

Table des matières

1	Notions générales de géométrie différentielle	4
1.1	Variétés Différentielles	5
1.2	Espace tangent	11
1.2.1	Courbes Paramétrées sur une Variété	11
1.2.2	Espace Tangent	12
1.3	Application Tangente	14
1.4	Fibré tangent	16
1.5	Partition de l'unité d'une variété	19
2	Formes différentielles	21
2.1	Algèbre tensoriel	21
2.1.1	Formes multilinéaires alternées et produit extérieur	22
2.1.2	Formes différentielles	25
2.1.3	Différentielle extérieure	26
2.1.4	Lemme de Poincaré	28
2.2	Le fibré des formes alternées	31
2.3	Homotopie	33
3	Cohomologie de De Rham	36
3.1	Introduction à la notion de cohomologie	36
3.2	Algèbre de cohomologie de De Rham.	38
3.3	Invariance par homotopie	41
3.4	Suites de Mayer-Vietoris	45
3.5	Application de la cohomologie	51

Introduction

Un des buts des mathématiques est la classification des objets dont elles font usage. A défaut de le résoudre individuellement pour chaque objet, on peut se contenter de le faire à isomorphisme près. Cette notion dépend bien sûr de la catégorie dans laquelle on se situe. Nous examinerons ce problème dans la catégorie topologique.

Deux espaces topologiques M et N sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $\phi : M \rightarrow N$. Par exemple dans le cas où M et N sont des ouverts de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , un homéomorphisme peut s'interpréter comme un changement global de coordonnées.

Le problème de l'homéomorphie s'avère donc être d'un intérêt incontestable mais en général difficile à résoudre. Une manière de l'aborder consiste à chercher des invariants dans une catégorie où le calcul est possible ; par exemple la catégorie algébrique, cela consiste à associer à chaque espace M un groupe, un anneau ou un espace vectoriel etc. qu'on notera $\pi(M)$ et qui sera tel que $\pi(M)$ est isomorphe à $\pi(N)$ si M est homéomorphe à N . Nous dirons que $\pi(M)$ est un invariant topologique de M .

Dans ce texte nous nous restreignons à des espaces topologiques particuliers pour simplifier le travail. Sur de tels espaces on peut dériver, ce sont les variétés différentiables.

Sur une variété différentiable M on peut définir un exemple d'invariant topologique à l'aide des formes différentielles et l'opérateur de différentiation extérieure. C'est une suite d'espaces vectoriels $\{H^r(M)\}_{r \geq 0}$ naturellement associée à M et appelée cohomologie de de Rham de M sur laquelle elle donne des renseignements topologiques.

Ce mémoire porte sur l'étude de la cohomologie de de Rham. Il permet de s'initier à la topologie différentielle. En effet, la cohomologie de de Rham est un outil en topologie différentielle au sens où elle permet l'étude des variétés différentielles. La construction de cette théorie cohomologique repose sur des propriétés algébriques des formes différentielles, ainsi, il a fallu se familiariser avec les notions de variétés différentielles et de formes différentielles.



GEORGES DE RHAM
1903 – 1990

Le chapitre I : sera réservé aux notions générales et préliminaires de variétés différentielles, conçues de manière à rendre ce travail aussi autonome que possible. Elle ne contiendra aucun résultat nouveau, mais présentera un travail de synthèse au chapitre 3.

Le chapitre 2 : sera consacré à l'étude des formes différentielles, on va énoncer le célèbre lemme de Poincaré, mais démontré seulement en dimension 1, on présentera, par la suite, la notion de fibré des formes alternées ainsi que la notion d'homotopie, utile au chapitre suivante pour une classification de certains groupe cohomologique.

Le chapitre 3 : Le mémoire se termine introduire la notion de cohomologie de De Rham et l'isomorphisme entre les cohomologies d'une variété différentielle. A la fin du chapitre on a essayé de présenter une application du calcul des groupes de cohomologie de de Rham des sphères et des boules à travers le théorème d'invariance du domaine de Brouwer, le théorème de la boule chevelue et le théorème du point fixe de Brouwer.

Chapitre 1

Notions générales de géométrie différentielle

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur \mathbb{R}^n . Pour cela, nous allons introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à \mathbb{R}^n , afin d'y transférer ce que nous savons déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à \mathbb{R}^n . De tels objets nous sont familiers dans \mathbb{R}^3 : une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe... ressemblent localement à \mathbb{R}^2 . Nous voyons toujours ces objets comme sous-ensembles de \mathbb{R}^3 . Ce que nous allons définir ne peut a priori pas être vu comme sous ensemble d'un \mathbb{R}^n . Nous voulons en donner une définition intrinsèque, que nous appellerons variétés, sans faire référence à un espace plus grand. Nous sommes dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à \mathbb{R}^3 . Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de \mathbb{R}^2 . C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. Nous allons recoller ensemble des ouverts de \mathbb{R}^n . Globalement, nous n'auront pas nécessairement \mathbb{R}^n , mais localement, nous aurons à notre disposition tout ce que nous savons faire sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

1.1 Variétés Différentielles

Définition 1.1 Une carte de dimension n sur M est un couple (U, φ) formé de

1/ un ouvert $U \subset M$;

2/ un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

L'ouvert U est le domaine de la carte. Pour $p \in U$, $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$, qu'on appelle une fonction coordonnée. Un point de M peut appartenir à deux domaines différents correspondants à deux cartes (U, φ) et (V, ψ) .

Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M tout entier est appelé atlas de la variété. On dira alors que $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouverts de M . A priori, cet atlas n'est pas unique. En particulier, la réunion de deux atlas est encore un atlas.

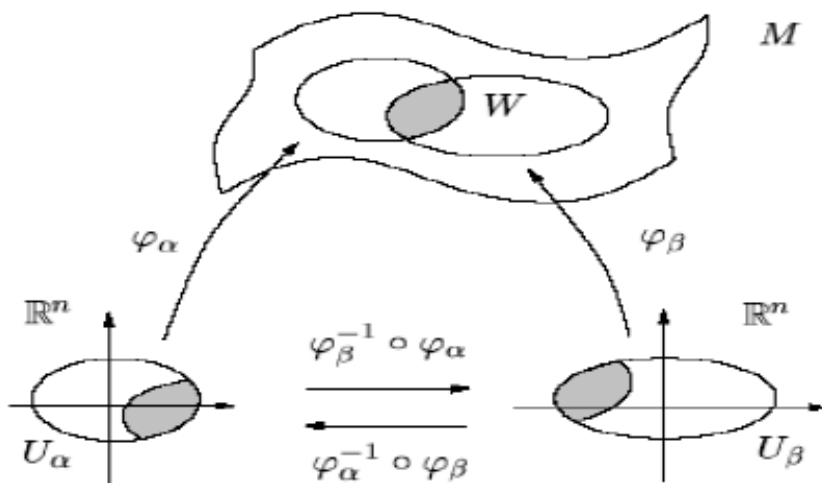


Figure 1

Définition 1.2 Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur M sont compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

est un difféomorphisme entre les ouverts de \mathbb{R}^n . (voir Fig.1)

En coordonnées locales, une carte (U, φ) donne un système locale de coordonnées, sur $U \cap V$ on a deux systèmes de coordonnées $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ et $\psi = (y^1, \dots, y^n)$. Ces deux applications s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi^{-1} & : y = (y^1, \dots, y^n) \mapsto (x^1 = f^1(y), \dots, x^n = f^n(y)), \\ \psi \circ \varphi^{-1} & : x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1 = g^1(x), \dots, y^n = g^n(x)).\end{aligned}$$

La compatibilité signifie que les fonctions f^i et g^i sont de classe C^∞ .

Définition 1.3 *Un atlas de dimension n de M est un ensemble $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartes de dimension n tel que*

- 1/ *les ouverts $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ recouvrent M ;*
- 2/ *toutes les cartes de A sont compatibles deux à deux.*

Un atlas permet donc de définir des coordonnées locales partout sur M . On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas, c'est à dire que $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ et $A' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sont équivalents si toutes les cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ et (V_β, ψ_β) sont compatibles deux à deux.

Définition 1.4 1/ *Une variété différentiable est le couple (M, \mathcal{A}) où M est une variété topologique de dimension n et \mathcal{A} l'atlas maximal de classe C^∞ de M , on l'appelle aussi la structure différentiable de M .*

2/ *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n .*

3/ *Soient (M^m, \mathcal{A}) et (N^n, \mathcal{B}) deux variétés différentiables. On dit que l'application $f : M \rightarrow N$ est de classe C^∞ si chaque représentation locale de f (respectivement \mathcal{A} et \mathcal{B}) est de classe C^∞ , c'est à dire, si la composition $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$ est une application lisse de $\varphi(U \cap f^{-1}V) \rightarrow \psi(V)$ pour toute carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, on dit que $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme de classe C^∞ si f et f^{-1} sont de classe C^∞ . (voir Fig.2)*

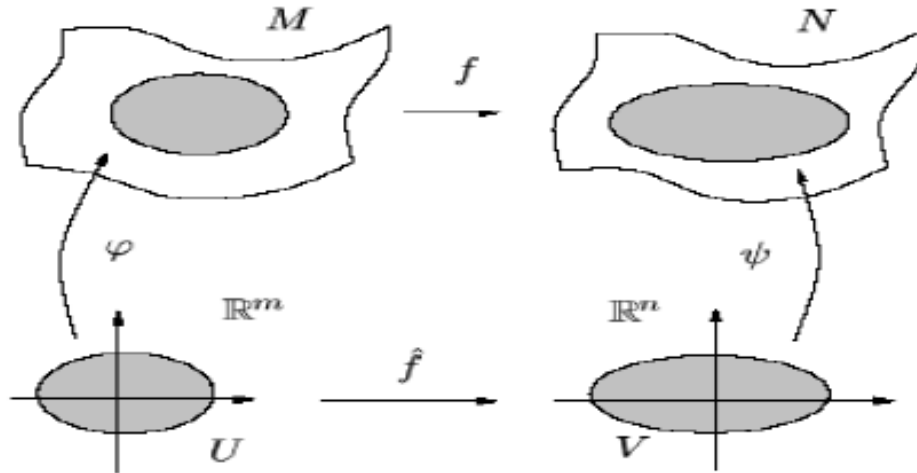


Figure 2

Remarque 1.5 1/ Sur un espace non séparé il n'existe pas de métrique, puisque tout espace muni d'une distance est séparé. De même un sous-espace compact n'est pas forcément fermé et l'image d'un compact par une application continue n'est pas toujours compacte. C'est pour avoir ce type de propriété que l'on impose à une variété d'être un espace séparé. En revanche, tout sous-espace d'un espace topologique séparé est séparé.

2/ Base dénombrable : la classe d'équivalence d'un atlas \mathcal{A} peut être représentée par son atlas maximal qui est l'ensemble de toutes les cartes compatibles avec celles de \mathcal{A} . On veut que la topologie définie par les domaines de ces cartes ait une base dénombrable. Cette hypothèse est importante, sans elle, il est par exemple possible de munir \mathbb{R}^n d'une topologie qui le rende homéomorphe à un \mathbb{R}^k muni de la topologie canonique, pour $k < n$ quelconque.

