

Année: 2016

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Test de stabilité d'un processus autoregressif fonctionnel

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master

Universitaire de Saida

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités et statistique

par

Khadidja Houti¹

Sous la direction de

Encadreur : M^{me} F.Mokhtari

Soutenue le 01/juin/2016 devant le jury composé de

T. Guendouzi	Maître de conférence Univ. Saida	Président
F. Mokhtari	Maître de conférence Univ. Saida	Directrice de mémoire
F. Benziadi	Maître assistant Univ. saida	Examineur
F. Maaref	Maître de conférence Univ. Saida	Examineur

1. e-mail : houtikhadidja26@gmail.com

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à remercier en premier lieu Madame Mokhtari Fatiha. pour m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants de la faculté des Mathématiques de l'université Dr Moulay Tahar Saida, particulièrement, aux enseignants qui m'ont enseigné.

En fin, je remercie mes chers parents qui m'ont aidé et encouragé de poursuivre mes études.

Résumé

Le processus autorégressif fonctionnel est devenu un utile outil dans l'analyse des données de séries chronologiques fonctionnelles. Il est défini par l'équation $X_{n+1} = \rho_n X_n + \varepsilon_{n+1}$, dans lequel les observations X_n et les erreurs ε_n sont des courbes, et ρ est un opérateur. Pour assurer l'inférence significative et la prédiction basée sur ce modèle, il est important de vérifier que l'opérateur ρ ne change pas avec le temps. Nous proposons d'étudier une méthode pour tester la constance de ρ contre un point de changement alternative en utilisant les composantes principales d'analyse fonctionnelle.

La statistique de test est construite afin d'avoir une distribution asymptotique bien connue, mais la justification asymptotique de la procédure est très délicate. Nous allons voir une nouvelle approche de troncature pour laquelle l'inégalité de Mensov peut être utilisée dans d'autres problèmes d'analyse de séries temporelles fonctionnelles. L'estimation des composantes principales introduit des termes asymptotiquement non négligeables toutefois annulés en raison de la forme particulière de la statistique du test.

Testing the stability of the functional autoregressive process

Abstract

The functional autoregressive process has become a useful tool in the analysis of functional time series data. It is defined by the equation $X_{n+1} = \rho_n X_n + \varepsilon_{n+1}$, in which the observations X_n and errors ε_n are curves, and ρ is an operator. To ensure

meaningful inference and prediction based on this model, it is important to verify that the operator ρ does not change with time. We will see a method for testing the constancy of ρ against a change-point alternative which uses the functional principal component analysis. The test statistic is constructed to have a well-known asymptotic distribution, but the asymptotic justification of the procedure is very delicate. We develop a new truncation approach which together with Mensov's inequality can be used in other problems of functional time series analysis.

The estimation of the principal components introduces asymptotically non-negligible terms, which however cancel because of the special form of our test statistic.

Mots clés.

Processus autorégressif, opérateur de covariance, opérateur de covariance croisée, test de stabilité.

key words.

Autoregressive process, covariance operator, cross covariance operator, stability test.

Table des matières

1	Processus autoregressifs Banachiques d'ordre un	10
1.1	Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique d'ordre un	10
1.2	Représentation ARB(1) de processus réels à temps continu	11
1.2.1	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	12
1.2.2	Construction d'un modèle ARC(1)($B = C_{[0,1]}$)	13
1.2.3	Une classe d'ARB(1) à valeurs dans $L^2_{[0,1]}$	15
1.2.4	Processus avec saisonnalité	16
1.3	Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un	16
1.3.1	Définition d'un ARH(1)	16
1.3.2	Estimation des opérateurs de covariance Γ et Δ	18
1.3.3	Estimation des éléments propres	23
2	Procédure du test de stabilité d'un processus autoregressif fonctionnel	28
2.1	Préliminaires	28
2.2	Procédure du test	29
2.3	Résultats asymptotiques	34
3	Simulation	48
3.1	Des données brutes aux fonctions	48
3.1.1	Introduction	48
3.1.2	Construction de la base	48
3.1.3	Calcul des coefficients	49
3.1.4	Construction d'un objet fd	50
3.1.5	Application aux données de la température de Notingham	51

3.2	Simulation d'un ARC(1)	52
3.2.1	Estimation d'un processus ARC(1)	55
3.3	La mise en œuvre du test de stabilité par R	57
3.4	Application aux données de transactions par carte de crédit	59

Introduction

L'analyse des données fonctionnelles est devenue très populaire au cours de cette dernière décennie en raison de son applicabilité aux problèmes qui sont difficiles à résoudre dans un cadre scalaire ou vectoriel. Même si ces approches standards sont disponibles, l'approche fonctionnelle conduit souvent à une description plus naturelle des données. La monographie de Ramsay et Silverman [18] est devenue une référence standard donnant des outils pour l'analyse des données fonctionnelles. On peut aussi citer quelques applications récentes d'analyse des données fonctionnelles dans [17,10] et la monographie récente de Ferraty et Vieu [8].

Les séries temporelles fonctionnelles surviennent lorsque une longue histoire $\{X_t, t \in [0, T]\}$ peut être dévisée sur des sous intervalles de même longueur, alors on pose $X_n(t) = X(n - 1 + t)$, $t \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots, N = T$, Les données sont alors des courbes $X_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Le modèle le plus simple pour une série temporelle fonctionnelle est le processus autorégressif hilbertien d'ordre 1, qui est un prolongement d'un AR(1), le modèle habituel. Malgré sa simplicité au niveau d'écriture, sa modélisation est très souple parce que l'opérateur d'autorégression agit sur un espace de Hilbert, dont les éléments peuvent présenter un certain degré de non-linéarité. Ainsi, même si ARH(1) est un modèle linéaire dans un espace fonctionnel, il est fortement non linéaire pour les enregistrements scalaires individuels. Divers estimation non paramétrique, et les méthodes de prévision pour un modèle ARH(1) ont été mises en œuvre, et ont trouvé de nombreuses applications.

Pour les séries temporelles fonctionnelles il est important de vérifier si un modèle unique peut être utilisé pour l'ensemble des données. Des conditions peuvent changer avec le temps, conduisant à une rupture de la structure stochastique des données.

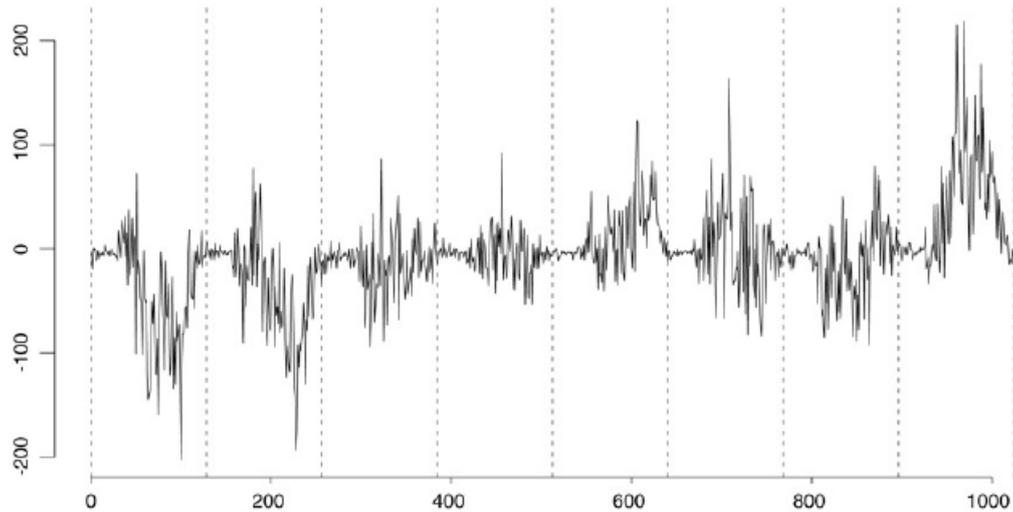


Figure 1 : Sept observations(journalières) d'une série temporelle fonctionnelle dérivée de données de transaction par carte de crédit.

Dans ce travail, on propose un test de stabilité du modèle ARH(1) contre une alternative d'un point de changement.

Le premier chapitre est consacré au processus autorégressifs d'ordre un ARB(1) et ARH(1). Le processus ARB(1), $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ est un processus qui vérifie la relation

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i$$

où ρ est un opérateur borné continu et $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{Z})$ est un B-bruit blanc. On donne ensuite une relation entre l'opérateur de covariance du processus (X_i) et l'opérateur ρ . On donne également des exemples de processus admettant une représentation autorégressive ARB(1), et on cite les résultats dus à D.Bosq, concernant ces processus.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la procédure du test de stabilité d'un ARH(1), contre l'alternative d'un point de changement. On introduit les notations et les hypothèses pertinentes, ensuite on décrit, on justifie la procédure de test, et on présente des résultats asymptotiques et des preuves.

En fin, le dernier chapitre comporte quelques procédures pour simuler des données fonctionnelle, des courbes, un bruit blanc et un processus autorégressif à valeurs dans l'espace $C[0, 1]$ noté $ARC(1)$, en utilisant la version 3.2 du langage R et les packages FDA et FAR . On termine par un script décrivant une méthode pour calculer un certain élément I_N qui joue un rôle primordiale dans l'acceptation ou le rejet d'un modèle. On applique ce script sur les données co_2 disponible dans R est tiré d'une expérience testant la résistance au froid d'une herbe.

Chapitre 1

Processus autoregressifs Banachiques d'ordre un

Un processus Banachique d'ordre un, noté ARB(1), est une généralisation naturelle d'un processus autorégressif à valeurs dans \mathbb{R}^K . Dans ce chapitre nous donnons la définition et les résultats les plus importants concernant ces processus contenus dans [3].

Nous donnons d'abord la définition d'un ARB(1) puis une relation entre l'opérateur de la covariance Γ de X_0 , l'opérateur de la covariance croisée Δ^* de X_1 , X_0 et l'opérateur d'autocorrélation ρ . Nous indiquons ensuite deux processus réels à temps continu qui peuvent se mettre sous la forme d'un ARB(1).

1.1 Définition et existence d'un processus autorégressif Banachique d'ordre un

Définition 1.1.1. Une suite $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi est dit un bruit blanc si :

$$0 < E\|\varepsilon_n\|^2 = \sigma^2 < \infty, \quad E(\varepsilon_n) = 0.$$

Définition 1.1.2. Soit (B, β_B) un espace de Banach séparable muni de la tribu borélienne β_B et de la norme $\|\cdot\|$. On note $\|\rho\|_L$ la norme d'opérateurs linéaire bornés de B dans B . On dira qu'une suite de v.a $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs

dans (B, β_B) .

est un processus autoregressif d'ordre 1 noté ARB(1), si

$$X_n - m = \rho(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z} \quad (1.1)$$

où ρ un opérateur linéaire borné de B et ε_n un B - bruit blanc, $m \in B$.

Pour démontrer l'existence d'un processus admettant l'écriture ARB(1), faisons l'hypothèse suivante

Hypothèse C_0

Il existe un entier $j_0 \geq 1$ tel que $\|\rho^{j_0}\|_L < 1$.

Lemme 1.1.1. [2] *Sous l'hypothèse C_0 , la série*

$$\sum_{j \geq 1} \rho^j \varepsilon_{n-j}, n \in \mathbb{Z} \quad (1.2)$$

Converge dans L_B^2 et presque sûrement.

Pour $m \in B$

$$X_n = m + \sum_{j \geq 0} \rho^j \varepsilon_{n-j}, j \in \mathbb{Z}$$

où (ε_i) est un B - bruit blanc et la série converge presque sûrement et dans L_B^2 .

Alors ε_i est indépendant de $(X_j, j < i)$, la suite (X_n) est strictement stationnaire et on nous avons :

$$X_n - m = \rho(X_1 - m) + \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}.$$

Par suite (X_n) est un processus autorégressif Banachique d'ordre 1, ARB(1) à valeurs dans B .

1.2 Représentation ARB(1) de processus réels à temps continu

Nous indiquons une classe de processus réels à temps continu admettant une représentation ARB(1). Cette classe contient notamment le processus d'Ornstein- Uhlenbeck. Les résultats des deux sections qui suivent sont dûs à Bosq [3] Chap.2.

1.2.1 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On considère le processus réel

$$\xi_t = \int_{-\infty}^t \exp(-c(t-u)) dW(u), \quad t \in \mathbb{R}$$

où W est un processus de Wiener et c une constante strictement positive. Pour construire un ARB(1) à partir de (ξ_t) on peut choisir $B = C_{[0,1]}$ et poser

$$X_n(t) = \xi_{n+t}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}$$

La version choisie de ξ_t étant supposée à trajectoires continues, on définit ainsi des v.a X_n à valeurs dans $C = C_{[0,1]}$.

D'une part

$$\begin{aligned} E(\xi_{n+t}/\xi_s, s \leq n) &= E\left(\int_{-\infty}^{n+t} e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\ &= E\left(\int_{-\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) + \int_n^{n+t} e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\ &= E\left(\int_{-\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) / \xi_s, s \leq n\right) \\ &= \int_{-\infty}^n e^{-c(t-u)} dW(u) \\ &= e^{-ct} \xi_n \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Ce qui amène à poser

$$\rho f(t) = e^{-ct} f(1)$$

Et

$$\varepsilon_n(t) = \int_n^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) = \int_0^t e^{-c(t+v)} dW(n+v)$$

Alors

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(t) &= \int_{\infty}^{n+t} e^{-c(n+t-u)} dW(u) - e^{-ct} \int_{\infty}^n e^{-c(n-u)} dW(u) \\ &= \xi_{n+t} - (\rho X_{n-1})(t) \quad 0 \leq t \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

D'autre part, comme $(W(u))$ est à accroissements indépendants, (ε_n) un bruit blanc et

$$\|\rho^n\| = \sup_{\|f\|=1} \|\rho^n f\| = e^{-c(n-1)}$$

Alors $\sum_{n \geq 0} \|\rho^n\| < \infty$ et ainsi (X_n) est un ARB (1).

