Table des matières

.

0.1 Introduction

La géométrie différentielle est un domaine trés vaste des mathématiques et dont le point de départ est l'étude des variétés différentiables, qui forment une classe d'espaces géométriques réguliers. La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire des objets mathématiques qui ressemblent localement à $\mathbb{R}^n$, afin d'y transférer ce qu'on a déjà y faire (i.e. continuité, dérivabilité, vecteurs, applications diverses...), mais qui globalement ne seront pas topologiquement identiques à $\mathbb{R}^n$. De tels objets on familiers dans $\mathbb{R}^3$: une sphère, un tore, un cylindre, une selle, une nappe..., ressemblent localement à $\mathbb{R}^2$.

On voit toujours ces objets comme sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. Ce qu'on va définir ne peut a priori pas être vu comme sous-ensemble d'un $\mathbb{R}^n$. On donne une définition intrinsèque, qu'on appelle variétés, sans faire référence à un espace plus grand. On a dans la situation d'habitants d'une sphère qui voudraient définir leur habitat sans connaître ni se référer à $\mathbb{R}^3$. Un habitant d'une sphère, s'il était mathématicien, se rendrait compte que localement (et seulement localement) son habitat ressemble à un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est cette propriété qui va être à la base de la construction des variétés. On va recoller ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Globalement, on n'aura pas nécessairement $\mathbb{R}^n$, mais localement, on aura à notre disposition tout ce qu'on va faire sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On peut voir une variété différentiable M de dimension n comme une réunion (finie ou dénombrable) d'ouverts U de $\mathbb{R}^n$ dont chaque ouvert est muni d'un système de coordonnées locales $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

D'autre part, le fibré tangent joue un role inportant dans la géométrie différentielle d'une variété, il est la somme disjointe de tous les espaces tangents en tous les points de la variété, muni d'une structure de variété différentielle prolongeant celle de M, c'est un espace fibré de base M et de dimension double de la dimension de M.

La théorie des relèvements des structures au fibré d'une variété différentielle a débuté vers l'année 1960 par E.T.Davies, P.Dombrowski, S.Ishihara, M.Okumura, S.Sasaki, S.Tashibana et K.Yano.

L'utilité des relèvements est de prolonger les structures géométriques (fonctions champ de vecteurs et d'autre comme structures de contacts et structures complexes etc.) d'une variété différentielle au fibré tangent, de nombreux articles ont été publiés à propos de ce sujet ; l'exemple de l'article de Sasaki en 1958 qui a y calculé la métrique du fibré tangent et c'était le début de l'étude de la géométrie du fibré tangent (voir [1]). A travers les relèvements on définit les metriques naturelles sur le fibrés tangent qui deviendra une variété Riemannienne.

Notre travail est de voir le fibré tangent comme une variété Riemannienne, il se compose comme suit :

Au premier chapitre, on donne des notions de bases sur les variétés différentiables.

Dans le deuxième chapitre, on étudie les notions des variétés riemanniennes (métrique Riemannienne, connexion, tenseur de torsion et tenseur de courbure).

Finalement au dernier chapitre on s'intéresse aux structures différentiable du fibré tangent et la théorie des relèvements vertical, complet et horizontal et on définit des métriques naturelles notamment de Sasaki et Cheeger-Gromoll sur le fibré tangent. On calcule leurs connexions et leurs tenseurs de courbures.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés topologiques

Définition 1.1 *Soit M un ensemble non vide. M est dite une variété topologique si*

1/ *M est un espace topologique séparé.*

2/ *Pour tout $p \in M$, il existe un ouvert U de M contenant p et un homéomorphisme*

$$\phi : U \to W \subset \mathbb{R}^n$$

le couple (U, ϕ) est appelé une carte.

Pour $p \in U$, $\phi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ est appellée une fonction coordonnée. Un point p de M peut appartenir à deux domaines différents correspondant à deux cartes (U, ϕ) et (V, ψ).

Un ensemble de cartes locales $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tel que la réunion des U_i soit M i.e.

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

est appelé atlas de la variété.

On dit que $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement d'ouvert de M. Cet atlas n'est pas unique car la réunion de deux atlas est encore un atlas.

Définition 1.2 *Deux cartes* (U, ϕ) *et* (V, ψ) *sur* M *sont dit compatibles si pour tous*

$$U \cap V = \emptyset$$

l'application

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \in \mathbb{R}^n \to \phi(U \cap V) \in \mathbb{R}^n$$

est un homorphisme.

Sur $U \cap V$*, les deux systemes de coordonnées*

$$\phi = (x^1, ..., x^n) \text{ et } \psi = (y^1, ..., y^n)$$

s'écrivent

$$\phi \circ \psi^{-1} : y = (y^1, ..., y^n) \longmapsto (x^1 = f^1(y), ..., x^n = f^n(y))$$

et

$$\psi \circ \phi^{-1} : x = (x^1, ..., x^n) \longmapsto (y^1 = g^1(x), ..., y^n = g^n(x))$$

Alors, la compatibilité signifie que les fonctions f^i *et* g^i *sont des applications homéomorphismes.*

Définition 1.3 *Un atlas* $A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ *de dimension* n *de* M *est un ensemble de cartes de dimension* n *tel que*

1/ *Les ouverts* $\{(U_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ *recouvrent* M*.*

2/ *Toutes les cartes de* A *sont compatibles deux à deux.*

On dit que deux atlas sont équivalents si leur union est un atlas, c'est à dire que

$$A = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\} \text{ et } A' = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$$

sont équivalents si toutes les cartes (U_α, ϕ_α) *et* (V_β, ψ_β) *sont compatibles deux à deux.*

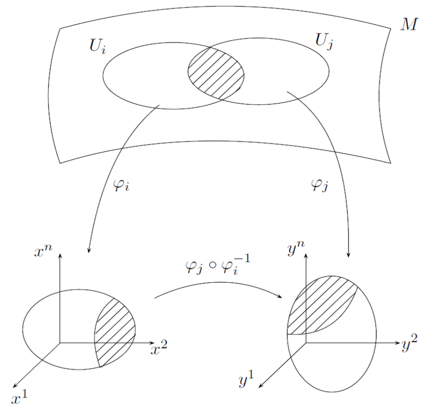

Fig1. Application de changement de cartes

1.1.2 Variétés différentiables

Il est maintenant naturel de vouloir définir la notion de dérivabilité. On n'a pas accès directement à cette notion sur l'espace topologique M. En effet, la dérivabilité sur $\mathbb{R}^n$ fait explicitement appel à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, puisqu'on forme le rapport

$$\frac{[f(x+hy)-f(x)]}{h}$$

Sur un espace quelconque, cette relation n'a aucun sens a priori. La solution consiste à transférer la dérivabilité connue sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ vers les ouverts de M qui leur sont homéomorphes. Pour cela, on remarque que si on donne une fonction continue $f : M \to \mathbb{R}$, alors localement, on a une fonction continue

$$f \circ \phi^{-1} : W \to \mathbb{R}$$

On dit que f est dérivable en un point $p \in U$ si $f \circ \phi^{-1}$ l'est en $x = \phi(p)$.
Mais qu'advient-il de cette définition si $p \in U_i \cap U_j$ pour deux ouverts U_i et U_j de cartes locales de M ? Est-on sûr que si $f \circ \phi_i^{-1}$ est dérivable en $x = \phi_i(p)$, $f \circ \phi_j^{-1}$ l'est aussi en $y = \phi_j(p)$? La définition n'aura un sens que si elle est indépendante du choix de l'ouvert contenant p.

On a ici un problème de définition lié au raccordement de deux cartes. En effet, afin que les définitions proposées soient cohérentes, il faut toujours vérifier qu'elles ne dépendent pas du choix de l'ouvert (et de la carte) contenant le point où on travaille.
Ici, cette condition de cohérence revient en fait à imposer que les applications $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient dérivables, ces applications allant bien sûr d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$. On

a donc la définition suivant :

Définition 1.4 *On dit que M est une variété différentiable de classe $C^r(r \geq 1)$ si*
1− M est une variété topologique ,
2− Il existe un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de M tel que pour tous i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est de classe C^r. On dit alors que l'atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ est de classe C^r.

Proposition 1.5 1− *Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe C^r.*
2− Deux atlas ne sont pas toujours compatibles (leur réunion n'est pas nécessairement un atlas de classe C^r). Cela signifie qu'une variété topologique peut admettre plusieurs structures différentiables.
3− Un atlas de classe C^r est un atlas de classe $C^{r'}$ pour tout $r\prime \leq r$.

Définition 1.6 *Une carte locale (U, ϕ) d'une variété différentiable de classe C^r sera dite de classe $C^{r'}$ pour $r\prime \leq r$, si la réunion de cette carte avec un atlas qui définit la structure différentiable de M est un atlas de classe $C^{r'}$.*

Cette définition impose donc que les applications $\phi_i \circ \phi^{-1}$ soient de classe $C^{r'}$. Il sera donc possible de réunir deux atlas de classe C^r en un atlas de classe C^r, si toutes les cartes locales de l'un sont de classe C^r pour la structure différentiable définie par l'autre.

On dit qu'une fonction

$$f : M \to \mathbb{R}$$

est différentiable de classe $C^{r'}$, avec $r\prime \leq r$, si pour toute carte locale (U, ϕ) de classe $C^{r'}$

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$$

est de classe $C^{r'}$.

Dans toute la suite, les variétés différentiables seront prises de classe C^∞, et toutes les cartes locales seront prises de classe C^∞.

Coordonnées locales

Soit (U, ϕ) une carte locale de la variété différentiable M. Pour $p \in U$, $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire

$$\phi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$$

On dit que $(x^1(p), ..., x^n(p))$ sont les coordonnées de p dans la carte (U, ϕ), alors les n applications $(x^1, ..., x^n)$ sont les n applications coordonnées associées à cette carte, on note par (x^i).

Soit

$$X : \phi(U) \to W \subset \mathbb{R}^n$$

un difféomorphisme (de classe C^∞) entre l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ et un autre ouvert W de $\mathbb{R}^n$. Alors $(U, X \circ \phi)$ est encore une carte locale de la variété différentiable M, dont les coordonnées associées ne sont plus celle associées à la carte locale (U, ϕ).