Exemple 1.6 1) \mathbb{R}^n est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte (\mathbb{R}^n, id) .

2/ Tout \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ définit un atlas (E, φ) . De même tout ouvert $U \subset E$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, φ) .

3/ L'espace euclidien \mathbb{E}^n est une variété de dimension n : il est en bijection avec \mathbb{R}^n via le choix d'un système de coordonnées x . L'atlas à une carte (\mathbb{E}^n, x) définit donc une structure différentiable.

Tous ces exemples sont triviaux puisqu'il s'agit d'espaces homéomorphes à \mathbb{R}^n .

Exemple 1.7 1/ Le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite, est une variété de dimension 1, cependant il n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} (puisque \mathbb{S}^1 est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas. On définit deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) :

$$\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\} \rightarrow]0, 2\pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta,$$

$$\varphi_2 : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \rightarrow]-\pi, \pi[: (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \theta.$$

Les domaines de ces cartes recouvrent clairement le cercle : $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^1$. De plus $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes sont compatibles. Ainsi $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ est un atlas et définit une structure différentiable sur \mathbb{S}^1 .

2/ La sphère unité

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est une variété de dimension n . En effet ; on peut construire un atlas en utilisant la projection stéréographique, les points $N = (1, 0, \dots, 0)$ et $S = (-1, 0, \dots, 0)$ désignant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts $U_N = S^n \setminus \{N\}$, et $U_S = S^n \setminus \{S\}$ et les applications :

$$\begin{aligned} \varphi_N : \quad U_N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1-x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_S : \quad U_S &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto \frac{1}{1+x_1}(x_2, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}.$$

Déterminons les applications de changement de cartes $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ et $\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui sont des difféomorphismes données par $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Donc $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ défini une structure différentiable sur S^n . (voir fig.3)

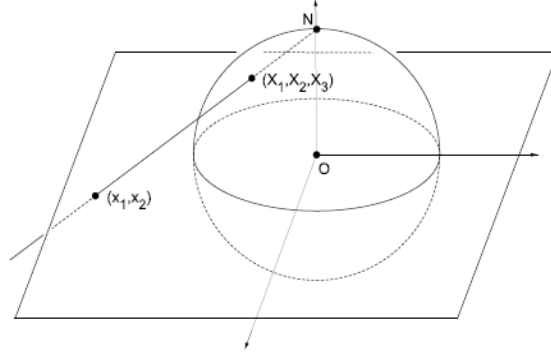


Figure 3

3/ Tout sous-ensemble ouvert Ω d'une variété différentiable M est lui même une variété différentiable. Sa structure différentiable est définie par l'atlas :

$$A_\Omega = \{(U_\alpha \cap \Omega, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \Omega})\}$$

où $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ est un atlas de M .

4/ Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n et d'atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ respectivement. Alors, l'espace produit $M \times N$ est une variété de dimension $n + m$ dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$, où

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

Le tore $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ est une variété, de même que le tore plat de dimension n , $\mathbb{T}^n = S^1 \times \dots \times S^1$.

5/ L'espace projectif réel de dimension n noté $P^n\mathbb{R}$ est l'espace quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si et seulement si } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}$$

On peut donc considérer $P^n\mathbb{R}$ comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . (voir Fig.4)

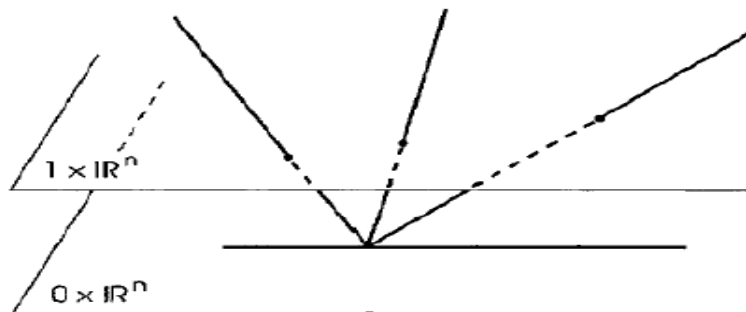


Figure 4

Remarque 1.8 On peut construire des cartes incompatibles sur des variétés. Considérons par exemple la droite réelle recouverte d'une part par la carte globale (\mathbb{R}, φ_1) où $\varphi_1 \equiv Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x$ et d'autre part par la carte (\mathbb{R}, φ_2) où $\varphi_2 \equiv Cube : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto y = x^3$. Les formules de changement de coordonnées sont

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : z \mapsto y = z^{1/3}$$

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto z = y^3$$

On vérifie aisément que ces transformations sont continues mais que $z \mapsto y = z^{1/3}$ n'est pas différentiable en $z = 0$.

Définition 1.9 Le $(n + 1)$ -uplet $x = (x_0, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées homogène de $p(x)$. On note $[x] = [(x_0, \dots, x_n)]$ le point de coordonnées homogènes x . Nous allons définir $P^n\mathbb{R}$ d'un atlas $(U_i, \phi_i)_{0 \leq i \leq n}$ et donc en faire une variété. Posons :

$$V_i = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_i \neq 0\} \quad \text{où } 0 \leq i \leq n$$

Définissons les applications Φ_i par :

$$\begin{aligned} \Phi_i : V_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \phi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

$\widehat{}$ signifie que le terme correspondant est omis.

i/ Ce sont des applications continues et

$$\Phi_i(x) = \Phi_i(y) \text{ si et seulement si } p(x) = p(y)$$

ii/ D'après les propriétés de la topologie quotient, $U_i = \Phi_i(V_i)$ est un ouvert de $P^n\mathbb{R}$ et ϕ_i passe au quotient et donne une application bijective et continue ϕ_i de U_i dans \mathbb{R}^n . Explicitement :

$$\phi_i(p(x)) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

iii/ L'application réciproque est donnée par $\phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = p(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_{n-1})$ ce qui montre que ϕ_i est homéomorphisme de U_i sur \mathbb{R}^n .

Les fonctions de transition $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont bien des difféomorphismes de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_j(U_i \cap U_j)$, car pour $y_j \neq 0$ on a :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \dots, \frac{\widehat{y}_j}{y_j}, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_j} \right).$$

Nous avons ainsi une structure de variété lisse sur $P^n\mathbb{R}$ de dimension n .

1.2 Espace tangent

1.2.1 Courbes Paramétrées sur une Variété

Définition 1.10 Une courbe paramétrée sur M est une application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ de domaine $I \subset \mathbb{R}$. Son expression locale dans une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la courbe :

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto \widetilde{\gamma}(t) = (\widetilde{\gamma}^1(t), \dots, \widetilde{\gamma}^m(t)) = (x^1(t), \dots, x^m(t)) \end{aligned}$$

La courbe γ est régulière en $t \in I$ ($x = \gamma(t) \in M$) si, pour toute carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que U contient le point P , son expression locale $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$ est une courbe régulière en t , i.e. $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt}(t) \neq \vec{0}$. (voir Fig.5)

1.2.2 Espace Tangent

Définition 1.11 Un vecteur tangent à M en un point x est un vecteur tangent à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ au point $\gamma(0) = x$ (où elle est régulière). On appelle espace tangent à M en x l'ensemble $T_x M$ des vecteurs tangents à M en x , c'est-à-dire, l'ensemble des vecteurs tangents en x à toutes les courbes sur M qui passent par x et qui soient régulières.

Proposition 1.12 L'espace tangent $T_x M$ est un espace vectoriel de dimension n , l'ensemble $\{\frac{\partial}{\partial x^i} |_x, i = 1, \dots, m\}$ forme une base de $T_x M$ en coordonnées locales. Par conséquent, tout vecteur tangent à M en x est de la forme :

$$X_x = \sum X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$$

où $X^i(x) \in \mathbb{R}$.

Soient M une variété différentiable, $p \in M$ et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(t) = p$ pour $t \in I$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un ouvert, écrivant

$$C^\infty(p) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(U), U \text{ voisinage de } p\}$$

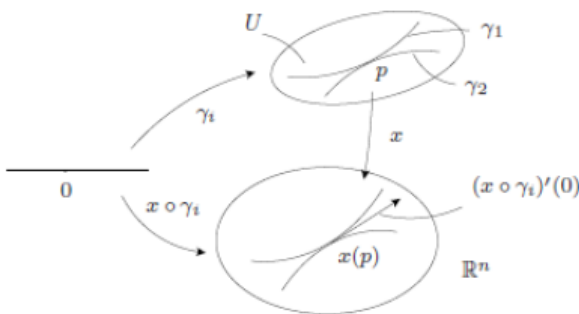


Figure 5

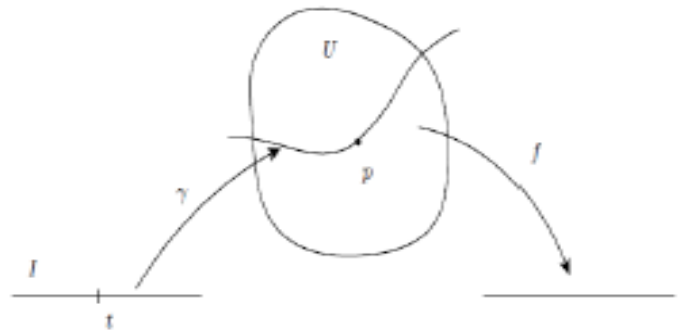


Figure 6

La courbe γ définit une application :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_t : C^\infty(p) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) \end{aligned}$$

On peut interpréter $\dot{\gamma}_t f$ comme la dérivée de f dans la direction de γ au point p . (voir Fig.6)

Exemple 1.13 $M = \mathbb{R}^n$. Si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe lisse et $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ est la dérivée de γ au point p , alors :

$$\dot{\gamma}_t f = (f \circ \gamma)'(t) = f'(p)\gamma'(t) = \gamma'(t) \cdot \nabla f(p).$$

En général, l'application $\dot{\gamma}_t$ satisfait à :

$$\begin{aligned} 1/ \dot{\gamma}_t(af + bg) &= a\dot{\gamma}_t f + b\dot{\gamma}_t g, \\ 2/ \dot{\gamma}_t(fg) &= g(p)\dot{\gamma}_t f + f(p)\dot{\gamma}_t g. \end{aligned}$$

Pour tout $f, g \in C^\infty(p)$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $\dot{\gamma}_t$ est une dérivation.

Définition 1.14 Un vecteur tangent à M en $p \in M$ est une application $v : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$1/ v(af + bg) = av(f) + bv(g), \quad f, g \in C^\infty(p), \quad a, b \in \mathbb{R};$$

$$2/ v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g) \quad (\text{Règle de Leibniz}).$$

L'espace tangent en p est le \mathbb{R} -espace vectoriel linéaire de vecteur tangent au point p , noté $T_p M$.