1.2.2 Construction d'un modèle ARC(1) ($B = C_{[0,1]}$)

Nous rappelons le théorème de Karhunen-Loève et une application de ce théorème pour construire un processus de Wiener.

Un processus stochastique du 2^{eme} ordre est une famille de variables aléatoires réelles $\xi_t, t \in T$ telle que $E(|\xi_t|^2) < \infty$ pour tout $t \in T$.

Soit $(\zeta_r, a \leq r \leq b)$ tel que a et b sont finis, un processus stochastique de 2^{eme} ordre de moyenne nulle et de fonction de covariance K continue.

Soit $(\varphi_i, i = 1, 2, \dots)$ une base orthonormale de l'espace engendré par les fonctions propres correspondantes aux valeurs propres non nulles de l'opérateur intégral associé à K .

$$(Af)(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) dt$$

Dans ces conditions, le théorème de Karhunen-Loève donne

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i \varphi_i(t), \quad t \in [a, b]$$

où $\xi_i = \int_a^b \zeta_i \varphi_i(t) dt$, sont des variables aléatoires orthogonales de moyenne nulle et $E[|\xi_i|^2] = \lambda_i$. Cette série converge dans L^2 , et uniformément sur $[a, b]$.

Si le processus est Gaussien alors tout vecteur aléatoire (ξ_1, \dots, ξ_r) est gaussien dans \mathbb{R}^r pour $r \geq 1$. Dans le cas d'un processus de Wiener $(W(t), t \geq 0)$ sa fonction de covariance est

$$K(s, t) = \min(s, t)$$

Les vecteurs et les valeurs propres de l'opérateur de covariance du processus de Wiener (opérateur A) sont :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \sqrt{2} \sin \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi t \right], i \geq 1 \\ \mu_i &= \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}, i \geq 1 \end{aligned}$$

En prenant $\xi_i^* = \frac{\xi_i}{\sqrt{\mu_i}}$ ξ_i où ξ_i sont donnés par le développement en série de Karhunen-Loève, on obtient :

$$W(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^* \frac{\sin\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi}$$

Pour un processus de Wiener sur un intervalle $[0, n + 1]$, nous considérons le développement suivant

$$\varphi_i = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \pi \frac{t}{n+1} \right], \quad \mu_i = \frac{1}{\left(i - \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2}$$

Et

$$W(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^* \frac{\sin\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{t}{n+1}\right]}{\left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1}}, \quad t \in [0, n + 1]$$

Où les (ξ_i^*) sont des variables aléatoires iid normales réduites.

Posons pour tout $W \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_n : [0, 1] \times \Omega &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\nu, \omega) &\longmapsto W_{n+\nu}(\omega) - W_n(\omega)\end{aligned}$$

Maintenant nous définissons l'opérateur ρ . Puisque nous resterons dans le sous espace engendré par les vecteurs φ_i , il suffit de définir $\rho(\varphi_i)$. Nous prenons

$$\rho[\varphi_i](s) = \beta_i \varphi_i(s)$$

Où la suite (β_i) est une suite de réels donnés.

Posons

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{n-j}$$

Ainsi (X_n) est un processus ARC(1).

1.2.3 Une classe d'ARB(1) à valeurs dans $L^2_{[0,1]}$

Soit $(Z_t, t \in \mathbb{R})$ un processus réel du second ordre, centré et à accroissements indépendants et strictement stationnaires. On suppose que nous avons une version de (Z_t) à trajectoires localement de carrés intégrables. Alors en posant :

$$\varepsilon_n(t) = Z_{n+t} - Z_n, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

on définit un bruit blanc dans $L^2_{[0,1]} = H$.

Soit ρ un opérateur linéaire sur H , intégral de noyau K défini par

$$(\rho f)(t) = \int_0^1 K(s, t) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad f \in L^2_{[0,1]}$$

Où

$$0 \leq \int_0^1 \int_0^1 K^2(s, t) dt ds < 1$$

Alors $\|\rho\| < 1$ et on définit un ARH (1) en posant :

$$X_n(t) = \sum_{i \geq 0} \rho^i (\varepsilon_{n-i})(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

(Z_t) peut être un processus de Wiener ou un processus de Poisson centré.

1.2.4 Processus avec saisonnalité

Considérons un processus réel de la forme

$$\eta_t = m(t) + \xi_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Où (ξ_t) est un processus centré à trajectoires continues et admettant une représentation ARB(1) où $B = C_{[0,1]}$. On suppose que m est une fonction continue non aléatoire, de période h et non constante. Dans ces conditions η_t admet une représentation ARB(1) avec

$$X_n(t) = \xi_{n+t}, \quad 0 \leq t \leq h, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$EX_n = m$$

X_n est donc stationnaire alors que (η_t) ne l'est pas.

Conclusion : De nombreux processus usuels admettent une représentation autorégressive dans un espace bien choisi.

1.3 Processus Autorégressifs Hilbertiens d'ordre un

1.3.1 Définition d'un ARH(1)

Nous donnerons ici la définition d'un ARH(1) tel qu'on utilisera dans cette section avec deux hypothèses supplémentaires par rapport à la définition d'un ARB(1). Considérons un espace de Hilbert réel et séparable muni de la norme $\|\cdot\|$. Un ARH(1) est une suite de variables aléatoires à valeurs dans H telle que

$$X_i = \rho X_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Où (ε_i) est un H-bruit blanc et ρ est un opérateur compact et symétrique sur H tel que $\|\rho^{j_0}\|_L < 1$ pour $j_0 \geq 1$.

Si φ est un vecteur propre de ρ associé à λ alors $(\langle X_i, \varphi \rangle, i \in \mathbb{Z})$ est un AR(1).

Pour les variables aléatoires Hilbertiennes, les opérateurs de covariance et de covariance croisée comme des opérateurs linéaires sur H sont définis par :

$$\begin{aligned} C_{X_0}(x) &= E(\langle X_0, x \rangle X_0) \\ C_{X_0 X_1}(x) &= E(\langle X_0, x \rangle X_1) \end{aligned}$$

Pour un ARH(1) on a $C_{X_0 X_1} = \rho C_{X_0}$.

Proposition 1.3.1. [2] *Si (X_i) est un ARH(1) associé à ρ et (ε_i) on a :*

$$\begin{aligned} EX_0 &= 0 \\ C_{X_0} &= \rho C_{X_0} \rho + C_\varepsilon \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j C_\varepsilon \rho^j \\ C_{X_0, X_{-k}} &= C_{X_0} \rho^k, k = 1, 2, \dots \\ C_{X_{-k}, X_0} &= \rho^k C_{X_0}, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Dans la suite, on note

$$\Gamma = C_{X_0}, \quad \Delta^* = C_{X_1 X_2}$$

Les deux dernières équations de la proposition s'écrivent donc

$$\Delta^* = \Gamma \rho \quad \text{et} \quad \Delta = \rho \Gamma$$

Comme cela a été signalé dans le livre de Bosq [4], l'estimation de ρ est un problème difficile même si l'existence de l'inverse de Γ entraîne $\rho = \Gamma^{-1} \Delta$. Cela est dû au fait que H étant de dimension infinie Γ^{-1} n'est pas un opérateur borné.

1.3.2 Estimation des opérateurs de covariance Γ et Δ

Rappelons d'abord (cf [8]) qu'un opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert séparable $(H, \|\cdot\|)$ est de Hilbert Schmidt si :

$$\|T\|_S^2 := \sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle Te_i, e_j \rangle_H^2 < \infty$$

Où $(e_i, i \in \mathbb{N})$ est une base Hilbertienne dans H . L'espace S des opérateurs aléatoires de Hilbert Schmidt sur H est un espace de Hilbert pour le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ suivant :
si $T_1, T_2 \in S$

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle T_1, e_i \rangle_H \langle T_2, e_j \rangle_H$$

Les opérateurs $\Gamma(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_0)$ et $\Delta(x) = E(\langle X_0, x \rangle X_1)$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

En fait si X et Y sont des variables aléatoires Hilbertiennes du second ordre, alors C_{XY} est un opérateur de Hilbert Schmidt car

$$\begin{aligned} \sum_j \|C_{XY}(\varphi_j)\|^2 &= \sum_j \sum_l \langle C_{XY}(\varphi_j), \varphi_l \rangle^2 \\ &= \sum_j \sum_l (E\langle X, \varphi_j \rangle \langle Y, \varphi_l \rangle)^2 \\ &\leq \sum_j \sum_l E\langle X, \varphi_j \rangle^2 E\langle Y, \varphi_l \rangle^2 \\ &\leq E\|X\|^2 E\|Y\|^2 < \infty \end{aligned}$$

Où (φ_j) est une base orthonormale de H . Leurs normes de Hilbert Schmidt sont respectivement :

$$\begin{aligned} \|\Gamma\|_S &= \left(\sum_{j,l} |E(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\Delta\|_S &= \left(\sum_{j,l} |E(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_1, \varphi_l \rangle)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Un estimateur naturel de Γ est l'opérateur de la covariance empirique, noté Γ_n

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, x \rangle X_i, \quad x \in H.$$

Cet opérateur est de rang fini et donc de Hilbert Schmidt. De façon analogue on définit un estimateur de Δ par :

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, x \rangle X_{i+1}, \quad x \in H.$$

On l'appelle opérateur de la covariance croisée empirique de X_0, X_1 . Il est de Hilbert Schmidt. On montre que Γ_n est un estimateur symétrique sans biais de Γ .

La proposition suivante donne la convergence p.s de Γ_n vers Γ et une vitesse de convergence de l'ordre $\frac{1}{n}$.

Proposition 1.3.2. [3] *Supposons que $E\|X_0\|^4 < \infty$. Alors*

$$E\|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2 \leq \frac{A}{n} \tag{1.3}$$

Où

$$A = E\|X_0\|^4 [1 + 4\|\rho\|^2 (1 - \|\rho\|^2)^{-1}]$$

De plus on a :

$$\|\Gamma_n - \Gamma\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

Preuve. Considérons les v.a. à valeurs dans S

$$Z_i = \langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma, \quad i = 1, 2, \dots$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|Z_n\|_S^2 &= \mathbb{E} \sum_j \|Z_n \varphi_j\|^2 \\
&= \mathbb{E} \sum_{j,l} \langle Z_n \varphi_j, \varphi_l \rangle^2 \\
&\leq \sum_{j,l} \mathbb{E} (\langle X_n, \varphi_j \rangle \langle X_n, \varphi_l \rangle - \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle)^2 \\
&\leq \sum_{j,l} \mathbb{E} (\langle X_n, \varphi_j \rangle^2 \langle X_n, \varphi_l \rangle^2) \\
&\leq \sum_j \mathbb{E} \langle X_n, \varphi_j \rangle^2 \sum_l \mathbb{E} \langle X_n, \varphi_l \rangle^2 \\
&\leq \mathbb{E}\|X_0\|^4
\end{aligned}$$

Car $\mathbb{E} \langle X_n, \varphi_j \rangle \langle X_n, \varphi_l \rangle = \langle C_{X_0} \varphi_j, \varphi_l \rangle$.

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|Z_n + \dots + Z_{n+p-1}\|_S^2 &= \sum_{i=n}^{n+p-1} \mathbb{E}\|Z_i\|_S^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{p-1} \mathbb{E} \langle Z_i, Z_j \rangle_S \\
&\leq p \mathbb{E}\|X_0\|^4 + 2 \sum_{h=1}^{p-1} (p-h) \mathbb{E} \langle Z_0, Z_h \rangle_S
\end{aligned}$$

Pour trouver une majoration de $\mathbb{E} \langle Z_0, Z_h \rangle$, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \langle Z_0, Z_h \rangle &= \sum_{j,l} \mathbb{E} \langle Z_j \varphi_j, \varphi_l \rangle \langle Z_h \varphi_j, \varphi_l \rangle \\
&= \sum_{j,l} \mathbb{E} (\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle X_h, \varphi_j \rangle \langle X_h, \varphi_l \rangle) - \sum_{j,l} \langle \Gamma \varphi_j, \varphi_l \rangle^2
\end{aligned}$$

Où (φ_j) est une base orthonormale de H . Utilisons

$$\begin{aligned}
X_h &= \varepsilon_h + \rho\varepsilon_{h-1} + \dots + \rho^{h-1}\varepsilon_0 + \rho^h X_0 \\
\mathbf{E}\langle Z_0, Z_h \rangle &= - \sum_{j,l} \langle \Gamma\varphi_j, \varphi_l \rangle^2 + \\
&\quad \sum_{j,l} \mathbf{E} \left(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k (\varepsilon_{h-k}) + \rho^h X_0, \varphi_j \right\rangle \left\langle \sum_{k=0}^{h-1} \rho^k (\varepsilon_{h-k}) + \rho^h X_0, \varphi_l \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

ε_{h-k} étant indépendant de $\varepsilon_{h-k'}$ pour $k \neq k'$ et X_0 de ε_{h-k} si $k \leq h-1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\langle Z_0, Z_h \rangle &= \sum_{j,l} \mathbf{E}(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle \rho^h X_0, \varphi_j \rangle \langle \rho^h X_0, \varphi_l \rangle) \\
&\quad + \sum_{j,l} (\langle \Gamma\varphi_j, \varphi_l \rangle \langle \sum_{k=0}^{h-1} (\rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k) \varphi_j, \varphi_l \rangle) - \sum_{j,l} \langle \Gamma\varphi_j, \varphi_l \rangle^2
\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant $\sum_{k=0}^{h-1} \rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k + \rho^h \Gamma \rho^h$ on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\langle Z_0, Z_h \rangle &= \sum_{j,l} \mathbf{E}(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \varphi_l \rangle \langle X_0, \rho^h \varphi_j \rangle \langle X_0, \rho^h \varphi_l \rangle) - \\
&\quad \sum_{j,l} (\langle \Gamma\varphi_j, \varphi_l \rangle \langle \sum_{k=0}^{h-1} (\rho^k \Gamma_\varepsilon \rho^k) \varphi_j, \varphi_l \rangle) \\
&= \mathbf{E}(\langle X_0, \cdot \rangle X_0, \langle \rho^h X_0, \cdot \rangle \rho^h X_0)_S - \langle C_{X_0}, \rho^h C_{X_0} \rho^h \rangle_S \\
&\leq \mathbf{E}\|X_0\|^2 \mathbf{E}\|\rho^h X_0\|^2 + \|C_{X_0}\|_S \|\rho^h \Gamma \rho^h\|_S \\
&\leq 2\|\rho\|^{2h} \mathbf{E}\|X_0\|^4
\end{aligned}$$

