur  $[0, T]$ . En particulier,

- si  $P = 1$ , la limite s'appelle la variation totale de  $X_t$  sur  $[0, T]$ ,
- si  $P = 2$ , la limite s'appelle la variation quadratique de  $X_t$  sur  $[0, T]$  et est notée  $\langle X \rangle_T$ .

### Variation bornée

Un processus  $X_t$  est un processus à variation bornée sur  $[0, T]$  s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est-à-dire que

$$\sup_{\pi_n} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty \text{ presque sûrement}$$

**Remarque** : Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement, alors elle vaut

$$V_T^1 = \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \text{ presque sûrement}$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des subdivisions possibles de  $[0, T]$ . Réciproquement, si ce supremum est fini, le processus admet une variation totale. La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.

### Cas du mouvement Brownien

Soit  $(B_t)_{t \in \mathcal{P}}$ , un mouvement Brownien standard que nous noterons  $B(t)$  par la suite. Pour  $t > 0$ , nous définissons

$$\langle B \rangle_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{2^n} \left\{ B\left(\frac{it}{2^n}\right) - B\left(\frac{(i-1)t}{2^n}\right) \right\}^2$$

Nous définissons la variation quadratique du mouvement Brownien standard  $\langle B \rangle_t$  comme étant donnée par cette limite et on pose  $\langle B \rangle_0 = 0$ .

**Propriété 2.1.3** Si  $X_t$  est un processus, alors

- il est à variation bornée si et seulement si il est la différence entre deux processus croissants ;
- s'il est à variation bornée et à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque sûrement, c'est-à-dire que  $\langle X \rangle_T = 0$ .

---

## 2.1.8 Probabilités équivalentes

:

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  un espace de probabilité. Une probabilité  $Q$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  est dite absolument continue par rapport à  $P$  si :

$$\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = 0 \implies Q(A) = 0.$$

**Théorème 2.1.2**  $Q$  est absolument continue par rapport à  $P$  si et seulement si, il existe une variable aléatoire  $Z$  à valeurs positives ou nulles sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que :

$$\forall A \in \mathcal{F} : Q(A) = \int_A Z(\Omega) dP(\Omega).$$

$Z$  est appelée densité de  $Q$  par rapport à  $P$  notée  $\frac{d(Q)}{d(P)}$ .

## 2.1.9 Théorème de Girsanov

**Théorème 2.1.3** : [5] Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathcal{P})$  un espace probabilisé dont la filtration est la filtration naturelle d'un mouvement Brownien standard  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ , et soit  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté vérifiant  $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$  p.s tel que le processus  $(L_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right),$$

soit une  $\mathcal{F}_t$ -martingale, Alors il exist une probabilité  $\mathbb{P}^{(L)}$  de densité  $L_t$  équivalente à  $P$  sous laquelle le processus  $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$B_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement Brownien standard.

## 2.2 Intégrale stochastique et calcul d'Itô

### 2.2.1 Construction de l'intégrale stochastique

Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ . Nous allons donner un sens à  $\int_0^t f(s, w) dB_s$  pour une classe de processus  $f(s, w)$  adapté a la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires.

Dans la suite, on fixe  $T$  un réel strictement positif .

**Processus élémentaire :**

On appelle processus élémentaire  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de la forme

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{]T_{i-1}, T_i]}(t)$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , et  $\phi_i$  est bornée et  $\mathcal{F}_{T_{i-1}}$ -mesurable.

**Définition 2.2.1** : L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire  $\phi$  est alors, un processus continu  $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(B_t - B_{t_k})$$

$I(\phi)_t$  peut s'écrire comme suit

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq k} \phi_i(B_{t_i \wedge t} - B_{t_{i-1} \wedge t})$$

ce qui prouve la continuité de la fonction  $t \rightarrow I(H)_t$ . On notera  $\int_0^t H_s dB_s$  pour  $I(H)_t$ . On a alors le résultat essentiel suivant :

**Propriété 2.2.1** : Si  $(H)_{t_0 \leq t \leq T}$  est un processus élémentaire :

- $\int_0^t H_s dB_s$  est une  $\mathcal{F}_t$  martingale,
- $\mathbb{E}(\int_0^t H_s dB_s)^2 = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$ ,
- $\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |\int_0^t H_s dB_s|)^2 \leq 4\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$ .

On vient de définir et donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés :

$$\mathcal{H} = \{(H)_{t_0 \leq t \leq T}, \text{ processus adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t < T} \mid \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds) < +\infty\}.$$

**Propriété 2.2.2** : Soit  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$  brownien. Alors il existe une unique application linéaire  $J$  de  $\mathcal{H}$  dans l'espace des  $\mathcal{F}_t$ -martingales continues définies sur  $[0, T]$ , telle que : Si  $(H_t)_{t \leq T}$  est un processus élémentaire, Pp.s pour tout  $0 \leq t \leq T$

$$J(H)_t = I(H)_t$$

Si  $t \leq T$

$$\mathbb{E}(J(H)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$$

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si  $J, J_1$  sont deux prolongements linéaires, vérifiant les propriétés précédentes alors :

$$\text{Pp.s } \forall 0 \leq t < T \quad J(H)_t = J_1(H)_t$$

on note si  $H \in \mathcal{H}$ ,  $J(H)_t = \int_0^t H_s dB_s$ . De plus cette intégrale stochastique vérifie les propriétés suivantes :

**Propriété 2.2.3** : Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus de  $\mathcal{H}$  alors :

- on a :

$$\mathbb{E}(\sup_{t \leq T} |\int_0^t H_s dB_s|)^2 \leq 4\mathbb{E}(\int_0^t H_s^2 ds)$$

- Si  $\tau$  est un  $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt alors :

$$\text{Pp.s } \int_0^\tau H_s dB_s = \int_0^T \mathbf{1}_{s \leq \tau} H_s dB_s$$

## 2.2.2 Équations Différentielles Stochastiques

Ces processus, qui généralisent les équations différentielles ordinaires, sont fondamentaux en finance. Ils modélisent le prix d'actifs financiers.

Rappelons qu'une équation différentielle ordinaire (EDO) sur  $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  est du type

$$y'_t = f(t, y_t) \text{ et } y_0 = y \quad (2.3)$$

où  $y : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  est la fonction inconnue et  $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée. L'étude mathématique des équations différentielles ordinaires est d'une importance considérable pour les applications notamment en physique.

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une perturbation de (2.3) avec un terme aléatoire modélisant un « bruit » autour du phénomène déterministe décrit par (2.3). La perturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien. Ceci modélise le fait que sur des intervalles de temps disjoints, les perturbations sont la somme de très nombreuses « petites » variables aléatoires indépendantes de même loi (qui, d'après le théorème central limite, convenablement renormalisée suit une loi « proche » d'une loi gaussienne). On considère donc l'équation  $dY_t = f(t, Y_t)dt + \sigma dB_t$  et  $Y_0 = y$ , soit, sous forme intégrale (la seule qui ait un sens mathématique, puisque le Brownien n'est pas dérivable) :

$$Y_t = y + \int_0^t f(s, Y_s)ds + \sigma B_t \quad (2.4)$$

On appelle Équation Différentielle Stochastique de condition initiale  $x_0$ , de coefficient de diffusion  $\sigma$  et de coefficient de dérive  $b$  un processus  $X$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) sera aussi notée

$$\begin{aligned} dX_t &= b(s, X_s)ds + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

## 2.2.3 Calcul d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô"

**Définition 2.2.2** : Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$  un espace de probabilité muni d'une filtration et  $(B_t)_{t \geq 0}$  un  $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbb{P}p.s \quad \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

Avec :

- $X_0$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- $(K_s)_{0 \leq t \leq T}$  et  $(H_s)_{0 \leq t \leq T}$  des processus adaptés à  $\mathcal{F}_t$ .
- $\int_0^t |K_s| ds < +\infty, \mathbb{P}p.s$
- $\int_0^t |H_s|^2 ds < +\infty, \mathbb{P}p.s$

---

**Théorème 2.2.1** (formule d'Itô) : Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et  $f$  une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

où par définition :

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s$$

De même si  $(t, x) \rightarrow f(t, x)$  est une fonction deux fois différentiable en  $x$  et une fois différentiable en  $t$ , ces dérivées étant continues en  $(t, x)$  (on dit dans ce cas que  $f$  est de classe  $C^{1,2}$ ), on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

**Exemple 2.2.1** : Si  $f(x) = x^2$  et  $X_t = B_t$ , on a  $K_s = 0$  et  $H_s = 1$  donc :

$$B_t = 2 \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds$$

on obtient :

$$B_t^2 - t = 2 \int_0^t B_s dB_s$$

Comme  $\mathbb{E}(\int_0^t B_s^2 ds) < +\infty$  on retrouve le fait que  $B_t^2 - t$  est une martingale.