Remarque 1.15 1/ Si $v, w \in T_p M$ et $c, d \in \mathbb{R}$, alors : $cv + dw$ est l'application

$$\begin{aligned} (cv + dw) : C^\infty(p) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto (cv + dw)(f) = cv(f) + dw(f) \end{aligned}$$

$cv + dw$ est un vecteur tangent au point p .

2/ On note $vf = v(f)$.

3/ Si $v \in T_pM$ et $c \in C^\infty(p)$ est une fonction constante, alors : $cv = 0$.

4/ Soit U un voisinage de p interprété comme une variété différentiable. Puisque nous utilisons les fonctions en $C^\infty(p)$ dans la définition de T_pM , les espaces T_pM et T_pU peuvent être identifiés de façon naturelle.

Soit (U, x) , $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ une carte au point p . On définit un vecteur tangent $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ au point p en fixant

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(f) = D_i(f \circ x^{-1})(x(p)), \quad f \in C^\infty(p)$$

D_i est la dérivée partielle par rapport à la i -ème variable. On note aussi $(\partial_i)_p = D_{x^i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$.

1.3 Application Tangente

Définition 1.16 Soient M^m et N^n deux variétés différentiables et soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^∞ . L'application tangente de f au point p est l'application linéaire $f_* : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ définie par ;

$$(f_*v)g = v(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(f(p)), \quad v \in T_pM$$

On peut écrire aussi $T_p f$ ou f_{*p} .

Remarque 1.17 1/ f_*v est un vecteur tangent au point $f(p)$ pour tout $v \in T_pM$ et l'application f_* est linéaire.

2/ Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$, alors $f_{*p} = f'(p)$ (avec l'identification canonique $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$).

3/ Soient M , N et L trois variétés différentiables et $f : M \rightarrow N$, $g : N \rightarrow L$ deux applications de classe C^∞ , alors ; $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$, pour tout $p \in M$.

4/ L'interprétation de l'application tangente en utilisant les courbes : soient $v \in T_pM$ et $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe de classe C^∞ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}_0 = v$. On définit une application $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $\alpha = f \circ \gamma : I \rightarrow N$; alors $f_*v = \dot{\alpha}_0$.

Soit $x = (x^1, \dots, x^m)$ les coordonnées locales de $p \in M^m$ et $y = (y^1, \dots, y^n)$ les coordonnées locales de $f(p) \in N^n$. La matrice de $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ par rapport à les bases $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p, i = 1, \dots, m$ et $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{f(p)}, j = 1, \dots, n$, est

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^n f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^i \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)}, 1 \leq j \leq m.$$

Ainsi, on obtient la matrice (a_{ij}) dont la dimension est $n \times m$:

$$a_{ij} = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}(y^i \circ f)$$

cela s'appelle la matrice jacobienne de f au point p (par rapport à des bases données), elle est de même que la matrice de l'application linéaire $g = y \circ f \circ x^{-1}$ par rapport aux bases standards de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . (voir Fig.7)

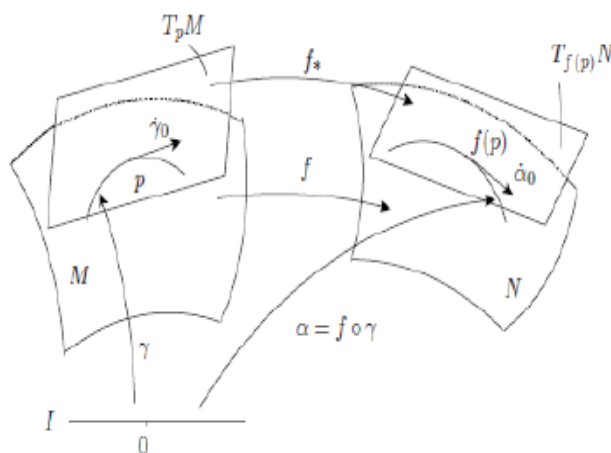


Figure 7

Proposition 1.18 Soit $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $p \in M$. Alors f est un difféomorphisme locale au point p si et seulement si $f_* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ est un isomorphisme.

Exemple 1.19 1/ l'espace tangent d'un espace vectoriel de dimension n : Soit V un espace vectoriel (réel) de dimension n . Rappelons que tout isomorphisme (linéaire) $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ induit la même C^∞ -structure sur V , ainsi nous pouvons identifier V et $T_p V$ de façon naturelle pour tout $p \in V$, i.e. si $p \in V$.

2/ Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ et $p \in M$, on définit la différentielle de f par $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $df v = v f$, $v \in T_p M$, on peut la désigner aussi par df_p par l'isomorphisme $i : \mathbb{R} \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ on obtient $df = i^{-1} \circ f_*$, nous identifions $df = f_*$.

3/ L'espace tangent de variété produit : Soient M et N deux variétés différentiables et $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$, $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$ deux projections. En utilisant ces projections on peut identifier $T_{(p,q)}(M \times N)$ et $T_p M \oplus T_q N$ d'une façon naturelle ; on définit un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \tau : T_{(p,q)}(M \times N) &\rightarrow T_p M \oplus T_q N \\ v &\mapsto \tau v = \underbrace{\pi_{1*} v}_{\in T_p M} + \underbrace{\pi_{2*} v}_{\in T_q N} \end{aligned}$$

1.4 Fibré tangent

Sur une variété, la notion de dérivation garde un sens. Dans ces conditions, on aimerait bien avoir un résultat analogue à celui obtenu pour les dérivations ponctuelles : une dérivation sur une variété M devrait pouvoir nous permettre d'associer à chaque point x de M un vecteur tangent X_x de $T_x M$. Pour ce faire, nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs tangents est lui-même une variété d'une façon naturelle.

Définition 1.20 Soit M une variété différentiable. On définit le fibré tangent TM de M comme union disjointe de tous les espaces tangents de M . (voir Fig.8)

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

Les points de TM sont les couples (x, v) où $x \in M$, $v \in T_x M$ et $\pi : TM \rightarrow M$ la projection $\pi(x, v) = x$. Pour le moment, TM est la somme ensembliste des différents espaces vectoriels tangents à M , sans aucune topologie.

Pour chaque carte (U, φ) , l'application :

$$\Phi : (x, \xi) \mapsto (\varphi(x), T_x \varphi(\xi))$$

est une bijection de TU sur $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Un atlas $(U, \varphi)_{i \in I}$ de M étant donné, on munit TM d'une topologie en imposant les conditions suivantes :

- a) TU_i sont des ouverts de TM .
- b) Les applications Φ_i sont des homeomorphismes.

Autrement dit, $\Omega \subset TM$ est ouvert si et seulement si $\Phi_i(\Omega \cap TU_i)$ est, pour tout i , un ouvert de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Pour voir que ces conditions sont cohérentes, on remarque que, d'après la définition même de l'espace tangent, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ (y, v) &\mapsto ((\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y), T_x(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(v)) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme, et même un difféomorphisme. On a donc défini une topologie sur TM qui en fait une variété topologique munie de l'atlas $(TU_i, \Phi_i)_{i \in I}$. Cet atlas étant lisse, TM est une variété lisse de dimension $2 \times \dim M$ (si M est une variété C^p avec $p > 0$, alors TM est une variété C^{p-1}). Cette variété s'appelle le fibré tangent à M .

Le fibré tangent TM a une structure canonique d'une variété différentiable. (Voir Fig.9)

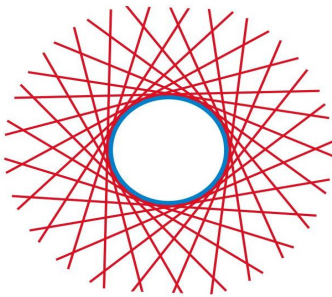


Figure 8

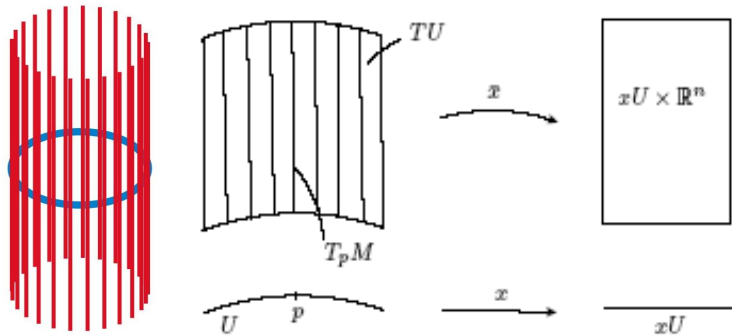


Figure 9

Théorème 1.21 Soit M une variété différentiable de dimension n , le fibré tangent TM de M est muni de la topologie naturelle et d'une structure de variété lisse de dimension $2n$ telle que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ est lisse.

Définition 1.22 Soient E , B et F trois variétés. Une application lisse p de E dans B est une fibration (de base B , de fibre type F et d'espace total E) si pour tout $x \in B$, il existe un ouvert U contenant x et un difféomorphisme $\Phi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que le diagramme 1 :

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\
 \downarrow p & \searrow pr_1 & \\
 U & &
 \end{array}$$

Diagramme 1

soit commutatif. On appelle espace fibré le quadruplet (E, p, B, F) .

Proposition 1.23 La projection canonique p de TM sur M est une fibration.

Preuve. Il suffit d'introduire l'application :

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_i : p^{-1}(U) = TU_i & \rightarrow & U_i \times \mathbb{R} \\
 \xi_x & \mapsto & (x, T_x\varphi(\xi)) \quad \blacksquare
 \end{array}$$

Remarque 1.24 la restriction de ψ_i à la fibre T_xM de x est un isomorphisme d'espaces vectoriels de T_xM sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.25 Un fibré vectoriel réel sur une variété B est un espace fibré (E, p, B, F) tel que :

- a) la fibre type F et les fibres $p^{-1}(b)$, $b \in B$, sont des espaces vectoriels réels ;
- b) pour toute trivialisation locale φ , la restriction de φ à $p^{-1}(b)$ (qui envoie $p^{-1}(b)$ dans $\{b\} \times F$), induit un isomorphisme d'espaces vectoriels sur F . La fibre $p^{-1}(b)$ est notée E_b .

Remarque 1.26 Le fibré tangent est difféomorphe localement à un produit : $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (qu'on appelle une trivialisatation locale). En général, TM n'est pas globalement trivial, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de difféomorphisme de TM dans $M \times \mathbb{R}^n$ linéaire le long des fibres.

Exemple 1.27 1/ Le fibré tangent à \mathbb{R}^n admet une trivialisatation globale $T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ via l'identification canonique $T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

2/ Le fibré tangent au cercle \mathbb{S}^1 admet une trivialisatation globale car il est difféomorphe au cylindre : $T\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

1.5 Partition de l'unité d'une variété

Définition 1.28 On appelle partition de l'unité d'un espace topologique X une famille de fonctions continues $(\rho_i)_{i \in I}$ définies sur X et à valeurs positives telle que pour tout $x \in X$ on ait les conditions suivantes :

1/ Il existe un voisinage de x tel que toutes les fonctions ρ_i sauf un nombre fini sont nulles sur ce voisinage,

2/ $\sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1$.