Pour un ouvert U de M donné, il existe une infinité de systèmes de coordonnées sur U. X permet d'effectuer un changement de coordonnées sur l'ouvert U. Si (x^i) sont les coordonnées associées à (U, ϕ) et (y^j) sont celles associées à $(U, X \circ \phi)$, alors on note symboliquement le changement de coordonnées $(y^j(x^i))$ où l'on regarde les y^j comme n fonctions (de classe C^∞) définies sur l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que le système de coordonnées associé à une carte locale (U, ϕ) est centré en $p \in M$ si $p \in U$ et $\phi(p) = (0, ..., 0)$. Les coordonnées de p sont donc nulles. Un tel système de coordonnée existe toujours pour n'importe quel p, puisqu'il suffit de composer l'homéomorphisme d'une carte locale par une translation dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné une carte locale (U, ϕ), une fonction

$$f : M \to \mathbb{R}$$

prendra localement la forme $f(x^1, ..., x^n)$ au dessus de U. En fait, il s'agit ici de la fonction $f \circ \phi^{-1}$.

Définition 1.7 *Une variété différentiable est le couple $(M, \mathcal{A})$ où M est la variété topologique de dimension n, $\mathcal{A}$ est l'atlas maximal et les fonctions coordonnées sont de classe C^∞, on l'appelle aussi la structure différentiable de M.*

Définition 1.8 *Une variété différentiable de dimension n est un espace topologique M séparé* *et à base dénombrable muni d'une structure différentiable de dimension n.*

Définition 1.9 *Soient $(M^m, \mathcal{A})$ et $(N^n, \mathcal{B})$ deux variétés différentiables. On dit que l'application*

$$f : M \to N$$

est de classe C^∞ si chaque représentation locale de f (respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est de classe C^∞ c'est à dire si la composition

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1}$$

est une application différentiable

$$\phi(U \cap f^{-1}V) \to \psi V$$

pour toute carte $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \psi) \in \mathcal{B}$.

Définition 1.10 *On dit que*

$$f : M \to N$$

est un difféomorphisme de classe C^∞ si f et f^{-1} sont de classe C^∞.

Exemple 1.11 *$\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n pour l'atlas à une seule carte $(\mathbb{R}^n, id)$.*

Exemple 1.12 *Tout $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension n est une variété de même dimension : tout isomorphisme $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ définit un atlas $(\mathbb{E}, \phi)$. De même tout ouvert $U \subset \mathbb{E}$ de l'espace vectoriel est également une variété, l'atlas étant (U, ϕ).*

Exemple 1.13 *L'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est une variété de dimension n. Il est en bijection avec $\mathbb{R}^n$ via le choix d'un systéme de coordonnée x. L'atlas à une carte $(\mathbb{E}^n, x)$ définit donc un structure différentiable.*

Exemple 1.14 *Le cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite est une variété de dimension 1 : cepandant n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{S}^1$ est compact). Une seule carte ne sera donc pas suffisante pour créer un atlas . On définit deux cartes (U_1, ϕ_1) et (U_2,ϕ_2)*

$$U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}\,;\ U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$$

et les fonction de coordonnées sont

$$\phi_1 : U_1 \to \left]0, 2\pi\right[\;\; ; \;\; (\cos\ \theta, \sin\theta) \longmapsto \theta$$

et

$$\phi_2 : U_2 \to \left]-\pi, \pi\right[\;\; : \;\; (\cos\ \theta, \sin\theta) \ \longmapsto \theta$$

Les domaines de ces cartes recouvrent le cercle :

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{S}^1$$

de plus $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ *est un difféomorphisme, ce qui montre que les deux cartes son compatibles. Ainsi* $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}$ *est un atlas et définit une structure différentiable sur* S^1.

Exemple 1.15 *La sphère unité* $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

est une variété de dimension 2.
En effet, en peut construire un atlas en utilisant la projection stériographique, les points $N = (1, 0)$ *et* $S = (-1, 0)$ *désigant respectivement les pôles nord et sud, on considère les ouverts* $U_N = \mathbb{S}^2 \diagdown \{N\}$ *et* $U_S = \mathbb{S}^2 \diagdown \{S\}$ *et les applications*

$$\begin{array}{rcl} \phi_N & : & U_N \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \dfrac{1}{1 - x_1}(x_2, x_3) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \phi_S & : & U_S \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \dfrac{1}{1 + x_1}(x_2, x_3) \end{array}$$

déterminons les applications de changement de cartes

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} \text{ et } \phi_S \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \diagdown \{0\}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \diagdown \{0\}_{\mathbb{R}^2}$$

qui sont des difféomorphismes données par $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. *Donc* $\{(U_N,\phi_N),(U_S,\phi_S)\}$ *définit une structure différentiable sur* $\mathbb{S}^2$. *La figure suivante donne la projection stériographique de* $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$

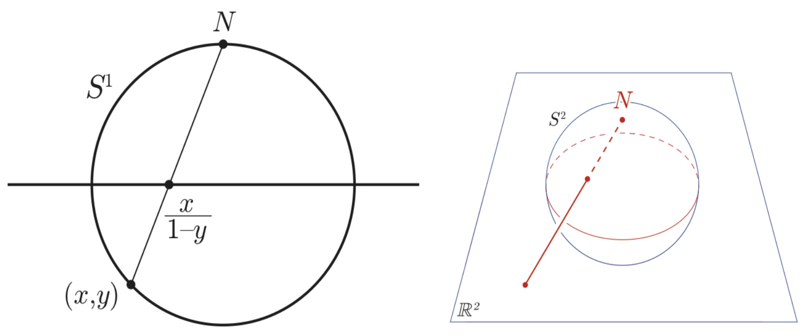

Fig 2. projection stéréographique de $\mathbb{S}^1$ *et* $\mathbb{S}^2$

Exemple 1.16 *Soient* M *et* N *deux variétés différentiables de dimension* m *et* n *et d'atlas* $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ *respectivement. Alors l'espace produit* $M \times N$ *est une variété de dimension* $m+n$ *dont la structure différentiable est définie par l'atlas formé de toutes les cartes de la forme* $\{U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta\}$, *où* $(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(p,q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

1.2 Espaces tangent et cotangent

Soit M une variété différentiable et $p \in M$, *pour définir le concept important de tangence au point* p *à la variété* M, *on utilise deux points de vue* :

- Utiliser les courbes différentiables tracées sur M au voisinage de p *et passant par* p *;*

- Dériver les germes (en p*) de fonctions différentiables définies au voisinage de* M *et à valeur dans la variété différentielle* $\mathbb{R}$ *(munie de sa structure d'atlas à une carte* $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}}, 1)$.

Conformément à ces deux points de vue, on définit les courbes différentiables tracées sur $\mathbb{R}$ et passant par p et les germes de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}$ en p.

1.2.1 Espace tangent

Soit M une variété différentiable de classe C^∞. On va définir la notion d'espace tangent. Cette notion est assez immédiate dans le cas d'une sphère (par exemple) : c'est le plan tangent, dans $\mathbb{R}^3$, à la sphère au point considéré ; c'est donc un sous espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. Ici cependant, on va définir ce que sont les vecteurs tangents et le plan tangent sans avoir à faire référence à un quelconque espace plus grand que M.

Définition 1.17 *On considére l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M,*

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R}/f \text{ de classe } C^\infty\}$$

Pour $p \in M$, on définit sur $\mathcal{F}(M)$ une relation d'équivalence :

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } p \in U \text{ , telque } f_{|U} = g_{|U}$$

On note $C_p^\infty(M) = \mathcal{F}(M)/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalences dans $\mathcal{F}(M)$ pour cette relation.
Sur cet ensemble de fonctions on définit des opérateurs.

Définition 1.18 *(dérivation)*
Une dérivation en p est une application linéaire

$$D_p : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz. Autrement dit, D_p est une dérivation si, pour touts réels α et β et toutes fonctions $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ dans $C_p^\infty(M)$,
i) $D_p(\alpha\widetilde{f} + \beta\widetilde{g}) = \alpha D_p(\widetilde{f}) + \beta D_p(\widetilde{g})$ *(linéarité),*
ii) $D_p(\widetilde{f}.\widetilde{g}) = g(x)D_p(\widetilde{f}) + f(x)D_p(\widetilde{g})$ *(Leibniz)*
où $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ sont les classes d'équivalence de f et g.

Définition 1.19 *L'espace tangent en p à M, T_pM, est l'espace vectoriel des dérivation sur $C_p^\infty(M)$.*

Remarque 1.20 *La relation d'équivalence définie sur $\mathcal{F}(M)$ sert à ne faire dépendre $D_p(\widetilde{f})$ que des valeurs de f autour de p.*
En effet, la seule information que $\widetilde{f}$ puisse conserver de f est son comportement dans un voisinage aussi petit qu'on le veut de p. Donc aucun autre point que p ne peut intervenir dans la définition d'une dérivation D_p sur $C_p^\infty(M)$. En suite, la relation de Leibniz assure que cette

dépandance ne peut se faire qu'au maximum par la premiére dérivée de f en p, car une dérivation d'ordre supérieur ne serait pas compatible avec cette relation.

Une base de l'espace tangent

Puisqu'on a un espace vectoriel il est utile d'en trouver une base.

Soient $(x^1, ..., x^n)$ des coordonnées au voisinage de p. *Une base de* T_pM est donnée par les n dérivations $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$, pour $1 \leq i \leq n$, dont les courbes associées sont les γ_i définies par

$$x^j(\gamma_i(t)) = 0$$

pour $j \neq i$ et

$$x^i(\gamma_i(t)) = t.$$

En particulier, la dimension de T_pM en tant qu'espace vectoriel est la dimension de M en tant que variété. Donc tout vecteur $X(p) \in T_pM$ *s'écrit*

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

où les $X_i(p)$ sont des réels.

Cette écriture a l'avantage de suggérer que $X(p)$ est un vecteur puisqu'il a n composantes $X^1(p), ..., X^n(p)$, et que c'est aussi une dérivation. De plus, si la courbe γ définit ce vecteur, avec bien sûr $\gamma(0) = p$ alors on a

$$X^i(p) = (\frac{d\gamma^i(t)}{dt})_{|t=0}$$

On utilise cette relation, qu'on écrit $\dot{\gamma}(0) = X(p)$.