Puisque les opérateurs $T_1 = \langle X_0, \cdot \rangle X_0$, $T_2 = \langle \rho^h X_0, \cdot \rangle \rho^h X_0$ et $\rho^h C_{X_0} \rho^h$ sont de Hilbert-Schmidt (par exemple le troisième opérateur : $\rho^h C_{X_0}$ est de Hilbert-Schmidt car ρ est borné et C_{X_0} est de Hilbert-Schmidt) et de norme

$$\|T_1\|_S^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|T_1 \varphi_i\|^2 = \sum_i \langle X_0, \varphi_i \rangle^2 \|X_0\|^2 = \|X_0\|^4$$

De même on obtient

$$\|T_1\|_S^2 = \|\rho^h X_0\|^2 \leq \|\rho\|_L^{2h} \|X_0\|^2$$

et

$$\|\rho^h C_{X_0} \rho^h\| \leq \|\rho\|_L^{2h} \|C_{X_0}\|_S$$

On a donc

$$\mathbb{E}\|Z_n + \dots + Z_{n+p-1}\|_S^2 \leq p \left(\mathbb{E}\|X_0\|^4 + \frac{4\mathbb{E}\|X_0\|^4 \|\rho\|^2}{1 - \|\rho\|^2} \right)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2 &= \mathbb{E}\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma \right\|_S^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\|Z_1 + \dots + Z_n\|_S^2 \\ &\leq \frac{\mathbb{E}\|X_0\|^4}{n} \left(1 + \frac{4\|\rho\|_L^2}{1 - \|\rho\|_L^2} \right) \end{aligned}$$

On aboutit donc à (1.4).

Proposition 1.3.3. [1] *Pour $n \geq 2$*

$$\mathbb{E}\|\Delta_n - \Delta\|_S^2 = \mathbb{E}\|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S^2 \leq \frac{B}{n-1} \quad (1.4)$$

Où

$$B = 2\mathbb{E}\|X_0\|^2 \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^2 + 2A$$

Et A est défini dans la proposition 1.3.2.

De plus on a :

$$\|\Delta_n - \Delta\|_S = \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

1.3.3 Estimation des éléments propres

Soient $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_n \geq 0$ les valeurs propres de Γ_n et $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots$ le système complet de vecteurs propres de Γ_n tels que

$$\Gamma_n \hat{\varphi}_j = \hat{\lambda}_j \hat{\varphi}_j \quad j = 1, 2, \dots$$

Alors des estimateurs naturels de λ_j et φ_j sont respectivement $\hat{\lambda}_j$ et $\hat{\varphi}_j$.

Lemme 1.3.1. [3] *Pour tout entier positif j nous avons.*

$$|\hat{\lambda}_j - \lambda_j| \leq \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.5)$$

Et si $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\|\hat{\varphi}_1 - \varphi'_1\| \leq a_1 \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.6)$$

Où $a_1 = 2\sqrt{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$, et si pour un $j > 1$, $\lambda_{j-1} > \lambda_j > \lambda_{j+1}$ alors

$$\|\hat{\varphi}_j - \varphi'_j\| \leq a_j \|\Gamma_n - \Gamma\| \quad (1.7)$$

Où $a_j = 2\sqrt{2}[\min(\lambda_{j-1} - \lambda_j, \lambda_j - \lambda_{j+1})]^{-1}$. Ici $\varphi'_j = \hat{c}_j \varphi_j, j \geq 1$,

$$\text{avec } sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } \hat{c}_j = \langle \hat{\varphi}_j, \varphi_j \rangle$$

Proposition 1.3.4. [4] *Si $\|X_0\| \leq d$ p.s, (X_i) est géométriquement α -mélangeant et*

$$\lambda_j = ar^j; \quad a > 0, \quad 0 < r < 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Alors pour $0 < \gamma < \frac{1}{4}$, nous avons pour tout $\varepsilon > 0$ et $n > n_\gamma$

$$P(\|\Gamma_n - \Gamma\|_S > \varepsilon) \leq 2n^\gamma \exp\left(-\frac{\varepsilon n^\gamma}{10d^2 e \sqrt{2}}\right) + \frac{2ad^2 r}{\varepsilon^2(1 - \sqrt{r})^2} \exp\left(-\log \frac{1}{r} n^\gamma\right) \quad (1.8)$$

et

$$P(\|\Delta_n - \Delta\|_S > \varepsilon) \leq 2n^\gamma \exp\left(-\frac{\varepsilon(n-1)^\gamma}{10(d^2 + \|\Delta\|_S)e\sqrt{2}}\right) + \frac{2ad^2r}{\varepsilon^2(1-\sqrt{r})^2} \exp\left(-\log\frac{1}{r}(n-1)^\gamma\right)$$

Proposition 1.3.5. [3] *Nous avons*

$$E(\sup_{j \geq 1} |\hat{\lambda}_j - \lambda_j|^2) \leq \frac{A}{n} \quad (1.9)$$

$$\sup_{j \geq 1} |\hat{\lambda}_j - \lambda_j| \xrightarrow{p.s.} 0$$

et sous les hypothèses de la proposition 1.3.4 la vitesse de convergence est de l'ordre $O(\exp(-cn^\gamma))$, $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

Preuve. De (1.4) et (1.6) on obtient (1.10). La convergence p.s. est directe, car

$$\|\Gamma_n - \Gamma\| \xrightarrow{p.s.} 0$$

Si on utilise (1.9) la vitesse de convergence est de l'ordre $O(\exp(-cn^\gamma))$.

Proposition 1.3.6. [4] *Pour tout j tel que $\lambda_{j-1} > \lambda_j > \lambda_{j+1}$, alors on a*

$$E\|\hat{\varphi}_j - \varphi'_j\| \leq a_j^2 \frac{A}{n}$$

où A est défini dans Prop (1.4.2) et $\|\hat{\varphi}_j - \varphi'_j\| \xrightarrow{p.s.} 0$.

Si $\lambda_j = ar^j$ et $k_n = o(\log n)$ alors

$$E(\sup_{1 \leq j \leq k_n} \|\hat{\varphi}_j - \varphi'_j\|^2) \xrightarrow{p.s.} 0$$

et la vitesse de convergence est $O(\exp(-cn^\gamma))$, $0 < \gamma < \frac{1}{4}$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la proposition 1.3.4, la proposition 1.3.2 et des inégalités (1.7) et (1.8).

Proposition 1.3.7. [3] *Pour $n \geq 2$*

$$\mathbb{E}\|\Delta_n - \Delta\|_S^2 = \mathbb{E}\|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S^2 \leq \frac{B}{n-1} \quad (1.10)$$

où

$$B = 2\mathbb{E}\|X_0\|^2\mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^2 + 2A$$

A est défini dans la proposition 1.3.2.

De plus on a :

$$\|\Delta_n - \Delta\|_S = \|\Delta_n^* - \Delta^*\|_S \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

Preuve. Posons

$$W_i = \langle X_i, \cdot \rangle X_{i+1} - \Delta, \quad i = 1, 2, \dots$$

D'après (1.1) et puisque $\Delta = \rho\Gamma$, nous avons

$$W_i = \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} + \rho[\langle X_i, \cdot \rangle X_i - \Gamma]$$

Ainsi

$$\bar{W}_n = \frac{W_1 + \dots + W_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle \varepsilon_{i+1} + \rho(\Gamma_{n-1} - \Gamma)$$

En choisissant une base orthonormale de H , de l'indépendance des v.a. ε_{n+h-1} et $(X_n, X_{n+h}, \varepsilon_{n+1})$ pour $h \geq 1$ et de $\mathbb{E}\varepsilon_n = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\langle \langle X_n, \cdot \rangle \varepsilon_{n+1}, \langle X_{n+h}, \cdot \rangle \varepsilon_{n+h-1} \rangle_S &= \sum_{i,j} \mathbb{E}(\langle X_n, \varphi_i \rangle \langle \varepsilon_{n+1}, \varphi_j \rangle \langle X_{n+h}, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_{n+h-1}, \varphi_i \rangle) \\ &= \mathbb{E}(\langle X_n, \varphi_i \rangle \langle \varepsilon_{n+1}, \varphi_j \rangle \langle X_{n+h}, \varphi_j \rangle) \mathbb{E}(\langle \varepsilon_{n+h-1}, \varphi_i \rangle) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où l'orthogonalité des v.a. $\langle X_n, \cdot \rangle_{\varepsilon_{n+1}}$, $n \geq 1$ dans L_S^2 . Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E} \|\langle X_n, \cdot \rangle_{\varepsilon_{n+1}}\|_S^2 = \mathbf{E} \sum_i \|\langle X_n, \varphi_i \rangle_{\varepsilon_{n+1}}\|^2 = \mathbf{E} \|\varepsilon_{n+1}\|^2 \sum_i \langle X_n, \varphi_i \rangle^2 = \mathbf{E} \|\varepsilon_0\|^2 \mathbf{E} \|X_0\|^2$$

On en déduit que :

$$\mathbf{E} \left\| \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}} \right\|_S^2 = \frac{\mathbf{E} \|X_0\|^2 \mathbf{E} \|\varepsilon_0\|^2}{n-1}$$

D'autre part $\rho\Gamma_{n-1}$, $\rho\Gamma$ sont dans S car Γ_{n-1} et Γ_n appartenant à S et ρ est borné. Donc

$$\mathbf{E} \|\rho(\Gamma_{n-1} - \Gamma)\|_S^2 \leq \|\rho\|_L^2 \mathbf{E} \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2$$

En utilisant les majorations précédentes on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \|\Delta_n - \Delta\|_S^2 &= \mathbf{E} \|\bar{W}_n\|_S^2 \\ &= \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}} - \rho(\Gamma_{n-1} - \Gamma) \right\|_S^2 \\ &\leq 2\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}} \right\|_S^2 + 2\mathbf{E} \|\rho(\Gamma_{n-1} - \Gamma)\|_S^2 \\ &\leq 2 \frac{\mathbf{E} \|X_0\|^2 \mathbf{E} \|\varepsilon_0\|^2}{n-1} + 2\|\rho\|_L^2 \mathbf{E} \|\Gamma_n - \Gamma\|_S^2 \end{aligned}$$

Maintenant on utilise la proposition 1.3.2 pour obtenir (1.11). En utilisant (1.9) on a

$$\|\bar{W}_n\|_S \leq \left\| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}} \right\|_S + \|\rho\|_L \|\Gamma_n - \Gamma\|_S$$

D'après la proposition 1.3.2, $\|\Gamma_n - \Gamma\| \rightarrow 0$ p.s et pour les v.a. $\langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}}$ étant orthogonal dans L^2 , elles vérifient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\langle X_n, \cdot \rangle_{\varepsilon_{n+1}} + \dots + \langle X_{n+p-1}, \cdot \rangle_{\varepsilon_{n+p-1}}\|_S^2 &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n+p-1} \|\langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}}\|_S^2 \\
&\leq p\mathbb{E}\|X_0\|^2\mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^2 \\
&\leq pK
\end{aligned}$$

où $K = \mathbb{E}\|X_0\|^2\mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^2$

Ainsi, on applique le lemme 1 [13] p 78 avec $G = S$ muni de la norme $\|\cdot\|_S$ et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \langle X_i, \cdot \rangle_{\varepsilon_{i+1}} \longrightarrow 0 \quad p.s.$$

D'où la convergence $W_n \longrightarrow 0 \quad p.s.$

Chapitre 2

Procédure du test de stabilité d'un processus autoregressif fonctionnel

2.1 Préliminaires

Dans ce chapitre on étudie le test de stabilité d'un ARH(1), contre l'alternative d'un point de changement. On observe les fonctions aléatoires $\{X_n(t), t \in [0, 1], n = 1, 2, \dots, N\}$, et on suppose qu'elles suivent le modèle :

$$X_{n+1} = \rho_n X_n + \varepsilon_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Où les innovations ε_n sont iid, de moyenne nulle et appartenant à $L^2[0, 1]$. Les ρ_n sont des opérateurs linéaires bornés de $L^2[0, 1]$ vers $L^2[0, 1]$. On teste

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N$$

Contre l'hypothèse alternative

$$H_A : \exists 1 \leq k^* < N : \rho_1 = \dots = \rho_{k^*} \neq \rho_{k^*+1} = \dots = \rho_N$$

Sous l'hypothèse H_0 , l'opérateur commun est noté ρ .

On suppose par la suite que toutes les fonctions aléatoires sont définies sur l'intervalle $[0, 1]$, on n'indique pas les limites de l'intégration, i.e on utilise $\int f(t)dt$ pour

désigner $\int_0^1 f(t)dt$. L'hypothèse suivante formalise la structure des observations sous l'hypothèse nulle.

Hypothèse 1. Les observations fonctionnelles $X_n \in L^2([0, 1])$ satisfont

$$X_{n+1} = \rho X_n + \varepsilon_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.1)$$

Où ρ est un opérateur intégral de noyau $K(s, t)$ vérifiant :

$$\int \int K^2(s, t) ds dt < 1,$$

Les innovations $\varepsilon_n \in L^2([0, 1])$ sont iid de moyenne nulle indépendantes de X_n, X_{n-1}, \dots , voir [3], telles que :

$$E\|\varepsilon_n\|^4 = E \left[\int \varepsilon_n^2(t) dt \right]^2 < \infty.$$

L'équation (2.1) peut être écrite explicitement par :

$$X_{n+1}(t) = \int K(t, s) X_n(s) ds + \varepsilon_{n+1}(t), \quad t, s \in [0, 1]. \quad (2.2)$$

Hypothèse 2. Les valeurs propres de l'opérateur de covariance Γ satisfont

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > \lambda_{p+1}.$$

L'hypothèse 1 assure l'unicité d'une solution strictement stationnaire dont le moment d'ordre 4 est fini.

2.2 Procédure du test

L'idée est de vérifier si l'action de ρ sur les p plus importantes composantes principales des observations X_1, X_2, \dots, X_N change en un point inconnu du temps i . S'il n'y a pas de changement dans l'opérateur autorégressif ρ , les fonctions $\rho\varphi_j, j = 1, 2, \dots, p$ restent constantes. Comme $\rho\varphi_j = \sum_{\ell} \langle \rho\varphi_j, \varphi_{\ell} \rangle \varphi_{\ell}$, alors les coefficients $\langle \rho\varphi_j, \varphi_{\ell} \rangle, \ell \leq p$ restent aussi constants. Une vérification directe montre que sous H_0 ,

$\langle \rho\varphi_j, \varphi_{\ell} \rangle = \lambda_j^{-1} \langle \Delta\varphi_j, \varphi_{\ell} \rangle$. Ainsi, l'invariabilité de ρ est approximativement équivalente à l'invariabilité des produits $\langle \Delta\varphi_j, \varphi_{\ell} \rangle, j, \ell = 1, 2, \dots, p$.

La restriction de ρ sur l'espace engendré par $\varphi_j, j = 1, 2, \dots, p$, signifie que le test ne détectera pas les changements sur l'orthogonal de cet espace. Typiquement, la valeur p est choisie de manière que les vecteurs empiriques $\hat{\varphi}_j, j = 1, 2, \dots, p$ expliquent un grand pourcentage de la variabilité des données, on considère donc un changement dans l'action de ρ sur $\varphi_j, j > p$, comme non pertinents. Un autre point à noter est que d'après $\langle \Delta\varphi_j, \varphi_\ell \rangle = \lambda_j \langle \rho\varphi_j, \varphi_\ell \rangle$, un changement de ρ peut être masqué par un changement dans les fonctions propres λ_j .

On doit d'abord évaluer ces produits à partir des observations X_1, X_2, \dots, X_k , puis à partir des observations $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_N$ et comparer les estimations qui en résultent, on définit les projections p -dimensionnelles, par :

$$\mathbf{X}_i = [X_{i1}, \dots, X_{ip}]^T, \quad \hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{X}_{i1}, \dots, \hat{X}_{ip}]^T$$

où

$$X_{ij} = \langle X_i, \varphi_j \rangle = \int X_i(t) \varphi_j(t) dt, \quad \hat{X}_{ij} = \langle X_i, \hat{\varphi}_j \rangle = \int X_i(t) \hat{\varphi}_j(t) dt$$

et les matrices ($p \times p$)

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{2 \leq i \leq k} \mathbf{X}_{i-1} \mathbf{X}_i^T, \quad R_{N-k}^* = \frac{1}{N-k} \sum_{k < i \leq N} \mathbf{X}_{i-1} \mathbf{X}_i^T;$$

$$\hat{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{2 \leq i \leq k} \hat{\mathbf{X}}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_i^T, \quad \hat{R}_{N-k}^* = \frac{1}{N-k} \sum_{k < i \leq N} \hat{\mathbf{X}}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_i^T.$$

On a par le théorème ergodique, lorsque $k \rightarrow \infty$

$$R_k(j, \ell) = \frac{1}{k} \sum_{2 \leq i \leq k} \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle X_i, \varphi_\ell \rangle \rightarrow \mathbb{E}[\langle X_{n-1}, \varphi_j \rangle \langle X_n, \varphi_\ell \rangle] = \langle \Delta\varphi_j, \varphi_\ell \rangle.$$

Ainsi, les matrices R_k et R_{N-k}^* sont des approximations de la matrice $[\langle \Delta\varphi_j, \varphi_\ell \rangle, j, \ell = 1, 2, \dots, p]$, en utilisant les observations avant et après l'instant k . Les matrices R_k et R_{N-k}^* ne peuvent pas être calculées à partir des données car les composantes principales sont inconnues.

Donc, on les remplace par leurs estimateurs empiriques \hat{R}_k et \hat{R}_{N-k}^* .

Par la relation (2.2) on a la convergence de $\hat{c}_j \hat{\varphi}_j$ vers φ_j . Par conséquence, \hat{R}_k doit être multiplié par $\hat{c}_j \hat{c}_\ell$, alors une statistique de test doit être construite d'une manière a ne pas être influencé par le signe de $\hat{c}_j \hat{c}_\ell$.

On note

$$Y_i(j, \ell) = \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle X_i, \varphi_\ell \rangle, \quad \hat{Y}_i(j, \ell) = \langle X_{i-1}, \hat{\varphi}_j \rangle \langle X_i, \hat{\varphi}_\ell \rangle \quad (2.3)$$

On considère les vecteurs colonnes de longueur p^2

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_i &= [Y_i(1, 1), \dots, Y_i(1, p), Y_i(2, 1), \dots, Y_i(2, p), Y_i(p, 1), \dots, Y_i(p, p)]^T \\ \hat{\mathbf{Y}}_i &= [\hat{Y}_i(1, 1), \dots, \hat{Y}_i(1, p), \hat{Y}_i(2, 1), \dots, \hat{Y}_i(2, p), \hat{Y}_i(p, 1), \dots, \hat{Y}_i(p, p)]^T \end{aligned}$$

On définit aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k &= \sum_{2 \leq i \leq k} \mathbf{Y}_i, & \mathbf{Z}_{N-k}^* &= \sum_{k < i \leq N} \mathbf{Y}_i \\ \hat{\mathbf{Z}}_k &= \sum_{2 \leq i \leq k} \hat{\mathbf{Y}}_i, & \hat{\mathbf{Z}}_{N-k}^* &= \sum_{k < i \leq N} \hat{\mathbf{Y}}_i \end{aligned}$$

Puisque les X_i suivent un modèle AR(1) fonctionnel, les vecteurs \mathbf{Y}_i forment une suite stationnaire faiblement dépendante, lorsque $k \rightarrow \infty$, on a

$$\sqrt{k} \left[\frac{1}{k} \sum_{2 \leq i \leq k} \mathbf{Y}_i - \mathbf{E}\mathbf{Y}_k \right] \xrightarrow{d} \mathbf{N}(0, D). \quad (2.4)$$

où \mathbf{D} est la matrice de covariance définie par :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}[(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{E}\mathbf{Y}_2)(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{E}\mathbf{Y}_2)^T] + 2 \sum_{1 \leq h < \infty} \mathbf{E}[(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{E}\mathbf{Y}_2)(\mathbf{Y}_{h+2} - \mathbf{E}\mathbf{Y}_{h+2})^T]. \quad (2.5)$$

La relation (2.4), peut être réécrite comme

$$\mathbf{Z}_k - k\mathbf{E}\mathbf{Y}_N \approx \mathbf{N}(0, k\mathbf{D}), \quad \mathbf{Z}_{N-k}^* - (N-k)\mathbf{E}\mathbf{Y}_N \approx \mathbf{N}(0, (N-k)\mathbf{D}).$$

En désignant par $\{B_D(t), t \geq 0\}$ le mouvement brownien p^2 -dimensionnel avec matrice de covariance \mathbf{D} . On a

$$\mathbf{Z}_k - k\mathbf{E}\mathbf{Y}_N \approx B_D(k), \quad \mathbf{Z}_{N-k}^* - (N-k)\mathbf{E}\mathbf{Y}_N \approx B_D(N) - B_D(k). \quad (2.6)$$

Par (2.6) et sous H_0 , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\mathbf{Z}_k - \frac{1}{N-k}\mathbf{Z}_{N-k}^* &\approx \frac{1}{k}B_D(k) - \frac{1}{N-k}(B_D(N) - B_D(k)) \\ &= \frac{1}{k(N-k)} [NB_D(k) - kB_D(k) - kB_D(N) + kB_D(k)] \\ &= \frac{N}{k(N-k)} \left[B_D(k) - \frac{k}{N}B_D(N) \right]. \end{aligned}$$

On note

$$U_N = \frac{k(N-k)}{N} \left(\frac{1}{k}\mathbf{Z}_k - \frac{1}{N-k}\mathbf{Z}_{N-k}^* \right).$$

Le calcul ci-dessus montre que

$$U_N(k) \approx B_D(k) - \frac{k}{N}B_D(N).$$

En comparant les covariances, on voit que

$$\frac{1}{N} [B_D(k) - \frac{k}{N}B_D(N)]^T D^{-1} \frac{1}{N} [B_D(k) - \frac{k}{N}B_D(N)], \quad 1 \leq k \leq N.$$

a la même distribution que

$$\sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m^2(k < N), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (2.7)$$

Où les $\mathbf{B}_m(\cdot)$ sont des ponts browniens standards indépendants sur $[0, 1]$, Par conséquence, toutes les fonctions de

$$G_N(k) = \frac{1}{N}U_N(k)^T D^{-1}U_N(k), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (2.8)$$

peuvent être approchées par la fonction correspondante de (2.7).

La théorie asymptotique pour le processus $\sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m^2(u)$, $u \in [0, 1]$ est bien connu, voir [5,6] et [12].

Pour la mise en œuvre du test, on doit estimer la matrice \mathbf{D} dans (2.5). L'estimation de la matrice de covariance asymptotique est l'un des sujets les plus étudiés dans l'analyse et l'économétrie des séries chronologiques.

On note

$$\hat{\gamma}_h(k) = \frac{1}{k} \sum_{1 \leq i \leq k-h} \left(\hat{\mathbf{Y}}_i - \frac{1}{k} \sum_{1 \leq i \leq k} \hat{\mathbf{Y}}_i \right) \left(\hat{\mathbf{Y}}_{i+h} - \frac{1}{k} \sum_{1 \leq i \leq k} \hat{\mathbf{Y}}_i \right)$$

et

$$\hat{\gamma}_h^*(N-k) = \frac{1}{N-k} \sum_{1 \leq i \leq N-h} \left(\hat{\mathbf{Y}}_i - \frac{1}{N-k} \sum_{1 \leq i \leq N-h} \hat{\mathbf{Y}}_i \right) \left(\hat{\mathbf{Y}}_{i+h} - \frac{1}{N-k} \sum_{1 \leq i \leq N-h} \hat{\mathbf{Y}}_i \right)$$

Les matrices d'autocovariance sont calculées respectivement, à partir des k premières et des $N-k$ dernières observations. Les estimateurs de Bartlett correspondant à \mathbf{D} sont alors

$$\hat{\mathbf{D}}_k = \hat{\gamma}_0(k) + 2 \sum_{1 \leq h \leq q} \left(1 - \frac{h}{q+1} \right) \hat{\mathbf{Y}}_h(k) \quad (2.9)$$

et

$$\hat{\mathbf{D}}_{N-k}^* = \hat{\gamma}_0^*(N-k) + 2 \sum_{1 \leq h \leq q} \left(1 - \frac{h}{q+1} \right) \hat{\mathbf{Y}}_h^*(N-k). \quad (2.10)$$

La suite $G_N(k)$, (2.8) est approchée par la suite

$$\hat{G}_N(k) = \frac{1}{N} \hat{U}_N(k)^T \left[\frac{k}{N} \hat{\mathbf{D}}_k + \left(1 - \frac{k}{N} \right) \hat{\mathbf{D}}_{N-k}^* \right]^{-1} \hat{U}_N(k) \quad (2.11)$$

Où

$$\hat{U}_N(k) = \frac{k(N-k)}{N} \left(\frac{1}{N} \hat{\mathbf{Z}}_k - \frac{1}{N-k} \hat{\mathbf{Z}}_{N-k}^* \right).$$

On définit la valeur critique $c(\alpha, d)$ par $\mathbb{P}(K_d > c(\alpha, d)) = \alpha$, où $K_d = \int_0^1 \sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m^2(u) du$ et

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{G}_N(k). \quad (2.12)$$

Le test est rejeté si $\hat{I}_N > c(\alpha, p^2)$, la valeur critique $c(\alpha, d)$ peut être calculée en utilisant une formule analytique dérivée par Kiefer [12].

On concluons cette section avec un résumé de la mise en œuvre pratique de la procédure de test :

1. Trouvez p assez grand telle que $\sum_{j=1}^p \hat{\lambda}_j / \sum_{j=1}^N \hat{\lambda}_j > 0.9$.
2. Calculer \hat{I}_N (2.12)
3. Choisir un niveau de signification α et trouver la valeur critique $c(\alpha, d)$ avec $d = p^2$ de la table en [12].
4. Rejeter H_0 si $\hat{I}_N > c(\alpha, p^2)$.

Dans l'étape (1), p ne peut pas être trop grand car il est alors difficile d'estimer D . Dans l'étape (2), de bons résultats sont obtenus si en (2.11) $\frac{k}{N} \hat{\mathbf{D}}_k + (1 - \frac{k}{N}) \hat{\mathbf{D}}_{N-k}^*$ est remplacée par $\hat{\mathbf{D}}_N$. Les calculs sont alors beaucoup plus rapide.

2.3 Résultats asymptotiques

Afin de développer une théorie asymptotique, on doit vérifier que la statistique du test ne change pas si les composantes principales $\hat{\varphi}_j$ sont remplacées par $\hat{c}_j \hat{\varphi}_j$. Dans ce but, il est commode d'introduire une matrice \mathcal{C}_p diagonale ($p \times p$) et une matrice M diagonale ($p^2 \times p^2$) définie par

$$\mathcal{C}_p = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 & & & \\ & \hat{c}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \hat{c}_p \end{pmatrix}, \quad M = \mathcal{C}_p \otimes \mathcal{C}_p$$

Où \otimes est le produit de Kronecker, Par exemple, si $p = 2$

$$M = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \hat{c}_1 & & & \\ & \hat{c}_1 \hat{c}_2 & & \\ & & \hat{c}_2 \hat{c}_1 & \\ & & & \hat{c}_2 \hat{c}_2 \end{pmatrix}.$$

Le remplacement de $\hat{\varphi}_j$ par $\hat{c}_j \hat{\varphi}_j$ implique le remplacement des vecteurs $\hat{\mathbf{Y}}_i$ par $M \hat{\mathbf{Y}}_i$, qui à son tour implique le remplacement de $\hat{U}_N(k)$ par $M \hat{U}_N(k)$, tandis que $\hat{\mathbf{D}}_k$ et $\hat{\mathbf{D}}_{N-k}^*$ sont respectivement remplacées par $M \hat{\mathbf{D}}_k M^T$ et $M \hat{\mathbf{D}}_{N-k}^* M^T$. Comme M^2 est une matrice identité ($p^2 \times p^2$), il en résulte que les $\hat{G}_N(k)$ sont invariantes aux signes de $\hat{\varphi}_j$. On peut alors travailler avec les quantités $\hat{c}_j \langle X_i, \hat{\varphi}_j \rangle$ à la place des $\langle X_i, \hat{\varphi}_j \rangle$.

On définit le processus

$$\hat{Q}_N(u) = \hat{G}_N([Nu]), \quad u \in [0, 1].$$

Faisant l'hypothèse suivante sur $q = q(N)$.

Hypothèse 3. Soit $q(N)$ une suite non décroissante telle que

$$\sup_{k>0} \frac{q(2^{k+1})}{q(2^k)} < \infty$$

et

$$q(N) \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad q(N)(\log N)^4 = O(N).$$

Théorème 2.3.1. *Sous les Hypothèses 1, 2 et 3*

$\hat{Q}_N(u) \rightarrow \sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m(u)$ dans $D([0, 1])$, où $D([0, 1])$ est l'espace des fonctions continues à droite en tout point, $x \in [0, 1]$, et $\{\mathbf{B}_m(u), u \in [0, 1], 1 \leq m \leq p^2\}$ sont des ponts browniens iid.

La preuve du théorème 2.3.1 est divisé en deux étapes. Dans la première étape, la proposition 2.5.1 montre la convergence faible du processus $Q_N(u) = G_N([Nu])$, $u \in [0, 1]$, et G_N est défini par (2.8).

Dans la deuxième étape, la proposition 2.5.2 montre que l'effet asymptotique des estimateurs des éléments propres est négligeable. La deuxième étape est plus délicate, repose sur la structure particulière du processus Q_N , et sur une application de l'inégalité de Mensov.

Proposition 2.3.1. *Sous l'hypothèse 1*

$Q_N(u) \longrightarrow \sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m(u)$ dans $D([0, 1])$,
où $Q_N(u) = G_N([Nu])$, $u \in [0, 1]$.

Proposition 2.3.2. *Sous les Hypothèses 1 et 2*

$$N^{-\frac{1}{2}} \max_{2 \leq k \leq N} \left\| M\hat{U}_N(k) - U_N(k) \right\|^p \xrightarrow{P} 0.$$

Preuve du théorème 2.3.1 On a $Q_N(u) = G_N([Nu])$, $u \in [0, 1]$ où G_N est défini par (2.8). Par la proposition 2.3.1

$Q_N(u) \longrightarrow \sum_{1 \leq m \leq p^2} \mathbf{B}_m(u)$ dans $D([0, 1])$, Pour compléter la preuve, on doit montrer que

$$\max_{2 \leq k \leq N} |\hat{G}_N(k) - G_N(k)| \xrightarrow{P} 0. \quad (2.13)$$

La relation (2.13) est montrée dès qu'on vérifie que

$$N^{-\frac{1}{2}} \max_{2 \leq k \leq N} \left\| M\hat{U}_N(k) - U_N(k) \right\|^p \xrightarrow{P} 0. \quad (2.14)$$

et

$$\max_{2 \leq k \leq N} \left\| \left[\frac{k}{N} \hat{\mathbf{D}}_k + \left(1 - \frac{k}{N}\right) \hat{\mathbf{D}}_{N-k}^* \right]^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \right\|^p \xrightarrow{P} 0. \quad (2.15)$$

Pour prouver (2.15), on utilise le théorème A.1 et la remarque A.1 de [3], qui impliquent que sous l'hypothèse 3, $\hat{\mathbf{D}}_k$ et $\hat{\mathbf{D}}_{N-k}^*$ convergent presque sûrement vers \mathbf{D} . Rappelons que si la suite ξ_n converge p.s vers zéro, alors

$\max_{1 \leq n \leq N} |\xi_n| \xrightarrow{P} 0$ lorsque $N \longrightarrow \infty$. Donc

$$\sup_{-1 < u < 1} \|u\hat{\mathbf{D}}_{[Nu]} - u\mathbf{D}\| \xrightarrow{P} 0$$

et

$$\sup_{-1 < u < 1} \|(1-u)\hat{\mathbf{D}}_{N-[Nu]}^* - (1-u)\mathbf{D}\| \xrightarrow{P} 0$$

et par la suite

$$\sup_{-1 < u < 1} \|(1-u)\hat{\mathbf{D}}_{[Nu]} + (1-u)\hat{\mathbf{D}}_{N-[Nu]}^* - \mathbf{D}\| \xrightarrow{P} 0$$

Comme l'inverse est une application continue, (2.15) est prouvée.

Preuve de la proposition 2.3.1

La proposition 2.3.1 résulte de la proposition 2.3.3 parce que, par (2.16)

$$Q_N(u) \longrightarrow [B_D(u) - uB_D(1)]^T \mathbf{D}^{-1} [B_D(u) - uB_D(1)] \text{ dans } D([0, 1])$$

un calcul direct montre que le processus $\{ D^{-\frac{1}{2}}[B_D(u) - uB_D(1)], u \in [0, 1] \}$ et $\{ [\mathbf{B}_1(u), \dots, \mathbf{B}_{p^2}(u)]^T, u \in [0, 1] \}$ ont la même fonction de covariance. On rappelle que B_D est un processus gaussien tel que

$$EB_D(u) = 0 \text{ et } E[B_D(u)B_D^T(s)] = \mathbf{D} \min(u, s), u, s \in [0, 1].$$

Proposition 2.3.3. *Si l'hypothèse 1 est vérifiée, alors*

$$N^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Z}_{[Nu]} - E\mathbf{Z}_{[Nu]}) \longrightarrow B_D(u), \text{ in } D^{p^2}([0, 1]). \quad (2.16)$$

Preuve. Notons $Z_k(j, \ell) = \sum_{2 \leq i \leq k} \mathbf{Y}_i(j, \ell)$, pour prouver cette proposition, il suffit d'établir la convergence dans $D([0, 1])$ de toutes les combinaisons linéaires, à savoir

$$N^{-\frac{1}{2}} \sum_{j, \ell=1}^p \theta(j, \ell) (Z_{[Nu]}(j, \ell) - E\mathbf{Z}_{[Nu]}(j, \ell)) \xrightarrow{d} W_{\theta, D}(u)$$

où $\{ W_{\theta, D}(u), u \in [0, 1] \}$ est un mouvement brownien de variance

$$E[W_{\theta, D}^2] = u \sum_{j, \ell=1}^p \sum_{j', \ell'=1}^p \theta(j, \ell) \theta(j', \ell') D(j, \ell, j', \ell').$$

on se concentre sur un seul élément, i.e. on montre que

$$N^{-\frac{1}{2}} \sum_{2 \leq i \leq [Nu]} [Y_i(j, \ell) - EY_i(j, \ell)] \xrightarrow{d} W_{D(i, j)}(u).$$

$(W_{D(i,j)}(u))$ est définie en posant $\theta(i', j') = \delta_{i'}\delta_{j'}$, où δ est le symbole de Kronecker). On doit vérifier que la suite $Y_i(j, \ell)$ est stationnaire et ergodique et que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |Cov(Y_0(j, \ell), Y_i(j, \ell))| < \infty. \quad (2.17)$$

La relation (2.17) est établie par le lemme 2.3.1. L'ergodicité résulte de la représentation

$$\begin{aligned} Y_i(j, \ell) &= \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle [\langle \rho X_{i-1}, \varphi_\ell \rangle + \langle \varepsilon_i, \varphi_\ell \rangle] \\ &= \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle X_{i-1}, \rho^T \varphi_\ell \rangle + \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_i, \rho^T \varphi_\ell \rangle \end{aligned}$$

Lemme 2.3.1. *Sous l'hypothèse 1, les $Y_i(j, \ell)$ définis par (2.3) satisfont*

$$\sum_{1 \leq i < \infty} |Cov(Y_1(j, \ell), Y_i(m, n))| < \infty. \quad (2.18)$$

Preuve. Puisque

$$\begin{aligned} Y_i(j, \ell) &= \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle X_{i-1}, \rho^T \varphi_\ell \rangle + \langle X_{i-1}, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_i, \rho^T \varphi_\ell \rangle \\ Cov(Y_1(j, \ell), Y_i(m, n)) &= C_1(i) + C_2(i) + C_3(i) + C_4(i) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} C_1(i) &= Cov(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \rho^T \varphi_\ell \rangle, \langle X_{i-1}, \varphi_m \rangle \langle X_{i-1}, \rho^T \varphi_n \rangle) \\ C_2(i) &= Cov(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle X_0, \rho^T \varphi_\ell \rangle, \langle X_{i-1}, \varphi_m \rangle \langle \varepsilon_i, \rho^T \varphi_n \rangle) \\ C_3(i) &= Cov(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_1, \rho^T \varphi_\ell \rangle, \langle X_{i-1}, \varphi_m \rangle \langle X_{i-1}, \rho^T \varphi_n \rangle) \\ C_4(i) &= Cov(\langle X_0, \varphi_j \rangle \langle \varepsilon_1, \rho^T \varphi_\ell \rangle, \langle X_{i-1}, \varphi_m \rangle \langle \varepsilon_i, \rho^T \varphi_n \rangle) \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $C_2(i) = C_4(i) = 0$, pour $i > 1$, il reste à trouver la convergence de la limite absolue $C_1(i)$ et $C_3(i)$. On se concentre sur le terme $C_1(i)$, l'argument pour $C_3(i)$ étant similaire. On considère les éléments arbitraires $x, y, u, v \in L^2([0, 1])$.

Puisque $X_k = \rho^k X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \rho^j \varepsilon_{k-j}$,

$$Cov(\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle, \langle X_k, u \rangle \langle X_k, v \rangle) = Cov(\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle, \langle \rho^k X_0, u \rangle \langle \rho^k X_0, v \rangle)$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} |Cov(\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle, \langle X_k, u \rangle \langle X_k, v \rangle)| &\leq E|\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle, \langle \rho^k X_0, u \rangle \langle \rho^k X_0, v \rangle| \\ &\quad + E|\langle X_0, x \rangle \langle X_0, y \rangle| E|\langle X_k, x \rangle \langle X_k, y \rangle| \\ &\leq \|\rho\|^{2k} \{E\|X_0\|^4 + [E\|X_0\|^2]^2\} \|x\| \|y\| \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Donc

$$|C_1(i)| \leq \|\rho\|^{2(i-1)} \{E\|X_0\|^4 + [E\|X_0\|^2]^2\} \|\varphi_j\| \|\varphi_\ell\| \|\rho^T \varphi_m\| \|\rho^T \varphi_n\| \leq 2\|\rho\|^{2i} E\|X_0\|^4.$$

Preuve de la proposition 2.3.2

On note $r(t, s) = E[X_1(t)X_2(s)]$ et $\hat{\Delta}(j, \ell) = \int \int r(t, s) \hat{u}(t, s) dt ds$.

où

$$\hat{u}(t, s) = \varphi_j(t) \varphi_\ell(s) - \hat{c}_j \hat{\varphi}_j(t) \hat{c}_\ell \hat{\varphi}_\ell(s) \quad , \quad 0 < s, t < 1. \quad (2.19)$$

Les composantes de $M\hat{U}_N(k) - U_N(k)$ correspondantes au produit du jème et du ℓ ème élément sont égales à

$$\frac{k(N-k)}{N} \left\{ \frac{1}{k} \left[\hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_k(j, \ell) - Z_k(j, \ell) - k \hat{\Delta}(j, \ell) \right] - \frac{1}{N-k} \left[\hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_{N-k}^*(j, \ell) - Z_{N-k}^*(j, \ell) - (N-k) \hat{\Delta}(j, \ell) \right] \right\}$$

On vérifie que

$$N^{-\frac{1}{2}} \max_{2 \leq k \leq N} \left[\hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_k(j, \ell) - Z_k(j, \ell) - k \hat{\Delta}(j, \ell) \right] \xrightarrow{P} 0. \quad (2.20)$$

et

$$N^{-\frac{1}{2}} \max_{2 \leq k \leq N} \left[\hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_{N-k}^*(j, \ell) - Z_{N-k}^*(j, \ell) - (N-k) \hat{\Delta}(j, \ell) \right] \xrightarrow{P} 0.$$

Comme les deux relations ci-dessus sont vérifiées, on montre que (2.20) est vérifiée.