Définition 1.29 On appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X une partition de l'unité de X indexée par le même ensemble I et telle que pour tout $i \in I$ le support de ρ_i est inclus dans U_i .

Lemme 1.30 Toute variété différentielle M admet une base dénombrable dont les éléments ont une adhérence compacte.

Proposition 1.31 Toute variété différentielle M admet une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts telle que :

1/ $V_0 \subset \bar{V}_0 \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset$,

2/ \bar{V}_n est compact,

3/ $M = \bigcup_{n \geq 0} V_n$.

Définition 1.32 Une fonction plateau sur une variété M de classe C^p est une fonction de classe C^p définie sur M et à valeurs dans $[0, 1]$ pour laquelle il existe deux ouverts relativement compacts U et V avec $\bar{U} \subset V$ tels que $\text{supp } f \subset V$ et $\forall x \in U, f(x) = 1$.

Lemme 1.33 Soit U un ouvert d'une variété différentielle de classe C^p . Alors pour tout $x \in U$, il existe un ouvert relativement compact V contenant x tel que $V \subset U$ et une fonction plateau égale à 1 sur V et à support inclus dans U .

Proposition 1.34 Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert d'une variété différentielle M de classe C^p . Il existe une partition de l'unité $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe C^p et à support compact telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $i \in I$ tel que $\text{supp } \rho_n \subset U_i$.

Chapitre 2

Formes différentielles

2.1 Algèbre tensoriel

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n , on rappelle qu'une application L de E^k dans \mathbb{R} est appelée une forme k -linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a :

$$L(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = aL(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bL(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v_i, w_j \in E$. On notera $\otimes^k E^*$ l'espace vectoriel des formes k -linéaire sur E .

Proposition 2.1 *Soit $L \in \otimes^k E^*$ et $T \in \otimes^l E^*$. Le produit tensoriel de L et T est la forme $k + l$ -linéaire noté $L \otimes T$ définie par :*

$$L \otimes T(v_1, \dots, v_{k+l}) = L(v_1, \dots, v_k)T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}). \quad (2.1)$$

Cette opération n'est pas commutative, mais elle est associative, elle permet de donner une base de $\otimes^k E^*$.

En effet ; si on se donne une base (e_1, \dots, e_n) de E et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale (c'est la base de E^* , telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ji}$), on montre que :

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k)$$

La famille $\{e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*, 1 \leq i_j \leq n\}$ est libre, on a bien une base de $\otimes^k E^*$ et $\dim \otimes^k E^* = n^k$.

2.1.1 Formes multilinéaires alternées et produit extérieur

Définition 2.2 Soit $L \in \otimes^k E^*$. On dira que L est alternée si, pour toute permutation δ de $\{1, \dots, k\}$ et $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$, on a :

$$L(v_1 \dots v_k) = \xi(\delta) L(v_{\delta(1)}, \dots, v_{\delta(k)})$$

où $\xi(\delta)$ désigne la signature de δ , on notera $\wedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k formes linéaires alternées

Remarque 2.3 1/ On pose $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}$ une 0-forme linéaire alternée est une constante.

2/ Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\wedge^1 E^* = E^*$. Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$. L'application qui à n vecteurs de \mathbb{R}^n associe leur déterminant relativement à une base donnée appartient à $\wedge^n (\mathbb{R}^n)^*$

Définition 2.4 Si $L \in \otimes^k E^*$, on lui associe $Alt(L) \in \wedge^k E^*$ (l'antisymétrisé de L) par :

$$Alt(L)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \delta_k} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \quad (2.2)$$

où δ_k est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k\}$.

Proposition 2.5 *Le produit extérieur de $L \in \wedge^k E^*$ et de $T \in \wedge^l E^*$ est la $k+l$ -forme alternée $L \wedge T$ définie par :*

$$L \wedge T = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(L \otimes T) \quad (2.3)$$

c'est-à-dire par :

$$L \wedge T(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \delta_{k+l}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

où δ_{k+l} est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k+l\}$. Le produit extérieur est bilinéaire, associatif et vérifie

$$L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$$

Preuve. Il faut vérifier que $L \wedge T$ est bien $k+l$ -linéaire et alternée. Soit μ une permutation, d'après 2.2

$$\begin{aligned} L \wedge T(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(k+l)}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \delta_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\mu)^2 L(v_{\sigma \circ \mu(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \mu(k)}) T(v_{\sigma \circ \mu(k+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \mu(k+l)}) \\ &= \varepsilon(\mu) \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \delta_{k+l}} \varepsilon(\sigma \circ \mu) L(v_{\sigma \circ \mu(1)}, \dots, v_{\sigma \circ \mu(k)}) T(v_{\sigma \circ \mu(k+1)}, \dots, v_{\sigma \circ \mu(k+l)}) \\ &= \varepsilon(\mu) L \wedge T(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

Soit τ la permutation qui transforme $(1, \dots, k+l)$ en $(k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$. On a $\varepsilon(\tau) = (-1)^{k+l}$ et on voit que

$$T \wedge L(v_1, \dots, v_{k+l}) = L \wedge T(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k+l)})$$

d'où $L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$. ■

Proposition 2.6 *Si L_1, \dots, L_k sont des formes linéaires, alors :*

$$L_1 \wedge \dots \wedge L_k(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \delta_k} \varepsilon(\sigma) L_1(v_{\sigma(1)}) \dots L_k(v_{\sigma(k)}) = \det((L_i(v_j))_{i,j})$$

Exemple 2.7 Soient (e_1, \dots, e_n) une base de E de base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) , $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. On a $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ sinon. Ainsi la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est libre.

Théorème 2.8 Si $L \in \wedge^k E^*$ et si (e_1, \dots, e_n) est une base de E de base duale (e_1^*, \dots, e_n^*) , alors :

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

Preuve. On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a :

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

autrement dit $L = \sum_{i_1, \dots, i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*$.

Si les i_1, \dots, i_k ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$, s'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. De plus : $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$, d'où :

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \delta_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \delta_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \delta_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

■

2.1.2 Formes différentielles

Définition 2.9 Une forme différentielle ω de degré k (ou k -forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\wedge^k E^*$:

$$\begin{aligned}\omega : U &\rightarrow \wedge^k E^* \\ x &\mapsto \omega_x\end{aligned}$$

L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.

Remarque 2.10 1/ Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans \mathbb{R} . La différentielle d'une fonction lisse f de U dans \mathbb{R} appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera par df .

2/ Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E et $\alpha \in \Omega^k(U)$, pour tout $x \in U$, il existe des réels $\alpha_{i_1, \dots, i_k}(x)$ telles que :

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$$

Comme e_i^* est la différentielle de l'application i^{eme} coordonnée $x \rightarrow x^i$ on écrit :

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.4)$$

les fonctions α_{i_1, \dots, i_k} sont obtenues en composant α avec des applications coordonnées et sont donc lisse. En particulier, de la formule 2.4, la différentielle d'une application lisse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ notée df s'écrit :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i.$$

2/ La définition du produit extérieur s'étend aux formes différentielles. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$.

Définition 2.11 Soit U et V deux ouverts d'espaces vectoriels et f une application lisse de U dans V . L'image réciproque par f de $\alpha \in \Omega^k(v)$, notée $f^*\alpha$ est la forme sur U définie par :

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(Df(x).v_1, \dots, Df(x).v_k) \quad (2.5)$$

Si on note y^1, \dots, y^m les coordonnées sur V et (f^1, \dots, f^m) les composantes de f , on remarque que $dy^i (Df(x) \cdot v) = (df^i)_x(v)$. Ainsi si $\alpha_y = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$, alors :

$$(f^* \alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m}(f(x)) (df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k})_x$$

Proposition 2.12 Soit $f : U \rightarrow V$ une application lisse

1- Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$ on a : $f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta$,

2- Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$; on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$,

3- Soient $g : V \rightarrow W$ une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$, alors, $(g \circ f)^* \alpha = f^*(g^* \alpha)$.

2.1.3 Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$; i.e. $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. On sait que la différentielle permet d'associer une 1-forme à une 0-forme (i.e. une fonction). On étend ceci aux k -forme différentielle.

Théorème 2.13 Soit U un ouvert d'un espace vectoriel \mathbb{E} . Il existe une application linéaire $d_i : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

1/ Si $\alpha \in \Omega^k(u)$ $d\alpha : d\alpha \in \Omega^{k+1}(u)$,

2/ La restriction de d à $\Omega^0(u)$ est la différentielle des fonctions,

3/ Si $\alpha \in \Omega^k(u) : d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$,

4/ $d \circ d = 0$.

Preuve. Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant la troisième assertion du théorème précédent, on a donc $(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$, pour tout $i_1 \dots i_k \in \{1, \dots, k\}$.

On en déduit que

$$d(f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Si $\alpha \in \Omega^k(u) : \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, en utilisant la linéarité de d on a :

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.6)$$

Il faut voir maintenant que cette formule convient, l'expression est bien linéaire, elle vérifie 1 et 2. Pour prouver 3, il suffit de considérer le cas où $\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ et $\beta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$. Alors :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(df.g + dg.f) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ d\alpha \wedge \beta &= gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ \alpha \wedge d\beta &= (-1) f dg dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

Voyons que $d \circ d = 0$ commençons par les fonctions, on a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, donc :

$$\begin{aligned} d(df) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^j \right) \wedge dx^i \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'après le théorème de Schwars. Toujours d'après 2.6; $d(dx^i) = 0$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} d(d\alpha) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} d(d\alpha_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Définition 2.14 On dit que

1/ α est fermé si $d\alpha = 0$,

2/ On dit que α est exacte s'il existe β telle que $d\beta = \alpha$.

Proposition 2.15 *La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est à dire si U et V sont deux ouverts d'espaces vectoriels et si φ est une application lisse de U dans V ; alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$, on a :*

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$$

Preuve. Commençons par les 0-formes i.e. les fonctions. Dans ce cas la formule devient $d(f \circ \varphi) = \varphi^*df$ où l'on reconnaît le théorème de dérivation composée. Par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour les formes qui s'écrivent $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

On a vu que $\varphi^*\alpha = (f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$ où les φ_i sont les composantes de φ . On a donc :

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\alpha) &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \\ &= (\varphi^* \circ df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \varphi^*(d\alpha) \end{aligned}$$

■

Remarque 2.16 *On peut dire que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est une forme fermée (resp. exacte).*

2.1.4 Lemme de Poincaré

Condition pour qu'une forme différentielle soit égale à $d\alpha$

Le problème est le suivant : soit donnée une forme différentielle $\omega : U \rightarrow \wedge^k E^*$. A quelle condition existe-t-il une forme différentielle $\alpha : U \rightarrow \wedge^{k-1} E^*$ telle que $d\alpha = \omega$?