On considére l'effet d'un changement de coordonnées sur les n nombres $X^i(p)$: si on passe des coordonnées (x^i) aux coordonnées $(y^j(x^i))$, alors si

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial y^i}(p)$$

On a

$$Y^j(p) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)X^i(p)$$

Proposition 1.21 *L'espace tangent T_pM est un espace vectoriel de dimension n et l'ensemble $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \mid_p /i = 1, ..., n \ \right\}$ forme une base de T_pM en coordonnées locales.*

Exemple 1.22 *Soit $\gamma : I \to \mathbb{S}^n$ une courbe sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. La courbe satisfait à $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$, alors*

$$\left\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \right\rangle + \left\langle \gamma(t), \dot{\gamma}(t) \right\rangle = 0.$$

Donc, $\langle p, X \rangle = 0$, (i.e) tout vecteur tangent $X \in T_p\mathbb{S}^n$ est orthogonal à p. D'autre part , si $X \neq 0$ tel que $\langle p, X \rangle = 0$, alors $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^n$ avec

$$\gamma : t \to \cos(t\,|X|).p + \sin(t\,|X|).\frac{X}{|X|}$$

est une courbe sur $\mathbb{S}^n$ avec $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = X$. Par conséquent,

$$T_p\mathbb{S}^n = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} / \langle p, X \rangle = 0 \right\}$$

1.2.2 Espace Cotangent

Dualité

L'espace T_pM est un espace vectoriel, il est possible de considérer son dual, qu'on note T_p^*M. C'est l'espace cotangent à M en p.
On rappel que le dual d'un espace vectoriel est l'ensemble des applications linéaires de cet espace vectoriel vers $\mathbb{R}$. Cet ensemble forme lui-même un espace vectoriel, de même dimension. On note $\left\langle \alpha_{|p}, X_{|p} \right\rangle \in \mathbb{R}$ le couplage entre $\alpha_{|p} \in T_p^*M$ et $X_{|p} \in T_pM$, c'est-à-dire $\alpha_{|p}(X_{|p})$.

Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction sur M. Si on considère $X_{|p}$ comme une dérivation, $X_{|p} \cdot f \in \mathbb{R}$ dépend linéairement de $X_{|p}$. Ainsi, f définit une application linéaire $T_pM \to \mathbb{R}$ donc un élément de T_p^*M. On note $df(p)$ ou $df_{|p}$ cet élément, qui ne dépend bien sûr que de f et p. On a ainsi

$$\left\langle df_{|p}, X_{|p} \right\rangle = X_{|p} \cdot f$$

On dit $df_{|p}$ est la différentielle de f en p . Elle ne peut dépendre que des dérivées premières de f en p.

Une base de l'espace cotangent

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ), $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\}$ est une base de T_pM pour tout $p \in U$. On note $\left\{dx^i_{|p}\right\}$ sa base duale. Cette écriture se justifie en effet par la définition de la différentielle, puisque les x^i sont n fonctions définies localement sur M et puisqu'on a par définition même de la différentielle

$$\left\langle dx^j_{|p}, \frac{\partial}{\partial x^i}(p)\right\rangle = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \delta^j_i$$

Alors dans cette base,

$$df_{|p} = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)dx^i_{|p}$$

1.3 Applications tangente et cotangente

Soit ϕ une application de classe C^1 définie au voisinage d'un point p d'une variété M à valeurs dans une variété N.

Définition 1.23 *On définit une unique application linéaire, appelée application tangente à ϕ et notée $T_p\phi$ définie de T_pM à valeurs dans $T_{\phi(p)}N$, vérifiant*

$$d_{\phi(p)}f \circ T_p\phi = d_p(f \circ \phi)$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$.
De même, on définit une unique application linéaire, appelée application cotangente à ϕ et notée $T^*_p\phi$ définie de $T^*_{\phi(p)}N$ à valeurs dans T^*_pM, vérifiant

$$T^*_p\phi(d_{\phi(p)}\phi) = d_p(f \circ \phi)$$

L'application cotangent est la transposée de la tangente.

La proposition suivante résume aussi les propriétés importantes de l'application tangente.

Proposition 1.24 *Soient ϕ et ψ deux applications différentiables.*

(i) On a $T_p(\phi \circ \psi) = T_{\psi(p)}\phi \circ T_p\psi$.

(ii) Si c est une courbe, alors $T_{c(t_0)}\phi(\dot{c}(t_0)) = (\dot{\overline{\phi \circ c}})(t_0)$.

(iii) Soit $X = (x_1, ..., x_n)$ des coordonnées locales au voisinage de p. Soit $Y = (y_1, ..., y_p)$ sont des coordonnées locales au voisinage de $\phi(p)$. Posons $\phi_j = y_j(\phi)$. Alors les coefficients de la matrice de $T_p\phi$ dans les bases associées aux coordonnées sont $\frac{\partial(\phi_j)}{\partial x_i}$.

1.4 Champ de vecteurs et formes différentielles

En chaque point p de M, on définit l'espace tangent. On a alors la possibilité de considérer une application qui associe à tout point p de M un vecteur dans T_pM. C'est la notion de champ de vecteurs. Formalisons ce concept.

1.4.1 Fibré tangent

Définition 1.25 *Soit M une variété différentiable. On définit le fibré tangent TM de M comme union disjointe de tous les espaces tangents de M .ie.*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Alors TM est une variété différentiable.

Un élément de TM est un couple $(p, X(p))$ avec $p \in M$ et $X(p) \in T_pM$.
On Cherche des coordonnées sur TM. Soit (U, ϕ) une carte locale sur M, de coordonnées (x^i). Pour $p \in U$, et $X(p) \in T_pM$, on prend comme coordonnées du couple $(p, X(p))$ les réels $(x^1(p), ..., x^n(p), X^1(p, X), ..., X^n(p, X))$ où on décompose $X(p)$ selon $X(p) = X^i(p, X)\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \in T_pM$. On a donc $2n$ coordonnées pour caractériser un élément de TM. Cette variété topologique est donc de dimension $2n$.

Il existe une application surjective particulière

$$\pi : TM \to M$$

définie par $\pi(p, X) = p$. C'est la projection de TM sur M. On remarque que les ouverts des cartes de TM, définies ci-dessus, sont les ouverts $\pi^{-1}(U) \subset TM$. D'autre part, en identifiant $p \in M$ au point $(p, 0)$ de TM, on peut considérer M comme une sous-variété de TM.

1.4.2 Champ de vecteurs

Définition 1.26 *Soitent M une variété différentiable et TM le fibré tangent à M. Une section de TM est une application*

$$X : M \to TM$$

telle que $\pi \circ X$ soit l'identité sur M. C'est à dire que pour tout $p \in M$, on associe un $X(p) \in T_pM$. Une telle section X de classe C^∞, sera appelée champ de vecteurs sur M. La notion d'application de classe C^∞ entre variétés est définie plus bas.
Un champ de vecteurs est une application qui à tout point de la variété M associe un vecteur au dessus de ce point (dans l'espace tangent à ce point sur la variété), de façon C^∞. Cette dernière hypothèse équivaut à ce que, si

$$X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$$

les fonctions $X^i : M \to \mathbb{R}$ soient C^∞ sur l'ouvert de la carte locale.
On note $\Gamma(M)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M et par la suite, on note $X_{|p}$ à la place de $X(p)$.

1.4.3 Dérivations

On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ toute application linéaire

$$D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

qui vérifie la relation de Leibniz :

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

Alors tout champ de vecteur X sur M définit une dérivation sur $\mathcal{F}(M)$ par la relation suivante : $(X \cdot f)(p) = X(p) \cdot f$ où dans le second membre, $X(p)$ est pris comme dérivation au sens de la définition de T_pM.

Localement, cette formule s'écrit

$$(X{\cdot}f)(p) = X^i(p)\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

C'est la dérivée de f dans la direction de X.

Réciproquement, toute dérivation de l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ définit un champ de vecteurs.

Donc on identifie $\Gamma(M)$ aux dérivations de $\mathcal{F}(M)$.

1.4.4 Crochet de Lie

On munit $\Gamma(M)$ d'une structure supplémentaire. Soient $X, Y \in \Gamma(M)$ et $f \in \mathcal{F}(M)$. Puisque $X{\cdot}f \in \mathcal{F}(M)$, on lui appliquer Y. On obtient ainsi une application linéaire

$$YX : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$$

Mais cette application n'est pas une dérivation. Il est possible de construire une dérivation à partir de X et Y, en posant

$$[X, Y] = XY - YX$$

Un calcul simple montre que $[X, Y]$ est une dérivation (i.e. vérifie la relation de Leibniz), donc appartient à $\Gamma(M)$.

On appelle crochet de Lie de X et Y le champ de vecteurs $[X, Y]$.

Le crochet de Lie est antisymétrique en X et Y et vérifie l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

1.4.5 Formes différentielles

Définition 1.27 *Une $r-$forme différentielle (ou r-forme) sur M est un champ tensoriel de type $(0, r)$ complètement antisymétrique. On note $\Omega^r(M)$ l'espace vectoriel de ces r-formes. Pour $r = 0$, on a $\Omega^0(M) = \mathfrak{F}(M)$. Pour $r = 1$, on retrouve les 1-formes différentielles. Pour $r > n$ (n dimension de M), on a $\Omega^r(M) = \{0\}$. Une r-forme différentielle est donc une application $\mathfrak{F}(M)$-multilinéaire antisymétrique de $\Gamma(M) \times ... \times \Gamma(M)$ dans $\mathfrak{F}(M)$.*

Expressions locales

Si $\{dx^i\}$ est une base locale des $1-$formes différentielles, au dessus de l'ouvert U d'une carte locale de M, de coordonnées (x^i), on pose

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} (-1)^{sign(\sigma)} dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes ... \otimes dx^{i_{\sigma(r)}}$$

pour $i_1 < ... < i_r$. Alors les $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$ engendrent localement $\Omega^r(M)$ sur les fonctions. C'est à dire que toute $r-$forme ω s'écrit, au dessus de U

$$\omega = \omega_{i_1 ... i_r} dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_r} = \omega_{i_1 ... i_r} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$$

où la seconde sommation porte sur $i_1 < ... < i_r$ et où les $\omega_{i_1 ... i_r}$ sont des fonctions $U \to \mathbb{R}$. Parfois, cette seconde sommation portera sur tous les indices $i_1, ..., i_r$, ce qui suppose que l'on étende la définition des $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_r}$ à tous les $(i_1 < ... < i_r)$ et que les

$$\omega_{i_1 ... i_r} : U \to \mathbb{R}$$

deviennent des fonctions complètement antisymétriques sur leurs indices, il faudra alors aussi placer un facteur $\frac{1}{r!}$ devant la somme.