**Propriété 2.2.4** (la formule d'intégration par parties) : Soient  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$$

et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s$$

Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t dY_t + \int_0^t Y_t dX_t + \langle X, Y \rangle_t$$

avec la convention

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

**Preuve 2.2.1** : On a d'après la formule d'Itô :

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \int_0^t (H_s + H'_s)^2 ds$$

---

avec

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 d_s$$

et

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s'^2 d_s$$

D'où, en faisant la différence entre la première ligne et les deux suivantes :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s' d_s$$

## Modèle de Black Scholes

Les raisonnements par arbitrage fournissent des nombreuses relations intéressantes, mais ils ne sont pas suffisants pour obtenir les formules des prix. Pour cela, on a besoin de modéliser l'évolution des cours d'une façon précise.

Le problème traité par Black et Scholes est l'évaluation et la couverture d'une option de type européen (call ou put) sur une action ne donnant pas de dividendes. Black et scholes ont proposé un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'un call (européen) sur une action ne distribuant pas de dividendes et à une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option d'éliminer totalement le risque (c'est à dire se couvrir).

### Hypothèses sur le marché :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. L'absence d'opportunité d'arbitrage ;
3. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant, (le cours de l'action suit un processus continue) ;
4. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant  $r$ .

Dans la suite, on considère un marché d'espace de scénario  $(\Omega, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$  est la filtration historique.  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est l'ensemble des cours d'actions (actifs risqués) à la date  $t$  et d'échéance  $T$ .  $(S_t^0)_{t \in [0, T]}$  est l'ensemble des cours d'actifs sans risque  $S_t^0 = \exp(rt)$  où  $r$  est le taux d'intérêts. Le facteur de discontinuité est donné par :

$$B(t, T) = \exp[-r(T - t)]$$

– L'option call peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$$

et son prix est donné par :

$$C_t(T, K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(S_T - K) / \mathcal{F}_t]$$

– De même l'option put peut être vue comme un actif de pay-off :

$$H(S_T) = (K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0)$$

et son prix est donné par :

---


$$P_t(T, K) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^Q[(K - S_T) / \mathcal{F}_t]$$

- La valeur  $(S_T - K)$  (resp  $(K - S_T)$ ) est la valeur intrinsèque de l'option, et  $C_t(T, K) - (S_T - K)^+$  (resp  $P_t(T, K) - (K - S_T)^+$ ) est sa valeur de temps.
- En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation de parité :

$$C_t - P_t = S_t - K \exp[-r(T - t)]$$

- On désigne  $M(S)$  l'ensemble des mesures de probabilité  $Q \sim P$  telle que  $\tilde{S}_t$  la valeur actualisée de  $S_t$  est  $Q$ -martingale.  $\mathbb{E}^Q$  est l'espérance sous  $Q$ .

**Un portefeuille :** est un ensemble de titres (actions, obligations,...) détenu par un investisseur.

Les principales problématiques de la gestion d'un portefeuille sont :

- Comment minimiser le risque et maximiser le rendement ?
- Comment calculer le rendement espéré associé à un risque ?
- Quelle est la performance d'un portefeuille ?

Pour simplifier l'analyse, nous prenons un marché avec les hypothèses suivantes :

- Le marché est sans arbitrage.
- Les brokers ont un comportement rationnel.
- Il existe une unique loi de probabilité qui explique les comportements futurs des marchés financiers.

On peut considérer que les marchés en dehors de ces hypothèses sont des cas particuliers.

- La valeur discontinue d'un portefeuille  $V_t$  est donnée par :

$$\tilde{V}_t = V_t / S_t^0 \text{ tel que } S_t^0 = \exp(rt) .$$

On désigne par  $S$ , l'ensemble des stratégies prévisibles simple

$$S = \{ \phi : \text{càglàd prévisible, et } \mathbb{E} \left| \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t \right|^2 < \infty \}$$

- Et  $\mathcal{A}$  l'ensemble de pay-off terminale atteignable par n'importe quelle stratégie

$$\mathcal{A} = \{ V_0 + \int_0^T \phi_t d\tilde{S}_t, V_0 \in \mathbb{R}, \phi \in S \}$$

- Le processus stochastique  $(G_t(V_t))_{t \in [0, T]}$  est dit processus de gain de la stratégie  $\phi$  et :

$$G_t(\phi) = \phi_0 S_0 + \sum_{i=1}^n \phi_i (S_{T_{i+1} \wedge t} - S_{T_i \wedge t})$$

d'autre part : le portefeuille a une valeur  $V_t = \phi_t S_t$  au temps  $t$ , et :

$$C_t(\phi) = V_t(\phi) - G_t(\phi) = \phi_t S_t + \int_0^t \phi_u dS_u .$$

- Cette différence représente le coût de la stratégie au temps  $t$ .  $C_t(\phi)$  est appelé processus de coût associé à la stratégie  $\phi$ .

Si la stratégie est autofinancée  $V_t(\phi) = G_t(\phi)$  .



---

### 3.1 Notion d'arbitrage et la relation de parité call-put

L'une des hypothèses fondamentales des modèles usuels est qu'il n'existe aucune stratégie financière permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse certaine dans une date future. Cette hypothèse est appelée absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A), et est justifiée par l'existence d'arbitragistes, acteurs sur les marchés dont le rôle est de détecter ce type d'opportunités et d'en profiter. Ceux-ci créent alors une force qui tend à faire évoluer le prix de l'actif vers son prix de non-arbitrage.

Il n'existe pas beaucoup d'arbitrages sur les marchés développés. De plus, si un arbitrage apparaît, les traders prennent avantage de celui-ci et donc il disparaît.

L'hypothèse de base, retenue dans tous les modèles, est l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il est impossible de faire des profits sans prendre de risques.

A partir de cette hypothèse, on peut établir des relations entre les prix des call et des put européen de même échéance  $T$ , de même prix d'exercice  $K$ , sur une action de cours  $S_t$  à l'instant  $t$ , et un taux de placer ou d'emprunter de l'argent est constant égale  $r$ .

On désigne par  $C_t$  et  $P_t$  les prix respectifs du call et du put à l'instant  $t$ . Par l' A.O.A, pour tout instant  $t < T$ , on a la relation suivante appelée "relation de parité call-put" :

$$C_t - P_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

Profit sans risque si on a, par exemple :

$$C_t - P_t > S_t - K e^{-r(T-t)}$$

A l'instant  $t$ , on achète une action et un put et on vend un call. Cela dégage un profit net égal à

$$C_t - P_t - S_t$$

Si cette somme est positive, on la place au taux  $r$  jusqu'à la date  $T$ , on obtient deux cas :

- $S_T > K$  : donc, le call est exercé, on livre l'action, on encaisse la somme  $K$  et on solde l'emprunt, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)} (C_t - P_t - S_t) > 0$$

- $S_T \leq K$  : donc, on exerce son put et on solde comme précédemment, de sorte qu'on se retrouve avec une richesse égale à :

$$K + e^{-r(T-t)} (C_t - P_t - S_t)$$

Dans les deux cas, on a réalisé un profit positif sans mise de fond initiale, qui est un exemple d'arbitrage.

### 3.2 Description du modèle de Black et Scholes

Nous supposons que nous avons un espace de probabilité avec une filtration  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  tel que :  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \leq \dots \mathcal{F}_T$ ,  $T < \infty$  qui est une filtration naturelle du mouvement Brownien standard  $B_t$ .

Le modèle proposé pour décrire l'évolution des cours est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix  $S_t$  à l'instant  $t$ ) et un actif sans risque (de prix  $S_t^0$  à l'instant  $t$ ).

– On suppose que l'évolution de  $S_t^0$  est régie par l'équation différentielle :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad S_0^0 = 1$$

de sorte que  $S_t^0 = e^{rt}$  pour  $t \geq 0$ . Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant égale à  $r$ .

– On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle Stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad S_0 > 0 \quad (3.1)$$

Où  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $S_0$  sont des constantes.

$(B_t)$  : un mouvement Brownien standard.

$\mu$  : est un coefficient de croissance (dérivé).

$\sigma$  : est un coefficient de volatilité.

$S_0$  : est une valeur initiale pour  $S_t$ .