Exemple 2.17 1. *Considérons*

$$P = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$$

sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. D'une part,

$$\begin{aligned} dP &= x \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, $P = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ ou encore $P = d \ln \| (x, y) \|^2$. Ainsi P est exacte sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

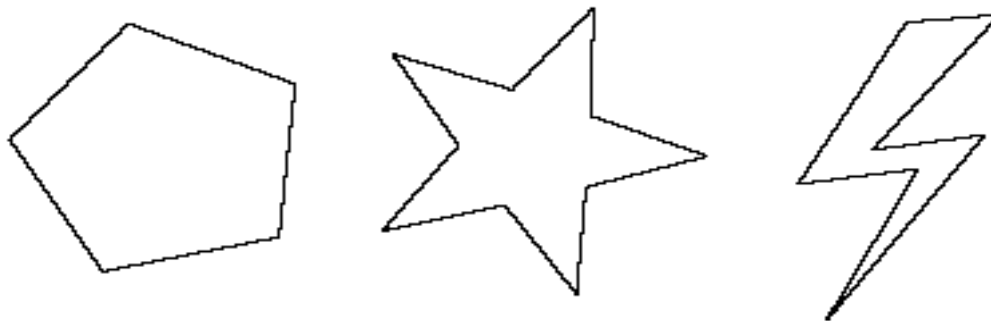


FIG. 2-1 – Figure 9 : Domaines convexe et donc étoilé, étoilé mais pas convexe et non étoilé.

Remarque 2.18 *Une forme différentielle exacte est fermée.*

Si on exige que α soit de classe C^2 , il faut que ω soit de classe C^1 et que $d\omega = 0$, puisque $d(d\alpha) = 0$. Nous allons donner une réciproque partielle lorsque l'ouvert U satisfait à certaines conditions.

Définition 2.19 *Un ouvert U de \mathbb{R}^n est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenue dans U . (voir Fig.9)*

Remarque 2.20 *Un ensemble étoilé est connexe, et un ensemble convexe est étoilé.*

On peut maintenant formuler le lemme de Poincaré

Théorème 2.21 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte .*

Preuve. On suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. Montrons ce resultat pour les 1-formes. Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ vérifiant $d\alpha = 0$, et on considère la fonction définie sur U par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (\alpha_i(tx)) dt$$

Remarquons que ceci à un sens car tout $x \in U$, le segment $[0, x] \subset U$. Calculons sa différentielle

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx^i + \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i(tx)}{\partial x^j} dt \right) dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 tx^i \frac{\partial \alpha_i(tx)}{\partial x^j} dt \right) dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 tx^i \frac{\partial \alpha_i(tx)}{\partial x^i} dt \right) dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \int_0^1 t \frac{d\alpha_j(tx)}{dt} dt \right) dx^j \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j dx^j \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne 2 à la ligne 3 se fait en utilisant $d\alpha = 0$ celui de la ligne 4 à la ligne 5 en intégrant par parties. Pour une forme de degré quelconque, on peut aussi produire une primitive par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(u)$, on définit une k -forme $I(\alpha)$ par :

$$I(\alpha) = \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \alpha_{i_1, \dots, i_k}(tx) dt \right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

où $I(\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{tx}(x, v_1, \dots, v_k) dt$. ■

Corollaire 2.22 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\alpha \in \Omega^k(U)$. Si U est difféomorphe à \mathbb{R}^n et si $d\alpha = 0$, alors α est exacte.

Preuve. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ un difféomorphisme. D'après la proposition [] on a $f^*\alpha$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}$ telle que $d\beta = f^*\alpha$. On obtient

$$d(f^{-1*}\beta) = f^{-1*}d\beta = f^{-1*}f^*\alpha = \alpha$$

Ce qui montre que α est exacte. ■

Si on peut montrer qu'il existe une 1-forme fermée non-exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a donc

Corollaire 2.23 $\mathbb{R}^2 / \{0\}$ n'est pas difféomorphe à \mathbb{R}^2 .

2.2 Le fibré des formes alternées

Soit M une variété C^{r+1} de dimension n , avec $0 \leq r \leq \omega$ et n dans \mathbb{N} . Dans cette section, p désigne un élément de \mathbb{N} . Notons $\pi : TM \rightarrow M$ le fibré tangent de M et

$$\Lambda^* T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^*(T_x M)^* \quad (2.7)$$

l'ensemble réunion disjointe des espaces vectoriels de dimension finie des formes multilinéaires alternées sur les espaces tangents aux points x de M , ainsi que :

$$\Lambda^p T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^p(T_x M)^* \quad (2.8)$$

En particulier $T^* M = \Lambda^1 T^* M = \coprod_{x \in M} (T_x M)^*$.

Soit l'application

$$\begin{array}{ccc} \lambda_* : \Lambda^* T^* M & \rightarrow & M \\ \omega_x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \lambda_p : \Lambda^p(T_x M)^* & \rightarrow & M \\ \omega_x & \mapsto & x \end{array} \quad (2.9)$$

Notons que $\Lambda^0 T_x M$ s'identifie avec $M \times \mathbb{R}$, et λ_0 avec la première projection.

Les inclusions $\Lambda^p(T_x M)^* \subset \Lambda^*(T_x M)^*$, pour tout x dans M , induisent une inclusion $\Lambda^p T^* M \subset \Lambda^* T^* M$, et $\lambda_p = \lambda_*|_{\Lambda^p T^* M}$.

Nous allons munir l'application $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \rightarrow M$ d'une structure de fibré vectoriel, de manière complètement analogue à la construction du fibré tangent. Si (U, ϕ) est une carte locale de M à valeurs dans \mathbb{R}^n , notons :

$$\lambda_* \phi : \lambda_*^{-1}(U) \rightarrow U \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$$

la bijection telle que, pour tout x dans U et ω_x dans $\Lambda^*(T_x M)^* : \lambda_* \phi(\omega_x) = (x, ((T_x \phi)^{-1})^* \omega_x)$.

Proposition 2.24 *Il existe une et une seule structure de fibré vectoriel de classe C^r sur $\lambda^* : \Lambda^*T^*M \rightarrow M$ telle que, pour toute carte locale (U, ϕ) de classe C^{r+1} de M , la partie $\lambda_*^{-1}(U)$ soit un ouvert de Λ^*T^*M et le couple $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_*\phi)$ soit une trivialisatation locale C^r du fibré vectoriel λ_* au-dessus de U .*

On construit de même une unique structure de fibré vectoriel C^r sur $\lambda_p : \Lambda^pT^*M \rightarrow M$ telle que, pour toute carte locale (U, ϕ) de classe C^{r+1} de M , la partie $\lambda_p^{-1}(U)$ soit un ouvert de Λ^pT^*M et le couple $(\lambda_p^{-1}(U), \lambda_p\phi)$, où $\lambda_p\phi$ associe à $\omega_x \in \Lambda^p(T_xM)^*$ le couple $(x, ((T_x\phi)^{-1})^*\omega_x)$, soit une trivialisatation locale C^r du fibré vectoriel λ_p au-dessus de U . Le fibré vectoriel $\lambda_p : \Lambda^pT^*M \rightarrow M$ est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $\lambda_* : \Lambda^*T^*M \rightarrow M$.

Preuve. Si (U, ϕ) et (U', ϕ') sont deux cartes locales de M à valeurs dans \mathbb{R}^n , l'application :

$$\begin{aligned} \lambda_*\phi' \circ (\lambda_*\phi)^{-1} : \phi(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* &\rightarrow \phi'(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* \\ (x, \omega) &\mapsto (\phi' \circ \phi^{-1}(x), ((d(\phi' \circ \phi^{-1}))_x)^{-1}(\omega)) \end{aligned}$$

est un C^r -difféomorphisme. Donc l'ensemble des couples $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_*\phi)$, lorsque (U, ϕ) parcourt l'ensemble des cartes locales C^{r+1} de M , est un atlas de cartes C^r sur Λ^*T^*M .

Ceci permet de munir Λ^*T^*M d'une topologie, et d'une structure de variété C^r . Cette topologie est, comme celle de M , séparée et à base dénombrable, que l'application λ_* est C^r , et que $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_*\phi)$ est une trivialisatation locale C^r d'une structure de fibré vectoriel C^r sur λ_* . ■

Le fibré vectoriel $\lambda_p : \Lambda^pT^*M \rightarrow M$ s'appelle le fibré des p -formes alternées sur M . Le fibré vectoriel $\lambda_* : \Lambda^*T^*M \rightarrow M$ s'appelle le fibré des formes alternées sur M . Le fibré vectoriel $\lambda_1 : T^*M \rightarrow M$, dont la fibre au-dessus de chaque point x de M est l'espace dual à l'espace tangent à M en x , s'appelle le fibré cotangent de M .

2.3 Homotopie

Définition 2.25 Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y . L'application f_0 est homotope à l'application f_1 s'il existe une application continue F du produit $X \times I$ dans Y telle que

$$\begin{cases} F(x, 0) = f_0(x) \\ F(x, 1) = f_1(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

pour tout $x \in X$.

Pour tout $t \in I$ on désigne par l'application

$$\begin{aligned} f_t : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f_t(x) = F(x, t) \end{aligned}$$

et on dit que F est une homotopie de f_0 à f_1 .

Proposition 2.26 La relation " f_0 est homotope à f_1 " est une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications continues de X dans Y .

On appelle classes d'homotopie d'application de X dans Y les classes d'équivalences de cette relation, et on dit que deux applications sont homotopes si elles sont dans la même classe d'homotopie.

Preuve. 1/ Cette relation est réflexive : pour toute application continue f est une homotopie de f à f .

2/ Elle est symétrique : si F est une homotopie de f_0 à f_1 , alors, $G : (x, t) \mapsto F(x, 1 - t)$ est une homotopie de f_1 à f_0

3/ Elle est transitive : Si f est une homotopie de f_0 à f_1 et G une homotopie de f_1 à f_2 l'application $H : X \times I \rightarrow Y$ définie par :

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

est une homotopie de f_0 à f_2 . ■

Définition 2.27 Deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application continue $f : X \rightarrow Y$ et une application continue $g : Y \rightarrow X$ telles que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux applications identiques de X et de Y .

Exemple 2.28 1/ Deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie. En particulier deux espaces réduits à un point ont même type d'homotopie. On pourra donc dire d'un espace qu'il a même type d'homotopie qu'un point.

2/ L'espace \mathbb{R}^m a même type d'homotopie qu'un point. Soient, en effet, l'application constante f de \mathbb{R}^m sur 0 et l'injection canonique $g : \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$; l'application :

$$H : (x, t) \mapsto tx \tag{2.11}$$

est une homotopie de $g \circ f$ à l'application identique de \mathbb{R}^m .

3/ L'espace $\mathbb{R}^m - \{0\}$ et la sphère S^{m-1} ont même type d'homotopie. Soient, en effet, l'injection canonique $f : S^{m-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$ et g l'application $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ de $\mathbb{R}^m - \{0\}$ sur S^{m-1} ; $g \circ f$ est l'application identique de S^{m-1} ; et

$$H : (x, t) \longmapsto (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + tx \tag{2.12}$$

est une homotopie de $f \circ g$ à l'application identique de $\mathbb{R}^m - \{0\}$.