Produit extérieur

Définition 1.28 *Soient $\omega \in \Omega^r(M)$ et $\eta \in \Omega^s(M)$, on définit le produit extérieur $\omega \wedge \eta \in \Omega^{r+s}(M)$ par la formule*

$$(\omega \wedge \eta)(X_1, ..., X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} (-1)^{sign(\sigma)} \omega(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)}) \cdot \eta(X_{\sigma(r+1)}, ..., X_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit donne à l'espace vectoriel

$$\Omega^*(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus ... \oplus \Omega^n(M)$$

une structure d'algèbre. Il a la propriété de commutativité

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$$

Fibré des formes différentielles

On a regardé les champs de vecteurs, les $1-$formes différentielles comme des sections de fibrés. On va faire le même pour les $r-$formes différentielles sur M. Pour tout $p \in M$, posons $\wedge^r T_p^* M$ l'espace vectoriel des $r-$formes multilinéaires antisymétriques sur $T_p M$.

On définit alors la variété

$$\wedge^r T^* M = \bigcup_{p \in M} \wedge^r T_p^* M$$

appelée fibré des $r-$formes différentielles. Alors toute $r-$forme différentielle est une section C^∞ de ce fibré.

1.5 Fibré cotangent

1.5.1 Fibré cotangent

Définition 1.29 *Soient M une variété différentiable et $f \in C_p^\infty(M)$ une fonction différentiable en $p \in M$, alors*

$$\begin{aligned} df_p \quad &: \quad T_p M \to \mathbb{R} \\ v \quad &\mapsto \quad df_p(v) = v(f) \end{aligned}$$

et $df_p \in T_p^* M$ (dual de $T_p M$).
On appelle $T_p^* M$ l'espace cotangent de M en p. Si (U, ϕ), $x = (x^1, ..., x^n)$ est une carte en p et $((\partial_1)_p, ..., (\partial_n)_p)$ est la base de $T_p M$, la différentielle dx_p^i, $i = 1, ..., n$, des fonctions x^i en p forme une base duale de $T_p^* M$, i.e. $df_p = (\partial_i)_p(f) dx_p^i$.

Définition 1.30 *Soit M une variété différentiable. On définit le fibré cotangent de M par*

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

tel que

$$\begin{aligned} \pi &: T^*M \to M, \\ \omega &\in T_p^*M \ : \pi(\omega, p) = p \in M \end{aligned}$$

est la projection canonique, et une section (champs covecteurs sur M ou 1-forme différentielle), une application

$$\omega : M \to T^*M$$

avec $\pi \circ \omega = id$.
On note par $\Gamma^1(M)$ (ou $\Gamma_0^1(M)$, $\Gamma^*(M)$, $\Gamma^{0,1}(M)$) l'ensemble des champs covecteurs sur M.
Si (U, ϕ) est une carte et ω un champ covecteur sur U, alors il existe des fonctions

$$\omega_i : U \to \mathbb{R}, i = 1, ..., n$$

tel que

$$\omega = \omega_i dx^i.$$

1.5.2 1-formes différentielles

Soient M une variété différentiable et T^*M le fibré cotangent de M, une section de classe C^∞ de ce fibré

$$\alpha : M \to T^*M$$

est appelée une $1-$forme différentielle sur M. C'est donc une application qui à tout $p \in M$ associe un élément $\alpha_{|p}$ de T_p^*M.
On note $\Omega^1(M)$ l'espace vectoriel des $1-$formes différentielles sur M.
Ainsi, si $f \in \mathfrak{F}(M)$, on a $df \in \Omega^1(M)$ telle que

$$df : p \to df_{|p} \in T_p^*M$$

Localement, au dessus d'un ouvert U d'une carte locale (U, ϕ) de M, on écrit

$$\alpha = \alpha_i dx^i$$

avec

$$\alpha_i : U \to \mathbb{R}$$

fonction C^∞. Le couplage avec un champ de vecteurs X s'écrit

$$\langle \alpha, X \rangle = \alpha_i X^i$$

Par recollement sur tous les ouverts des cartes locales, ce couplage donne une fonction C^∞ sur M :

$$\langle \alpha, X \rangle (p) = \left\langle \alpha_{|p}, X_{|p} \right\rangle \in \mathbb{R}$$

1.6 Connexion

On introduire maintenant une nouvelle structure sur une variété M . Cette structure définit une nouvelle dérivation, la dérivation covariante. Cette dérivation agira sur les champs de vecteurs en général.

Définition 1.31 *Une connexion linéaire sur M est une application*

$$\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

telle que

$$\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

vérifiants les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&1/ \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \\
&2/ \quad \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \\
&3/ \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \\
&4/ \quad \nabla_X f Y = f \nabla_X Y + X(f) Y
\end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.32 *Soitent ∇ une connexion sur M et (U, ϕ) une carte sur M de coordonnées* *locales* $(x_1, x_2, ..., x_n)$. *On définit les fonctions différentiables* $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ *par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

appelées les symboles de Christoffel.
En générale,

$$\nabla_X Y = X^i (\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$\nabla_X : \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ *est la dérivée covariante associée à la connection linéaire* ∇.

Exemple 1.33 1/ *Une connexion affine est une sorte de dérivée directionnelle de champs de vecteurs sur une variété. Imaginez un champ de vecteurs* V *sur* $\mathbb{R}^n$ *(qui est une application* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*). Prenez un point et choisissez un vecteur tangent* $X \in T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.
On note par $\nabla_X V$ *la dérivée covariante de* V *en* p *dans la direction* X. *On écrit* $X = a^i \frac{d}{dx^i}$.
Alors

$$\nabla_X V = a^i \frac{dV}{dx^i} \in T_p\mathbb{R}^n$$

2/ *On peut voir la connexion canonique sur* $\mathbb{R}^n$ *comme*

$$\nabla_X Y = X(Y^j) \frac{d}{dx^i} = X^i \frac{dY^j}{dx^i} \frac{d}{dx^i}$$

Les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k *de la connexion par rapport à la base* $\frac{d}{dx^i}$ *sont identiquement nuls.*

Définition 1.34 *Soit* ∇ *une connexion sur une variété différentiable* M. *Alors,*
1/ *Le tenseur de torsion de* ∇ *est une application*

$$T : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tel que

$$T : (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

2/ Le tenseur de courbure de ∇ est une application

$$R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$$

tel que

$$R : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$

Proposition 1.35 *1/ Les tenseurs T et R sont linéaires.*
pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ on a
2/ $T(X, Y) = -T(Y, X)$
3/ $R(X, Y)Z = R(Y, X)Z$
4/ Si $T = 0$, alors $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$
qu'est appelée l'identité de Bianchi.
5/ Si on pose $\frac{\partial}{\partial x^i} = X^i$, $i = 1, ..., n$ où $x^1, ..., x^n$ sont les coordonnées locales de la carte (U, ϕ) sur M, alors

$$R(X^i, X^j)X^k = \sum_{i=1}^{n} R^l_{ijk} X^l$$

où

$$R^l_{ijk} = \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^m_{jk} \Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^l_{jm}) + X^i(\Gamma^l_{jk}) - X^j(\Gamma^l_{ik}).$$

Chapitre 2

Variétés Riemanniennes

2.1 Tenseurs

2.1.1 Rappel sur les tenseurs

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. On note par E^* et F^* respectivement leurs espaces vectoriels duals. Pour $f \in E^*$, $g \in F^*$, $x \in E$ et $y \in F$, on pose

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

On définit $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le produit tensoriel des deux formes f et g.

Si $\{e^1, ..., e^p\}$ est une base de E^* et $\{f^1, ..., f^q\}$ une base de F^*, alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$.

Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^*. Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij} e^i \otimes f^j$.

Tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^*, i.e. comme élément de E^{**} (en dimension finie, on a $E^{**} \simeq E$).

Pour $x, x_1, x_2 \in E$, $y, y_1, y_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y) \end{cases}$$

En particulier, si $F = E^*$, on obtient $E \otimes ... \otimes E \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*$ où E apparaît s fois et E^* r fois. Les éléments de cet ensemble sont des formes (r+s)-linéaires sur

$$E^* \times \cdots \times E^* \times E \times \cdots \times E$$

et d'élément de la forme

$$T = T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

c'est un tenseur de type (s, r).
Les coefficients $T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots j_r}$ sont les coordonnées du tenseur T dans la base (e_i).
Les indices bas de T sont covariants, et les indices hauts contravariants.
Un élément de $\mathbb{R}$ est par convention un tenseur de type (0,0). Un tenseur de type (1,0) est bien sûr un vecteur de E, et un tenseur de type (0,1) est une forme de E^*.
Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés.

Le produit tensoriel du tenseur

$$S = S^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p} e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p}$$

avec le tenseur

$$T = T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots l_r} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p} T^{i_1 \ldots i_s}_{j_1 \ldots l_r} e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes ... \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_r}$$

On définit l'espace $\wedge^r E^*$ des r-formes multilinéaires antisymétriques sur E par

$$\otimes^r E^* = \underbrace{E^* \otimes ... \otimes E^*}_{r \text{ fois}}$$

et posons $\wedge^r E^*$ le sous espace vectoriel de $\otimes^r E^*$ des éléments antisymétriques.

On définit le produit extérieur

$$\wedge : \wedge^r E^* \times \wedge^s E^* \to \wedge^{r+s} E^* : (w, \eta) \mapsto w \wedge \eta$$

par

$$(w \wedge \eta)(x_1, ..., x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}_{r+s}} (-1)^{sign(\sigma)} w(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(r)}).\eta(x_{\sigma(r+1)}, ..., x_{\sigma(r+s)})$$

pour tous $x_1, ..., x_{r+s} \in E$.

Ce produit a la propriété de commutativité

$$w \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge w$$

On définit l'espace vectoriel

$$\wedge E^* = \wedge^0 E^* \oplus \wedge^1 E^* \oplus ... \oplus \wedge^p E^*$$

où on pose $\wedge^0 E^* = \mathbb{R}, \wedge^1 E^* = E^*$.

On remarque que $\wedge^n E^* = \{0\}$ pour $n > p =$ dimension de E.

Alors, le produit extérieur donne à $\wedge E^*$ une structure d'algèbre. C'est l'algèbre extérieure sur E^*.

2.1.2 Tenseurs sur les variétés

Soit M une variété différentiable de dimenssion n.

Définition 2.1 *Pour tout $p \in M$, on définit l'espace vectoriel*

$$T_p^{(s,r)} M = \underbrace{T_p M \otimes ... \otimes T_p M}_{s \ fois} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes ... \otimes T_p^* M}_{r \ fois}$$

Un élément $T \in T_p^{(s,r)} M$ est un tenseur de type (s, r) au dessus de p. Dans une base associée à des coordonnées locales $(x^i)_{i=1,..,n}$ au voisinage de p, il s'écrit

$$T_{|p} = T^{i_1 ... i_s}_{j_1 ... j_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1}_{|p} \otimes ... \otimes dx^{j_r}_{|p}$$

On considère la variété différentiable

$$T^{(s,r)}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{(s,r)}M$$

qui est un fibré au dessus de M, appellé le fibré des tenseurs de type (s,r). Les sections C^∞ de ce fibré seront appelées champs de tenseurs de type (s,r).
Un champ de tenseurs T de type (s,r) s'écrit localement par

$$T = T^{i_1...i_s}_{j_1...j_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

par rapport à la carte locale de M, de coordonnées $(x^i)_{i=1,..,n}$.