Le modèle étudié sur l'intervalle  $[0, T]$  où  $T$  est la date d'échéance de l'option à étudier.

**Remarque 3.2.1** : *L'hypothèse selon laquelle le cours d'une action est un mouvement Brownien n'était pas réaliste car le prix de l'action ne peut pas prendre des valeurs négatives. D'où l'idée de modéliser par un mouvement Brownien géométrique*

La solution de  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$  est :

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t)$$

où  $S_0$  est le cours observé à la date 0.

La loi de  $S_t$  est une loi log-normale (son logarithme suit une loi normale).

Le processus  $(S_t)$  vérifie une équation de type (3.1) sauf si son logarithme est un mouvement Brownien.

Nous allons maintenant nous intéresser aux solutions  $(S_t)_{t \geq 0}$  de :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s(\mu ds + \sigma dB_s) \quad (3.2)$$

On écrit souvent ce type d'équation sous la forme

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0 \quad (3.3)$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté  $(S_t)_{t \geq 0}$  tel que les intégrales  $\int_0^t S_s ds$  et  $\int_0^t S_s dB_s$  aient un sens, et qui vérifie pour chaque  $t$  :

$$P_{p.s} \quad S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

Faisons tout d'abord un calcul formel, posons  $Y_t = \log(S_t)$  où  $S_t$  est un processus d'Itô avec  $K_s = \mu S_s$  et  $H_s = \sigma S_s$ .

Appliquons la formule d'Itô à  $f(x) = \log(x)$  on obtient, en supposant que  $S_t$  est positif :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

$$\log(S_t) = \log(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} d\langle S, S \rangle_s$$

en effet :

$$\begin{aligned} \langle S, S \rangle_s &= \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s, \int_0^t \sigma S_s dB_s \rangle = \langle \int_0^t \sigma S_s dB_s \rangle \\ &= \int_0^t \sigma^2 S_s^2 ds \end{aligned}$$

on'a :  $dS_s = S_s(\mu ds + \sigma dB_s)$

$$\begin{aligned} \log(S_t) &= \log(S_0) + \int_0^t \frac{S_s(\mu ds + \sigma dB_s)}{S_s} + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds \\ &= \log(S_0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\sigma^2 ds \\ &= \log(S_0) + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma dB_s \end{aligned}$$

Soit en utilisant (3.3) :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

On en déduit que :

$$Y_t = \log(S_t) = \log(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t.$$

$$e^{\log(S_t)} = e^{\log(S_0)} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}.$$

Il semble donc que :

$$S_t = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t) \quad \text{tq} : S_0 = x_0$$

Soit une solution de l'équation (3.2).

Vérifions rigoureusement cela.

$S_t = f(t, B_t)$  où :

$$f(t, x) = x_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x)$$

La formule d'Itô donne :

$$S_t = f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'(s, B_s) ds + \int_0^t f'(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(B_s) d \langle B, B \rangle_s$$

Mais comme la variation quadratique du mouvement brownien vaut (s) ( $\langle B, B \rangle_s = s$ )  
on a :

$$\begin{aligned} S_t &= x_0 + \int_0^t (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{1}{2} S_s \sigma^2 ds \\ &= x_0 + \int_0^t \mu S_s ds - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} S_s ds \end{aligned}$$

et finalement :

$$S_t = x_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dB_s$$

On vient donc de démontrer l'existence d'une solution de (3.2). Nous allons maintenant prouver que cette solution est unique. Pour cela, nous allons utiliser une propriété généralisant "la formule d'intégration par parties" dans le cas des processus d'Itô.

Notons que :

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

est une solution de (3.2) et supposons que  $(X_t)_{t \geq 0}$  en soit une autre.

on va chercher à exprimer la "différentielle stochastique"  $X_t S_t^{-1}$ .

Posons :

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = \exp\left(\left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma B_t\right)$$

et  $\mu' = -\mu + \sigma^2$  et  $\sigma' = -\sigma$

Alors

$$Z_t = \exp\left(\left(\mu' - \frac{\sigma'^2}{2}\right)t + \sigma' B_t\right)$$

et le calcul fait précédemment prouve que :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s (\mu' ds + \sigma' dB_s) = 1 + \int_0^t Z_s ((-\mu + \sigma^2) ds - \sigma dB_s)$$

On peut alors exprimer la "différentielle" de  $X_t Z_t$  grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô :

$$d(X_t Z_t) = X_t dZ_t + Z_t dX_t + d \langle X, Z \rangle_t.$$

Ici on'a :

$$\langle X, Z \rangle_t = \left\langle \int_0^t X_s \sigma dB_s, - \int_0^t Z_s \sigma dB_s \right\rangle_t = - \int_0^t \sigma^2 X_s Z_s ds$$

On en déduit que :

$$d(X_t Z_t) = X_t Z_t ((-\mu + \sigma^2) dt - \sigma dB_t) + X_t Z_t (\mu dt + \sigma dB_t) - X_t Z_t \sigma^2 dt = 0$$

$X_t Z_t$  est donc égale à  $X_0 Z_0$ , ce qui entraîne que :

$$\forall t \geq 0, \text{ Pp.s. } X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

Les processus  $X_t$  et  $Z_t$  étant continus, ceci prouve que :

$$\text{Pp.s. } \forall t \geq 0 X_t = x_0 Z_t^{-1} = S_t$$

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1** : [7]  $\mu, \sigma$  étant deux nombres réels,  $(B_t)_{t \geq 0}$  étant un mouvement brownien et  $T$  un réel strictement positif, il existe un processus d'Itô unique  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui vérifie pour tout

$t \leq T$  :

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dB_s)$$

Ce processus est donné par :

$$S_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

**Remarque 3.2.2** : [7] Le processus  $S_t$  que l'on vient d'expliciter servira de modèle standard pour le prix d'un actif financier. On l'appelle le modèle de Black et Scholes.

Lorsque  $\mu = 0$ ,  $S_t$  est une martingale, ce type de processus porte le nom de martingale exponentielle.

### 3.2.1 Stratégie financière

Une stratégie financière de gestion est définie par un processus  $\phi = \phi_{t0 \leq t \leq T} = ((\phi_t^0, \phi_t))_{0 \leq t \leq T}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , adapté à la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  du mouvement brownien. Les composantes de  $\phi$  donnent les quantités d'actif sans risque  $\phi_t^0$  et l'actif risqué  $\phi_t$  à chaque instant  $t$ , à cet instant la valeur du portefeuille est donnée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

### 3.2.2 Stratégie autofinancée

La condition d'autofinancement au temps continu est donnée par :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

pour que cette égalité ait un sens, on supposera que :

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt < \infty \quad \text{p.s} \quad \text{et} \quad \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty. \quad \text{p.s}$$

**Proposition 3.2.1 :** Une stratégie autofinancée définie par un couple  $((\phi_t^0, \phi_t))_{0 \leq t \leq T}$  de processus adaptés vérifie :

$$1) \int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T \phi_t^2 dt < \infty. \quad \text{p.s}$$

$$2) \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u dS_u \quad \text{p.s pour tout } t \in [0, T]$$

Notons  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  est le cours actualisé de l'actif risqué de sorte que  $\hat{S}_t^0 = 1$ .

**Proposition 3.2.2 :** Soit  $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t))_{0 \leq t \leq T}$  un processus adapté à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , et qui vérifie la condition (1) ci-dessus.

On pose :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

et

$$\hat{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$$

est la valeur actualisée du portefeuille à l'instant  $t$ .

alors  $\phi$  définit une stratégie autofinancée si et seulement si :

$$\hat{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u d\hat{S}_u \quad \text{p.s} \quad (3.4)$$

**Preuve 3.2.1 :** Supposons la stratégie  $\phi$  autofinancée. D'après la formule d'Itô :

$$d\hat{V}_t(\phi) = -r\hat{V}_t(\phi)dt + e^{-rt} dV_t(\phi)$$

Notons que  $d\langle e^{-rt}, V_t(\phi) \rangle$  est nul.

on déduit :

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t(\phi) &= -re^{-rt}(\phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t)dt + e^{-rt} \phi_t^0 dert + e^{-rt} \phi_t dS_t \\ &= \phi_t (-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= \phi_t d\hat{S}_t \end{aligned}$$

Réciproquement, soit  $\phi$  une stratégie vérifiant :

$$dV_t(\phi) = \phi_t d\hat{S}_t$$

Aussi équivalente à l'égalité ( 3.4)

$$dV_t(\phi) = d(S_t^0 \hat{V}_t(\phi)) = d(e^{rt} \hat{V}_t(\phi))$$

et comme  $d\hat{S}_t = e^{-rt} dS_t - r\hat{S}_t dt$   
on trouve  $dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$

Cela signifie que la stratégie  $(\phi)_t$  est autofinancée.