Définition 2.29 Un sous-espace Y d'un espace X est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction r de X sur Y relativement à Y à l'application identique de X . Autrement dit Y est un rétracte par déformation de X s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow X$ ayant les propriétés suivantes :

- 1/ $H(x, 0) = x$, pour tout $x \in X$,
- 2/ $H(x, 1) = r(x) \in Y$, pour tout $x \in X$,
- 3/ $H(x, t) = x$, pour tout $x \in Y$ et tout $t \in I$.

On dit alors que r est une rétraction par déformation de X sur Y .

Remarque 2.30 1/ Si Y est un rétraction par déformation de X , l'injection $i : Y \hookrightarrow X$ est une équivalence homotopique ayant $r : X \rightarrow Y$ pour inverse homotopique.

2/ Si Y est un rétraction par déformation de X et Z un rétracte par déformation de Y , Z est un rétracte par déformation de X .

Théorème 2.31 [4]

1/ Toute application continue de M dans N est homotope à une application C^∞ de M dans N .

2/ Deux applications C^∞ de M dans N , qui sont homotopes, sont différentiablement homotopes.

Chapitre 3

Cohomologie de De Rham

Sur une variété différentiable M on peut définir un exemple d'invariant topologique à l'aide des formes différentielles et l'opérateur de différentiation extérieure. C'est une suite d'espaces vectoriels $\{H^r(M)\}_{r \geq 0}$ naturellement associée à M et appelée cohomologie de de Rham de M sur laquelle elle donne des renseignements topologiques.

3.1 Introduction à la notion de cohomologie

Nous considérons des modules sur un anneau donné A .

Définition 3.1 1/ Une suite (finie ou non) de morphismes de modules

$$\dots \rightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \rightarrow \dots \quad (3.1)$$

est exacte si $\ker f_{n+1} = \text{Im } f_n$ pour chaque n .

2/ Une suite exacte de la forme $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow K \rightarrow 0$ est nommée suite exacte courte.

Proposition 3.2 [1] Si $0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \rightarrow 0$ est une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim E_i = 0 \quad (3.2)$$

Définition 3.3 Un complexe de cochaînes $C = (C^*, \partial^*)$ est une suite de modules $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et de morphismes de modules $(\partial^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ pour tout n . On nomme

- 1/ ∂^n opérateurs de cobord,
- 2/ les éléments de C^n sont les cochaînes de degré n ,
- 3/ les éléments de $Z^n(C) = \ker \partial^n$ sont les cocycles de degré n ,
- 4/ les éléments de $B^{n+1}(C) = \text{Im } \partial^n$ sont les cobords de degré n .

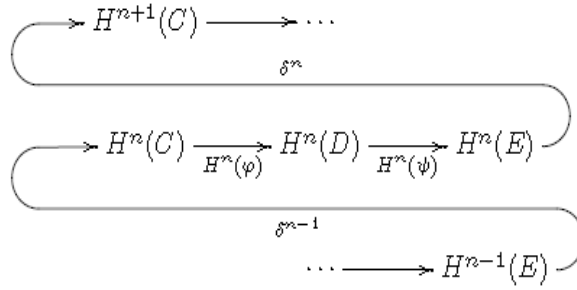
Proposition 3.4 Définition 3.5 Remarque 3.6 On remarque que : $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0 \Rightarrow B^n(C) \subset Z^n(C)$.

Définition 3.7 Un morphisme de complexes de cochaînes $\phi^* : C \rightarrow D$ est une suite $(\phi^n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de morphismes de A -modules telle que $\partial^n \circ \phi^n = \phi^{n+1} \circ \partial^n$ pour tout n , i.e. le diagramme 2 commute :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & \dots \\
 & & \downarrow \phi^n & & \downarrow \phi^{n+1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial^{n-1}} & D^n & \xrightarrow{\partial^n} & D^{n+1} & \xrightarrow{\partial^{n+1}} & \dots
 \end{array}$$

Diagramme 2

Proposition 3.8 [1] Une suite exacte courte de complexes de cochaînes $0 \rightarrow C \xrightarrow{\phi^*} D \xrightarrow{\psi^*} E \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue



Suite Exacte Longue

Définition 3.9 Deux morphismes de complexes de cochaînes $\phi^*, \psi^* : C^* \rightarrow D^*$ sont homotopes s'il existe une application $K : C^* \rightarrow D^*$ de degré -1 (i.e. $K^n : C^n \rightarrow D^{n-1}$) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$K^{n+1} \circ d^n + d^{n-1} \circ K^n = \psi^n - \phi^n \tag{3.3}$$

L'application K est nommée homotopie de ϕ à ψ (ou opérateur d'homotopie).

3.2 Algèbre de cohomologie de De Rham.

Soient n un élément de \mathbb{N} et M une variété C^∞ de dimension n . Une forme différentielle α sur M est dite fermée si $d\alpha = 0$, et exacte s'il existe une forme différentielle β sur M telle que $d\beta = \alpha$. Une forme différentielle exacte est fermée, car $d \circ d = 0$.

Notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z^*(M) = \ker d \\ Z^p(M) = Z^*(M) \cap \Omega^p(M) \end{array} \right. \tag{3.4}$$

Alors $Z^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} Z^p(M)$ est une sous algèbre unitaire (somme directe en tant qu'espace vectoriel) de $\Omega(M)$.

En effet ; la forme différentielle constante 1 est fermée, une forme différentielle est fermée si et seulement si ses composantes dans les $\Omega^p(M)$ sont fermées, et si α et β sont fermées, alors $\alpha \wedge \beta$ aussi, car

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta) = 0$$

Notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^*(M) = \text{Im } d \\ B^p(M) = B^*(M) \cap \Omega^p(M) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Alors $B^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} B^p(M)$ est un idéal bilatère de $Z^*(M)$ (somme directe en tant qu'espace vectoriel).

Si α est exacte et β est fermée, alors $\alpha \wedge \beta$ est exacte (et de même pour $\beta \wedge \alpha$ par anticommutativité). En effet ; si $\alpha = d\alpha' \in \Omega^{p+1}(M)$, alors :

$$d(\alpha' \wedge \beta) = (d\alpha') \wedge \beta + (-1)^p \alpha' \wedge (d\beta) = \alpha \wedge \beta$$

Par conséquent $H_{DR}^*(M) = Z^*(M)/B^*(M)$ est une algèbre (associative, unitaire) anticommutative, graduée par :

$$H_{DR}^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H_{DR}^p(M) \quad (3.6)$$

où $H_{DR}^p(M) = Z^p(M)/B^p(M)$

L'algèbre $H_{DR}^*(M)$ s'appelle l'algèbre (ou parfois l'espace) de cohomologie de De Rham de M , et l'espace vectoriel réel $H_{DR}^p(M)$ le p-ième espace (ou parfois le p-ème groupe) de cohomologie de De Rham de M .

Pour tout α dans $Z^*(M)$, nous noterons $[\alpha]$ sa classe dans $H_{DR}^*(M)$. Nous dirons que deux formes différentielles fermées α et β sont cohomologues si $[\alpha] = [\beta]$. Nous notons les lois de compositions de l'algèbre $H^*(M)$ de la même manière que les lois de compositions de $\Omega(M)$:

$$a[\alpha] + b[\beta] = [a\alpha + b\beta],$$

$$[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta],$$

$$[1] = 1.$$

Remarque 3.10 Comme $\Omega^p(M) = \{0\}$ si $p > n$ ou $p < 0$, on a $H_{DR}^p(M) = 0$ si $p > n$ ou $p < 0$. Comme $d : \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M)$ est l'application nulle, on a $H^0(M) = Z^0(M)$

Remarque 3.11 Deux r -formes fermées α et β sont dites cohomologues si elles définissent la même classe de cohomologie i.e. s'il existe une $(r - 1)$ -forme telle que $\gamma = d(\alpha - \beta)$. L'espace vectoriel $H^r(M)$ est réduit $\{0\}$ si et seulement si, l'équation différentielle $\alpha = d\beta$ admet une solution pour toute r -forme fermée β . Ainsi, du point de vue de l'analyse, la cohomologie s'interprète comme une obstruction (on verra qu'elle sera topologique ou plus généralement homotopique) à l'existence de solutions de telles équations.

Proposition 3.12 1/ Si $\pi_0 M$ est l'ensemble des composantes connexes de M , alors :

$$H_{DR}^0(M) \simeq \mathbb{R}^{\pi_0 M} \quad (3.7)$$

et en particulier $H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}$ si M est connexe.

2/ Si M est un singleton, alors, $H_{DR}^*(M) = H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}$.

Proposition 3.13 1/ Si M et N sont connexes, alors $f^* : H_{DR}^0(N) = \mathbb{R} \rightarrow H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}$ est l'identité.

2/ Si f est une application constante, alors $f^* : H_{DR}^p(N) \rightarrow H_{DR}^p(M)$ est l'application nulle pour $p \neq 0$.

Preuve. 1/ Si M est connexe, alors $H^0(M)$ est l'espace vectoriel des applications constantes sur M et f^* envoie l'application constante valant a sur N sur l'application constante valant encore a sur M .

2/ Si $f : M \rightarrow N$ est l'application constante valant un élément donné a de N , alors, f factorise par l'application constante $g : M \rightarrow \{a\}$ et l'injection $i : \{a\} \rightarrow N$. Donc par la proposition précédente (2), si $p > 0$, alors l'application linéaire

$$f^* = (i \circ g)^* = g^* \circ i^* : H^p(N) \rightarrow H^p(M)$$

factorise par l'application nulle $i^* : H^p(N) \rightarrow H^p(\{a\})$, donc est nulle. ■

3.3 Invariance par homotopie

Une application continue $\varphi : M \rightarrow N$ (non différentiable) n'induit pas a priori d'application linéaire en cohomologie, on a besoin, d'après la formule 2.5, de prendre les images réciproques des formes différentielles et cela doit utiliser la dérivée de φ dont on ne dispose pas. Toutefois une telle application est toujours homotope à une application $\widehat{\varphi} : M \rightarrow N$ différentiable ; le morphisme $\varphi^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ sera celui induit par $\widehat{\varphi}$ par le résultat suivant, qui traduit explicitement l'invariance topologique de chacun des espaces $H^*(M)$.

Soient M et N deux variétés C^∞ , et soient f et g deux applications C^∞ de M dans N .

Théorème 3.14 *Si f et g sont deux applications C^∞ différentiablement homotopes, alors :*

$$f^* = g^*$$

La preuve de ce théorème repose sur la proposition suivante, où, pour tout t dans \mathbb{R} , on note l'application C^∞ définie par :

$$\begin{aligned} J_t : M &\rightarrow M \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto J_t(x) = (x, t) \end{aligned}$$

Proposition 3.15 *Pour toute variété M de classe C^∞ , il existe une application $K : \Omega(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega(M)$ linéaire, graduée de degré -1 , i.e. $K(\Omega^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Omega^{p-1}(M)$, telle que*

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^*$$

et pour toute variété N de classe C^∞ et toute application ϕ de classe C^∞ de M dans N , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega(N \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(N) \\ (\varphi \times id)^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \Omega(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(M) \end{array} \quad (3.8)$$

Preuve. de la proposition : Supposons tout d'abord que $M = U$ soit un ouvert de \mathbb{R}^n .