On note que

$$Z_k(j, \ell) = \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} X_{i-1}(t) X_i(s) \varphi_j(t) \varphi_\ell(s) dt ds.$$

et

$$\hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_k(j, \ell) = \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} X_{i-1}(t) X_i(s) \hat{c}_j \hat{\varphi}_j(t) \hat{c}_\ell \hat{\varphi}_\ell(s) dt ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_k(j, \ell) - \hat{c}_j \hat{c}_\ell \hat{Z}_k(j, \ell) &= \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \varphi_j(t) \varphi_\ell(s) dt ds \\ &\quad - \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \hat{c}_j \hat{\varphi}_j(t) \hat{c}_\ell \hat{\varphi}_\ell(s) dt ds \\ &\quad + (k-1) \int \int r(t, s) [\varphi_j(t) \varphi_\ell(s) - \hat{c}_j \hat{\varphi}_j(t) \hat{c}_\ell \hat{\varphi}_\ell(s)] dt ds. \\ &= \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \hat{u}(t, s) dt ds + (k-1) \hat{\Delta}(j, \ell). \end{aligned}$$

Comme $\hat{\Delta}(j, \ell) = O_p(1)$, pour prouver (2.20), il reste donc à montrer que

$$\max_{2 \leq k \leq N} \left| \int \int \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \hat{u}(t, s) dt ds \right| = O_p(N^{\frac{1}{2}}). \quad (2.21)$$

Puisque

$$\int \int \left| \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \right| |\hat{u}(t, s)| dt ds \leq \left(\int \int \left| \sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t) X_i(s) - r(t, s)] \right|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int |\hat{u}(t, s)|^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

(2.21) résulte du lemme 2.3.2 et 2.3.3.

Lemme 2.3.2. *La fonction $\hat{u} \in L^2([0, 1]^2)$ défini par (2.19) satisfait*

$$\|\hat{u}\| = \left(\int \int [\hat{u}(t, s)]^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} = O_p(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Preuve. Puisque

$$|\varphi_j(t)\varphi_\ell(s) - \hat{c}_j\hat{\varphi}_j(t)\hat{c}_\ell\hat{\varphi}_\ell(s)|^2 \leq 2\varphi_j^2(t)[\varphi_\ell(s) - \hat{c}_j\hat{\varphi}_\ell(s)]^2 + 2\varphi_\ell^2(s)[\varphi_j(t) - \hat{c}_\ell\hat{\varphi}_\ell(t)]^2.$$

et φ_j et φ_ℓ ont une norme unitaire dans $L^2([0, 1])$,

$$\|\hat{u}\|^2 \leq 2\{\|\varphi_\ell - \hat{c}_\ell\hat{\varphi}_\ell\|^2 + \|\varphi_j - \hat{c}_j\hat{\varphi}_j\|^2\}.$$

Donc, par (2.2), il existe une constante K telle que $\mathbb{E}\|\hat{u}\|^2 \leq KN^{-1}$.

Lemme 2.3.3. *Sous l'hypothèse 1*

$$N^{-1} \max_{2 \leq k \leq N} \left(\int \int \left[\sum_{2 \leq i \leq k} [X_{i-1}(t)X_i(s) - r(t, s)] \right]^2 dt ds \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{P} 0.$$

Preuve. D'après le théorème 3.1 de [3]

$$X_k = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{k-j},$$

où la série converge presque sûrement dans L^2 . Pour $c > 0$ à déterminer plus tard, on introduit la série tronquée

$$X_{k,N} = \sum_{j=0}^{c \log N} \rho^j \varepsilon_{k-j}. \quad (2.22)$$

On va utiliser la décomposition

$$\begin{aligned} X_{i-1}(t)X_i(s) - r(t, s) &= X_{i-1}(t)X_i(s) - X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s) + [X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s) - r_N(t, s)] \\ &\quad + [r_N(t, s) - r(t, s)] \end{aligned}$$

où

$$r_N(t, s) = \mathbb{E}[X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s)].$$

Introduisons également les fonctions

$$V_{i,N}(t, s) = X_{i-1}(t)X_i(s) - X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s). \quad (2.23)$$

et

$$\mathbf{U}_{i,N}(t, s) = X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s). \quad (2.24)$$

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que

$$N^{-1}\mathbf{E} \max_{2 \leq i \leq N} \left\| \sum_{2 \leq i \leq k} V_{i,N} \right\| \longrightarrow 0. \quad (2.25)$$

$$N^{-1}\mathbf{E} \max_{2 \leq i \leq N} \left\| \sum_{2 \leq i \leq k} [\mathbf{U}_{i,N} - r_N] \right\| \longrightarrow 0. \quad (2.26)$$

et

$$\|r_N - r\| \longrightarrow 0. \quad (2.27)$$

Dans (2.25), (2.26) et (2.27), la norme est prise dans l'espace $L^2([0, 1]^2)$.

Par le lemme 2.3.3

$$\mathbf{E} \max_{2 \leq i \leq N} \left\| \sum_{2 \leq i \leq k} V_{i,N} \right\| \leq KN^{2-k}.$$

Pour une certaine K , toute $k > 0$ et un c suffisamment grande, on trouve (2.25). Les relations (2.26) et (2.27) découlent du lemmes 2.3.4 et 2.3.5.

Lemme 2.3.4. *Pour $c > 0$, on définit $X_{k,N} = X_{k,N,c}$ par (2.22). Considérons la fonction $V_{i,N}(t, s)$ défini par (2.23). Alors, pour toute $k > 0$, il existe un c assez grand tel que*

$$\mathbf{E}\|V_{i,N}\| = \mathbf{E} \left\{ \int \int V_{i,N}^2(t, s) dt ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leq KN^{-k}.$$

pour certaine constante K .

Preuve. On note que

$$\begin{aligned}
\|V_{i,N}\|^2 &= \int \int [X_{i-1}(t)X_i(s) - X_{i-1,N}(t)X_{i,N}(s)]^2 dt ds \\
&= \int \int [X_{i-1}(t)(X_i(s) - X_{i,N}(s)) + X_{i,N}(s)(X_{i-1}(t) - X_{i-1,N}(t))]^2 dt ds \\
&\leq 2 \left\{ \int X_{i-1}^2(t) dt \int (X_i(s) - X_{i,N}(s))^2 ds + \int X_{i,N}^2(s) ds \int (X_{i-1}(t) - X_{i-1,N}(t))^2 dt \right\} \\
&= 2 \{ \|X_{i-1}\|^2 \|X_i - X_{i,N}\|^2 + \|X_{i,N}\|^2 \|X_{i-1} - X_{i-1,N}\|^2 \}
\end{aligned}$$

On définit $r > 0$ tel que $\|\rho\| = e^{-r}$. Alors

$$\mathbf{E}\|X_k - X_{k,N}\| \leq \sum_{j > c \log N} \|\rho\|^j \mathbf{E}\|\varepsilon_0\| \leq (1 - e^{-r})^{-1} N^{-cr} \mathbf{E}\|\varepsilon_0\|,$$

d'où le résultat.

Lemme 2.3.5. *Les fonctions $\mathbf{U}_{i,N} \in L^2([0, 1]^2)$ définies par (2.24) satisfont*

$$\mathbf{E} \max_{2 \leq k \leq N} \left\| \sum_{2 \leq i \leq k} [\mathbf{U}_{i,N} - \mathbf{E}\mathbf{U}_{i,N}] \right\| \leq K N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{3}{2}}.$$

où K est une constante et la norme est dans l'espace $L^2([0, 1]^2)$.

Preuve. On a

$$\mathbf{U}_{i,N}^* = \mathbf{U}_{i,N} - \mathbf{E}\mathbf{U}_{i,N}.$$

Soit $m = c \log N$ et supposons sans perte de généralité que m est un nombre entier.

On va travailler avec la décomposition

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \mathbf{U}_{i,N}^* = S_1(k) + S_2(k) + \dots + S_m(k).$$

L'idée est que $S_1(k)$ est la somme de (disponible) $\mathbf{U}_{1,N}^*, \mathbf{U}_{1+m,N}^*, \dots, S_2(k)$ de $\mathbf{U}_{2,N}^*, \mathbf{U}_{2+m,N}^*, \dots$ etc. Formellement, pour $1 \leq k \leq N$ et $1 \leq j \leq m$, on définit

$$S_j(k) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{\lfloor k/m \rfloor} \mathbf{U}_{(\ell-1)m+j,N}^* + \mathbf{U}_{m\lfloor k/m \rfloor+j,N}^*, & \text{si } k/m \text{ n'est pas un entier;} \\ \sum_{\ell=1}^{k/m} \mathbf{U}_{(\ell-1)m+j,N}^*, & \text{si } k/m \text{ est un entier.} \end{cases} \quad (2.28)$$

Par (2.22) et (2.24), pour tout j fixe, $S_j(k)$ est une somme de fonctions aléatoires iid dans $L^2([0, 1]^2)$.

Puisque

$$\left\| \sum_{1 \leq i \leq k} \mathbf{U}_{i,N}^* \right\| \leq \sum_{j=1}^m \|S_j(k)\|$$

et

$$\left\| \sum_{1 \leq i \leq k} \mathbf{U}_{i,N}^* \right\|^2 \leq m \sum_{j=1}^m \|S_j(k)\|^2. \quad (2.29)$$

Par (2.28) et le lemme 2.4.6, on obtient $\mathbb{E} \left\| \sum_{1 \leq i \leq k} \mathbf{U}_{i,N}^* \right\| \leq cmk$ où C est une constante qui ne dépend pas de N . Puisque $\mathbf{U}_{i,N}^*$ est une suite stationnaire, ce ci implique que pour tout $K < L$,

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{K \leq i \leq L} \mathbf{U}_{i,N}^* \right\|^2 \leq Cm(L - K). \quad (2.30)$$

La relation (2.30), ainsi que l'inégalité Mensov (lemme 2.3.7) impliquent que

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq N} \left\| \sum_{1 \leq i \leq k} \mathbf{U}_{i,N}^* \right\|^2 \leq Cm(\log N)^2 N.$$

On rappelle que $m = O(\log N)$.

Lemme 2.3.6. *Sous les notations de $r(t, s) = \mathbb{E}[X_{i-1}(t)X_i(s)]$ et $r_N(t, s)$, on a*

$$\|r - r_N\|^2 = \int \int |r(t, s) - r_N(t, s)|^2 dt ds = O(N^{-2rc}).$$

où $r > 0$ est défini par $\|\rho\| = e^{-r}$.

Preuve. Pour faciliter la notation, on pose $m = c \log N$ et on observe que

$$r_N(t, s) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^m \rho^j \varepsilon_{i-1-j}(t) \sum_{\ell=0}^m \rho^\ell \varepsilon_{i-1-\ell}(s) \right] = \sum_{j=0}^m \mathbb{E}[\rho^j \varepsilon_{i-1-j}(t) \rho^{j+1} \varepsilon_{i-1-j}(s)].$$

En utilisant une extension analogue de $r(t, s)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|r - r_N\|^2 &= \int \int \left| \sum_{j>m} \mathbb{E}[\rho^j \varepsilon_{-j}(t) \rho^{j+1} \varepsilon_{-j}(s)] \right|^2 dt ds \\ &= \sum_{j, \ell > m} \mathbb{E} \int \int [\rho^j \varepsilon_{-j}(t) \rho^{j+1} \varepsilon_{-j}(s) \rho^\ell \varepsilon_{-\ell}(t) \rho^{\ell+1} \varepsilon_{-\ell}(s)] dt ds \\ &= \sum_{j, \ell > m} \mathbb{E} \left[\int \rho^j \varepsilon_{-j}(t) \rho^\ell \varepsilon_{-\ell}(t) dt \int \rho^{j+1} \varepsilon_{-j}(s) \rho^{\ell+1} \varepsilon_{-\ell}(s) ds \right] \\ &\leq \sum_{j, \ell > m} \mathbb{E}[\|\rho^j \varepsilon_{-j}\| \|\rho^\ell \varepsilon_{-\ell}\| \|\rho^{j+1} \varepsilon_{-j}\| \|\rho^{\ell+1} \varepsilon_{-\ell}\|] \\ &\leq \sum_{j, \ell > m} \|\rho\|^{2j+1} \|\rho\|^{2\ell+1} \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^4 \leq K \|\rho\|^{4m}. \end{aligned}$$

Les deux lemmes suivants sont utilisés dans la démonstration du lemme 2.3.4.

Lemme 2.3.7. *Les fonctions $S_j(k) \in L^2([0, 1]^2)$ défini par (2.28) satisfont*

$$\mathbb{E}\|S_j(k)\| \leq Ck/m, \quad 1 \leq j \leq m.$$

où C est une constante qui ne dépend pas de N .

Preuve. Supposons $k/m = n$ est un entier. Par stationnarité du $X_{i,N}$

$$\mathbb{E}\|S_j(k)\|^2 = \mathbb{E} \int \int \left| \sum_{\ell=1}^n \mathbf{U}_{(\ell-1)m+j, N}^*(t, s) \right|^2 dt ds = \mathbb{E} \int \int \left| \sum_{\ell=1}^n \mathbf{U}_{(\ell-1)m, N}^*(t, s) \right|^2 dt ds.$$

Ne dépend pas de j . Par construction, les $\mathbf{U}_{(\ell-1)m, N}^*(t, s)$ sont de moyenne nulle et indépendantes de $\mathbf{U}_{(\ell'-1)m, N}^*(t, s)$, si $\ell' \neq \ell$. Donc

$$\mathbb{E}\|S_j(k)\|^2 = \int \int \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}[\mathbf{U}_{(\ell-1)m,N}^{*2}(t,s)] dt ds = n \int \int \mathbb{E}[\mathbf{U}_{1,N}^{*2}(t,s)] dt ds.$$

Il reste donc à montrer que $\int \int \mathbb{E}[\mathbf{U}_{1,N}^{*2}(t,s)] dt ds$ est borné par une constante qui ne dépend pas de N .

On note que

$$\begin{aligned} \int \int \mathbb{E}[\mathbf{U}_{1,N}^{*2}(t,s)] dt ds &\leq \int \int \mathbb{E}[X_{0,N}^2(t)X_{1,N}^2(s)] dt ds \\ &= \mathbb{E} \left(\int X_{0,N}^2(t) dt \right) \left(\int X_{1,N}^2(s) ds \right) \leq \mathbb{E} \left(\int X_{0,N}^2(t) dt \right)^2 = \mathbb{E}\|X_{0,N}\|^4. \end{aligned}$$

on pose $m = c \log N$, et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|X_{0,N}\|^4 &= \mathbb{E} \left\| \sum_{j=0}^m \rho^j \varepsilon_{-j} \right\|^4 \leq \mathbb{E} \left(\sum_{j=0}^m \|\rho\|^j \|\varepsilon_{-j}\| \right)^4 \\ &= \sum_{j_1=0}^m \sum_{j_2=0}^m \sum_{j_3=0}^m \sum_{j_4=0}^m \|\rho\|^{j_1} \|\rho\|^{j_2} \|\rho\|^{j_3} \|\rho\|^{j_4} \mathbb{E} [\|\varepsilon_{-j_1}\| \|\varepsilon_{-j_2}\| \|\varepsilon_{-j_3}\| \|\varepsilon_{-j_4}\|] \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^m \|\rho\|^j \right) \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^4 \leq (1 - \|\rho\|)^{-4} \mathbb{E}\|\varepsilon_0\|^4 \end{aligned}$$

Lemme 2.3.8. (*l'inégalité de Menshov*). Soient ξ_1, ξ_2, \dots des variables aléatoires à valeur dans un espace de Hilbert. Si pour tout $K < L$

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=K+1}^L \xi_i \right\|^2 \leq C(L - K).$$

Alors, pour tout b

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1+b}^{K+b} \xi_i \right\|^2 \leq C[\log(2N)]^2 N.$$

Preuve. La preuve est pratiquement la même que celle pour les variables aléatoires à valeurs réelles ξ_i , voir [16].

Chapitre 3

Simulation

Dans les simulations un élément fonctionnel i d'un échantillon se présente comme un ensemble fini de mesures : $\{y_{i1}, \dots, y_{in}\}$, pour cela on utilise le paquet "fda" du langage R développé par "James Ramsay et ses collaborateurs", le paquet est disponible sur le site "CRAN".

3.1 Des données brutes aux fonctions

3.1.1 Introduction

On se donne un ensemble $\{\phi_k\}$, $k = 1, \dots, K$ de fonctions de base. Une fonction "quelconque" $x(t)$ est alors définie ou approximée par une somme des fonctions bases multipliées par des coefficients. Plus explicitement on va avoir :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(t)$$

On a donc deux problèmes à résoudre :

- Le choix de l'ensemble ϕ_k , c-à-d. le choix de la base.
- Etant données des observations $y_i = x(t_i) + \varepsilon_i$, comment choisir les coefficients $\{c_k\}$.

3.1.2 Construction de la base

Le paquet "fda" permet de travailler avec huit types de bases mais dans ce travail nous intéressons à la base de fonctions splines, $x(t)$ est polynomiale par morceaux

avec conditions de continuité sur x et de ses dérivées aux jointures entre les morceaux, pour cela on utilise la fonction "create.bspline.basis".

Exemple :

```
data(refinery)
refinKnots <- c(seq(0,67,len=3),67,seq(67,193,len=3))
refineryBS <- create.bspline.basis(c(0,193),norder=4,
breaks=refinKnots)
par(cex=2)
plot(refineryBS,cex=2)
```

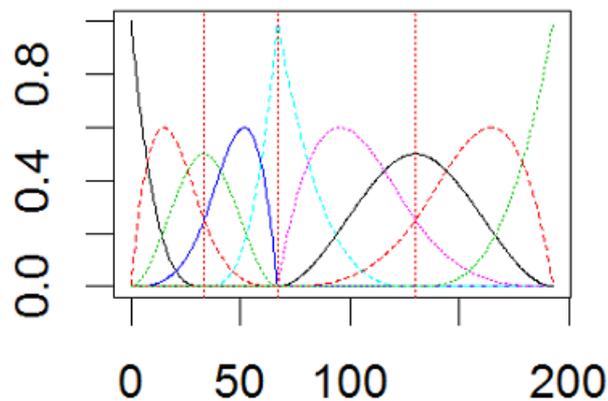


Figure 3.1 : create.bspline.basis.

3.1.3 Calcul des coefficients

Comme déjà vu les $x(t_i)$ ont la forme

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^k c_j \phi_j(t_i)$$

où les ϕ_j sont les fonctions de notre base, de façon classique pour un modèle linéaire, nous commençons par créer notre matrice d'expérience (design matrix), X , qui sera ici une matrice à k lignes (nombre des temps de mesure) et à m colonnes (nous avons m fonctions dans notre base), nous obtenons X en appliquant la fonction predict.

A ce stade l'élément $(X)_{ij}$ est $\phi_j(t_i)$, si nous écrivons c le vecteur (c_1, \dots, c_k) et x le vecteur $(x(t_1), \dots, x(t_k))$, notre prédiction s'écrit sous forme matricielle : $x = Xc$, l'estimateur des moindres carrés b de c est alors donné par : $b = (XX')^{-1}X'x$, où X' est la transposée de X .

3.1.4 Construction d'un objet fd

Maintenant que nous avons notre base, par la fonction `creat.bspline.basis`, et nos coefficients, nous n'avons plus qu'à les combiner pour obtenir notre première donnée fonctionnelle, on emploie la fonction `fd` pour effectuer cette opération :

Exemple

```
refineryX <- predict(refineryBS,refinery$Time)
dim(refineryX)
194 9
refineryB <- solve (crossprod (refineryX),crossprod(refineryX,refinery$Tray47))
refineryFD <- fd (refineryB,refineryBS)
plot(refineryFD)
lines(refineryFD,col=red)
```

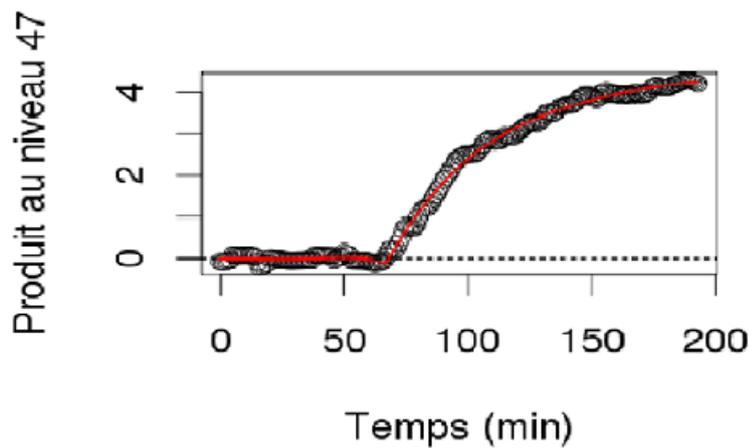


Figure 3.2 : refineryFD.

3.1.5 Application aux données de la température de Nottingham

Programme

```
not=as.vector(nottem)
mat=matrix(nottem,20,12)
mat
not=seq(1,240,12)
nottemBs<-
create.bspline.basis(c(1,240),norder=4,breaks=not)
par(cex=2)
plot(nottemBS,cex=2)
tim =c(1 :240)
nottemX <- predict(nottemBS,type="d",col="brown",n.ahead=12)
plot(nottemBS,nottemX)
graphe de la base spline
nottemB <- solve(crossprod(nottemX),crossprod(nottemX,not))
nottemFD <-fd(nottemB, nottemBS)
plot(nottemFD)
lissage spline des donnée
tim <- c(1 :240)
noeuds <- sort(seq(1,240,12))
nottemBS <-
create.bspline.basis(c(1,240),norder=4,breaks=noeuds)
nottem.fdPar <- fdPar(fdobj=nottemBS,Lfdobj=2,lambda=0.01)
produit <- not
nottem.smooth <-smooth.basis(argvals=tim,y=produit,fdParobj=nottem.fdPar)
lissage spline avec penalisation ( $\lambda$  choisi avec validation croisée)
```

3.2 Simulation d'un ARC(1)

La simulation d'un processus à termes dépendants demande indispensablement d'un modèle. Pour construire un ARC(1), on pourrait partir directement de la formule

$$X_i = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{i-j}$$

où ρ est un opérateur symétrique de norme plus petite que un et (ε_i) un H-bruit blanc.

Soit ρ un opérateur intégral symétrique de $C_{[0,1]}$ et tel que $\sup_{x,y} |r(x,y)| < 1$

$$(\rho\phi)(x) = \int_0^1 r(y,x)\phi(y)dy, \quad x \in [0,1], \quad \phi \in H$$

Nous avons préféré d'utiliser la relation de récurrence pour simuler un ARC(1), i.e.

$$X_i = \rho(X_{i+1}) + \varepsilon_i$$

En utilisant ce modèle, pour simuler $n+1$ observations d'un ARC(1), il nous faudra un X_0 pour commencer et une suite $\varepsilon_i = 1, n+1$.

Simulation d'un H-bruit blanc

On note $\{e_i(t) = \sqrt{2} \sin[(i-1/2)\pi t], j = 1, 2, \dots\}$ les fonctions propres du mouvement brownien.

Bruit blanc : un mouvement brownien sur l'intervalle $[0, 1]$

$$\varepsilon(t) = \sqrt{2} \sum_{j=0}^{\infty} Z_j^* \frac{\sin[(j - \frac{1}{2})\pi t]}{(j - \frac{1}{2})\pi}$$

Les (Z_j^*) sont des variables aléatoires iid $N(0,1)$.

Pour la simulation on doit approximer les sommes infinies par des sommes finies, et on utilise pour cela la fonction simul.wiener du package FAR.

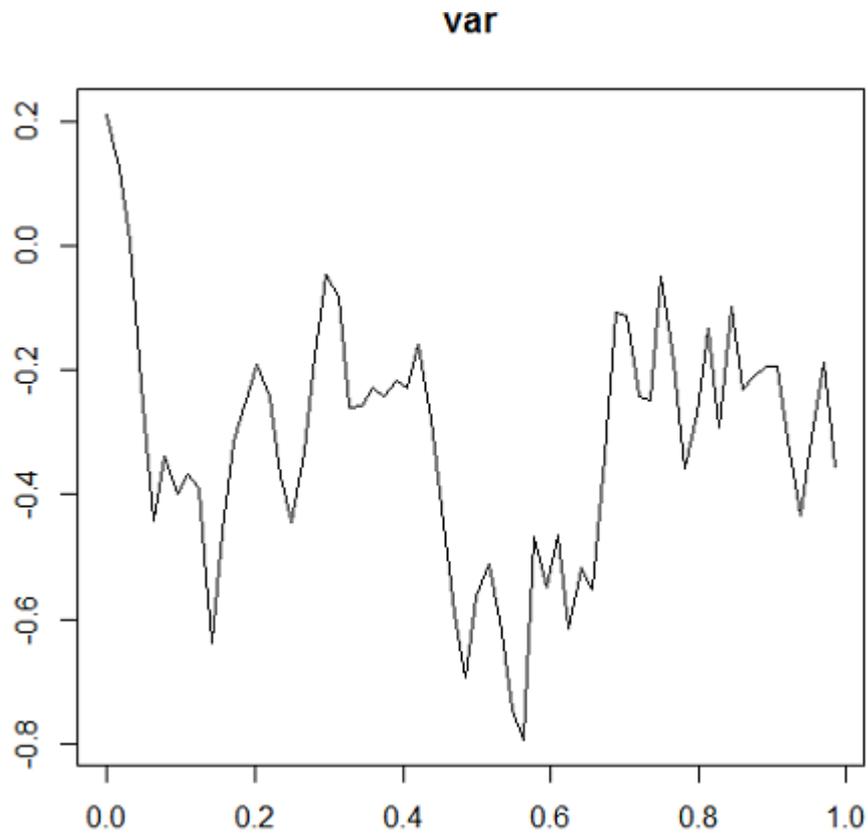


Figure 3.3 : Simulation d'un bruit blanc wienerien.

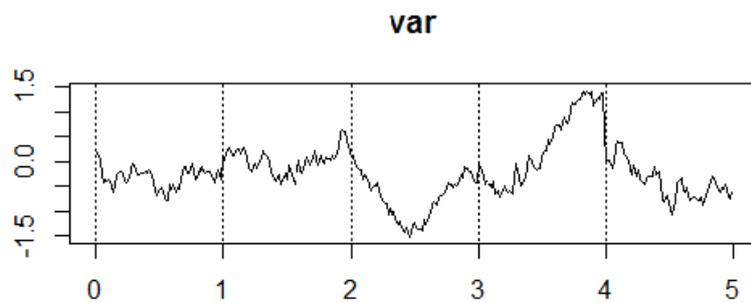


Figure 3.4 : Simulation de cinq trajectoires d'un processus wienerien.

Définition d'un opérateur ρ

Pour l'opérateur ρ on définit $\rho[e_i]$

$$\rho[e_i(s)] = \beta_i e_i(s)$$

où la suite (β_i) est une suite de réels convergente.

Valeur initiale de X_0

Pour la simulation d'un ARC(1) on prend comme valeur initiale la valeur $X_0 = 0$ ou $X_0 = \varepsilon_0$.

Soient $(X_i^j)_{j=0,1,\dots,n}$ les coordonnées de X_i par rapport (e_j) pour $i = 0, 1, \dots, n$. On a

$$X_{i+1}^j = \beta_j X_i^j + \varepsilon_{i+1}^j, \quad j = 1, \dots, M.$$

Dans R on utilise la fonction `simul.far.wiener` du package FAR pour simuler un tel processus ARC(1).

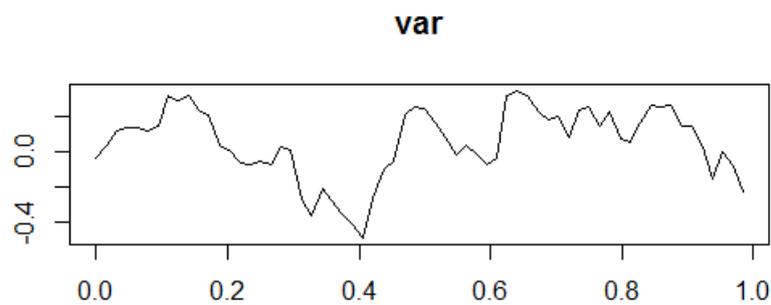


Figure 3.5 : Simulation d'une trajectoire d'un modèle ARC(1).

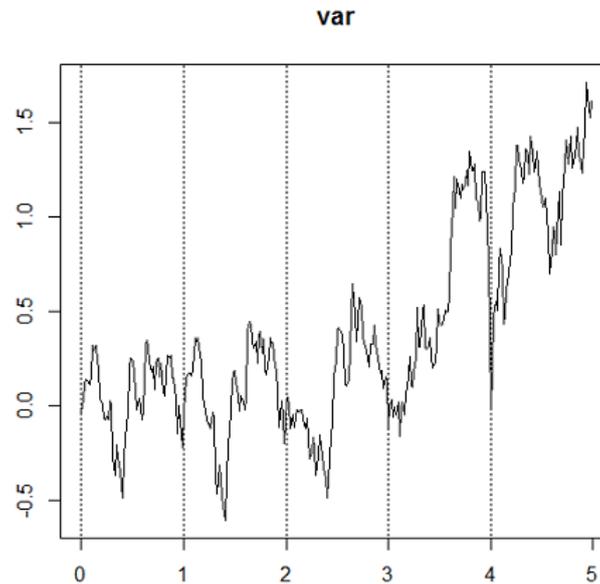


Figure 3.6 : Simulation de cinq trajectoires d'un modèle ARC(1).

3.2.1 Estimation d'un processus ARC(1)

Les vecteurs propres de Γ_{X_0} sont connus

Sachant que les vecteurs propres de Γ_{X_0} sont orthonormaux dans l'espace de Hilbert considéré, calculons les projections des observations $X_i : Y_{in} = \prod_{k_n}(X_i)$ sur les k_n premiers vecteurs propres. On peut calculer les opérateurs de covariance de Y_{in} :

$$C_n = \prod_{k_n} \Gamma_n \prod_{k_n}$$

$$D_n = \prod_{k_n} \Delta_n^* \prod_{k_n}$$

où

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, f \rangle X_i$$

$$\Delta_n(f) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_{i+1}, f \rangle X_i$$

Les vecteurs propres de Γ_{X_0} sont inconnus

Soit (ϕ_1, ϕ_2, \dots) une base orthonormale convenablement choisie pour représenter les observations (X_1, \dots, X_n) . Nous avons

$$X_i = \sum_{k=1}^{\infty} \langle X_i, \phi_k \rangle \phi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

On ne considérera qu'un nombre fini de termes de cette somme. En fait dans les applications on connaît toujours un nombre fini de données pour chaque observation (X_i) et deuxièmement dans les calculs numériques, on sera obligé de travailler sur les matrices d'ordre fini.

Soit m un entier suffisamment grand. Deux cas peuvent se présenter en pratique. On connaît $m \times n$ valeurs $\langle X_i, \phi_j \rangle$ où ϕ_j est un système de vecteurs orthonormaux et alors on observe en fait

$$X_i = \sum_{k=1}^m \langle X_i, \phi_k \rangle \phi_k, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

On connaît $m \times n$ valeurs X_i^j et on considère une approximation de la forme. On choisit un système convenable pour avoir la représentation (3.1).

Dans la suite on travaillera avec la forme (3.1) et dans le sous-espace engendré par les fonctions (ϕ_1, \dots, ϕ_m) .

Soient Γ_n, Δ_n les opérateurs de la covariance empirique de Y_0 et Y_0, Y_1 respectivement. La matrice correspondante de Γ_n est M_{Γ_n} de terme général

$$\begin{aligned} m_{lk}^a &= \langle \Gamma_n(\phi_k), \phi_l \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \phi_k \rangle \langle X_i, \phi_l \rangle, \quad 1 \leq l, k \leq m \end{aligned}$$

Soit $\vartheta_i = (\vartheta_i^1, \dots, \vartheta_i^m)$ un vecteur propre de la matrice M_{Γ_n} et μ_i la valeur propre correspondante. Soit φ_i la fonction

$$\varphi_i = \vartheta_i^1 \phi_1 + \dots + \vartheta_i^m \phi_m \quad (3.2)$$

En sachant la correspondance entre l'opérateur Γ_n et la matrice M_{Γ_n} , nous concluons que φ_i est un vecteur propre de Γ_n . En plus si $\|\vartheta_i\|_{l_2} = 1$ alors $\|\varphi_i\|_L = 1$.

Soient alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ les vecteurs propres de Γ_n , (μ_1, \dots, μ_m) les valeurs propres correspondantes en ordre décroissant.

Remarquons enfin que les coordonnées de X_i par rapport aux vecteurs propres (φ_i) peuvent être calculées facilement connaissant les coordonnées de X_i par rapport aux vecteurs (ϕ_j) et la relation (3.2). On a

$$\langle X_i, \varphi_k \rangle = \sum_{j=1}^m \vartheta_k^j \langle X_i, \phi_j \rangle$$

En particulier on a

$$X_n^k = \langle X_n, \varphi_k \rangle = \sum_{j=1}^m \vartheta_k^j \langle X_n, \phi_j \rangle \quad (3.3)$$

ce qui entraîne

$$X_n = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \langle X_n, \phi_l \rangle \vartheta_k^l \right) \varphi_k$$

3.3 La mise en œuvre du test de stabilité par R

Nous allons appliquer le test de stabilité sur les données du `co2` (donnée implanté dans R), nous avons écrit le script suivant :

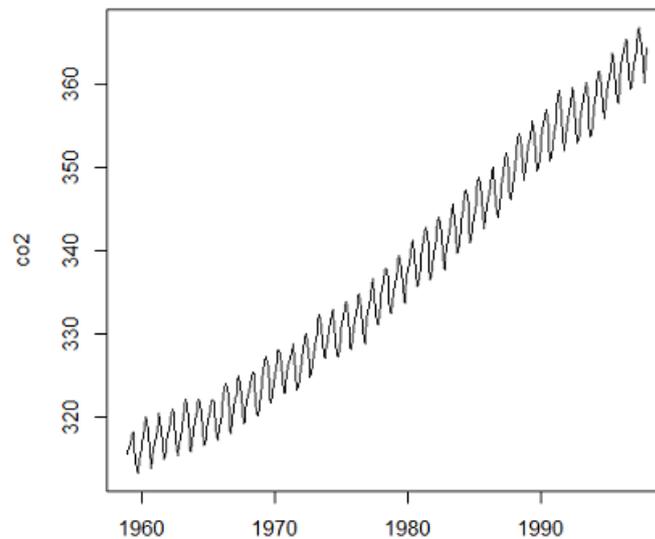


Figure 3.5 : Graphe du `co2`.

Programme

```
Base <- create.bspline.basis(c(1,12),norder=4)
X <- predict(Base,seq(1 :12))
dim(X)
p=4
n=32
N=n-1
q=3
a=as.numeric(co2)
a=matrix(a,39,12)
b=matrix(0,4,n)
b[,1]
for(i in 1 :n){b[,i]=solve(crossprod(X),crossprod(X,a[i,]))}
b
```

```

m=1/5*b%*%t(b)
v=eigen(m)$vectors
v=as.matrix(v)
r=t(v)%*%b
y=matrix(0,p2,N)
for(j in 2 :n)for(i in 1 :p)y[1 :(i*p),j-1]=r[,j]*r[i,j-1]
y
Zk=function(k){z2=apply(y[,1 :(k-1)],1,sum)
return(z2)}

ZN=function(k){z=apply(y[(k-1) :(N)],1,sum)
return(z)}

gamma=matrix(0,p2,p2)
m=(1/N)*apply(y[-c(1,N)],1,sum)
gamma2=function(h){for(i in 1 :(N-h)){s=(y[,i]-m)%*%t(y[,i+h]-m) gamma=gamma+s
return(gamma)}}
sum=matrix(0,p2,p2)
for(h in 1 :q){sum=gamma2(h)+sum}
E=(1-(h/(1+q)))*sum
DN=gamma2(0)+2*E
UN=function(k){
u=(k*(N-k)/N)*((1/k)*Zk(k)-(1/N)*ZN(k))
return(u)}
s=ginv(DN)
GN=function(k){g=(1/N)%*%t(UN(k))%*%s%*%UN(k)
return(g)}
for(k in 1 :N)IN=(1/N)*sum(GN(k))
IN

```

En exécutant ce programme, le langage R donne une valeur $IN = 1.290057$.
Donc si $IN > c(\alpha, p^2)$ on rejette l'hypothèse H_0 , sinon on l'accepte.

3.4 Application aux données de transactions par carte de crédit

Dans cet exemple, on présente les résultats d'une petite étude de simulation qui été faite par [19].

Les calculs ont été effectués en utilisant le R package FDA. Ils ont travaillé avec un ensemble de données étudiées dans [14], tiré des registres détaillés des transactions effectuées avec des cartes de crédit émises par la Banque Vilnius, en Lituanie.

Les séries chronologiques fonctionnelles étudiées le nombre $Y_n(t)$ de transactions dans un intervalle chaque minutes t pendant le jour $n = 1, 2, \dots, 200$.

Tableau 1 Taille empirique.

	$p = 2$			$p = 3$			$p = 4$		
	10%	5%	1%	10%	5%	1%	10%	5%	1%
$N = 50$	9.4	3.4	0.3	11.9	5.9	0.4	6.2	1.9	0.0
$N = 100$	9.7	3.6	0.6	9.9	5.0	1.0	7.2	2.3	0.5
$N = 200$	8.1	3.8	0.5	10.3	4.8	0.8	6.3	2.8	0.3

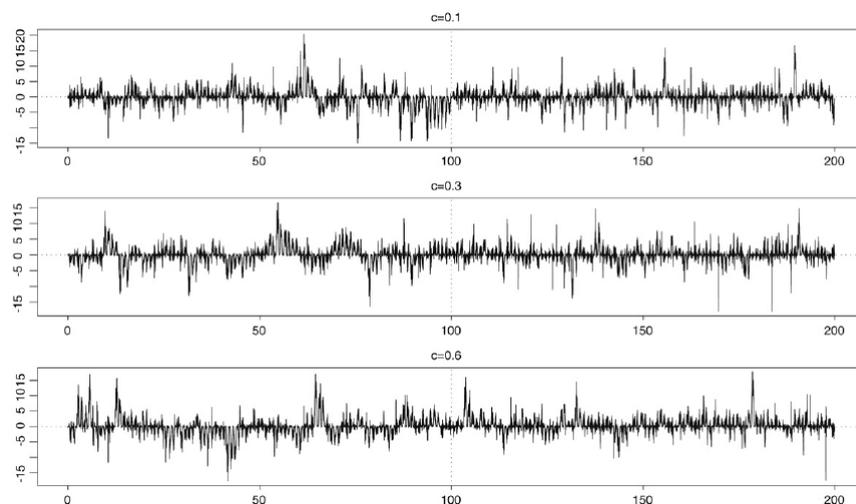


Figure 3.6 : Transaction par carte de crédit.

En appliquant le test a ces données, le test ne rejette pas l'hypothèse nulle, indique qu'un modèle AR (1) fonctionnelle est approprié pour X_n .

Bibliographie

- [1] I. Berkes, R. Gabrys, L. Horváth, P. Kokoszka. *Detecting changes in the mean of functional observations, Technical Report*. Utah State University, 2007.
- [2] I. Berkes, L. Horváth, P. Kokoszka, Q.-M. Shao. *On discriminating between long-range dependence and changes in mean*. The Annals Statistics 34(2006) 1140-1165.
- [3] D. Bosq. *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications* . Lecture Notes in Statistics 149 Springer 2000.
- [4] D. Bosq, D. Blanke. *Inference and Prediction in Large Dimensions*. Wiley Series in Probability and Statistics Dec. 2007. 312 pp.
- [5] M. Csörgö, L. Horváth. *Weighted Approximations in Probability and Statistics*. Wiley. New York. 1993.
- [6] M. Csörgö, L. Horváth. *Limit Theorems in Change-Point Analysis*. Wiley. New York. 1997.
- [7] N.Dunford, J.T.Schwartz. *Linear Operators Part I*. John Wiley, New-York 1958.
- [8] F. Ferraty, P. Vieu. *Nonparametric Functional Data Analysis*. Theory and Practice, Springer, 2006.
- [9] R. Gabrys, P. Kokoszka. *Portmanteau test of independence for functional observations*. Journal of the American Statistical Association 102 (2007)1338-1348.
- [10] R.H. Glendinning, S.L. Fleet. *Classifying functional time series*. Signal Processing 87 (2007) 79-100.
- [11] B.E. Hansen. *Rethinking the univariate approach to unit root testing : Using covariates to increase power*. Econometric Theory 11 (1995) 1148-1171.

-
- [12] J. Kiefer. *K-sample analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramér-v. Mises tests*. Annals of Mathematical Statistics 30 (1959) 420-447.
- [13] P. Kokoszka, I. Maslova, J. Sojka, L. Zhu. *Testing for lack of dependence in functional linear model*. Canadian Journal of Statistics 36 (2008) 207-222.
- [14] A. Laukaitis, A. Raškauskas. *Functional data analysis of payment systems*. Non-linear Analysis : Modeling and Control 7 (2002) 53-68.
- [15] N. Malfait, J.O. Ramsay. *The historical functional model*. Canadian Journal of Statistics 31 (2003) 115-128.
- [16] F. Móricz. *Moment inequalities and the strong law of large numbers*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 35(1976) 299-314.
- [17] H.-G. Müller, U. Stadtmüller. *Generalized functional linear models*. The Annals of Statistics 33 (2005) 774-805.
- [18] J.O. Ramsay, B.W. Silverman . *Functional Data Analysis*. Springer , 2005.
- [19] L. Horváth, M. Husková, P. Kokoszka. *Testing the stability of the functional autoregressive process*. Article, 24 December 2008.