Dans notre étude, on va chercher une loi de probabilité équivalente à la probabilité initiale sous laquelle les prix actualisés des actifs seront des martingales, puis on va construire des stratégies autofinancées simulant les options.

### 3.2.3 Probabilité martingale

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale ou « probabilité risque-neutre » telle que le processus de prix des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque). On va montrer qu'il existe une probabilité équivalente à la probabilité initiale P, sous laquelle le prix actualisé  $\hat{S}_t = e^{-rt} S_t$  est une martingale sous Q.

On a :

$$\begin{aligned} d\hat{S}_t &= -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= \hat{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t) \end{aligned}$$

Posons

$$W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t = B_t + \theta t$$

D'où :

$$d\hat{S}_t = \hat{S}_t \sigma dW_t$$

D'après le théorème de Girsanov : Il existe  $Q \sim P$  tel que  $W_t$  est un mouvement Brownien standard sous Q et on a

$$\frac{dQ/\mathcal{F}_t}{dP/\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t + \theta B_t}$$

On déduit que  $(\hat{S}_t)$  est une martingale, et que

$$\hat{S}_t = \hat{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

## Valorisation des options européennes

La valorisation (pricing) d'un titre financier est l'évaluation de sa valeur, ne pas "mettre en exploitation" ou bien à "augmenter la valeur" comme l'indiquent les dictionnaires, mais simplement à évaluer.

La notion d'arbitrage fournit un premier moyen de le faire.

### Le problème d'évaluation des produits dérivés :

L'évaluation (on dit aussi «valorisation») des produits dérivés se ramène souvent au calcul du prix aujourd'hui d'un actif dont on ne connaît le prix qu'à une date future. Il se ramène donc au calcul d'une espérance conditionnelle.

### Valorisation par absence d'opportunité d'arbitrage :

Valorisation des options la valorisation des options et moins aisée que celle des contrat à terme dont la valeur pouvait être déterminée à partir d'un raisonnement par arbitrage.

Par A.O.A la valeur d'une option est toujours supérieure à celle du contrat à terme correspondant puisque c'est le cas à l'échéance.

### Option européenne : [5]

Soit  $H$  une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, positive, et de la forme  $f(S_T)$  telle que :  $f(x) = (x - K)_+$  dans le cas d'un call, et  $f(x) = (K - x)_+$  dans le cas d'un put. On va définir la valeur de l'option en la simulant.

: Une stratégie  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)_{0 \leq t \leq T}$  est admissible si elle est autofinancée et si la valeur actualisée  $\hat{V}_t(\phi) = \phi_t^0 + \phi_t \hat{S}_t$  du portefeuille correspondant est positive et telle que  $\sup_{t \in [0, T]} \hat{V}_t$  est de carré intégrable sous  $Q$  pour tout  $t$ .

**Option simulable (ou répliquable) :** Pour que  $H$  soit simulable, il faut que  $H$  soit de carré intégrable sous  $Q$ . Les cas du call et put sont simulables puisque  $\mathbb{E}^*(S_T^2) < \infty$ .

**Théorème 4.1.1 :** [5] Dans le modèle de Black et Scholes, toute option est définie par une variable aléatoire  $H$ , positive,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable sous la probabilité  $Q$  est simulable et la valeur à l'instant  $t$  de tout portefeuille simulant est donnée par :

$$V_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

**Preuve 4.1.1 :** [5] Supposons qu'il existe une stratégie admissible  $(\phi^0, \phi)$  simulant l'option. La valeur du portefeuille  $(\phi_t^0, \phi_t)$  à l'instant  $t$  et :

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

Par hypothèse  $H = V_T$  ;

Soit  $\hat{V}_t = e^{-rt} V_t$  , la valeur actualisée du portefeuille est :

$$\begin{aligned} \hat{V}_t &= V_0 + \int_0^t \phi_u d\hat{S}_u \\ &= V_0 + \int_0^t \phi_u \sigma \hat{S}_u dW_u \end{aligned}$$

$\sup_{t \in [0, T]} \hat{V}_t$  est de carré intégrable, sous la probabilité  $Q$  le processus  $(\hat{V}_t)$  est défini par un intégrale stochastique par rapport à  $(W_t)$  et sous  $Q$ , définit une martingale de carré intégrable. D'où

$$\hat{V}_t = E^Q(\hat{V}_t / \mathcal{F}_t)$$

Par conséquent :

$$V_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

Il reste à montrer que l'option est bien simulable, on cherche des processus  $(\phi_t^0)$  et  $(\phi_t)$  définissent une stratégie admissible et tel que :

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

Le processus  $M_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$  , sous la probabilité  $Q$ , est une martingale de carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales Browniennes : il existe un processus adapté  $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $E^Q(\int_0^T K_s^2 ds) < \infty$  et

$$\forall t \in [0, T] : M_t = M_0 + \int_0^t K_s dW_s \quad \text{p.s}$$

La stratégie  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t)$  avec  $\phi_t = K_t / \sigma \hat{S}_t$  et  $\phi_t^0 = M_t - \phi_t \hat{S}_t$ , alors  $\phi$  est une stratégie autofinancée, dont la valeur à l'instant  $t$  est donnée par :

$$V_t(\phi) = e^{rt} M_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} H / \mathcal{F}_t)$$

Il est clair que  $V_t(\phi)$  est une variable aléatoire positive, et que  $\sup_{t \in [0, T]} V_t(\phi)$  est de carré intégrable sous  $Q$  et  $V_t(\phi) = H$ .

On a donc bien une stratégie admissible simulant  $H$ .

## 4.1 Valeurs des options vanilles

**Calcul explicite :** [5]

Lorsque la variable aléatoire  $H$  est de la forme  $H = f(S_T)$ , on peut expliciter la valeur  $V_t$  de l'option à l'instant  $t$  comme une fonction de  $t$  et  $S_t$  :

$$\begin{aligned} S_T = e^{rt} \hat{S}_T &= S_t e^{-rt} (e^{rt} \exp(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T - W_t))) \\ &= \hat{S}_T = \hat{S}_t \exp(-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma(W_T - W_t)) \end{aligned}$$

Donc :



$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\right)$$

On a, en effet :

$$V_t = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)}(f(S_T)/\mathcal{F}_t)]$$

$$V_t = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} f(S_t \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\}))$$

La variable aléatoire  $S_t$  est  $\mathcal{F}_t$  - mesurable, sous  $Q$ ,  $W_T - W_t$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  donc  $V_t = F(t, S_t)$ .

$W_T - W_t$  varie comme  $\sqrt{T - t}$  et tel que  $y$  suit la loi  $N(0, 1)$ , implique que  $W_T - W_t$  est une gaussienne centrée de variance  $T - t$ .

Avec :

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} f(x) \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma(W_T - W_t)\} / \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma y \sqrt{T - t}\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \end{aligned}$$

$$\text{On a } F(t, S_t) = \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)}(f(S_T)/\mathcal{F}_t))$$

#### 4.1.1 Valeur du call européen

Dans ce cas, on note que  $F(t, S_t) = C(t, S_t)$  où  $f(x) = (x - K)_+$  d'où :

$$\begin{aligned} F(t, S_t) &= e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(x \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma y \sqrt{T - t}\}) dy \\ &= \mathbb{E}^Q(e^{-r(T-t)} (x \exp\{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma y \sqrt{T - t}\} - K)_+) \end{aligned}$$

Posons  $\tau = T - t$  et  $g$  est une gaussienne centrée réduite.

$$C(t, S_t) = \mathbb{E}(x \exp\{\sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \tau\} - K e^{-r\tau})$$