On note x_1, \dots, x_n les coordonnées dans U et la coordonnée dans \mathbb{R} , de sorte que (x_1, \dots, x_n, t) soient les coordonnées dans $U \times \mathbb{R}$. Posons, pour $p \geq 0$ dans le premier cas et $p \geq 1$ dans le second :

$$\begin{aligned} K\alpha &= 0 \text{ si } \alpha = adx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ K\beta &= \int_0^1 dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \text{ si } \beta = bdt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \end{aligned}$$

Alors K définit une application linéaire de $\Omega^p(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega^{p-1}(M)$, que l'on étend par linéarité en une application linéaire, graduée de degré -1 , de $\Omega(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega(M)$. La commutativité du dernier diagramme 3.8 si N est aussi un ouvert de \mathbb{R}^n est immédiate.

La vérification de la propriété (dite d'homotopie) de K découle des calculs suivants :

$$\begin{aligned} dK\alpha &= 0 \\ Kd\alpha &= \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t} dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = (J_1^* - J_0^*)\alpha \\ dK\beta &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ Kd\beta &= - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial b}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}} \\ J_1^*\beta &= J_0^*\beta = 0 \end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer la proposition en général, on utilise des cartes locales et un argument de partition de l'unité. Plus précisément, choisissons $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ un atlas de cartes C^∞ et $(\psi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M . Alors

1/ $(U_i \times \mathbf{R}, \bar{\phi}_i = \phi_i \times id)_{i \in I}$ est un atlas de cartes C^∞ sur $M \times \mathbb{R}$,

2/ $(\bar{\psi}_i = \psi_i \circ pr_1)_{i \in I}$, où $pr_1 : M \times \mathbf{R} \rightarrow M$ est la première projection, est une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i \times \mathbb{R})_{i \in I}$ de $M \times \mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha \in \Omega(M \times \mathbb{R})$, posons, avec les abus de notations évidents concernant les restrictions :

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{i \in I} \phi_i^* \left(K(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha) \right)$$

Cette formule ne dépend pas du choix de $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$, $(\psi_i)_{i \in I}$.

En effet ;

Soit $(U'_i, \phi'_i)_{i \in I}, (\psi'_i)_{i \in I}$ un autre choix. Par la commutativité du diagramme de l'énoncé dans le cas des ouverts numériques, si le support d'une forme différentielle β est contenu dans $(U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}$, alors $\phi_i^* K(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\beta) = \phi_j'^* K(\bar{\phi}_j'^{-1})^*(\beta)$. Donc

$$\begin{aligned} \widehat{K}(\alpha) &= \sum_{i \in I} \phi_i^* K(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \sum_{j \in J} \bar{\psi}_j' \alpha) \\ &= \sum_{j \in J} \bar{\phi}_j'^* K(\bar{\phi}_j'^{-1})^*(\bar{\psi}_j' \alpha) \end{aligned}$$

Alors \widehat{K} est une application linéaire, graduée de degré -1 , de $\Omega(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega(M)$, rendant le dernier diagramme de l'énoncé commutatif.

De plus, si le support de β est contenu dans $U_i \times \mathbb{R}$, alors celui de $d\beta$ aussi, et $\widehat{K}(\alpha) = \phi_i^* K(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\beta)$, car comme $\bar{\psi}_k \beta$ est alors à support dans $(U_i \cap U_k) \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \bar{\phi}_j'^* K(\bar{\phi}_j'^{-1})^*(\bar{\psi}_j' \alpha) &= \sum_{k \in I} \bar{\phi}_k'^* K(\bar{\phi}_k'^{-1})^*(\bar{\psi}_k' \beta) \\ &= \phi_i^* K(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\beta) \end{aligned}$$

Donc, en utilisant les propriétés des images réciproques, et la commutativité du diagramme pour $\nu = 0, 1$, on obtient

$$\begin{aligned} (d\widehat{K} + \widehat{K}d)\alpha &= (d\widehat{K} + \widehat{K}d)\left(\sum_{i \in I} \bar{\psi}_i \alpha\right) \\ &= \sum_{i \in I} d\widehat{K}(\bar{\psi}_i \alpha) + \widehat{K}d(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= \sum_{i \in I} \phi_i^* d\widehat{K}(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha) + \phi_i^* \widehat{K}d(\bar{\phi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= \sum_{i \in I} \phi_i^* (J_1^* - J_0^*)\bar{\phi}_i^{-1})^*(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= \sum_{i \in I} (J_1^* - J_0^*)(\bar{\psi}_i \alpha) \\ &= J_1^* \alpha - J_0^* \alpha \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

Preuve du Théorème : Si $h : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ est une homotopie C^∞ de f à g , alors $h \circ J_0 = f$ et $h \circ J_1 = g$. Donc, par les propriétés des images réciproques, et par la propriété d'homotopie de K , on a, pour toute forme différentielle fermée α

$$\begin{aligned} g^*\alpha - f^*\alpha &= J_1^*h^*\alpha - J_0^*h^*\alpha \\ &= dK(h^*\alpha) + Kd(h^*\alpha) \\ &= d(Kh^*\alpha) \end{aligned}$$

donc $g^*\alpha$ et $f^*\alpha$ sont cohomologues, et $f^* = g^*$. ■

Maintenant, nous allons utiliser un théorème d'approximation de fonctions continues par des applications C^∞ pour montrer l'invariance topologique et homotopique de l'algèbre de cohomologie de de Rham.

Remarque 3.16 Notons que si $f : M \rightarrow N$ est homotope à une application $\bar{f} : M \rightarrow N$ de classe C^∞ , si $g : N \rightarrow P$ est une application continue homotope à une application $\bar{g} : N \rightarrow P$ de classe C^∞ , alors $g \circ f$ est homotope à l'application $\bar{g} \circ \bar{f} : M \rightarrow P$, qui est de classe C^∞ . Donc, les applications de $H^*(P)$ dans $H^*(M)$ suivantes coïncident :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

Proposition 3.17 Si $f : M \rightarrow N$ est une équivalence d'homotopie, alors $f^* : H_{DR}^*(N) \rightarrow H_{DR}^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres.

Preuve. Soit $g : M \rightarrow N$ une application continue telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Alors

$$f^* \circ g^* = id \text{ et } g^* \circ f^* = id$$

Le résultat s'en déduit. ■

Cette proposition montre l'invariance homotopique (et donc topologique) de l'algèbre de cohomologie de De Rham : si deux variétés C^∞ ont le même type d'homotopie, alors leurs algèbres de cohomologie de De Rham sont isomorphes.

1/ Si $f : M \rightarrow N$ est un homéomorphisme, alors $f^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres.

2/ Si une variété M de classe C^∞ se rétracte par déformation sur une sous-variété N de classe C^∞ , alors l'inclusion $i : N \hookrightarrow M$ induit un isomorphisme d'algèbres $i^* : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$.

3/ L'algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété M de classe C^∞ , qui est contractile, est isomorphe à l'algèbre \mathbb{R}

$$H^*(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$$

3.4 Suites de Mayer-Vietoris

Dans toute cette partie nous considérerons une variété différentielle M recouverte par deux ouverts U et $V : M = U \cup V$. Nous utiliserons les notations suivantes pour les inclusions :

$$\begin{aligned} i_U : U \cap V &\hookrightarrow U ; & i_V : U \cap V &\hookrightarrow V \\ j_U : U &\hookrightarrow M ; & j_V : V &\hookrightarrow M \end{aligned}$$

Remarque 3.18 Si $i : A \hookrightarrow B$ est une inclusion alors $i^* : \Omega^*(B) \rightarrow \Omega^*(A)$ est la restriction des formes différentielles.

Proposition 3.19 Soit M une variété différentielle recouverte par deux ouverts U et V , alors la suite de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

où

$$\begin{array}{ccc} \alpha^n : \Omega^n(M) & \rightarrow & \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) \\ \omega & \mapsto & (j_U^* \omega, j_V^* \omega) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \beta^n : \Omega^n(U) \oplus \Omega^n(V) & \rightarrow & \Omega^n(U \cap V) \\ (\omega, \eta) & \mapsto & i_U^* \omega - i_V^* \eta \end{array}$$

est exacte.

Preuve. 1/ $\ker \alpha^n = 0$.

2.1/ $\text{Im } \alpha^n = \ker \beta^n$: $\beta^n(j_U^*\omega, j_V^*\omega) = (j_U \circ i_U)^*\omega - (j_V \circ i_V)^*\omega = i_{U \cap V}^*\omega - i_{U \cap V}^*\omega = 0$ où $i_{U \cap V} : U \cap V \rightarrow M$. Donc $\text{Im } \alpha^n \subset \ker \beta^n$.

2.2/ Réciproquement, si $(\omega, \eta) \in \ker \beta^n$ alors $i_U^*\omega = i_V^*\eta$ donc η et ω coïncident sur $U \cap V$, on peut donc poser la forme différentielle sur M :

$$\theta_x = \begin{cases} \omega_x & \text{si } x \in U \\ \eta_x & \text{si } x \in V \end{cases}$$

et alors $(\omega, \eta) = \alpha^n \theta$, d'où le résultat.

3/ Surjectivité de β^n : soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $M = U \cup V$.

Soit $\omega \in \Omega^n(U \cap V)$, posons $\eta_x = \begin{cases} \rho_V(x)\omega_x & \text{si } x \in U \cap V \\ 0 & \text{si } x \in U \setminus \text{supp } \rho_V \end{cases}$ sur U et $\theta_x = \begin{cases} -\rho_U(x)\omega_x & \text{si } x \in U \cap V \\ 0 & \text{si } x \in V \setminus \text{supp } \rho_U \end{cases}$ sur V . Alors, $\eta \in \Omega^n(U)$ et $\theta \in \Omega^n(V)$ et $\omega = \beta^n(\eta, \theta)$. ■

Corollaire 3.20 *Si M est une variété différentielle recouverte par deux ouverts U et V alors on a la suite exacte longue suivante :*

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H^{n+1}(M) & \longrightarrow & \dots & & & \\ & & & \delta^n & & & \\ \rightarrow & H^n(M) & \xrightarrow{\alpha} & H^n(U) \oplus H^n(V) & \xrightarrow{\beta} & H^n(U \cap V) & \\ & & & \delta^{n-1} & & & \\ & & & \dots & \longrightarrow & H^{n-1}(U \cap V) & \end{array}$$

Suite exacte Longue

Exemple 3.21 Cohomologie de S^1 avec la suite de Mayer-Vietoris : Comme S^1 est connexe, $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

Soit $S^1 = U \cup V$ tel que $U = S^1 \setminus \{N\}$ et $V = S^1 \setminus \{S\}$, U et V ont une composante connexe et $U \cap V$ en a deux, donc $H^0(U) \simeq H^0(V) \simeq \mathbb{R}$ et $H^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$. Nous avons la suite de cohomologie de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\beta^0} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\delta^0} H^1(S^1) \rightarrow 0$$

D'après la formule 15 : $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'application $i_U^* : Z^0(U) \simeq \mathbb{R} \rightarrow Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ restreint une application constante aux deux composantes connexes de $U \cap V$, donc $i_U^*(x) = (x, x)$. De même

$$\begin{aligned} i_V^* : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto (y, y) \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} \beta^0 &: Z^0(U) \oplus Z^0(V) \simeq \mathbb{R}^2 \rightarrow Z^0(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2 \\ \beta^0(x, y) &= i_U^*(x) - i_V^*(y) = (x, x) - (y, y) = (x - y, x - y) \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(\beta^0) = \Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Par exactitude de la suite :

$$H^1(S^1) = \text{Im } \delta^0 \simeq \mathbb{R}^2 / \ker \delta^0 = \mathbb{R}^2 / \text{Im } \beta^0 = \mathbb{R}^2 / \Delta \simeq \mathbb{R}$$

On retrouve donc le résultat. Ensuite comme $H^1(S^1)$ est de dimension 1, il est engendré par tout élément non nul. Un tel élément s'obtient par exemple en prenant $\delta^0(a, b)$ où $(a, b) / \in \ker \delta^0 = \text{Im } \beta^0 = \Delta$.