Globalement, il est facile de vérifier qu'un tenseur de type (s,r) est une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire sur

$$\Omega^1(M) \times ... \times \Omega^1(M) \times \Gamma(M) \times ... \times \Gamma(M)$$

à valeurs dans $\mathcal{F}(M)$.

Un champ de tenseurs de type $(0,0)$ n'est autre qu'une fonction sur M, un tenseur de type $(1,0)$ est un champ de vecteurs, et un tenseur de type $(0,1)$ est une 1-forme différentielle.

Pour le changement de coordonnées $x^i \mapsto y^j(x^i)$, les composantes du tenseur se changent selon la relation

$$T'^{i_1...i_s}_{j_1...j_r} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}...\frac{\partial y^{i_s}}{\partial x^{k_s}} T^{k_1...k_s}_{l_1...l_r}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}...\frac{\partial x^{l_r}}{\partial y^{j_r}}$$

2.2 Métriques Riemanninnes

Définition 2.2 *On appelle métrique Riemannienne sur M la donnée pour tout $p \in M$ d'un produit scalaire g_p (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur T_pM de p, i.e. pour toute carte (U,ϕ) sur M, la fonction*

$$p \mapsto g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)) = g_{ij}(p)$$

de U dans $\mathbb{R}$.
Les coefficients de la matrice $g_{ij}(p)$ sont appelés les coefficients de la métrique dans la carte (U,ϕ).

Définition 2.3 *On appelle une variété Riemannienne toute variété munie d'une métrique Riemannienne.*

Exemple 2.4 *Sur $M = \mathbb{R}$, on pose*

$$g(p) = h(p)dx^2$$

où

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$$

dx^2 est la forme quadratique sur $\mathbb{R} \simeq T_p\mathbb{R}$ définie par $dx^2(u,u) = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Alors g est une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.5 *Si $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sont deux champs de vecteurs sur M ; alors on a*

$$g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}(p) X_i(p) Y_j(p)$$

Exemple 2.6 *Si $(U; x)$ une carte sur M, alors $\partial_1, ..., \partial_n$ forme une base pour T_pM sa base duale est $dx_i = 1, ..., n$, alors la métrique g est donnée par*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

Exemple 2.7 *Soient (M_1, g_1) et (M_2, g_2) deux variétés Riemanniennes. Sur la variété produit $M_1 \times M_2$ on définit une métrique produit $g_1 + g_2$, en posant pour tout $X, Y \in T_{(n_1,n_2)} M_1 \times M_2$*

$$(g_1 + g_2)_{(n_1,n_2)}(X, Y) = (g_1)_{n_1}(X_1, Y_1) + (g_2)_{n_2}(X_2, Y_2)$$

où $X = X_1 + X_2$ et $Y = Y_1 + Y_2$ sont les décompositions de X et Y via l'identification

$$T_{(n_1,n_2)} M_1 \times M_2 = T_{n_1} M_1 \oplus T_{n_2} M_2$$

(i.e. X_i et Y_i sont des éléments de $T_{n_i} M_i$).

2.3 Isometrie

Définition 2.8 *Soit $f : M \to N$ un difféomorphisme local sur M et h une métrique sur N. On définit une métrique $g = f^*h$ sur M appelée métrique tirée en arrière de h par f, on pose pour tout $(u, v) \in T_pM$*

$$(f^*h)_p(u, v) = h_{f(p)}(d_pf(u), d_pf(v))$$

Exemple 2.9 *La métrique du tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n, s'obtient de l'application*

$$F : (x_j) \in \mathbb{R}^n \mapsto (e^{ix_j}) \in \mathbb{C}^n$$

où $g_{\mathbb{R}^n} = \langle ., . \rangle_{\mathbb{R}^n}$ est la métrique sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.10 *On dit que*

$$f : (M, g) \to (N, h)$$

est une isométrie (resp. une isométrie locale) ssi f est un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local) et $g = f^*h$.

Exemple 2.11 $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$ *et* $(\mathbb{T}^n, g_{\mathbb{T}^n})$ *sont localement isométriques, mais pas isométriques.*

2.4 Connexion de Levi-Civita

Une connexion linéaire ∇ sera dite compatible avec la métrique g si

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour trois champs de vecteurs quelconques X, Y, Z sur M. ∇ est dite une connexion métrique.

Il existe une unique connexion sans torsion compatible avec la métrique g, c'est la connexion de Levi-Civita, qui a pour expression

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij})$$

par rapport à $(U, x_i)_{i=1,\dots,n}$ une carte sur M, d'où le théorème,

Théorème 2.12 *Sur toute variété Riemannienne* (M^n, g)*, il existe une unique connexion linéaire* ∇ *telle que pour tout* $(X, Y, Z) \in \Gamma(M)^3$ *on a*

1/ $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$, ∇ *a torsion libre* ($T \equiv 0$).

2/ $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ *;* ∇ *compatible avec* g

∇ *est appellée connexion de Levi-Civita de la métrique* g.

Preuve. Unicité. On suppose qu'il existe une connexion vérifiant 1 et 2, on a

$Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y)$

$$= g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + g(Z, [X, Y]) + 2g(Z, \nabla_Y X)$$

parceque $\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X, Z]; \nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]; \nabla_X Y + \nabla_Y X = [X, Y] + 2\nabla_Y X$
On a donc

$$g(Z, \nabla_X Y) = \frac{1}{2}[Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [X, Y])] \tag{2.1}$$

ce qui prouve que $\nabla_X Y$ est défini de façon unique.
Existance : L'équation (2.1) implique qu'il y'a une relation entre les symboles de Christoffel de ∇ et les coéfficients de matrice de g

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk} = \frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k})$$

de cette expression suit la définition des Γ_{ij}^k en termes des g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}) g^{lk}$$

■

2.5 Tenseur Riemannien (Courbure)

Définition 2.13 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne muni d'une connexion de Levi-civita* ∇*. Alors l'application* $R : C_3^\infty(TM) \to C_1^\infty(TM)$ *telle que*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

est un tenseur de M *de type* $(3, 1)$.

Proposition 2.14 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Pour tout* $X, Y, Z, W \in C^\infty(TM)$ *de* M*, on a*

1/ $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$

2/ $g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z),$

3/ $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0,$

4/ $g(R(X,Y)Z, W) = g(R(Z,W)X, Y)$

5/ $6 \cdot R(X,Y)Z = R(X, Y+Z)(Y+Z) - R(X, Y-Z)(Y-Z) + R(X+Z, Y)(X+Z) - R(X-Z, Y)(X-Z).$

Preuve. Soient X, Y, Z, W quatre champs de vecteurs sur M

$$\begin{aligned} 1/\ R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z) \\ &= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z) \\ &= -R(Y,X)Z. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2/\ g(R(X,Y)Z,W) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, W) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) \\
&= XYg(Z,W) - YXg(Z,W) - [X,Y]\, g(Z,W) \\
&= -XYg(W,Z) + YXg(W,Z) + [X,Y]\, g(W,Z) \\
&= -(XYg(W,Z) - YXg(W,Z) - [X,Y]\, g(W,Z)) \\
&= -(g(\nabla_X\nabla_Y W, Z) - g(\nabla_Y\nabla_X W, Z) - g(\nabla_{[X,Y]}W, Z)) \\
&= -(g(\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[X,Y]}W, Z)) \\
&= -g(R(X,Y)W,Z).
\end{aligned}
$$

3,4,5, se démontrent de même manière. ■

Proposition 2.15 *Soit (M,g) une variété Riemannienne et (U,x) une carte locale de M. Pour $i,j,k,l = 1,..,m$ on a*

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i},\ g_{ij} = g(X_i, X_j) \text{ et } R_{ijkl} = g(R(X_i,X_j)X_k, X_l).$$

Alors

$$R_{ijkl} = \sum_{s=1}^{m} g_{sl}\Big(\frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{m}\left\{\Gamma_{jk}^r \cdot \Gamma_{ir}^s - \Gamma_{ik}^r \cdot \Gamma_{jr}^s\right\}\Big),$$

où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Cevita ∇ de (M,g) respectivement de (U,x).

Définition 2.16 *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Alors on définit le tenseur*

$$R_1 : C_3^{\infty}(TM) \to C_1^{\infty}(TM)$$

de type $(3-1)$ tel que

$$R_1(X,Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

Chapitre 3

Fibré Tangent comme variété Riemannienne

3.1 Structure différentiable de TM

Soit M une variété différentiable de dimenssion n muni de l'atlas maximal

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)/\alpha \in I\}.$$

Pour un point $p \in M$ on note T_pM l'espace tangent de M au point p. Soit (U, x) une carte locale de M et $p \in M$, on définit $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in T_pM$ une base a l'espace tangent par

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\partial_{e_i}(f \circ x^{-1})(x(p))$$

où $\{e_i \;/\; i = 1, ..., n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\left\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \;/\; i = 1, ..., n\right\}$$

est une base de T_pM

Théorème 3.1 *Soit M une variété différentiable de dimension n, alors le fibré tangent TM peut être vue comme une variété différentiable de dimension $2n$.*

Preuve. Soient $\mathcal{A}$ l'atlas maximal de M et (U, x) une carte locale de $\mathcal{A}$, on définit l'application

$$x^* : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

par

$$x^* : (p, \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p) \mapsto (x(p), (x_1, ..., x_m))$$

Alors l'ensemble suivant

$$\left\{(x^*)^{-1}(w) \subset TM \ / \ (U, x) \in \mathcal{A} \text{ et } w \subset x(U) \times \mathbb{R}^n \text{ un ouvert}\right\}$$

est une base pour la topologie τ_{TM} de TM et $(\pi^{-1}(U), x^*)$ est une carte locale de la variété topologique (TM, τ_{TM}) de dimension $2n$.

Si (U, x) et (V, y) sont deux cartes locale de M et $p \in U \cap V$, alors la fonction de transition

$$(y^*) \circ (x^*)^{-1} : x^*(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

est donnée par

$$(x, u) \mapsto \left(y \circ x^{-1}(x), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x^{-1}(x))u_i, ..., \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}(x^{-1}(x))u_i\right)$$

On sait que la fonction de transition $y \circ x^{-1}$ est différentiable, donc la fonction de transition $(y^*) \circ (x^*)^{-1}$ est différentiable.