Comme  $x \exp\{\sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \tau\} - K e^{-r\tau} \geq 0$  alors

$$g \geq \frac{\ln \frac{K}{x} - r\tau + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

posons

$$d_1 = \frac{\ln \frac{x}{K} + r\tau + \frac{\sigma^2}{2} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

et

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{\tau}$$

d'où :  $g \geq -d_2$ , avec ces notations on obtient

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= \mathbb{E}((x \exp\{\sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \tau\} - K e^{-r\tau}) \mathbf{1}_{g+d_2 \geq 0}) \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} (x \exp\{\sigma \sqrt{\tau} g - \frac{\sigma^2}{2} \tau\} - K e^{-r\tau}) \frac{e^{-\frac{g^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dg \\ &= I_1 - I_2 \end{aligned}$$

où

$$I_1 = x \int_{-d_2}^{+\infty} \left( \exp\left\{ \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2}{2}\tau \right\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right)$$

et

$$I_2 = Ke^{-r\tau} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = Ke^{-r\tau} \varphi(d_2)$$

avec  $\varphi$  une fonction de répartition de  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Pour calculer  $I_1$  on fait le changement de variable  $y = z + \sigma\sqrt{\tau}$  ;

$$I_1 = x \int_{-d_2}^{+\infty} \left( \exp\left\{ \sigma\sqrt{\tau}y - \frac{\sigma^2}{2}\tau \right\} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) = x \int_{-d_1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz = x\varphi(d_1)$$

Donc, on obtient

$$C(t, S_t) = x\varphi(d_1) - Ke^{-r\tau}\varphi(d_2)$$

### 4.1.2 Valeur du put européen

Pour le put, on note que  $F(t, S_t) = P(t, S_t)$  où  $f(x) = (K - x)_+$ . Un calcul analogue nous donne :

$$P(t, S_t) = Ke^{-r\tau}\varphi(-d_2) - x\varphi(-d_1)$$

## 4.2 Estimation de la volatilité

### Présentation [13]

L'estimation de la volatilité est capitale en mathématiques financières pour calculer le prix d'une option. Elle permet de mesurer l'instabilité du cours d'un actif financier. Plus la volatilité est importante plus l'actif est instable, si la volatilité est nulle, on peut connaître de manière exacte la valeur de l'actif dans le futur.

Il existe deux méthodes de calculs de la volatilité :

### 4.2.1 la volatilité historique

En utilisant les données historiques du cours sous-jacent  $(S_t)_t$  et des méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance, on en déduit le paramètre de volatilité.

#### Calcul volatilité historique

Il existe différentes formules pour calculer la volatilité historique. L'une d'elles consiste en un calcul d'écart-type en se basant sur les valeurs passées du call. Notons  $C_i$  la valeur d'un call européen en fin de la  $i^{\text{ème}}$  période,  $\bar{C}$  la moyenne de ces valeurs entre l'instant 1 et  $n$ , on a :

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2}{n}} \text{ avec } \bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n C_i}{n}$$

---

### Exemple (Volatilité historique)

Prenons un exemple fictif avec les données de cotations de BNP sur l'année 2011 :

Mois	Variation BNP
Janvier 2011	+5.38%
Février 2011	-3.74%
Mars 2011	+7.20%
Avril 2011	+2.12%
Mai 2011	-12.34%
Juin 2011	-1.34%
Juillet 2011	+6.73%
Aout 2011	-3.34%
Septembre 2011	+4.65%
Octobre 2011	+16.74%
Novembre 2011	-2.10%
Décembre 2011	+1.95%

Tableau 1 :Les données variation de cotations de BNP sur l'année 2011

## Calcule sous R

```
> variation=c(5.38,-3.74,7.2,2.12,-12.34,-1.34,6.73,-3.34,4.65,16.74,-2.1,1.95)
> variation
[1] 5.38 -3.74 7.20 2.12 -12.34 -1.34 6.73 -3.34 4.65 16.74
[11] -2.10 1.95
> vol.historique=sd(variation)
> vol.historique
[1] 7.260382
```

$\sigma_n = 7.26\%$  , C'est la volatilité de l'action BNP sur l'année 2011

### 4.2.2 la volatilité implicite

En utilisant les prix observés des options  $C_t$  et en inversant la formule de Black-Scholes, on peut retrouver le paramètre  $\sigma$ . Ici, en général, on n'a pas une seule valeur de sigma, mais une courbe qui dépend du strike  $K$ , c'est le phénomène du "smile de volatilité".

#### Calcul volatilité implicite

Pour obtenir une expression de la volatilité d'après la formule de Black-Scholes, reprenons donc la formule de Black-Scholes pour un call-européen :

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

---


$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds, \text{ on a alors : } \mathcal{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ et}$$

$$\begin{aligned} SN'(d_1) &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \\ &= S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln \frac{S}{E} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{\ln(\frac{S}{E})} e^{-\frac{1}{2} \frac{\ln^2 \frac{S}{E} + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) \ln(\frac{S}{E})}{\sigma^2(T-t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + \ln(\frac{S}{E})(T-t)(2r + \sigma^2 - 2\sigma^2)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \end{aligned}$$

D'autre par :

$$\begin{aligned} Ee^{-r(T-t)} N'(d_2) &= Ee^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\ &= Ee^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln \frac{S}{E} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \right)^2} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + 2r(T-t)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 - 2r(T-t)^2 \sigma^2}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + 2\ln(\frac{S}{E})(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + (T-t)^2 (r^2 + \frac{\sigma^4}{4} - r\sigma^2 + 2r\sigma^2)}{\sigma^2(T-t)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln^2(\frac{S}{E}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})^2 (T-t)^2 + 2\ln(\frac{S}{E})(T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2(T-t)} \right)} \end{aligned}$$

Et donc, on a :

$$SN'(d_1) = Ee^{-r(T-t)} N'(d_2) \quad (*)$$

On pose ensuite :

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{\partial C}{\partial(\ln S)} \\ C^{(2)} &= \frac{\partial^2 C}{\partial(\ln S)^2} \\ \xi &= C^{(1)} - C^{(2)} \end{aligned}$$

On a :

$$C^{(1)} = SN(d_1) + \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)} N'(d_2)$$

$$C^{(2)} = SN(d_1) + 2 \frac{S}{\sigma(T-t)} N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2} N''(d_2)$$

Donc :

$$\xi = \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{S}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_1) - \frac{Ee^{-r(T-t)}}{(\sigma(T-t))^2}N''(d_2)$$

$N''(d) = -dN'(d)$ ,  $d_1 = d_2 + \sigma(T-t)$  et en utilisant (\*) on a :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}(Ee^{-r(T-t)}d_2N'(d_2) - Sd_1N'(d_1)) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{1}{(\sigma(T-t))^2}Ee^{-r(T-t)}\sigma(T-t)N'(d_2) \\ &= \frac{S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) + \frac{Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \\ &= \frac{2S}{\sigma(T-t)}N'(d_1) = \frac{2Ee^{-r(T-t)}}{\sigma(T-t)}N'(d_2) \end{aligned}$$

Soit  $E_\xi$  l'élasticité de la fonction auxiliaire  $\xi$  par rapport à  $S$  :

$$E_\xi = \frac{\partial \ln|\xi|}{\partial \ln S}$$

$\ln|\xi| = \ln(2) + \ln(S) - \ln(\sigma(T-t)) - \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{d_1^2}{2}$ . D'où :

$$\begin{aligned} E_\xi &= 1 - \frac{d_1}{\sigma(T-t)} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{d_1}{\sigma(T-t)} + \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma^2(T-t)} + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2(T-t)}\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \frac{1}{2} - \frac{r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Et

$$\sigma^2(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma^2}) = \ln\left(\frac{S}{E}\right) \iff \sigma^2(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{S}{E}\right) - r(T-t)$$

D'où

$$\sigma = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) - r(T-t)}{(T-t)(E_\xi - \frac{1}{2})}}$$

On a donc une expression de la volatilité en fonction des autres paramètres et de  $E_\xi$  qui n'est autre qu'une combinaison des différentielles premières et secondes du prix du call par rapport au logarithme du sous-jacent. En connaissant donc les valeurs précédentes du call, on en déduit la volatilité.

On remarque que la volatilité implicite dépend du strike et de la maturité, on obtient donc une courbe qui a la forme d'un sourire, d'où le phénomène de "smile de la volatilité". En pratique, pour calculer la volatilité implicite, on ne se sert pas de cette formule trop compliquée à mettre en place, on utilise une résolution numérique. Si on appelle  $C_0$  la valeur d'un call à l'instant initial, pour calculer la volatilité implicite, on cherche à résoudre :

$$C_0 - SN(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) = 0$$

---

**Exemple :(Volatilité implicite)**

Call européen basé sur le cac40 de maturité  $T=1$ .

Le sous-jacent :  $S=3850$  euros.

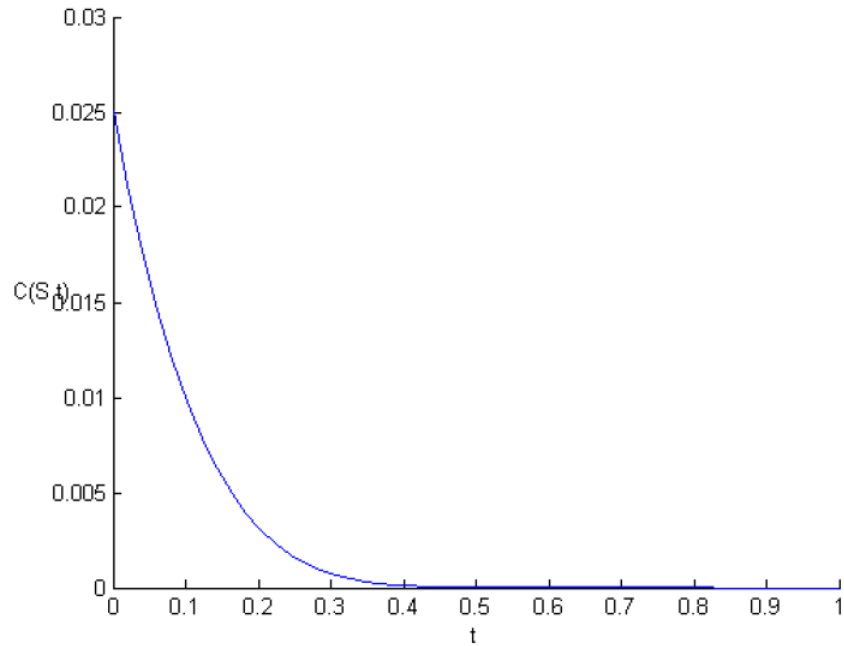
Le strike :  $E=4100$  euros.

Le taux constant est celui de la banque centrale européenne :  $r=1,25\%$ .

Valeur actuelle du call :  $C_0=0.025$  euros.

On résout alors par dichotomie l'équation  $C_0 - SN(d1) - Ee^{-rT}N(d2) = 0$ .

On obtient comme volatilité :  $\sigma=0.0168$ .



---

## Calcule sous R

```
> ## Black-Scholes Function
> BS <-function(S, K, T, r, sig, type="C"){
+   d1 <- (log(S/K) + (r + sig^2/2)*T) / (sig*sqrt(T))
+   d2 <- d1 - sig*sqrt(T)
+   if(type=="C"){
+     value <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
+   }
+   if(type=="P"){
+     value <- K*exp(-r*T)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
+   }
+   return(value)
+ }
> BS(3850,4100,1,0.0125,NA,"C")
[1] NA
> # volatilité implicite
> vol.implicit <- function(S, K, T, r, market, type){
+   sig <- 0.20
+   sig.up <- 1
+   sig.down <- 0.001
+   count <- 0
+   err <- BS(S, K, T, r, sig, type) - market
+   while(abs(err) > 0.00001 && count<1000){
+     if(err < 0){
+       sig.down <- sig;sig <- (sig.up + sig)/2
+     }else{
+       sig.up <- sig;sig <- (sig.down + sig)/2
+     }
+     err <- BS(S, K, T, r, sig, type) - market
+     count <- count + 1
+   }
+   if(count==1000){
+     return(NA)
+   }else{
+     return(sig)
+   }
+ }
> vol.implicit(3850,4100,1,0.0125,0.025,"C")
[1] 0.01678372
```

## Exemple et Application

### 5.1 Exemple

Soit un call sur Arcelourd, une entreprise spécialisée dans le commerce de l'acier, dont les résultats futurs semblent prometteurs. L'action vaut aujourd'hui 80 euros. Soit un call de strike 90 et de maturité un trimestre. Les taux d'intérêts sans risque pour cette période sont équivalents à 5%. La volatilité implicite est estimée égale à 35%. Donc,  $S_0 = 80$ ,  $K = 90$ ,  $T = 0,25$ ,  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 0,35$ .

$$d_1 = \frac{\ln \frac{80}{90} + (0.05 + \frac{0.35^2}{2})0.25}{0.35\sqrt{0.25}} = -0.51$$

$$d_2 = d_1 - 0.35\sqrt{0.25} = -0.69$$

$$\mathcal{N}(d_1) = 0.30 \text{ et } \mathcal{N}(d_2) = 0.25$$

$$call = 80\mathcal{N}(d_1) - 90e^{-0.05 \cdot 0.25}\mathcal{N}(d_2) = 2.48 \text{ euros}$$

$$put = -80\mathcal{N}(-d_1) + 90e^{-0.05 \cdot 0.25}\mathcal{N}(-d_2) = 11.36 \text{ euros}$$

### Calcule sous R

```
> # Black-Scholes Option Calcule (Call & Put)
> blackscholes <- function(S, K, r, T, sigma) {
+   values <- c(2)
+
+   d1 <- (log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
+   d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
+
+   values[1] <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
+   values[2] <- K*exp(-r*T) * pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
+
+   values
+ }
> blackscholes(80,90,0.05,0.25,0.35)
[1] 2.477402 11.359404
```



## 5.2 Application

Evaluation des options financières Selon le modèle de Black Scholes  
"étude de cas du secteur bancaire dans le marché financier du Koweït"

Nom de la Banque	S	E	R	$\sigma$	T	S/E	ln(S/E)
<b>Kuwait National (NBK)</b>	973	924.35	0.05	0.2598	0.75	1,0526	0,0513
<b>Gulf (GB)</b>	348	330.6	0.05	0.2301	0.75	1,0526	0,0513
<b>Commercial Kuwait (CBK)</b>	705	667.75	0.05	0.4232	0.75	1,0526	0,0513
<b>Al Ahli Kuwait (ABK)</b>	429	407.55	0.05	0.1448	0.75	1,0526	0,0513
<b>Ahli United (AUB)</b>	675	641.25	0.05	0.3705	0.75	1,0526	0,0513
<b>Kuwait International (KIB)</b>	304	288.8	0.05	0.207	0.75	1,0526	0,0513
<b>Burgan (Burg B)</b>	537	510.15	0.05	0.2462	0.75	1,0526	0,0513
<b>Kuwait Financement (KFB)</b>	810	769.5	0.05	0.4573	0.75	1,0526	0,0513
<b>Boubyan (BB)</b>	515	489.25	0.05	0.3873	0.75	1,0526	0,0513
<b>Ahli United KSE</b>	230	218.5	0.05	0.0682	0.75	1,0526	0,0513
<b>al Ithmaar (IB)</b>	50	47.5	0.05	0.1182	0.75	1,0526	0,0513

Tableau 1 : Les données pour calcul la valeur du contrat d'option par Modèle Black Scholes

Source : <http://www.kse.com.kw/A/Market/PrintOptionQuotes.aspx>

Nous avons adopté dans notre étude sur les hypothèses suivantes :

- 1) le prix d'exercice doit avoir de 95% du prix implicite d'origine.
- 2) Volatilité à taux fixe de la période d'un an.

Nom de la Banque	d1	d2	N(d1)	N(d2)	Call
<b>Kuwait National (NBK)</b>	0,50716	0,28217	0,6940	0,61109	131,1743
<b>Gulf (GB)</b>	0,54524	0,34597	0,7072	0,63531	43,8024
<b>Commercial Kuwait (CBK)</b>	0,42554	0,05904	0,6648	0,52354	130,9340
<b>Al Ahli Kuwait (ABK)</b>	0,7708	0,6454	0,7796	0,74066	43,6946
<b>Ahli United (AUB)</b>	0,43718	0,11632	0,6690	0,5463	114,1604
<b>Kuwait International (KIB)</b>	0,58496	0,4057	0,7207	0,65752	36,1951
<b>Burgan (Burg B)</b>	0,52307	0,30986	0,6995	0,62166	70,1820
<b>Kuwait Financement (KFB)</b>	0,42224	0,02621	0,6636	0,51045	159,1587
<b>Boubyan (BB)</b>	0,43245	0,09705	0,6673	0,53865	89,8189
<b>Ahli United KSE</b>	1,53294	1,47388	0,9374	0,92974	19,9198
<b>al Ithmaar (IB)</b>	0,91863	0,81627	0,8209	0,79283	4,7696

Tableau 2 : Détermination de la valeur de gain d'une option achat (Call)

Nom de la Banque	S	E	R	T	N(-d1)	N(-d2)	Put
Kuwait National (NBK)	973	924.35	0.05	0.75	0,3060	0,3889	48,5030
Gulf (GB)	348	330.6	0.05	0.75	0,2928	0,3647	14,2345
Commercial Kuwait (CBK)	705	667.75	0.05	0.75	0,3352	0,4765	71,0334
Al Ahli Kuwait (ABK)	429	407.55	0.05	0.75	0,2204	0,2593	7,2445
Ahli United (AUB)	675	641.25	0.05	0.75	0,3310	0,4537	56,8088
Kuwait International (KIB)	304	288.8	0.05	0.75	0,2793	0,3425	10,3656
Burgan (Burg B)	537	510.15	0.05	0.75	0,3005	0,3783	24,5557
Kuwait Financement (KFB)	810	769.5	0.05	0.75	0,3364	0,4895	90,3368
Boubyan (BB)	515	489.25	0.05	0.75	0,3327	0,4614	46,0627
Ahli United KSE	230	218.5	0.05	0.75	0,0626	0,0703	0,3777
al Ithmaar (IB)	50	47.5	0.05	0.75	0,1791	0,2072	0,5213

Tableau 3 : Détermination de la valeur de gain d'une option vente (Put)

**Résultat** : puisque la dispersion du prix augmente, on voit que le risque est augment, et ainsi que le rendement de l'actif.

## Calcule sous R

```

> #Black-Scholes Option Calcule (Call & Put)
> blackscholes <- function(S, K, r, T, sigma) {
+ values <- c(2)
+ d1 <- (log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
+ d2 <- d1 - sigma * sqrt(T)
+ values[1] <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
+ values[2] <- K*exp(-r*T) * pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1)
+ values
+ }
> blackscholes(973,924.35,0.05,0.75,0.25982)
[1] 131.17432 48.50308
> blackscholes(348,330.6,0.05,0.75,0.2301)
[1] 43.80247 14.23455
> blackscholes(705,669.75,0.05,0.75,0.4232)
[1] 130.93403 71.03349
> blackscholes(429,407.55,0.05,0.75,0.1448)
[1] 43.694641 7.244526
> blackscholes(675,641.25,0.05,0.75,0.3705)
[1] 114.16041 56.80883
> blackscholes(304,288.8,0.05,0.75,0.207)
[1] 36.19513 10.36567
> blackscholes(537,510.15,0.05,0.75,0.2462)
[1] 70.18209 24.55572
> blackscholes(810,769.5,0.05,0.75,0.4573)
[1] 159.1587 90.3368
> blackscholes(515,489.25,0.05,0.75,0.3873)
[1] 89.81987 46.06273
> blackscholes(230,218.5,0.05,0.75,0.0682)
[1] 19.9198155 0.3777958
> blackscholes(50,47.5,0.05,0.75,0.1182)
[1] 4.7696097 0.5213446

```

Le logiciel R est un freeware disponible sur le site <http://www.cran.r-project.org/>

► Outils disponibles :

- un langage de programmation orienté objet
- des fonctions de "base"
- des bibliothèques/packages complémentaires (1800 sur le site CRAN)

► Documents sur le logiciel R :

[http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/.philippe/R\\_freeware.html](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/.philippe/R_freeware.html)

## Simulation du modèle de Black Scholes [7],[24]

Dans le modèle de black scholes il s'agit de simuler la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(rd_t + \sigma dW_t), \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

On peut procéder de deux facon. La première consiste à utiliser la méthode d'Euler aléatoire, on pose :

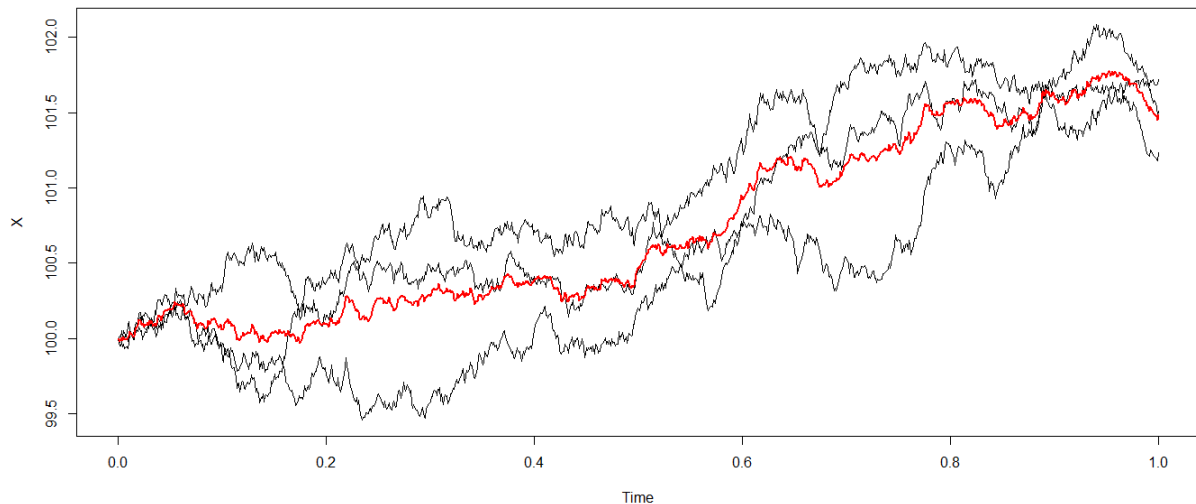
$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n(1 + r\Delta t + \sigma g_n \sqrt{\Delta t}), \\ S_0 &= x \end{aligned}$$

et à simuler  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$

L'approximation du schéma d'Euler devient :

$$\begin{aligned} \ln(S_{n+1}) &= \ln\{S_n(1 + r\Delta t + \sigma\Delta W_n)\} \\ &= \ln(S_n) + \ln(1 + r\Delta t + \sigma\Delta W_n) \\ &= \ln(S_0) + \sum_{i=0}^n \ln(1 + r\Delta t + \sigma\Delta W_i) \end{aligned}$$

Pour simuler l'EDS par schéma d'Euler on utilise le Package 'Sim.DiffProc' (Simulation of Diffusion Processes)



## Code R

```

> ### dS(t) = 0.0005*S(t) dt + 0.01*S(t) dW(t)
> library(Sim.DiffProc)
> f <- expression(0.0005*x)
> g <- expression(0.01*x)
> res <- snssdeld(drift=f,diffusion=g,M=3,x0=100,N=1000)
> res
Ito Sde 1D:
  | dX(t) = 5e-04 * X(t) * dt + 0.01 * X(t) * dW(t)
Method:
  | Euler scheme of order 0.5
Summary:
  | Size of process           | N = 1000.
  | Number of simulation      | M = 3.
  | Initial value             | x0 = 100.
  | Time of process           | t in [0,1].
  | Discretization            | Dt = 0.001.
> summary(res)

      Monte-Carlo Statistics for X(t) at final time T = 1

              X
Mean                101.486354
Variance             0.059513
Median              101.507234
First quartile      101.369933
Third quartile      101.613215
Skewness            -0.084964
Kurtosis             0.666667
Moment of order 2    0.039675
Moment of order 3    -0.001234
Moment of order 4    0.002361
Moment of order 5    -0.000122
Bound conf Inf (95%) 101.246362
Bound conf Sup (95%) 101.708597
> plot(res,plot.type="single")
> lines(time(res),mean(res),col=2,lwd=2)

```

---

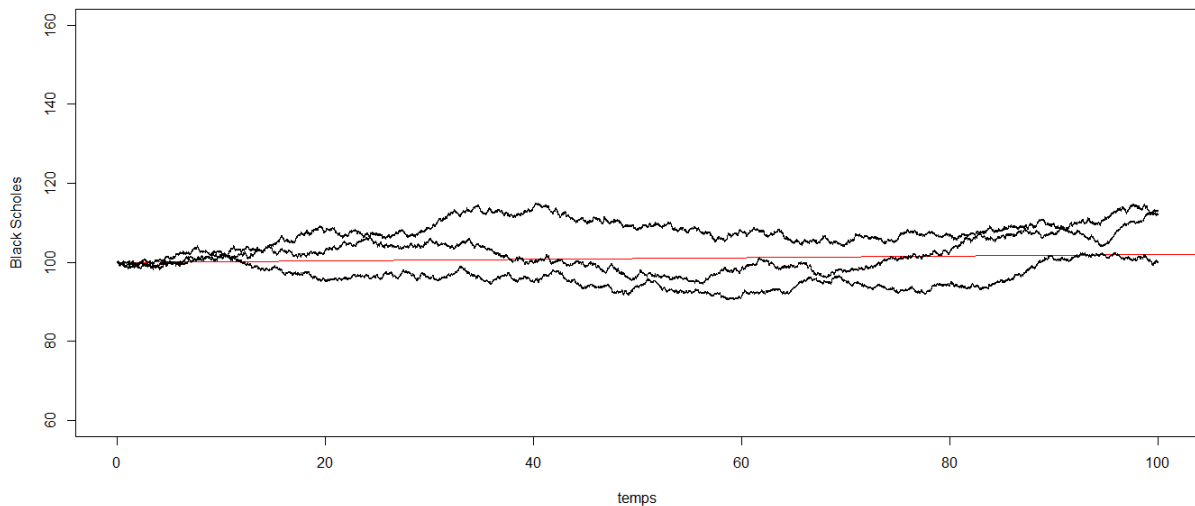
L'autre méthode consiste à utiliser la forme explicite de la solution :

$$X_t = x \exp(rt - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)$$

On obtient

$$S_n = x \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})n\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^n g_i)$$

On approxime toujours  $X_t$  par  $X_t^n = S_{[t/\Delta t]}$



## Code R

```
> ### simulation Black-Scholes
> T<- 100
> deltat <- 1/250
> lambda<- 0.05
> mu <- 0.0005
> sigma <- 0.01
> x0<- 100
> plot(c(0,100),c(0,100), ylim=c(60,160), pch='.', xlab="temps", ylab="Black Scholes")
> temps<- seq(from=0, to=T, by =deltat)
> E=100*exp(lambda*temps)
> lines(E,col=2)
> for(i in 1:3)
+ {
+   epsilon=rnorm(T/deltat,mean=0,sd=sqrt(deltat))
+   B<-array(data=c(0),dim=c(T/deltat+1))
+   B[1]=x0
+   for (t in 2:(T/deltat+1))
+   {
+     B[t]=x0*exp(mu*t*deltat-0.5*sigma^2*deltat*t+sigma*sum(epsilon[2:t]))
+   }
+   lines(temps,B[])
+ }
```

Source : <http://www.math.univ-lille1.fr/tran/enseignements/simuM2.R>

Résultat : on cherche une valeur optimale de sigma pour que la solution  $S_t$  converge vers son espérance

---

## *Conclusion*

Ce travail est consacré à l'étude du modèle de Black et Scholes dans le cas continu, dans le but de leur application en finance. Le modèle de Black-Scholes a été toujours une référence pour tous ceux touchent de près ou de loin à la finance des marchés. Il est très utilisé dans le monde de la finance moderne, alors que ces hypothèses ne sont pas toujours réalistes. Il suppose que le taux d'intérêt est constant or celui-ci est de toute évidence stochastique, car il fluctue aléatoirement, ce modèle a eu un succès commercial que les autres modèles n'ont pu égaliser.

la volatilité et le taux d'intérêt sont des éléments non observables dans le calcul d'une option or la volatilité est un paramètre essentiel dans la valorisation d'une option, c'est un paramètre aléatoire contrairement à ce que prévoit le modèle de Black-Scholes, qui le considère comme élément constant, ce qui estime principalement ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

---

## Biographie

### Fisher Black



Fisher Black était un économiste américain, particulièrement connu pour sa participation à l'élaboration du modèle de Black-Scholes.

Né le 11 janvier 1938 et décédé le 30 août 1995, Fisher Black obtient son doctorat en mathématiques appliquées de l'université de Harvard en 1959, et ne validera sa thèse qu'en 1964, après avoir travaillé sur un système d'intelligence artificielle dans une société et en étant étudiant au MIT.

Il commence sa vie professionnelle en tant qu'enseignant à l'université de Chicago, avant de poursuivre au MIT. A partir des années 1970 il commence à s'intéresser à la politique monétaire, et en 1973 il publie avec Myron Scholes, dans le « Journal of Political Economy », « The Pricing of Options and Corporate Liabilities ». Ouvrage dans lequel il présente le modèle mis en place afin d'évaluer le prix d'actions.

Suite à la parution de cet ouvrage, Fisher Black accède à une forte notoriété et c'est en 1984 qu'il rejoint Goldman Sachs.

Il décède suite à un cancer de la gorge, deux ans avant de pouvoir recevoir le prix Nobel, décerné à son coauteur Myron Scholes en 1997.

### Myron Scholes



Myron Scholes est un lauréat du prix Nobel de Sciences Economiques (1997) grâce à son travail et à l'élaboration d'une méthode d'évaluation des produits dérivés (modèle de Black Scholes).

Né le 1 juillet 1941 au Canada, il a étudié l'économie à l'université de Chicago. Il obtient son MBA (Master of Business Administration) en 1964 et un doctorat en philosophie cinq ans plus tard.

Après sa thèse, il accepte un poste d'enseignant au MIT, où il rencontre Fisher Black. En 1973, il quitte le MIT pour intégrer l'université de Chicago afin de travailler avec Eugène Fama, Merton Miller et Fisher Black.

---

A partir de 1981 et jusqu'en 1996, Myron Scholes travaille en tant qu'enseignant chercheur à l'université de Stanford, où il est maintenant professeur de Finance.

En parallèle de son activité d'enseignant chercheur, Scholes est également un investisseur. En 1994, il fonde avec plusieurs collègues un Hedge Funds, qui a connu un très fort succès dans un premier temps, avec des rendements annualisés de plus de 40%, et qui s'est totalement écroulé en quelques mois.

Scholes a également été impliqué dans l'affaire LTCM, affaire dans laquelle il a été accusé d'avoir utilisé de manière illégale un abri fiscal afin d'éviter d'avoir à payer des impôts sur les bénéfices des investissements des entreprises.

Il est actuellement président d'un Hedge Funds (Platinum Grove Asset Management) qui pèse entre 4 et 5 milliards de dollars avec un rendement moyen annuel de 9,5%.



## Bibliographie

- [1] Joël Priolon, "les marchés financiers", Novembre 2010.
- [2] Autoine Frachotn , "Théorie et pratique des instruments financiers", Janvier 2001.
- [3] M'hamed Eddahbi, "Marchés Financiers et modèles des taux d'intérêt en temps discret et continu", 2007-2009.
- [4] John Hull, "Options,futures et autres actifs dérivés" , 28 décembre 2008.
- [5] Hervé Guiol, "Calcul Stochastique Avancé" , TIMB/TIMC - IMAG ,2006.
- [6] Grégoire Deyirmendjian, "Introduction Aux Mathématiques Financières" , 20 octobre 2006.
- [7] D.Lamberton - B.Lapeyer , "Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance" , Edition Marketing , Paris 1997.
- [8] Romuald ELIE , "Calcul stochastique appliqué à la finance" , ENSAE , Avril 2006.
- [9] Romuald ELIE , "Evaluation d'actifs contingents" , M1 MIDO.
- [10] E.Temam – P.tankov , "Mathématiques financière" , 2008/2009.
- [11] Peter Tankov , "Mathématiques financière" , Master 2 ISIFAR Edition 2013-2014.
- [12] Peter Tankov , "Calibration de modèles et couverture de produits dérivés" , Université Paris-Diderot (Paris VII) 31 Jan 2012.
- [13] WARLOP Romain , "Modèle de Black-Scholes" , Cachan ,29 juin 2011.

- 
- [14] Nicole El Karoui , "Couverture des risques dans les marchés Financiers" , 2003-2004.
- [15] Philippe Bougerol , "Modèles stochastiques et Applications à la finance" , Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 , 1-4-2015.
- [16] Mireille Bossy , "Introduction à la modélisation financière en temps continue et Calcul Stochastique" , INRIA , 16 novembre 2013.
- [17] Lionel Gomez Sanchez , "Absence d'arbitrage et martingales" , EPFL , Février 2002.
- [18] Arthur Charpentier , "Méthodes numériques en finance" , ENSAE-ENSAI-CREST Katholieke Universiteit Leuven , 2006/2007.
- [19] Imen Ben Tahar et Gabriel Turinici , "Mouvement Brownien et évaluation d'actifs contingents" , Université Paris Dauphine, M1 MMD , Janvier 2013.
- [20] Alexandre Popier , "Le modèle de Black et Scholes" , Février 2001.
- [21] Philippe Briand , "Le modèle de Black–Scholes" , Mars 2003.
- [22] Monique Jeanblanc , "Calcul stochastique" , Septembre 2006.
- [23] Hugo Duminil-Copin , "Mouvement Brownien et introduction au calcul stochastique" , 13 décembre 2013.
- [24] Cheikh Bécaye Ndongo , "Processus Aléatoires et Applications en Finance" , Mars 2012.
- [25] Claudio Pacati , "A proof of the Black and Scholes Formula" , May 30, 2012.
- [26] Anne PHILIPPE , "Notes de Cours sur le logiciel R" , 26 septembre 2012.