Prenons par exemple $(a, b) = (1, 0)$. Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ lisse qui vaut 1 sur la première composante connexe de $U \cap V$ et 0 sur la seconde. Soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité de S^1 subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$. Alors $\beta^0(\rho_V f, -\rho_U f) = f|_{U \cap V} = (1, 0)$. Puis $\delta^0(1, 0) = \delta^0([\beta^0(\rho_V f, -\rho_U f)]) = [\eta]$ où $\eta = \begin{cases} d(\rho_V f) & \text{sur } U \\ -d(\rho_U f) & \text{sur } V \end{cases}$.

Exemple 3.22 Cohomologie de la sphère S^n : Nous avons déjà

$$H^k(S^0) = H^k(\{\pm 1\}) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Nous allons montrer par récurrence que pour $n \geq 1$:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

L'initialisation en $n = 1$ est déjà réalisée.

Supposons la propriété vraie pour un certain $n - 1$, $n > 1$. Nous savons déjà, par connexité de S^n , que $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ et par dimension que $H^k(S^n) = 0$ dès que $k > n$. Soient $U = S^1 \setminus \{N\}$ et $V = S^1 \setminus \{S\}$, et alors, pour $1 < k \leq n$, le morceau suivant de la suite de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow \dots$$

donne :

$$0 \rightarrow H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow 0$$

puisque U et V ont le type d'homotopie du point.

La sphère privée de deux points $U \cap V = S^n \setminus \{N, S\}$ est difféomorphe à $S^{n-1} \times]-1, 1[$ par l'application

$$\begin{aligned} S^n &\rightarrow S^{n-1} \times]-1, 1[\\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto \left(\frac{(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{1-x_0^2}}, x_0 \right) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Comme $] - 1, 1[$ est contractile, $S^{n-1} \times] - 1, 1[$ et S^{n-1} ont même type d'homotopie. Ainsi $H^{k-1}(U \cap V) \simeq H^{k-1}(S^{n-1})$. On en déduit que la suite $0 \rightarrow H^{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow 0$ est exacte, ce qui permet de calculer $H^k(S^n)$ pour $1 < k \leq n$.

Il reste à calculer $H^1(S^n)$, ce qui se fait en appliquant la formule 15 à

$$0 \rightarrow H^0(S^n) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \rightarrow H^1(S^n) \rightarrow 0$$

et en remarquant que $H^0(U \cap V) = H^0(S^{n-1}) = \mathbb{R}$.

Exemple 3.23 Cohomologie de $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ (calcul à la main). A cet effet il est nécessaire de connaître l'expression exacte des formes différentielles sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Elles s'écrivent, en coordonnées polaires (mieux adaptées au problème) :

$$1/ h(\rho, \theta),$$

$$2/ \alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta,$$

$$3/ \beta = c(\rho, \theta)d\rho \wedge d\theta$$

où h, a, b et c sont des fonctions C^∞ périodiques de période 2π en θ . La forme β est fermée (pour des raisons évidentes de degré); pour les autres leurs différentielles s'écrivent

$$dh = \frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta \text{ et } \left(\frac{\partial b}{\partial \rho} - \frac{\partial a}{\partial \theta} \right) d\rho \wedge d\theta.$$

La 1-forme $\alpha = a(\rho, \theta)d\rho + b(\rho, \theta)d\theta$ est fermée si, et seulement si, $\frac{\partial b}{\partial \rho} = \frac{\partial a}{\partial \theta}$.

Supposons cette condition set satisfaite; α sera exacte s'il existe une fonction h de classe C^∞ , périodique de période 2π en θ et telle que $\frac{\partial h}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial h}{\partial \theta} d\theta = a d\rho + b d\theta$.

On est donc amené à résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \rho} = a \\ \frac{\partial h}{\partial \theta} = b \end{cases}$$

La résolution formelle donne :

$$h(\rho, \theta) = \int_0^\theta b(\rho, u) du + \int_1^\rho a(\xi, 0) d\xi + cste$$

la fonction h ainsi définie est C^∞ . Pour qu'elle donne une primitive de β sur M elle doit être en plus périodique de période 2π en la variable θ . L'égalité $h(\rho, \theta + 2\pi) = h(\rho, \theta)$ équivaut à $\int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta = 0$. Une forme fermée $\alpha = a(\rho, \theta) d\rho + b(\rho, \theta) d\theta$ dont le coefficient b vérifie cette condition est donc exacte. On définit une forme linéaire

$$\begin{aligned} \Phi : Z^1(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \Phi(\alpha) = \int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta \end{aligned}$$

dont la valeur sur la 1-forme $\alpha = a(\rho, \theta) d\rho + b(\rho, \theta) d\theta$ est $\Phi(\alpha) = \int_0^{2\pi} b(\rho, \theta) d\theta$. Alors $\ker \Phi = B^1(M)$. Par suite l'espace $B^1(M)$ est $Z^1(M)$ tout entier si Φ est nulle; dans le cas contraire il en est un hyperplan.

Exemple 3.24 Soit la 1-forme :

$$\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

qui s'écrit en coordonnées polaires $\omega_0 = \frac{d\theta}{2\pi}$ est fermée et vérifie $\Phi(\omega_0) = 1$. Par suite l'espace vectoriel $H^1(M) = Z^1(M)/B^1(M)$ est de dimension 1 engendré par la classe de cohomologie de la forme ω_0 .

3.5 Application de la cohomologie

Voici une application du calcul des groupes de cohomologie de de Rham des sphères et des boules, et de la propriété de functorialité de la cohomologie de de Rham. Nous fixons les notations suivantes $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

La notation $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel

Théorème 3.25 (théorème du point fixe de Brouwer) *Toute application continue $f : D^n \rightarrow D^n$ admet un point fixe.*

Lemme 3.26 *Il n'existe pas d'application continue $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$ telle que $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$. i.e. il n'existe pas de rétraction de D^n dans S^{n-1} .*

Preuve. Si $n = 1$ c'est immédiat ($g : [-1, 1] \rightarrow \{\pm 1\}$ continue est constante par connexité de $[-1, 1]$). Supposons $n \geq 2$. L'application :

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

est homotope à $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ puisque le segment joignant x à $\frac{x}{\|x\|}$ est inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Supposons par l'absurde qu'un tel g existe alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ (x, t) &\mapsto s \rightarrow g(t \cdot r(x)) \end{aligned}$$

définit une homotopie entre une application constante et r . Donc $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ serait contractile. Or on sait qu'il n'a pas la même cohomologie que le point. D'où une contradiction. ■

Preuve. (théorème du point fixe de Brouwer) Supposons par l'absurde l'existence d'une application continue :

$$f : D^n \rightarrow D^n$$

sans point fixe. Pour tout $x \in D^n$, on définit $g(x) \in S^{n-1}$ comme l'intersection de S^{n-1} avec la demi-droite $[f(x), x)$.

Posons :

$$u(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

$(x + tu) \cdot (x + tu)$ admet deux solutions puisque la droite $(f(x), x)$ intersecte S^{n-1} en deux points.

Nous ne nous intéressons qu'à la solution :

$$t \geq 0 : t = -x \cdot u + \sqrt{1 - \|x\| + (x \cdot u)^2}$$

Ainsi $g(x) = x + t(x)u(x)$ est continue et vérifie $g|_{S_{n-1}} = id_{S_{n-1}}$ d'où une contradiction avec le lemme précédent. ■

Théorème 3.27 (*Théorème d'invariance du domaine de Brouwer*) Si $n \neq m$, alors \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes.

Preuve. Si $n \neq m$, alors les espaces vectoriels $H^n(S^n)$ et $H^n(S^m)$ ne sont pas isomorphes. Par l'invariance topologique de la cohomologie de de Rham, les espaces topologiques S^n et S^m ne sont donc pas homéomorphes.

Pour tout k dans \mathbb{N} , le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^k est homéomorphe à S^k .

Si deux espaces topologiques localement compacts sont homéomorphes, alors leurs compactifiés d'Alexandrov le sont. Donc \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ne sont pas homéomorphes ■

Théorème 3.28 (*théorème de la boule chevelue*) La sphère S^n admet un champ de vecteurs partout non nul si et seulement si n est impair.

Preuve. Si $n = 2m + 1$ alors $X(x_0, \dots, x_{2m+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2m+1}, x_{2m})$ convient. Réciproquement, supposons qu'un tel champ de vecteurs X existe, alors il s'étend en une application continue sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par :

$$\tilde{X}(x) = X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: $\tilde{X}(x) \neq 0$ et $X(x) \cdot x = 0$. L'application :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x, t) &\mapsto \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\tilde{X}(x) \end{aligned}$$

est une homotopie entre $f_0 = id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ et l'application antipodale $f_1(x) = -x$, donc :

$$f_0^* = f_1^* : H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

Or $f_0^* = id$ et $f_1^* = (-1)^{n+1}id$, donc n est impair. ■

Bibliographie

- [1] Jean-Baptiste Campesato, Cohomologie de deRham, Université Nice Sophia Antipolis Laboratoire J. A. Dieudonné. 11 juin 2012.
- [2] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, 2nde éd. 1977.
- [3] Alessandra Frabetti, Géométrie différentielle appliquée à la physique, Cours M2, automne 2010.
- [4] C. Godbillon, Éléments de topologie algébrique, Hermann, 1971.
- [5] Frédéric Jean, AOT 13, Géométrie Différentielle et application au contrôle Géométrique, Note de cours, 2011,2012.
- [6] Aziz El Kacimi, La cohomologie de de Rham comme exemple d'invariant topologique, école cimpa Marrakech (Maroc), Mai 2008.
- [7] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Grenoble sciences, EDP Sciences, nouvelle édition, 2010.
- [8] F. Paulin, Topologie algébrique élémentaire, Notes de cours de magistère, ENS Ulm, 2002.
[http ://www.fimfa.ens.fr](http://www.fimfa.ens.fr).