Soit $\mathcal{A}^*$ l'atlas maximal de TM tel que

$$\mathcal{A}^* = \left\{(\pi^{-1}(U), x^*)/(U, \phi) \in \mathcal{A}\right\}$$

alors $(TM, \mathcal{A}^*)$ est une variété différentiable et l'application $\pi : TM \to M$ est différentiable. ■

Pour tout point $p \in M$ le fibre $\pi^{-1}(p)$ est l'espace tangent T_pM de M au p. $\pi^{-1}(p)$ est un espace vectoriel de dimension n.

Soit $(U, x) \in \mathcal{A}$ une carte locale, on définit l'application $\overline{x} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ par

$$\overline{x} : (p, \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p) \mapsto (p, (u_1, ..., u_n)).$$

La restriction

$$\overline{x} = \overline{x} \mid_{T_pM}: T_pM \to \{p\} \times \mathbb{R}^n$$

dans l'espace tangent T_pM est donnée par

$$\overline{x} : \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mid_p \mapsto (u_1, ..., u_n)$$

est isomorphisme et

$$\overline{x} : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

est un atlas de fibré tangent TM et (TM, M, π) doit être un fibré vectoriel topologique de dimension n.

Si la variété $(M, \mathcal{A})$ est différentiable, alors le fibré vectoriel (TM, M, π) avec l'atlas maximal de fibré $\mathcal{B}$ qui contient

$$\left\{(\pi^{-1}(U)), \overline{x}) \;/\; (U, x) \in \mathcal{A}\right\}$$

est une fibré variété différentiable.

Exemple 3.2 (Fibré Tangent de $\mathbb{R}^n$) *Soient $x^1, ..., x^n$ des coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^n$ où les fonctions $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1, ..., n$ sont différentiables. Si*

$$\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{dx^1}{dt} \mid_{t=0}, ..., \frac{dx^1}{dt} \mid_{t=0}\right)$$

est un vecteur associé au point $p = \gamma(0)$, alors on donne une courbe différentiable

$$\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$$

tel que les composantes de ce vecteur sont des réelles.

Si $p \in \mathbb{R}^n$ alors l'espace tangent $T\mathbb{R}^n \mid_p \cong \mathbb{R}^n$ est un ensemble des vecteurs associés au point p. L'espace tangent

$$T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}.$$

Exemple 3.3 (Fibré tangent de $\mathbb{S}^1$) *Soit $\mathbb{S}^1$la cercle unité dans $\mathbb{R}^2$. Alors $T(\mathbb{S}^1)$ est une* *variété différentiable de dimension* 2 *difféomorphe au cylindre* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(\mathbb{S}^1) &= \left\{(x,v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 : v \in T_x(\mathbb{S}^1)\right\} \\ &= \left\{(x,v) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 : \langle x, v\rangle = 0\right\}. \\ &\simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi comme la sous-variété de

$$\{(x,y,X,Y) \in \mathbb{R}^4 / \ x^2 + y^2 = 1 \ \textit{et} \ xX + yY = 0\}$$

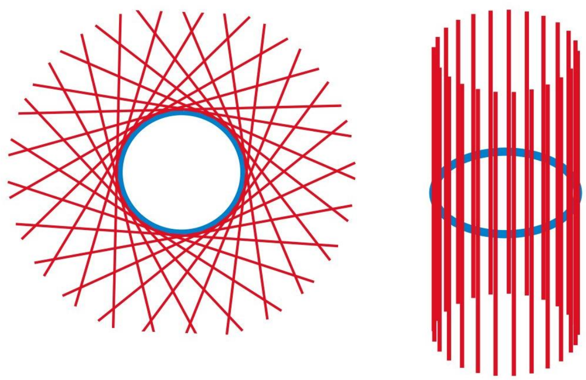

Fig3. Fibré tangent du cercle

3.2 Théorie des Relèvements

Soit M une variété de dimension n et de classe C^∞, et soit T_pM son espace tangent au point p de M, notons $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ le fibré tangent de la variété M.
Pour tout point $\widetilde{p}$ de T_pM l'application $\pi : \widetilde{p} \to p$ détermine la projection du fibré, d'où $\pi : TM \to M$ définit la structure de TM au dessous de M. Si U est un ouvert de M alors $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de TM et tout $\widetilde{p} \in TM$ les coordonnées locales sont $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Pour toutes cartes (U, x^i) dans M alors on a la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ sur TM.

3.2.1 Relèvement vertical

Relèvement Vertical d'une Fonction

Si f est une fonction dans M. On définit f^V la fonction dans TM par la composition de $\pi : TM \to M$ et de $f : M \to \mathbb{R}$

$$f^V = f \circ \pi$$

Si $\widetilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ a pour coordonnées locales $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ alors

$$f^V(\widetilde{x}) = f^v(x, y) = f \circ \pi(\widetilde{x}) = f(x) \tag{3.1}$$

donc $f^V(\widetilde{p})$ est constante sur tout fibré T_pM. On appelle f^V le relèvement vertical de fonction f, de la formule (3.1) on a :

$$(gf)^V = g^V f^V$$

pour tout $g, f \in T_0^0(M)$.

Relèvement Vertical d'un Champ de Vecteurs

Soit $\widetilde{X} \in T_0^1(TM)$ tel que

$$\widetilde{X} f^v = 0$$

pour tout $f \in T_0^0(M)$ alors $\widetilde{X}$ est dit champ de vecteur vertical.

Si $(\widetilde{X}^i, \widetilde{X}^{\bar{i}})$ sont les composentes de $\widetilde{X}$ par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ sur TM On a :

$$\widetilde{X} f^V = \widetilde{X}^i \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$

pour tout $f \in T_0^0(M)$, d'où $\widetilde{X}^i = 0$ i.e.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}^i \\ \widetilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4 *Soit X un champ de vecteur de composentes X^i par rapport à la carte (U, x^i) dans M. Le relèvement vertical X^V de X a pour composentes*

$$X^V : \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *sur* TM.

Proposition 3.5 *Si* X *et* Y *sont deux champs de vecteurs de* $T_0^1(M)$ *alors*

$$\left[X^V, Y^V\right] = 0$$

De la formule (3.2) on a :

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})^V = \frac{\partial}{\partial y^i}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM.

3.2.2 Relèvement Complet

Relèvement Complet d'une Fonction

Définition 3.6 *Soit* f *une fonction de* M. *On définit le relèvement complet de* f *noté* f^C *de* M *au fibré* TM *par*

$$f^C = idf$$

f^C *a comme expresion locale*

$$f^C = idf = y^i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial f$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *dans* TM.

Relèvement Complet d'un Champ de Vecteurs

Définition 3.7 *Soit* X *un champ de vecteurs sur* M. *On définit le relèvement complet de* X *noté* X^C *de* M *au fibré* TM *par*

$$X^C(f^C) = (Xf)^C \tag{3.3}$$

pour toute $f \in T_0^0(M)$.

Si X^i *sont les composentes de* X *par rapport à la carte* (U, x_i) *dans* M, *et si* $(\widetilde{X}^i, \widetilde{X}^{\bar{i}})$ *sont les composentes de* X^C *par rapport à la carte induite* $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *dans* TM, *et pour toute fonctions* $f \in T_0^0(M)$.

Alors on a de (3.3):

$$X^C(f^C) = \widetilde{X}^j(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i})y^j + \widetilde{X}^{\bar{j}}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$
\begin{aligned}
(Xf)^C &= y^i \frac{\partial}{\partial x_i}(X^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) \\
&= (y^i \frac{\partial X^i}{\partial x_i})\frac{\partial f}{\partial x_j} + X^j y^i (\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i})
\end{aligned}
$$

pour toute $f \in T_0^0(M)$*. d'où* $\widetilde{X}^j = X^j$ *et* $\widetilde{X}^{\bar{j}} = y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} = \partial X^j$*.*

On a la proposition suivante :

Proposition 3.8 *Soit* X *un champ de vecteurs de composentes* X^i *par rapport à la carte* (U, x^i) *dans* M*. Le relèvement complet* X^C *de* X *a pour composentes*

$$
X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ \partial X^i \end{pmatrix}
$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *dans* TM*.*

3.2.3 Relèvement Horisontal

Dans cette partie on suppose que sur la variété M est muni d'une connextion linéaire ∇ où Γ_{ji}^h désignent les fonctions de cristoffer associées à ∇, et on définit la connection opposée

$$
\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]
$$

avec les fonctions de cristoffer définit par $\widehat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

Définition 3.9 *Soient* S *un champ de tenseurs et* X *un champ de vecteurs donnés par*

$$
S = S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes .. \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} \otimes dx^{i_1} \otimes .. \otimes dx^{i_r}, X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}
$$

par rapport à la carte (U, x^i) *dans* M*. On définit dans* TM

$$
\gamma S = (y^{j_1} S_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}) \frac{\partial}{\partial y_{j_1}} \otimes .. \otimes \frac{\partial}{\partial y_{j_s}} \otimes dx^{i_2} \otimes .. \otimes dx^{i_r}
$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *dans* TM*.*

Pour un champ de tenseurs S *de type* $(1,1)$ *on a* γS *un champ de tenseurs de type* $(1,0)$ *i.e*

$$
S = S_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx^j \text{ on a } \gamma S = y_j S_j^i \frac{\partial}{\partial y_i}
$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^H, y^H)$ *dans* TM.

Relèvement Horizontal d'une Fonction

Si f est une fonction dans M, on note par ∇f le gradien de f et en applliquant l'opérateur γ définit dans la définition à ∇f et notant par $\gamma(\nabla f) = \nabla_\gamma f$ on a :

Définition 3.10 *Soit f une fonction de M. On définit le relèvement horizontal de f noté f^H de M au fibré TM par*

$$f^H = f^C - \nabla_\gamma f$$

f^C le relèvement complet de f, on a

$$f^C = y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial f = \nabla_\gamma f$$

d'où

$$f^H = 0$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^H, y^H)$ *dans* TM.

Relèvement Horizontal d'un Champ de Vecteurs

Définition 3.11 *Soit X un champ de vecteurs de M. On définit le relèvement horizontal de X noté X^H de M au fibré TM par*

$$X^H = X^C - \nabla_\gamma X$$

Où $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$
Supposons que X^i sont les composantes de X et Γ^i_{jk} les symboles de Cristoffer associés à ∇ par rapport à la carte (U, x^i) sur M on a

$$X^C : \begin{pmatrix} X^i \\ \partial X^i \end{pmatrix}, \quad \nabla_\gamma X = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial X^i + y^j \Gamma^i_{jk} X^k \end{pmatrix}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^H, y^H)$ *dans* TM.
D'où on a :

Proposition 3.12 *Soit X un champ de vecteurs de composentes X^i par rapport à la carte (U, x^i) dans M. Le relèvement horizontal X^H de X a pour composentes*

$$X^H = \begin{pmatrix} X^H \\ -y^j \Gamma^i_{jk} X^k \end{pmatrix}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^H, y^H)$ dans TM.

Proposition 3.13 *On a :*

$$\begin{aligned} [X^V, Y^H] &= [X,Y]^V - (\nabla_X Y)^V \\ [X^H, Y^H] &= [X,Y]^H - \gamma \widehat{R}(X,Y) \end{aligned}$$

pour tout $f \in T^0_0(M)$, $X, Y \in T^1_0(M)$ et $\widehat{R}$ est le champ de vecteurs de courbure associé à $\widehat{\nabla}$.

3.3 Métriques Sur TM

3.3.1 Métriques naturelles

Les métriques naturelles sont des métriques qui sont définit à partir de la décomposition de $T(TM)$ en partie horizontal et vertical.

Définition 3.14 *Soit (M, g) une variété Riemannienne. On définit une métrique Riemannienne notée $\overline{g}$ par rapport à g sur le fibré tangent TM par*

$$\begin{cases} \overline{g}_{(p,u)}(X^H, Y^H) = g_p(X,Y), \\ \overline{g}_{(p,u)}(X^H, Y^V) = 0. \end{cases}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y \in C^\infty(TM)$ et $(p,u) \in TM$.
Une métrique naturelle $\overline{g}$ est définit par les deux sous-fibré orthogonales verticale et horizontale et l'application

$$\pi : (TM, \overline{g}) \to (M, g)$$

est une submersion Riemannienne.
Une métrique $\overline{g}$ est dite naturelle et elle définit une norme sur chaque espace tangent de TM et on note $\|.\|$.

On aura besoin des identités de Lie suivante

Lemme 3.15 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne,* ∇ *la connexion de Levi-Civita associée à* g *et* R *son tenseur de courbure. Le crochet de Lie sur* TM *verifié*

$$\begin{aligned}
1/\ [X^V, Y^V] &= 0 \\
2/\ [X^H, Y^V] &= (\nabla_X Y)^V \\
3/\ [X^H, Y^H] &= [X, Y]^H - (R(X, Y)u)^V
\end{aligned}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(M)$ *et* $(p, u) \in TM$.

Lemme 3.16 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne et* TM *le fibré tangent de* M *muni de* $\overline{g}$ *la métrique naturelle définit dans la définition (3.14). La connexion de Levi-Civita* $\overline{\nabla}$ *associée à* $\overline{g}$ *satisfie*

$$\begin{aligned}
1)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= g(\nabla_X Y, Z), \\
2)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) &= -\frac{\overline{g}((R(X, Y)u)^V, Z^V)}{2}, \\
3)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) &= \frac{\overline{g}((R(X, Z)u)^V, Y^V)}{2}, \\
4)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) &= \frac{X^H(\overline{g}(Y^V, Z^V)) - \overline{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V) + \overline{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V)}{2}, \\
5)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) &= \frac{\overline{g}((R(Y, Z)u)^V, X^V)}{2}, \\
6)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) &= \frac{Y^H(\overline{g}(Z^V, X^V)) - \overline{g}(Z^V, (\nabla_Y X)^V) - \overline{g}(X^V, (\nabla_Y Z)^V)}{2}, \\
7)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) &= \frac{(-Z^H(\overline{g}(X^V, Y^V)) + \overline{g}(Y^V, (\nabla_Z X)^V) + \overline{g}(X^V, (\nabla_Z Y)^V)}{2}, \\
8)\ \overline{g}(\overline{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) &= \frac{X^V(\overline{g}(Y^V, Z^V)) + Y^V(\overline{g}(Z^V, X^V)) - Z^V(\overline{g}(X^V, Y^V))}{2}
\end{aligned}$$

pour tout champ de vecteurs $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ *et* $(p, u) \in TM$.

Preuve. *On utilise la formule de Kozul suivante*

$$\begin{aligned}
2\overline{g}(\overline{\nabla}_{X^i} Y^j, Z^k) &= X^i(\overline{g}(Y^j, Z^k)) + Y^j(\overline{g}(Z^k, X^i)) \\
&\quad - Z^k(\overline{g}(X^i, Y^j)) - \overline{g}(X^i, \left[Y^j, Z^k\right]) \\
&\quad + \overline{g}(Y^j, \left[Z^k, X^i\right]) + \overline{g}(Z^k, \left[X^i, Y^j\right])
\end{aligned} \tag{3.4}$$

pour tout $X, Y, Z \in C^{\infty}(TM)$ *et* $i, j, k \in \{H, V\}$.

$$\begin{aligned}
1/ \;\; 2\overline{g}(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) &= X^H(\overline{g}(Y^H, Z^H)) + Y^H(\overline{g}(Z^H, X^H)) \\
&\quad - Z^H(\overline{g}(X^H, Y^H)) - \overline{g}(X^H, \left[Y^H, Z^H\right]) \\
&\quad + \overline{g}(Y^H, \left[Z^H, X^H\right]) + \overline{g}(Z^H, \left[X^H, Y^H\right]) \\
&= X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\
&\quad - \overline{g}(X^H, [Y, Z]^H) + \overline{g}(Y^H, [Z, X]^H) + \overline{g}(Z^H, [X, Y]^H) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z).
\end{aligned}$$

De la même manière les assertions 2 *au* 8 *se calculent.* ■

Proposition 3.17 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne et* $\overline{g}$ *une métrique naturelle sur le fibré tangent* TM *de* M*. Alors la connexion de Levi-Civita satisfie*

$$(\overline{\nabla}_{X^H} Y^H)_{(p,u)} = (\nabla_X Y)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X, Y)u)^V$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ *et* $(p, u) \in TM$.

Preuve. la prouve découle directement du lemme (3.16). ■

3.3.2 Métrique de Sasaki

Définition 3.18 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. On définit la métrique Riemannienne notée* $\widehat{g}$ *par rapport à* g *sur le fibré tangent* TM *par*

$$\begin{cases}
\widehat{g}_{(x,u)}(X^H, Y^H) = g_p(X, Y), \\
\widehat{g}_{(x,u)}(X^V, Y^H) = 0, \\
\widehat{g}_{(x,u)}(X^V, Y^V) = g_p(X, Y)
\end{cases}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y, \in \Gamma(M)$.
$\widehat{g}$ *est appellée la métrique de* SASAKI.

Proposition 3.19 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne,* $(TM, \widehat{g})$ *le fibré tangent équipé de* *la métrique de* SASAKI *et* $\widehat{\nabla}$ *la connexion de Levi-Civita. Alors on a*

$$\begin{array}{rcl} 1/\ (\widehat{\nabla}_{X^H}Y^H)_{(p,u)} & = & (\nabla_X Y)^H_{(p,u)} - \frac{1}{2}(R_p(X,Y)u)^V, \\ 2/\ (\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V)_{(p,u)} & = & (\nabla_X Y)^V_{(p,u)} + \frac{1}{2}(R_p(u,Y)X)^H, \\ 3/\ (\widehat{\nabla}_{X^V}Y^H)_{(p,u)} & = & \frac{1}{2}(R_p(u,X)Y)^H, \\ 4/\ (\widehat{\nabla}_{X^V}Y^V)_{(p,u)} & = & 0 \end{array}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y, \in \Gamma(M)$.

Preuve. On utilise la formule KOZUL définie par la formule (3.4) pour (2) on a pour la partie horizontal

$$\begin{array}{rcl} 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) & = & -\widehat{g}((R(Z,X)u)^V, Y^V) \\ & = & -g(R(u,Y)Z, X) \\ & = & g(R(u,Y)X, Z) \\ & = & g((R(u,Y)X)^H, Z^H) \end{array}$$

et pour la partie vertical, on a

$$\begin{array}{rcl} 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) & = & X^H(\widehat{g}(Y^V, Z^V)) + \widehat{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) - \widehat{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V) \\ & = & X(g(Y,Z)) + g(Z, \nabla_X Y) - g(Y, \nabla_X Z) \\ & = & 2g((\nabla_X Y)^V, Z^V). \end{array}$$

de la même méthode on preuve $1, 3$ et 4. ■

Lemme 3.20 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne,* $(TM, \widehat{g})$ *le fibré tangent équipé de la métrique de* SASAKI *et* $\widehat{\nabla}$ *la connexion de Levi-Civita. Soit* $F : TM \to TM$ *un endomorphisme, alors*

$$(\widehat{\nabla}_{X^V}F^V(\eta))_\xi = F(X)^V_\zeta$$

et

$$(\widehat{\nabla}_{X^V}F^H(\eta))_\zeta = F(X)^H_\zeta + \frac{1}{2}(R(u,X)F(\eta))^H_\zeta$$

pour $\forall\zeta = (p,u) \in TM$ *et* $X, \eta \in \Gamma(M)$.

Maintenant, on calcule le tenseur de courbure $\widehat{R}$ de $(TM, \widehat{g})$ par rapport au tenseur de courbure R de (M, g) dans la proposition suivante :

Proposition 3.21 *Soient (M, g) une variété Riemannienne de tenseur de courbure R et $\widehat{R}$ le tenseur de courbure du fibré tangent $(TM, \widehat{g})$ où $\widehat{g}$ est la métrique de* Sasaki. *On a*

$$\begin{aligned}
1/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^V, Y^V)Z^V &= 0, \\
2/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^V, Y^V)Z^H &= \left(R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,X)(R(u,Y)Z) - \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,X)Z)\right)_p^H, \\
3/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^H, Y^V)Z^V &= -\left(\frac{1}{2}R(Y,Z)X + \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,Z)X)\right)_p^H, \\
4/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^H, Y^V)Z^H &= \left(\frac{1}{4}R(R(u,Y)Z,X)u + \frac{1}{2}R(X,Z)Y\right)_p^V + \frac{1}{2}\left((\nabla_X R)(u,Y)Z\right)_p^H, \\
5/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^H, Y^H)Z^V &= \left(R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u,Z)Y,X)u - \frac{1}{4}R(R(u,Z)X,Y)u\right)_p^V \\
&\quad + \frac{1}{2}\left((\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X\right)_p^H, \\
6/\ \widehat{R}_{(p,u)}(X^H, Y^H)Z^H &= \frac{1}{2}\left((\nabla_Z R)(X,Y)u\right)_p^V + (R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,R(Z,Y)u)X \\
&\quad + \frac{1}{4}R(u,R(X,Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u,R(X,Y)u)Z)_p^H
\end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Preuve. 3/ Soit $F : TM \to TM$ l'endomorphisme du fibré définit par

$$F : u \mapsto \frac{1}{2}R(u,Z)X.$$

on utilise le lemme (3.20), on a

$$\widehat{\nabla}_{Y^V} F(u)^H = F(Y)^H + \frac{1}{2}(R(u,Y)F(u))^H.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widehat{R}(X^H, Y^V)Z^V &= \widehat{\nabla}_{X^H}\widehat{\nabla}_{Y^V}Z^V - \widehat{\nabla}_{Y^V}\widehat{\nabla}_{X^H}Z^V - \widehat{\nabla}\left[X^H, Y^V\right]Z^V \\
&= -\widehat{\nabla}_{Y^V}\widehat{\nabla}_{X^H}Z^V \\
&= -\widehat{\nabla}_{Y^V}((\nabla_X Z)^V + F(u)^H) \\
&= -\widehat{\nabla}_{Y^V}F(u)^H \\
&= -F(Y)^H - \frac{1}{2}(R(u,Y)F(u))^H \\
&= -\left(\frac{1}{2}R(Y,Z)X + \frac{1}{4}R(u,Y)(R(u,Z)X)\right)^H.
\end{aligned}$$

le calcul de $1, 2, 4, 5$ et 6 se fait de la même manière. ■

3.3.3 Métrique de Cheeger-Gromoll

Définition 3.22 *Soit (M, g) une variété Riemannienne. La métrique de Cheeger-Gromoll $\widetilde{g}$ sur le fibré tangent TM est donnée par*

$$\begin{cases}
\widetilde{g}_{(p,u)}(X^H, Y^H) = g_p(X, Y), \\
\widetilde{g}_{(p,u)}(X^H, Y^V) = 0, \\
\widetilde{g}_{(p,u)}(X^V, Y^V) = \frac{1}{1+r^2}\left(g_p(X, Y) + g_p(X, u)g_p(Y, u)\right)
\end{cases}$$

pour tout champs de vecteurs $X, Y \in \Gamma(M)$.

Proposition 3.23 *Soient (M, g) une variété Riemannienne et TM le fibré tangent de M équipé de la métrique de Cheeger-Gromoll $\widetilde{g}$. Alors la connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ satisfie*

$$\begin{aligned}
1/\ (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^H) &= (\nabla_X Y)^H - \frac{1}{2}(R(X,Y)u)^V, \\
2/\ (\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V) &= \frac{1}{2\alpha}(R(u,Y)X)^H + (\nabla_X Y)^V, \\
3/\ (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^H) &= \frac{1}{2\alpha}(R(u,X)Y)^H, \\
4/\ (\widetilde{\nabla}_{X^V}Y^V) &= -\frac{1}{\alpha}(\widetilde{g}(X^V, U)Y^V + \widetilde{g}(Y^V, U)X^V) \\
&\quad + \frac{1+\alpha}{\alpha}\widetilde{g}(X^V, Y^V)U - \frac{1}{\alpha}\widetilde{g}(X^V, U)\widetilde{g}(Y^V, U)U
\end{aligned}$$

où $(p, u) \in TM$ et $X, Y \in \Gamma(M)$.

Preuve. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, on utilise la formule de KOZUL
on a pour (2) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^H) &= -\frac{1}{2}\widetilde{g}(Y^V, (R(Z,X)u)^V) \\
&= -\frac{1}{2\alpha}(g(Y, R(Z,X)u) + g(Y,u)g(R(Z,X)u,u)) \\
&= \frac{1}{2\alpha}g(R(u,Y)X, Z) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\widetilde{g}((R(u,Y)X)^H, Z^H).
\end{aligned}$$

On a

$$X^H(\frac{1}{\alpha}) = 0 \text{ et } X^H(g(Y,u)\circ\pi) = g(\nabla_X Y, u)\circ\pi$$

donc

$$X^H(\widetilde{g}(Y^V, Z^V)) = \widetilde{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \widetilde{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{X^H}Y^V, Z^V) &= \frac{1}{2}(X^H(\widetilde{g}(Y^V, Z^V)) + \widetilde{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) \\
&\quad -\widetilde{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)) \\
&= \widetilde{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V).
\end{aligned}$$

la preuve de $1, 3, 4$ sont de la même méthode. ■

Proposition 3.24 *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\widetilde{R}$ le tenseur de courbure du fibré tangent $(TM, \widetilde{g})$ équipé de la métrique de Cheeger-Gromoll. Alors on a*

$$\begin{aligned}
1/\ \widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H &= (R(X,Y)Z)^H \\
&\quad -\frac{1}{4\alpha}(R(u, R(Y,Z)u)X - R(u, R(X,Z)u)Y \\
&\quad -2R(u, R(X,Y)u)Z)^H + \frac{1}{2}\left((\nabla_Z R)(X,Y)u\right)^V,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2/\ \widetilde{R}(X^H,Y^H)Z^V &= (R(X,Y)Z)^V \\
&+\frac{1}{2\alpha}\left((\nabla_X R)(u,Z)Y-(\nabla_Y R)(u,Z)X\right)^H \\
&-\frac{1}{4\alpha}\left(R(X,R(u,Z)Y)u-R(Y,R(u,Z)X)u\right)^V \\
&-4\widetilde{g}(Z^V,U)(R(X,Y)u)^V)+\frac{1+\alpha}{\alpha}\widetilde{g}((R(X,Y)u)^V,Z^V)U,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3/\ \widetilde{R}(X^H,Y^V)Z^H &= \frac{1}{2\alpha}\left((\nabla_X R)(u,Y)Z\right)^H+\frac{1}{2}\left(R(X,Z)Y\right)^V \\
&-\frac{1}{4\alpha}\left((R(X,R(u,Y)Z)u)^V-\frac{2}{\alpha}g(Y,u)(R(X,Z)u)^V\right) \\
&+\frac{1+\alpha}{2\alpha}\widetilde{g}((R(X,Z)u)^V,Y^V)U,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4/\ \widetilde{R}(X^H,Y^V)Z^V &= -\frac{1}{2\alpha}(R(Y,Z)X)^H \\
&-\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,Y)R(u,Z)X)^H \\
&+\frac{1}{2\alpha^2}(g(Y,u)(R(u,Z)X)^H-g(Z,u)(R(u,Y)X)^H),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
5/\ \widetilde{R}(X^V,Y^V)Z^H &= \frac{1}{\alpha}(R(X,Y)Z)^H \\
&+\frac{1}{4\alpha^2}(R(u,X)R(u,Y)Z-R(u,Y)R(u,X)Z)^H \\
&+\frac{1}{\alpha^2}(g(Y,u)(R(u,X)Z)^H-g(X,u)(R(u,Y)Z)^H,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6/\ \widetilde{R}(X^V,Y^V)Z^V &= \frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}(\widetilde{g}(Y^V,Z^V)X^V-\widetilde{g}(X^V,Z^V)Y^V) \\
&+\frac{\alpha+2}{\alpha^2}(\widetilde{g}(X^V,Z^V)g(Y,u)U-\widetilde{g}(Y^V,Z^V)g(X,u)U) \\
&+\frac{\alpha+2}{\alpha^2}(g(X,u)g(Z,u)Y^V-g(Y,u)g(Z,u)X^V).
\end{aligned}
$$

Preuve. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(M)$. On donne juste la preuve de (1) et les autres tenseurs de courbure 2 au 6 se découlent rapidement, on a pour (1) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H &= \widetilde{\nabla}_{X^H}\widetilde{\nabla}_{Y^H}Z^H - \widetilde{\nabla}_{Y^H}\widetilde{\nabla}_{X^H}Z^H - \widetilde{\nabla}_{[X^H,Y^H]}Z^H \\
&= \widetilde{\nabla}_{X^H}((\nabla_Y Z)^H - \frac{1}{2}(R(Y,Z)u)^V) \\
&\quad -\widetilde{\nabla}_{Y^H}((\nabla_X Z)^H - \frac{1}{2}(R(X,Z)u)^V) \\
&\quad -\widetilde{\nabla}_{[X,Y]^H-(R(X,Y)u)^V}Z^H \\
&= (\nabla_X\nabla_Y Z)^H - \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Z)u)^V \\
&\quad -\frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X)^H - \frac{1}{2}(\nabla_X R(Y,Z)u)^V \\
&\quad -(\nabla_Y\nabla_X Z)^H + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Z)u)^V \\
&\quad +\frac{1}{4\alpha}(R(u,R(X,Z)u)Y)^H + \frac{1}{2}(\nabla_Y R(X,Z)u)^V \\
&\quad -(\nabla_{[X,Y]}Z)^H + \frac{1}{2}(R([X,Y],Z)u)^V \\
&\quad +\frac{1}{2\alpha}(R(u,R(X,Y)u)Z)^H \\
&= (R(X,Y)Z)^H + \frac{1}{2}((\nabla_Z R)(X,Y)u)^V \\
&\quad -\frac{1}{4\alpha}(R(u,R(Y,Z)u)X - R(u,R(X,Z)u)Y \\
&\quad -2R(u,R(X,Y)u)Z)^H.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Conclusion

Le fibré tangent est une réunion d'espace tangent à tout point d'une variété différentiable. Lorsqu'on munit cette variété de base d'une structure Riemannienne i.e. une métrique Riemannienne, cette dernière fait du fibré tangent une variété Riemannienne d'une métrique qui peut-être définie a l'aide des relèvements des structures différentielle appelée une métrique naturelle que nous étudions seulement trois métriques dans ce mémoire : métrique naturelle, de Sasaki et de Cheeger-Gromoll.

Chapitre 5

Perspectives

1/ Etudier les gédesiques et les géodésiques Riemanniennes

2/ Voir les differents type de fibrés

3/ Appliquer ces metriques au différent types de fibrés.

Bibliographie

[1] S. Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, Tohoku Math. J. 10 (1958), 338-354.

[2] S. Gudmundsson et E. Kappos. On the Geometry of Tangent Bundles, Expo. Math. 20 (2002) : 1-41.

[3] S. Gudmundsson. An Introduction to Riemannian Geometry, http ://www.matematik.lu.se/ matematiklu/personal/sigma/.

[4] T. Masson. Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions.