Remerciements

Grace à " Dieu " le tout puissant, j'ai pu achever ce mémoire.
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directice de mémoire Madame "Benziadi Fatima". Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier.

Je remercie mon frère, ma soeur pour leur encouragement et je remercie très spécialement ibtissam et sofi qui ont toujours été là pour moi et pour leur amitié, leur soutien inconditionnel et leur encouragement.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Enfin, je remercie tous mes Ami(e)s que j'aime tant, Soumia, Rajaà, Karima, Yamina, Fouad, Hakim, Oussama, Fezza, Meziane, Guendouzi,... Pour leur sincère amitié et confiance, et à qui je dois ma reconnaissance et mon attachement.

À tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

Table des matières

Introduction

Le problème principal de l'estimateur à noyau classique est qu'il ne s'adapte pas bien au cas où les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ nous arrivent d'une manière séquentielle, supposons que l'on dispose des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ à un certain temps, et qui un peu plus tard on reçoit une $(n+1)$-iéme variable X_{n+1}, pour estimer notre fonction, on aimerait utiliser cette nouvelle observation, qui est équivalente à calculer notre estimateur en utilisant toutes les observations $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$, ce qui n'est pas trés pratique. Une solution de ce problème est d'utiliser une version récursive de notre estimateur. L'avantage de cette récursivité est que l'on n'a pas à relisser de nouveau le processus lorsq'une nouvelle observation s'ajoute à la série. Cela n'est pas négligeable car on réduit alors considérablement le temps de calcul.
La récursivité peut s'avérer cruciale lorsque l'on cherche à inférer sur des phénomènes qui évoluent dans le temps et qui nécessitent une mise à jour constante des estimations effectuées.
Les estimateurs récursifs peuvent s'avérer préférables aux versions non récursives du fait de leurs faible variance asymptotique.
Une application directe de l'estimation récursive est celui de l'estimation de la régression dans le sens où si l'on suppose que le processus est Markovien d'ordre k et strictement stationnaire, alors le meilleur prédicteur probabiliste de X_{n+h} est donné par l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(X_{n+h}|X_n, \ldots, X_{n-k+1})$$

que l'on peut estimer par :

$$\hat{X}_{n+h} = \hat{r}_{n-k-h+1}(X_{n-k+1}, \ldots, X_n),$$

où $\hat{r}_{n-k-h+1}(x)$ est l'estimateur à noyau de la régression.
D'autre part, Nadaraya [38] et Waston [54] proposent l'estimateur non récursif pour des données vectorielles :

$$r_n^{NW}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(Y_i) K_{h_n}(x, X_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_{h_n}(x, X_i)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

avec :

$$K_{h_n}(.) = \frac{1}{h_n} K\big(\frac{.}{h_n}\big).$$

Ainsi, on constate que K_{h_n} dépend du nombre n des observations. Dans certaines situations concrétes, la taille de l'échantillon est fluctuante, si la régression est estimée par la formule (1), une augmentation de cette taille, même de quelques observations, conduit à recalculer entièrement l'estimateur. Dans ce contexte multidimensionnel d'estimation de la régression, cela peut constituer une charge de calcul supplémentaire et une perte de temps non négligeable même pour des ordinateurs performants.
La version récursive de l'estimateur de Nadarya et Watson de la fonction de régression est définie par :

$$\widehat{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} K\big(\frac{X_i - x}{h_i}\big) Y_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} K\big(\frac{X_i - x}{h_i}\big)} \mathbb{I}_{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} K\left(\frac{X_i - x}{h_i}\right) \neq 0\right)}. \tag{2}$$

Carbon et Francq [14] montrent, par des exemples numériques, sur plusieurs types de séries chronologiques, l'efficacité des méthodes non paramétriques basées sur des estimateurs à noyau vis a vis de celles de Box-Jenkins.
La liste de références sur l'estimation récursive de la régression devient trés longue mais nous nous référons aux Krzyżak et Pawlak (1984) qui a établi la convergence presque complète de l'estimateur à noyau récursif de la fonction de régression, an 1987 et dans ce cadre, Greblecki et Pawlak ont donné des conditions nécessaires et suffisantes de sa convergence. la convergence globale et une application dans le système d'estimation non-linéaire ont été réalisées par Krzyżak (1992). La normalité asymptotique de cet estimateur a été donné par Roussas et Tran (1992). Ses propriétés asymptotiques est énoncé par Walk (2001). Réviser(1977) a étudié la normalité asymptotique d'un autre estimateur récursif

de la fonction de régression qui est défini pour tout $x \in R$ et $n \geq 1$ par :

$$\widehat{r}_n(x) = \widehat{r}_{n-1}(x) + \frac{1}{nh_n} K\left(\frac{x - X_n}{h_n}\right)(Y_n - \widehat{r}_{n-1}(x)).$$

Les estimateurs récursifs de $r(x)$ considérés dans ce travail ont la forme suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m(Y_i) K_{h_i}^{*}(x, X_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_{h_i}^{*}(x, X_i)},$$

et les plus populaires d'entre eux sont l'estimateur de Devroye et Wagner[23] et celui d'Ahmad et Lin [1], définis respectivement par :

$$r_n^{DW}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{m(Y_i)}{h_i^d} K\left(\frac{x, X_i}{h_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^d} K\left(\frac{x, X_i}{h_i}\right)},$$

et

$$r_n^{AL}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m(Y_i) K\left(\frac{x, X_i}{h_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x, X_i}{h_i}\right)},$$

communément appelés estimateur récursif et semi récursif respectivement. Ces deux estimateurs sont largement étudiés par Györfi et al [27] dans le cas i.i.d. La convergence au sens L^1 de $r_n^{DW}(x)$ est étudiée par Devroye et Wagner [23], la vitesse de convergence est établie par Krzyzak [29]. Ahmad et Lin [1] montrent la convergence uniforme presque sûre sans vitesse de l'estimateur $r_n^{AL}(x)$, pour des observations i.i.d et dans Krzyzak et Pawlak [30, 31] sous des hypothèses légèrement différentes. Dans le cas dépendant, Wang et Liang [53] étudient la convergence uniforme presque sûre des versions tronquées des estimateurs $r_n^{DW}(x)$ et $r_n^{AL}(x)$, sous des conditions de φ-mélangeance. Roussas et Tran [43] établissent la normalité asymptotique de $r_n^{DW}(x)$ pour des processus fortement mélangeants.

L'estimateur de la densité est un sujet qui a donné à un grand nombre de travaux et leur application est trés vaste et couvre divers domaines, comme l'analyse de la régression et des séries chronologiques...etc.
Les principales méthodes non-paramétriques pour l'estimation de la densité sont la méthode du noyau introduite par Rosenblatt [44] et Parzen [38], la méthode des séries orthogonales étudiée entre autre par Schwartz [46] et Watson [54] et la méthode de l'histogramme introduite par Graunt puis developpée par Scott, Tran [49], Carbon et Tran [15]. Parmi l'ensemble de ces estimateurs, l'un des plus utilisés reste l'estimateur à noyau défini par :

$$f_n^{PR}(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

où K est un noyau défini dans $\mathbb{R}^d$, borné et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et h_n une suite réelle appelée paramètre de lissage, tendant vers zéro à l'infini. D'autres conditions complémentaires sur K et h_n sont nécessaires pour l'étude de cet estimateur.

L'étude de $f_n^{PR}(x)$ a donné lieu à une vaste littérature statistique, pour une représentation globale des résultats obtenus sur cet estimateur, notamment dans le cadre des données dépendantes, nous renvoyons aux livres de Prakasa-Rao [39], Bosq [10], bosq, Lecoutre [12], Bosq et Blanke [11].
nous nous intéressons aux versions récursives de $f_n^{PR}(x)$. Une premiére forme a été introduite par Wolverton et Wagner[56] :

$$f_n^{WW}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^d} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Cet estimateur possède les mêmes propriétés asymptotiques que $f_n^{PR}(x)$ et peut également s'écrire sous la forme :

$$f_n^{WW}(x) = R_n\big[x, f_{n-1}^{WW}, X_n\big]$$

avec :

$$R_n(x, a, b) = \frac{n-1}{n} a + \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{x - b}{h_n}\right).$$

De nombreuses variantes récursives ont également été proposées et étudiées.
En particulier, Deheuvels[18, 19] s'est intéressé à la famille générale suivante :

$$f_n^H(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} h_i H(h_i)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} H(h_i) K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right).$$

L'estimateur obtenu dans l'expression de $f_n^H(x)$, pour $H(u) = 1$, est connu dans la littérature sous le nom d'estimateur de Deheuvels et s'écrit en dimension d sous la forme :

$$f_n^{DHV}(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} h_i^d} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right).$$

Aussi, Wegman et Davies[55] étudient l'estimateur récursif suivant :

$$f_n^{DW}(x) = \frac{1}{n\sqrt{h_n^d}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{\frac{d}{2}}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right).$$

Leur idée consiste à partager le paramètre de lissage de l'estimateur à noyau habituel $f_n^{PR}(x)$ en deux puissances $\frac{1}{2}$. L'estimateur $f_n^{DW}(x)$ est asymptotiquement biaisé et son intégrale n'est pas égale à 1, mais il est trés intéressant car une fois ces problèmes corrigés sa variance asymptotique est plus petite que celle de $f_n^{WW}(x)$.

Ce travail est divisé en quatre chapitres, on commonçe par quelques notions préliminaires, ensuite, on définie l'estimateur récurssif de la densité et leur proprietés asymptotiques, puis l'estimateur récurssif de la régression et à la fin un exemple de simulation.

Chapitre 1

Quelques notions préliminaires

Dans ce chapitre on introduit quelques notions utils qui sont trés importantes dans les autres chapitres.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. Le coefficient de mélange fort est défini par :*

$$\alpha(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) := \sup_{B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2} |\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)|.$$

Définition 1.1.2 *Un processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est dit fortement mélangeant où $\alpha-$mélangeant si le coefficient de mélange fort de X est défini pour tout $u \geq 0$, par :*

$$\alpha(u) := \sup_{t \in \mathbb{N}} \alpha(\sigma(X_s, s \leq t), \sigma(X_s, s \geq t + u))$$

tel que $\alpha(u) \to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

Définition 1.1.3 *Un processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est dit 2-fortement mélangeant où 2-α-mélangeant si le coefficient de 2-mélange fort de X défini, pour tout $u \geq 0$, par :*

$$\alpha(u) := \sup_{t \in \mathbb{N}} \alpha(\sigma(X_t), \sigma(X_{t+u}))$$

tel que $\alpha^{(2)}(u) \to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

On utilise le coefficient de 2-α-mélange $\alpha^{(2)}$ légèrement moins restrictive que α pour mesurer la dépendance de nos observations.

Définition 1.1.4 *Un processus $(X_t, t \in \mathbb{N})$ est dit géométriquement fortement mélangeant (G.F.M), si le coefficient de mélange vérifie :*

$$\alpha(u) \leq \gamma e^{-\rho u},\ u \geq 0,$$

avec $\gamma, \rho > 0$.

1.2 Lemmes utiles

1.2.1 Lemme de Bochner

Lemme 1.2.1 *Soit K une fonction bornée, $K \in L^1$ telle que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(x)dx = 1$$

et

$$\|xK(x)\| \to 0,$$

lorsque $\|x\| \to \infty$.
On pose :

$$K_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^d} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors, pour toute fonction $f \in L^1$, on a :

$$\forall x \in c(f),\quad f * K_\varepsilon(x) \to f(x),$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, où $f * K_\varepsilon$ désigne le produit de convolution de f et K_ε.

1.2.2 Lemme de Toeplitz

Lemme 1.2.2 *Soit $(a_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une suite réelle et $(w_n)_{n\geq 1}$ une suite qui converge vers w.*
On suppose que :

(i) *pour tout* $k \geq 1$, $\underset{n\to\infty}{lim}\, a_{n,k} = 0$

(ii) $\underset{n\to\infty}{lim} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = A < \infty$

(iii) *Il existe une constante* $\mathcal{C} > 0$ *telle que pour tout* $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| < \mathcal{C} < \infty$. *Alors nous avons :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} w_k \to Aw,$$

lorsque $n \to \infty$.

1.2.3 Lemme de Volkonskii et Rozanov

Lemme 1.2.3 *Soit* $V_1, \dots, V_L$ *des variables aléatoires mesurables par rapport aux tribus (resp.* $\mathcal{F}_{i_1}^{J_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_L}^{J_L}$*) alors :*

$$\left| \mathbb{E} \prod_{j=1}^{k-1} V_j - \prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{E} V_j \right| \leq 8(L-1)\alpha(w).$$

1.2.4 Lemme de Borel-Cantelli

Lemme 1.2.4 *Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'évènements. Si* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ *(resp.* $= \infty$ *et si les* A_n *sont indpendantes), alors :*

$$P\left(\overline{\underset{n\to\infty}{lim}} A_n\right) = 0 \ (resp.\ 1).$$

On rappelle que pour une suite d'évènement A_n *:*

$$\overline{\underset{n\to\infty}{lim}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k = \underset{n\to\infty}{lim} \downarrow \bigcup_{k \geq n} A_k,$$

ou encore :

$$\overline{\underset{n\to\infty}{lim}} A_n = \omega \in \Omega, \omega \in A_n,\ infiniment\ souvent = \left\{ \omega \in \Omega, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n(\omega)} = \infty \right\}.$$

1.2.5 Lemme de couplage de Rio

Lemme 1.2.5 *Soit $\mathcal{A}$ une sous tribu de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle, prenant ses valeurs dans un intervalle compact $[a, b]$. Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de la tribu engendrée par X et $\mathcal{A}$. Alors il existe une variable aléatoire X^*, mesurable pour la tribu $\mathcal{A} \vee \sigma(X) \vee \sigma(U)$ indépendante de $\mathcal{A}$ et de même loi que X telle que :*

$$\mathbb{E}|X - X^*| \leq 2(b-a)\alpha(\mathcal{A}, \sigma(X)).$$

1.3 Théorème d'approximation de Jain et Al

Théorème 1.3.1 *Soit X_n une suite de variable aléatoire indépendante définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}X_n^2$ existe et $\mathbb{E}X_n = 0$.*
Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \; S_0 = 0 \text{ et } V_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2 \text{ si } n \geq 1, \; V_0 = 0.$$

pour tout $\alpha \geq 0$, on suppose que $V_n \to \infty$ et que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln_2 V_k)^\alpha}{V_k} \mathbb{E}\left(X_k^2 \mathbb{1}_{\left\{X_k^2 > \frac{V_k}{\ln V_k (\ln_2 V_k)^{2(\alpha+1)}}\right\}} \right) < \infty.$$

Soit S une fonction aléatoire définie sur $[0, +\infty[$ telle que :
pour tout $t \in [V_n, V_{n+1}[$

$$S(t) = S_n.$$

Alors, il existe un M.B ξ tel que

$$|S(t) - \xi(t)| = o\left(t^{\frac{1}{2}} (\ln \ln t)^{\frac{1-\alpha}{2}}\right).$$

1.4 Loi du logarithme Itéré pour un Mouvement Brownien

Théorème 1.4.1 *Si ξ est un Mouvement Brownien, alors on a :*

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1 \; p.s.$$

1.5 Quelque inégalités importantes

Inégalité de Billingsley

Si X et Y sont des variables aléatoires bornées, alors :

$$|Cov(X,Y)| \leq 4\|X\|_\infty \|Y\|_\infty \alpha(\sigma(X), \sigma(Y)).$$

Inégalité de Davydov

Si $X \in L^p$ et $Y \in L^r$ avec :

$$q > 1, \; r > 1 \; et \; \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1,$$

alors :

$$|Cov(X,Y)| \leq 2p[2\alpha(\sigma(X), \sigma(Y))]^{\frac{1}{p}} \|X\|_p \|Y\|_r,$$

où :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$$

Inégalité de Markov

Soit ξ une variable aléatoire à valeurs non-négatives. Pour tout réel $a > 0$ on a :

$$\mathbb{P}(\xi > a) \leq \frac{\mathbb{E}(\xi)}{a}.$$

Chapitre 2

Estimateurs récursifs de la densité

Ce chapitre est consacré à l'estimation récursive de la densité de probabilité d'une suite de variables aléatoires de même loi (non nécessairement indépendantes). Nous présentons d'abord l'estimateur de notre fonction. Nous étudions la convergence en moyenne quadratique et la convergence presque sûre dans deux cas (cas i.i.d et cas dépendant) et la normalité asymptotique. En fin, on fait une comparaison entre l'estimateur récursif et l'estimateur à noyau classique .

2.1 Estimation

2.1.1 Présentation de l'estimateur

Pour estimer la densite f, nous proposons la famille paramétrique d'estimateurs récursifs à noyaux définie par :

$$f_n^l(x) := \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{dl}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right),\ x \in \mathbb{R}^d\ (l \in [0,1]).$$

Notre famille d'estimateurs peut se calculer de manière récursive par :

$$f_{n+1}^l(x) = \frac{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{d(1-l)}} f_n^l(x) + K_{n+1}^l(x - X_{n+1}), \tag{2.1}$$

avec :

$$K_i^l(.) = \frac{1}{h_i^{dl}\sum_{j=1}^{i} h_j^{d(1-l)}} K\big(\frac{\cdot}{h_i}\big)$$

La construction de $f_n^l(x)$ est basée sur la généralisation de l'idée de Wegman et Davies [55] qui consiste à partager le paramètre de lissage en deux puissances. Nous avons donc pensé à partager la fenêtre en deux puissances l et $1-l$, $l \in [0,1]$. Mais contrairement à eux, pour avoir des estimateurs asymptotiquement sans biais et d'intégrale égale à 1, nous les normalisons par la quantité :

$$B_{n,d(1-l)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h_i}{h_n}\right)^{d(1-l)}.$$

On a donc :

$$f_n^l(x) = \frac{B_{n,d(1-l)}^{-1}}{nh_n^{d(1-l)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i^{dl}}K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right).$$

Dans le cas i.i.d, Davies [16], Deheuvels [18, 19], Roussas [42], Wegman, Davies [55] et Wertz (1985) étudient la famille $f_n^H(x)$ et les cas $l=0$, $l=1/2$ et $l=1$. En particulier, en dimension $d=1$, Deheuvels [18, 19] établit la convergence en moyenne quadratique de la famille $f_n^H(x)$ et donne des conditions nécessaires et suffisantes pour sa convergence presque sûre. Roussas [42], Wegman et Davies [55] établissent les vitesses de convergence presque sûre exactes dans les cas $l=0$, $l=1/2$ et $l=1$. Aussi, Isogai [28] établit sous certaines conditions, la normalité asymptotique pour $l=1$ dans le cas i.i.d.

Dans le cas dépendant, seuls les cas $l=1/2$ et $l=1$ ont été étudiés dans la littérature.

Les résultats sur la convergence en moyenne quadratique et la normalité asymptotique pour $l=1/2$ et $l=1$ sont établis par Masry [34], pour des processus stationnaires fortement mélangeants. La vitesse de convergence presque sûre ponctuelle pour $l=1/2$ est étudiée par Takahata [48], Masry et Györfi [36], d'abord sous des conditions de ρ-mélangeance, ensuite pour $l=1$, par Masry [35], pour des processus fortement mélangeants. Un résultat uniforme est également obtenu dans le cas $l=1$ par Tran [49] sous des conditions de forte mélangeance. La normalité asymptotique pour $l=1$ est également examinée par Lian et Baek [33] pour des suites de variables négativement associées.

Les approches utilisées dans ces travaux, notamment pour la convergence en moyenne quadratique et la normalité asymptotique, ne se généralisent pas aisément, en dimension supérieure pour des valeurs plus petites de l, alors qu'en particulier, le cas $l = 0$ est intéressant du fait de la faible variance de l'estimateur. Ensuite, nous étudions la convergence presque sûre ponctuelle de notre famille d'estimateurs récursifs.

Pour établir nos résultats, nous avons besoin de faire quelques hypothèses. Nous supposons que la densité f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}_d^2(b)$ avec $b > 0$.

2.2 Résultats de convergence

2.2.1 Hypothèses

Le noyau K est vérifie l'hypothèse

$$\mathbf{H}_1 : \begin{cases} \textbf{i.} \quad \text{K} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est une densité de probabilité, strictement positive, symétrique et bornée,} \\ \\ \textbf{ii.} \quad \lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|x\|^d K(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ \\ \textbf{iii.} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |v_i v_j| K(v) dv < \infty, \qquad i, j = 1, \ldots, d. \end{cases}$$

Le paramètre de lissage h_i vérifie les conditions de l'hypothèse

$$\mathbf{H}_2 : \begin{cases} \textbf{i.} \ h_n \downarrow 0 \ \text{ et } \quad h_n^{d+2} \to \infty, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty, \\ \\ \textbf{ii.} \ \text{pour tout } \ r \in]-\infty, d+2] \quad B_{n,r} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{h_i}{h_n} \right)^r \longrightarrow \beta_r < \infty \quad \text{lorsque } n \to \infty. \end{cases}$$

2.2.2 Commentaires sur les hypothèses

Nous donnons maintenant des choix de h_n vérifiant les hypothèses $\mathbf{H}_2$

i Si : $h_n = \mathcal{C}_n n^{-v}$, $\mathcal{C}_n \downarrow c > 0$, $0 < v < 1$ alors les conditions $\mathbf{H}_2$ sont satisfaites avec :

$$\beta_r = \frac{1}{1 - rv}$$

pour tout réel $r \leq d+2$ et pour tout v tel que $vr < 1$.
En effet, nous avons :

$$B_{n,r} = \frac{1}{n^{1-vr}} \sum_{i=1}^{n} i^{-vr}.$$

- Si $vr > 1$, alors $\sum_{i=1}^{n} i^{-vr}$ converge et donc $\beta_r = \infty$.
- Si $vr = 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-vr} \sim \ln n,$$

donc

$$\beta_r = \infty.$$

- Si $vr < 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-vr} \sim \frac{n^{1-vr}}{1-vr},$$

donc

$$\beta_r = \frac{1}{1-vr}$$

En particulier, si :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{2p+d}},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

avec $p \geq 2$ un entier naturel, alors $\mathbf{H}_2$(ii) est vérifiée puisque :

$$\frac{1}{2p+d} < \frac{1}{d+2}.$$

ii Si $h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}$, $\mathcal{C}_n \downarrow c > 0$, alors $\mathbf{H}_2$ sont également satisfaites.
En effet, pour $\alpha = \frac{1}{d+4}$, on a pour tout $n \geq 1$, si $0 \leq r \leq d+2$:

$$\begin{aligned} B_{n+1,r} - B_{n,r} &= \left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\alpha r} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\ln\ln i}{i}\right)^{\alpha r} \left\{ \frac{(n+1)^{\alpha r - 1}}{n^{\alpha r}} \left[\frac{\ln\ln n}{\ln\ln(n+1)}\right]^{\alpha r} - \frac{1}{n} \right\} + \frac{1}{n+1} \\ &\geq n\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right] = 0. \end{aligned}$$

Ensuite :

$$B_{n,r} = \frac{n^{\alpha r-1}}{(\ln\ln n)^{\alpha r}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\ln\ln i}{i}\right)^{\alpha r} \leq n^{\alpha r-1} \sum_{i=1}^{n} i^{-\alpha r} \to \frac{1}{1-\alpha r},$$

lorsque $n \to \infty$.
Maintenant :
si $r < 0$, nous avons pour tout $n \geq 1$:

$$B_{n,r} \geq n^{\alpha r-1} \sum_{i=1}^{n} i^{-\alpha r} \to \frac{1}{1-\alpha r},$$

lorsque $n \to \infty$ et :

$$B_{n+1,r} - B_{n,r} \leq 0.$$

Ainsi, si :

$$0 \leq r \leq d+2 \ (\textit{resp. si } r < 0),$$

alors $B_{n,r}$ est une suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) par une suite convergente. Par suite $B_{n,r}$ converge.

2.2.3 Convergence en moyenne quadratique

a. Cas i.i.d : Nous pouvons maintenant établir les biais, variance, EQM asymptotique exacts de $f_n^l(x)$.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_2$ et pour tout $l \in [0,1]$, on a :*

(a)

$$h_n^{-4}[\mathbb{E}f_n^l(x) - f(x)]^2 \longrightarrow \left[\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}}\right]^2 b_f^2(x)$$

lorsque $n \to \infty$, avec :

$$b_f(x) := \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^d} v_i v_j K(v)dv.$$

(b)

$$nh_n^d Var f_n^l(x) \to \sigma_l^2(x)$$

lorsque $n \to \infty$, *avec :*

$$\sigma_l^2(x) := \frac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta_{d(1-l)}^2} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(x)dx.$$

(c) *Si* $h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}}$, $\mathcal{C}_n \downarrow c > 0$, *alors :*

$$n^{\frac{4}{d+4}} \mathbb{E}[f_n^l(x) - f(x)]^2 \longrightarrow c^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_f^2(x) + \frac{(4+dl)f(x)\|K\|_2^2}{2c^d(4+d)(2+dl)},$$

lorsque $n \to \infty$, *en tout point* x *où* $f(x) > 0$.

Preuve 2.2.1 *Pour prouver ce théorème, on a besoin du lemme suivant :*

Lemme 2.2.1 *Soit* $(w_n)_{n\geq 1}$ *une suite de nombres réels tendant vers* w. *Si les hypothèses* $\boldsymbol{H}_2$ *sont vérifiées pour tout* $r \in]-\infty, d+2]$ *alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^r w_i \to \beta_r w$$

lorsque $n \to \infty$.

(a) *Nous avons :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f_n^l(x) - f(x) &= \left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i^{-dl} \int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u)du - f(x) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u)du - f(x)\right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)} \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-h_iv) - f(x)]K(v)dv.
\end{aligned}$$

Donc, par développement de Taylor, il existe un réel θ, avec $0 < \theta < 1$ tel que :

$$h_n^{-2}[\mathrm{E}f_n^l(x) - f(x)] = \frac{B_{n,d(1-l)}^{-1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^{d(1-l)+2} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \sum_{1 \le i,j \le d} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - \theta h_i v) dv.$$

Puisque $f \in \mathcal{C}_d^2(b)$, alors
$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} K(v) \sum_{1\le i,j\le d} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - \theta h_i v) dv \to \frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^d} v_i v_j K(v) dv$
lorsque $i \to \infty$.
Ensuite puisque :

$$d(1-l) + 2 \le d + 2$$

le lemme précident donne le résultat sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_2$.

(b) *Puisque les X_i sont indépondentes on a :*

$$\begin{aligned}
Var f_n^l(x) &= \frac{1}{[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}]^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{2dl}} \int_{\mathbb{R}^d} K^2\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u) du \\
&- \frac{1}{[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}]^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i^{2dl}} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^{2dl}} K^2\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u) du\right]^2 \\
&= S_1 - S_2.
\end{aligned}$$

Avec

$$S_1 = \frac{1}{[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}]^2} \sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-2l)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K^2\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u) du.$$

Donc :

$$n h_n^d S_1 = \frac{B_{n,d(1-l)}^{-2}}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^{d(1-2l)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K^2\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u) du.$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K^2\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u) du \to \; f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) du,$$

lorsque $i \to \infty$.
Donc :

$$nh_n^d S_1 \to \frac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta^2_{d(1-l)}} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du, \tag{2.2}$$

lorsque $n \to \infty$.
Ensuite puisque h_n *est décroissante, on a :*

$$S_2 \leq \frac{h_1^{d(1-l)}}{[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}]^2} \sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u)du\right]^2.$$

Par suite :

$$nh_n^d S_2 \leq \frac{h_1^{d(1-l)}}{nB^2_{n,d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{h_n}\right)^{d(1-l)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_i^d} K\left(\frac{x-u}{h_i}\right) f(u)du\right]^2 \times h_n^{dl} \to 0, \tag{2.3}$$

lorsque $n \to \infty$.
Ainsi (2.2) *et* (2.3) *impliquent que :*

$$nh_n^d Var f_n^l(x) = nh_n^d(S_1 - S_2) \to \frac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta^2_{d(1-l)}} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du,$$

lorsque $n \to \infty$.

(c) *Cette partie découle à la décomposition* $EQM = Biais^2 + Var$*, en se servant aussi du fait que si :*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{4+d}}, \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

alors pour tout $r \leq d+2$*, on a :*

$$\beta_r = \frac{d+4}{d+4-r}$$

Il vient que :
$\left[\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}}\right]^2 = \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2$ *et* $\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta^2_{d(1-l)}} = \frac{(4+dl)^2}{2(4+d)(2+dl)}$

Proposition 2.2.1 *on suppose que :*
- K est une densité positive bornée sur $\mathbb{R}$ *et il existe deux réels* $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 0$ *tels que :*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta} \int_{|y|>t} \mid y \mid^{\alpha} K(y)dy = 0$$

- f est 2 fois uniformément différentiable sur $\mathbb{R}$.
Si :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^{1-2l}}{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{1-2l}\right)^2} = 0 \text{ ou plus gnralement } \sum_{i=1}^{\infty} h_i^{1-l} = \infty,$$

alors :

$$\mathbb{E}f_n^l(x) - f(x) = \frac{B_{n,2-l}}{B_{n,1-l}} h_n f'(x) \int_{\mathbb{R}} yK(y)dy + \frac{B_{n,3-l}}{B_{n,1-l}} h_n^2 f''(x) \int_{\mathbb{R}} y^2 K(y)dy + o(h_n^2)$$

Proposition 2.2.2 *on suppose que :*
- K est une densité positive bornée sur $\mathbb{R}$ *et il existe deux réels* $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 0$ *tels que :*

$$\lim_{t\to\infty} t^{\beta} \int_{|y|>t} \mid y \mid^{\alpha} K(y)dy = 0.$$

Si :

$$\int_{|y|>t} K^p(y)dF(x+uy) - \int_{|y|>t} K^p(y)f(x)dx = o(1)$$

et :

$$\int_{|y|\leq t} K^p(y)[f(x+uy) - f(x)]dy = o(1)$$

$\forall p > 1$ *uniformément en* $u > 0$ *et* x, *alors :*

$$Varf_n^l(x) = \frac{B_{n,1-2l}}{B_{n,1-l}^2 n h_n} f(x) \int_{\mathbb{R}} K^2(y)dy - \frac{B_{n,2(1-l)}}{nB_{n,1-l}^2} f(x)^2 + o(n)$$

si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^{1-2l}}{\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^{1-l}\right)^2} = 0$$

b. Cas dépendant : Pour établir la convergence en moyenne quadratique de $f_n^l(x)$ dans ce cas, nous avons besoin d'hypothèses supplémentaires sur le processus (X_t)

$\mathbf{H}_3$:

i. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est $2-\alpha-$mélangeant avec :

$$\alpha^{(2)}(K) \leq \gamma K^{-\rho}, \quad K \geq 1 \qquad \text{où } \gamma \text{ et } \rho \text{ deux constants positives.}$$

ii. Pour chaque (s,t), $s \neq t$ le vecteur aléatoire (X_s, X_t) admet une densité $f_{(X_s,X_t)}$ telle que :

$$\sup_{|s-t|\geq 1} \|g_{s,t}\|_\infty < \infty, \text{ où } g_{s,t} = f_{(X_s,X_t)} - f \otimes f.$$

Théorème 2.2.2 *Sous les hypothèses* $\boldsymbol{H}_1$ *et* $\boldsymbol{H}_3$

(a) *Si* $\rho > 2$ *et pour tout* $l \in \left[\left(\frac{d-2}{2d}\right)^+, 1\right]$ *alors :*

$$nh_n^d Var f_n^l(x) \to \sigma_l^2$$

lorsque $n \to \infty$

(b) *Si* $d \geq 3$, *pour tout* $l \in \left[0, \frac{d-2}{2d}\right[$ *et* $\rho > \frac{d+2}{2}$ *alors la conclusion du (a) reste encore vraie.*

(c) *Si* $\rho > 2$ *(resp,* $\rho > \frac{d+2}{2}$*), et pour tout* $l \in \left[\left(\frac{d-4}{2d}\right)^+, 1\right]$ *,(resp, pour tout* $l \in \left[0, \frac{d-4}{2d}\right]$*, si* $d \geq 5$*) alors :*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}}, \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

donc

$$n^{\frac{4}{d+4}} \mathbb{E}\left[f_n^l(x) - f(x)\right]^2 \to c^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_f^2(x) + \frac{(4+dl)^2 f(x) \|K\|_2^2}{2c^d(4+d)(2+dl)}$$

lorsque $n \to \infty$

Preuve 2.2.2 **(a)** *On a :*

$$\begin{aligned} Var f_n^l(x) &= \left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^{-2} \sum_{i=1}^n Var\left[\frac{1}{h_i^{dl}} K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right)\right] + \left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^{-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

avec $i \neq j$ *et*

$$A_{i,j} := cov\left[h_i^{-dl}K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right), h_j^{-dl}K\left(\frac{x-x_j}{h_j}\right)\right].$$

On a :

$$I_2 \leq 2\left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|\mathbb{1}_{1\leq i-j\leq c_n} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|A_{i,j}|\mathbb{1}_{c_n+1\leq i-j\leq n-1}\right).$$

Pour $i > j$, *on pose :*

$$k = i - j \text{ } et \text{ } p = j \Leftrightarrow i = k + p \text{ } et \text{ } j = p.$$

Alors :

$$p \in 1,\dots,n \cap 1-k,\dots,n-k \text{ } et \text{ } k \in 1,\dots,n-1.$$

Donc :

$$I_2 \leq 2\left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-2}\left(\sum_{k=1}^{c_n}\sum_{p=1}^{n}|A_{k+p,p}| + \sum_{k=c_n+1}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}|A_{k+p,p}|\right) := J_1 + J_2.$$

D'autre part, nous avons par (1.5) *:*

$$A_{k+p,p} \leq 4\alpha^{(2)}(k)\|K\|_\infty^2 h_{k+p}^{-dl}h_p^{-dl}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq 8\|K\|_\infty^2\left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-2}\sum_{k=c_n+1}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}\alpha^{(2)}(k)h_{p+k}^{-dl}h_p^{-dl}\\
&\leq 8\gamma\|K\|_\infty^2\left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-2}\sum_{k=c_n}^{n-1}\sum_{p=1}^{n}k^p h_{p+k}^{-dl}h_p^{-dl}\\
&\leq 8\|K\|_\infty^2\left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)}\right]^{-2}\frac{h_n^{-2dl}c_n^{-\rho+1}}{\rho-1}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{h_p}{h_n}\right)^{-dl}\\
&= \frac{8\gamma\|K\|_\infty^2 c_n^{1-\rho}B_{n,-dl}}{nh_n^{2d}B_{n,d(1-l)}^2(\rho-1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$nh_n^d J_2 = O(c_n^{1-\rho} h_n^{-d}).$$

On a :

$$\begin{aligned}
A_{k+p,p} &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} (h_{k+p}h_p)^{-dl} K\left(\frac{x-u}{h_{k+p}}\right) K\left(\frac{x-v}{h_p}\right) g_{k+p,p}(u,v)dudv \\
&\leq \sup_{k\geq 1} \|g_{k+p,p}\|_\infty (h_{k+p}h_p)^{-dl} \int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-u}{h_{k+p}}\right) du \int_{\mathbb{R}^d} K\left(\frac{x-v}{h_{k+p}}\right) dv \\
&= (h_{k+p}h_p)^{d(1-l)} \sup_{k\geq 1} \|g_{k+p,p}\|_\infty .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq 2\sup_{k\geq 1} \|g_{k+p,p}\|_\infty \left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^{-2} \sum_{k=1}^{c_n}\sum_{p=1}^{n-k} h_{p+k}^{d(1-l)} h_p^{d(1-l)} \\
&\leq 2\sup_{k\geq 1} \|g_{k+p,p}\|_\infty c_n \left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^{-2} \sum_{p=1}^{n} h_p^{2d(1-l)} .
\end{aligned}$$

Si :

$$l \in \left[\left(\frac{d-2}{2d}\right)^+, 1\right],$$

alors :

$$2d(1-l) \leq d+2 \Rightarrow B_{n,2d(1-l)} \to \beta_{2d(1-l)} < \infty,$$

lorsque $n \to \infty$.
Donc :

$$J_1 \leq 2\sup_{k\geq 1} \|g_{k+p,p}\|_\infty \frac{c_n B_{n,2d(1-l)}}{nB_{n,d(1-l)}^2},$$

c'est-à-dire :

$$nh_n^d J_1 = O(c_n h_n^d).$$

Ainsi avec le choix :

$$c_n := \left[h_n^{-\frac{2d}{\rho}} \right],$$

nous avons en vertu de (2.2.2)

$$nh_n^d I_2 = O\left[h_n^{-\frac{d(2-\rho)}{\rho}} \right] \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.

(b) *Si la condition*

$$\rho > \frac{d+2}{2}$$

est vrai, alors on choisit un réel ξ *tel que :*

$$\frac{1}{\rho - 1} < \xi \leq \frac{2}{d}.$$

Ainsi, ξ *vérifie la relation :*

$$d(\xi + 1) \leq d + 2,$$

par suite :

$$B_{n,d(\xi+1)} \to \beta_{d(\xi+1)} < \infty,$$

lorsque $n \to \infty$.

Ensuite puisque h_n *est décroissante, nous avons :*

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)} \geq h_1^{-dl} \sum_{i=1}^{n} h_i^d.$$

On obtient, donc :

$$0 \leq l < \frac{d-2}{2d},$$

que :

$$c_n \left[\sum_{i=1}^{d(1-l)} \right]^{-2} \sum_{p=1}^{n} h_p^{2d(1-l)} \leq \frac{c_n h_1^{d(1-\xi-2l)} n h_n^{d(\xi+1)} B_{n,d(\xi+1)}}{n^2 h_1^{-2dl} h_n^{2d} B_{n,d}^2} = \frac{c_n h_1^{d(1-\xi)} h_n^{d\xi} B_{n,d(\xi+1)}}{n h_n^d B_{n,d}^2}.$$

En effet :

$$0 \leq l < \frac{d-2}{2d} \Rightarrow 1 - \xi - 2l > 0, \ car\ \xi \leq \frac{2}{d}.$$

Ainsi il vient :

$$nh_n^d J_1 = O(c_n h_n^{d\xi}).$$

En choisissant :

$$c_n := \left[h_n^{-\frac{d(\xi+1)}{\rho}} \right],$$

on déduit que :

$$nh_n^d I_2 = O \left[h_n^{-\frac{d(1+\xi-\rho\xi)}{\rho}} \right] \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, *car* $\xi > \frac{1}{\rho-1}$.

(c) *Le choix de :*

$$\mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}}, \ \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

implique que :

$$c_n \left[\sum_{i=1}^{n} h_i^{d(1-l)} \right]^{-2} \sum_{p=1}^{n} h_p^{2d(1-l)} = \frac{c_n \sum_{p=1}^{n} p^{-\frac{2d(1-l)}{d+4}}}{\left[\sum_{i=1}^{n} i^{-\frac{d(1-l)}{d+4}} \right]^2} \sim c_n n^{-1}.$$

Il vient que :

$$nh_n^d J_1 = O \left(c_n n^{-\frac{d}{d+4}} \right).$$

Ainsi le choix :

$$c_n := \left[n^{\frac{2d}{\rho(d+4)}} \right],$$

on déduit que :

$$nh_n^d I_2 = O \left[n^{\frac{d(2-\rho)}{\rho(d+4)}} \right] \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.

2.2.4 Convergence presque sûre ponctuelle

a. Cas i.i.d :

Théorème 2.2.3 *Sous les hypothèses* $\boldsymbol{H}_1$ *et* $\boldsymbol{H}_2$, *si pour tout* $\alpha \geq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nh_n^d}{(\ln\ln n)^{2(\alpha+1)}\ln n} = \infty \ \ et \ \lim_{n\to\infty} \frac{\ln h_n}{\ln n} < \infty \tag{2.4}$$

alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\frac{nh_n^d}{\ln\ln n}}[f_n^l(x) - \mathbb{E}f_n^l(x)] = \sigma_l\sqrt{2} \ \ p.s.$$

De plus le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

implique que :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \left[f_n^l(x) - f(x)\right] = \sigma_l\sqrt{2c^d} + \frac{c^2\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_f(x) \ \ p.s,$$

pour tout x *tel que* $f(x) > 0$.

Preuve 2.2.3 (a) *Nous appliquons le théorème* (1.3.1) *aux variables* Z_i *définies par :*

$$Z_i = \frac{1}{h_i^{dl}}\left[K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right) - \mathbb{E}K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Posons :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

on a :

$$f_n^l(x) - \mathbb{E}f_n^l(x) = \frac{S_n}{nB_{n,d(1-l)}h_n^{d(1-l)}}. \tag{2.6}$$

Ensuite si l'on pose :

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Z_i^2,$$

alors nous avons :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{i=1}^{n} h_i^{-2dl}\mathbb{E}\left[K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right) - \mathbb{E}K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right)\right]^2 \\ &= Var\sum_{i=1}^{n} h_i^{-dl}\left[K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right)\right] \\ &= nB_{n,d(1-l)}^2 h_n^{d(1-2l)} nh_n^d Var f_n^l(x). \end{aligned}$$

Soit S une fonction aléatoire définie sur $[0, +\infty[$ *en posant :*
pour $t \in [V_n, V_{n+1}[$

$$S(t) = S_n.$$

Le Théorème (2.2.1) *nous permet donc d'écrire :*

$$V_n \sim nh_n^{d(1-2l)}\beta_{d(1-2l)}f(x)\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du \to \infty, \tag{2.7}$$

lorsque $n \to \infty$.
La condition (2.4) *implique que :*

$$\frac{nh_n^d}{\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\left[\ln\ln\left(nh_n^{d(1-2l)}\right)\right]^{2(\alpha+1)}} \to \infty,$$

lorsque $n \to \infty$.
Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$*, on ait :*

$$\frac{nh_n^{d(1-2l)}}{\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\left[\ln\ln\left(nh_n^{d(1-2l)}\right)\right]^{2(\alpha+1)}} > \| K \|_\infty^2 h_n^{-2dl} \geq Z_n^2.$$

Ainsi l'évènement :

$$\left\{ Z_n^2 > \frac{nh_n^{d(1-2l)}}{\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\left[\ln\ln\left(nh_n^{d(1-2l)}\right)\right]^{2(\alpha+1)}} \right\}$$

est un évènement impossible pour $n \geq n_0$.
Par suite, nous avons grâce à (2.7) *:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln\ln V_n)^\alpha}{V_n} E\left(Z_n^2 \mathbb{1}_{Z_n^2 > \frac{V_n}{\ln V_n (\ln\ln V_n)^{2(\alpha+1)}}}\right) < \infty.$$

Donc il existe un Mouvement Browien W tel que :
pour $t \in [V_n, V_{n+1}[$:

$$\left| \frac{S(t) - W(t)}{(2t\ln\ln t)^{\frac{1}{2}}} \right| = o\left[(\ln\ln t)^{-\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Mais puisque le M.B.vérifie (1.4) *alors :*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{S(t)}{(2t\ln\ln t)^{\frac{1}{2}}} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\frac{S(t) - W(t)}{(2t\ln\ln t)^{\frac{1}{2}}} + \frac{W(t)}{(2t\ln\ln t)^{\frac{1}{2}}} \right] = 1 \; p.s.$$

Ainsi :

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B_{n,d(1-l)} nh_n^{d(1-l)} \left[f_n^l(x) - \mathbb{E} f_n^l(x)\right]}{(2V_n \ln\ln V_n)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\left\{nh_n^{d(1-2l)} \ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{nh_n^{d(1-2l)} \ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}} = 1 \; p.s.$$

Mais nous avons :

$$\frac{\left\{nh_n^{d(1-2l)} \ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} B_{n,d(1-l)}}{(2V_n \ln\ln V_n)^{\frac{1}{2}}} \to \frac{\beta_{d(1-l)}}{\left[2\beta_{d(1-2l)} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du\right]^{\frac{1}{2}}}$$

lorsque $n \to \infty$.
Il vient alors :

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \left\{ \frac{nh_n^d}{\ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[f_n^l(x) - \mathbb{E}f(x)\right] = \sigma_l\sqrt{2}\ p.s.$$

Nous déduisons le résultat :

$$\ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right] = (\ln\ln n)[1 + o(1)].$$

(b) *Nous savons que*

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C} \downarrow c > 0.$$

vérifie $\boldsymbol{H}_2$ et par un calcul, on peut montrer que ce choix vérifie les conditions (2.4)*.*
En utilisant le (a) et le Théorème (2.2.1)*, on obtient (b).*

Corollaire 2.2.1 *Sous les hypothèses du théorème* (2.2.3)*, le choix*

$$h_n = n^{-v},\ 0 < v < \frac{1}{d+2}$$

alors

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^{1-vd}}{\ln\ln n}} \left[f_n^l(x) - f(x)\right] = \left\{ \frac{2[1 - vd(1-l)]^2}{c^d[1 - vd(1-2l)]} f(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \|K\|_2\ p.s.$$

b. Cas dépendant : Nous étudions la convergence presque sûre de notre famille d'estimateurs et nous établirons le comportement asymptotique presque sûre ponctuel de $f_n^l(x)$. À la fin, nous donnons un résultat uniforme pour cette convergence de notre famille d'estimateurs.

Proposition 2.2.3 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_3$, si :*

$$\frac{nh_n^d}{(\ln n)^3} \to +\infty$$

lorsque $n \to \infty$, alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{\frac{nh_n^d}{\ln n}} \left| f_n^l(x) - \mathbb{E} f_n^l(x) \right| \leq 1 + \sigma_l^2 \ p.s$$

De plus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{2}{d+4}} \left| f_n^l(x) - \mathbb{E} f_n^l(x) \right| \leq 2c^{-\frac{d}{2}} \left(1 + \sigma_l^2 \right) + \frac{c^2 \beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} |b_f(x)|.$$

Avec

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d+4}}, \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0.$$

Pour la preuve de proposition (2.2.3) (voir [2])

Théorème 2.2.4 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$ et $\boldsymbol{H}_3$, avec f une densité bornée, soit $c_d > 0$, et $\mu \geq 0$ deux constantes. Si K satisfait une condition lipschitzienne alors :*

$$\sup_{\|x\| \leq c_d n^{\mu}} \left| f_n^l(x) - f(x) \right| = O \left[\left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{2}{d+4}} \right]$$

De plus, si K est à support compact, $f(x)$ décroissante à partir d'un certain x, $E\|X_0\| < \infty$ et $\mu > 2$, alors :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| f_n^l(x) - f(x) \right| = O \left[\left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{2}{d+4}} \right].$$

Preuve 2.2.4 (a) *Nous procédons de la même manière que Bosq et Blanke [11], pour la démonstration de la convergence presque sûre de l'estimateur non récursif de Parzen-Rosenblatt.*
Par les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$ et puisque $f \in \mathcal{C}_d^2(b)$, l'application de la formule de Taylor

donne :

$$\begin{aligned}
|\ \mathbb{E}f_n^l(x) - f(x)\ | &\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{k=i}^n h_k^{d(1-l)} |\int_{\mathbb{R}^d} K(z)(f(x - h_i z) - f(x))dz| \\
&\leq \frac{h_n^2}{B_{n,d(1-l)}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k}{h_n}\right)^{d(1-l)+2} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - \theta h_i) \int_{\mathbb{R}^d} |z_i z_j| K(z) dz \\
&\leq \frac{h_n^2}{B_{n,d(1-l)}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{h_k}{h_n}\right)^{d(1-l)+2} \frac{b}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |z_i z_j| K(z) dz.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\overline{lim}_{n\to\infty} h_n^{-2} \sup |\ \mathbb{E}f_n^l(x) - f(x)\ | \leq \frac{b}{2} \left[\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}}\right] \sum_{i,j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |v_i v_j| K(v) dv.$$

Ensuite, on pose :

$$D_n = \left\{ x : \|x\| \leq \frac{c_d n^\mu}{M_n} \right\},$$

où M_n est un réel que l'on donnera la valeur par la suite. On couvre ce compact par M_n^d hypercubes $D_{k,n}$ centrées en $x_{k,n}$ définies par :

$$D_{k,n} = \left\{ x : \|x - x_{k,n}\| \leq \frac{c_d n^\mu}{M_n} \right\}, \qquad pour 1 \leq k \leq M_n^d,$$

avec :

$$D_{k,n}^o \cap D_{k',n}^o \neq \emptyset, \qquad pour 1 \leq k \neq k' \leq M_n^d.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\| \leq c_d n^\mu} |\ f_n^l(x) - \mathbb{E}f_n^l(x)\ | &\leq \max_{1\leq k\leq M_n^d} \sup_{x \in D_{k,n}} |\ f_n^l(x) - f_n^l(x_{k,n})\ | \\
&+ \max_{1\leq k\leq M_n^d} |\ f_n^l(x_{k,n}) - \mathbb{E}f_n^l(x_{k,n})\ | \\
&+ \max_{1\leq k\leq M_n^d} \sup_{x \in D_{k,n}} |\ \mathbb{E}f_n^l(x_{k,n}) - \mathbb{E}f_n^l(x)\ | \\
&= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Puisque K est lipschitzienne, alors il existe $L > 0$ tel que :

$$| f_n^l(x) - f_n^l(x_{k,n}) | \leq \frac{L\|x - x_{k,n}\|}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+dl}},\ x \in D_{k,n},\ 1 \leq k \leq M_n.$$

Donc :

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} (A_1 + A_3) \leq \frac{2Lc_d n^{\frac{2}{d+4}+\mu} \sum_{i=1}^n h_i^{-(1+dl)}}{M_n (\ln n)^{\frac{2}{d+4}} \sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} = \frac{2Lc_d n^{\frac{2}{d+4}+\mu} B_{n,-(1+dl)}}{M_n (\ln n)^{\frac{2}{d+4}} h_n^{d+1} B_{n,d(1-l)}}.$$

On choisit alors :

$$M_n = \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} n^\mu h_n^{-(1+dl)} \log_m n,\ m \geq 1.$$

Donc :

$$\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} (A_1 + A_3) = o(1).$$

On écrivons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq M_n^d} | f_n^l(x_{k,n}) - \mathbb{E} f_n^l(x_{k,n}) | > \varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{M_n^d} P\left(| f_n^l(x_{k,n}) - \mathbb{E} f_n^l(x_{k,n}) | > \varepsilon\right).$$

Ensuite, nous reprenous les mêmes étapes de la preuve de la proposition, mais nous majorons par la borne uniforme pour contrôler la somme des moments d'ordre 2 des variables $V_n^*(2j-1)$ suivante :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n Var Z_k \leq \frac{\|K\|_2^2 \|f\|_\infty B_{n,d(1-2l)}}{n h_n^d B_{n,d(1-l)}^2}.$$

Il vient alors :

$$\lambda_n^2 \sum_{j=1}^{q_n} \mathbb{E} V_n^*(2j-1) \leq \frac{\|K\|_2^2 \|f\|_\infty \beta_{d(1-2l)}}{n h_n^d \beta_{d(1-l)}^2} \ln n[1 + o(1)],$$

où $o(1)$ *uniforme en* $x_{k,n}$.

Par conséquent :

$$P\left[\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}|f_n^l(x_{k,n})-\mathbb{E}f_n^l(x_{k,n})|>\eta\right]\leq\frac{8M_n^d\|K\|_\infty(1+k)c^{\frac{d}{2}}}{\eta^k}\rho_0\frac{n^{\frac{d+2}{d+4}-\rho_1\rho_0}}{B_{n,d(1-l)}(\ln n)^{\frac{d+2}{d+4}}}$$

$$+4M_n^d\exp\left\{-\left[\frac{\eta}{2(1+k)}-\frac{\|K\|_2^2\|f\|_\infty\beta_{d(1-2l)}}{\beta_{d(1-l)}^2}(1+o(1))\right]\ln n\right\}$$

Donc le choix :

$$M_n=\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}n^\mu h_n^{-(1-d)}\log_m n,\ \ m\geq 1,$$

implique que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left[\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}A_2\right]<\infty,$$

si l'on choisit :

$$p_0>\frac{\mu d+d+3}{\rho_1}\ et\ \eta>2(1+k)\left[\mu d+d+1+\frac{\|K\|_2^2\|f\|_\infty\beta_{d(1-2l)}}{\beta_{d(1-l)}^2}\right].$$

On obtient ainsi le résultat (a) du Théorème (2.2.4) *par application du Lemme de Borel-Cantelli.*

(b) *Nous avons :*

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}\mid f_n^l(x)-f(x)\mid &\leq \sup_{\|x\|\leq c_dn^\mu}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}\mid f_n^l(x)-f(x)\mid\\
+\sup_{\|x\|>c_dn^\mu}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}\mid f_n^l(x)\mid &+ \sup_{\|x\|>c_dn^\mu}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}f(x)\\
&= B_1+B_2+B_3\end{aligned}$$

B_1 *est étudié en (a). Pour le terme* B_3, *nous avons :*

$$B_3\leq\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}}{c_dn^\mu}\sup_{\|x\|>c_dn^\mu}\|x\|f(x).$$

D'une part, puisque $\mu > 2$*, alors :*

$$\frac{\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}}}{c_d n^\mu} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$*,*

d'autre part, puisque f *est décroissante à partir d'un certain rang et intégrable, alors :*

$$\sup_{\|x\| > c_d n^\mu} \|x\| f(x) \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$*.*

Ainsi :

$$B_3 \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$*.*

Enfin, pour étudier B_2*, on considère les évènements :*

$$E_1 = \left\{ \forall \eta > 0, \sup_{\|x\| > c_d n^\mu} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \mid f_n^l(x) \mid > \eta \right\} \text{ et } E_2 = \left\{ \sup_{1 \leq j \leq n} \|X_j\| > \frac{c_d n^\mu}{2} \right\}.$$

On a pour tout $\eta > 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\left[\sup_{\|x\| > c_d n^\mu} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \mid f_n^l(x) \mid > \eta\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_1 \cap E_2) + \sum_{n=1}^{\infty} P(E_1 \cap E_2^c) \\ &= P_1 + P_2. \end{aligned}$$

On note $[-c_K, c_K]$ *le support de* K*.*

Puisque $c_d n^\mu \to \infty$*, lorsque* $n \to \infty$*, alors il existe* $n_0 \geq 0$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on ait :*

$$\frac{c_d n^\mu}{2h_1} > c_K.$$

Ainsi pour tout x *tel que* $\|x\| > c_d n^\mu$ *et* $n \geq n_0$*, on a par l'inégalité triangulaire et la décroissance de* h_n *que :*

$$\left\| \frac{x - X_j}{h_j} \right\| > \frac{c_d n^\mu}{2h_1} > c_K, \text{ si } \sup_{1 \leq j \leq n} \|X_j\| \leq \frac{c_d n^\mu}{2},$$

ce qui entraîne du fait que K est à support compact que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $1 \leq j \leq n$, que :

$$K\left(\frac{x - X_j}{h_j}\right) = 0.$$

Ainsi pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$E_2^c \subset \left\{ \sup_{\|x\| > c_d n^{\mu}} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \mid f_n^l(x) \mid = 0 \right\}.$$

Donc pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$E_1 \cap E_2^c = \emptyset \; et \; E_1 \subset E_2.$$

C'est-à-dire :

$$P_2 = \sum_{n=1}^{n_0} P(E_1 \cap E_2^c) < \infty \; et \; P_1 \leq \sum_{n=1}^{n_0} P(E_1 \cap E_2) + \sum_{n=n_0}^{\infty} P(E_2).$$

Le premier terme du second membre de P_1 est fini, ensuite par l'inégalité de Markov nous avons :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P(E_2) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} P\left[\|X_0\| > \frac{c_d n^{\mu-1}}{2}\right] \leq \frac{c_d E\|X_0\|}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{1-\mu}.$$

Donc, il en résulte grâce au lemme de Borel-Cantelli, que :

$$B_2 \to 0 \, p.s,$$

lorsque $n \to \infty$, si $\mu > 2$, donc (b) est prouvé.

2.2.5 Normalité asymptotique

Étudions maintenant la normalité asymptotique de notre famille d'estimateurs.

Théorème 2.2.5 *Supposons les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$-$\boldsymbol{H}_3$ satisfaites et pour toutes suites d'entiers u_n et v_n, la suite h_n vérifie la condition :*

$$u_n \sim v_n \Rightarrow h_{u_n} \sim h_{v_n}.$$

S'il existe un réel positif $\varsigma_0 > 4$ tel que :

$$\frac{nh_n^{3d}}{(\ln n)^{\varsigma_0}} \to +\infty$$

lorsque $n \to \infty$, alors pour tout x tel que $f(x) > 0$, on a :

$$\sqrt{nh_n^d}\left[f_n^l(x) - Ef_n^l(x)\right] \to \mathcal{N}\left(0, \sigma_l^2\right)$$

lorsque $n \to \infty$, avec

$$h_n = \mathcal{C}n^{-v},\ 0 < v \leq \frac{1}{3d},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0.$$

Corollaire 2.2.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si h_n vérifie la condition suivante :*

$$nh_n^{d+4} \to 0$$

lorsque $n \to \infty$, alors :

$$\sqrt{nh_n^d}\left[f_n^l(x) - f(x)\right] \to \mathcal{N}\left(0, \sigma_l^2\right)$$

lorsque $n \to \infty$.
Remarquons pour $d = 1$ avec

$$h_n = \mathcal{C}n^{-v},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,\ \frac{1}{4} < v < \frac{1}{3},$$

2.3 Comparaison d'estimateurs

Maintenant les biais, variance et EQM asymptotiques exacts de nos estimateurs sont établis en fonction d'un paramètre $l \in [0, 1]$, la question est de savoir comment choisir ce paramètre pour obtenir le meilleur estimateur selon des critères de comparaison donnés et si selon les mêmes critères, en utilisant un noyau récursif à la place du noyau classique. Les critères de comparaison utilisées sont ponctuels et basés sur les biais, variance, EQM et la convergence presque sûre.

Définition 2.3.1 *Soient $f_n(x)$ et $g_n(x)$ deux estimateurs à noyau de $f(x)$.*

(i) *On dira que $f_n(x)$ est préférable à $g_n(x)$ au point x, au sens du biais et on notera :*

$$f_n(x) \prec_b g_n(x)$$

si :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[Ef_n(x) - f(x)]^2}{[Eg_n(x) - f(x)]^2} < 1$$

(ii) *On dira que $f_n(x)$ est préférable à $g_n(x)$ au point x, au sens de la variance et on notera :*

$$f_n(x) \prec_v g_n(x)$$

si :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var f_n(x)}{Var g_n(x)} < 1$$

(iii) *On suppose que $f(x) > 0$ et on choisit :*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

avec :

$$c = c_{\min}[f_n(x)](resp. c = c_{\min}[g_n(x)])$$

Sous ces conditions, on dira que $f_n(x)$ est préférable à $g_n(x)$ au point x, au sens de l'EQM et on notera :

$$f_n(x) \prec_{L^2} g_n(x)$$

si :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{[Ef_n(x) - f(x)^2]}{[Eg_n(x) - f(x)^2]} < 1$$

(iv) *Si* $f(x) > 0$ *et*

$$h_n = n^{-v},\ 0 < v < \frac{1}{d+2},$$

sous ces conditions, on dira que $f_n(x)$ *est préférable à* $g_n(x)$ *au point* x*, au sens de la convergence presque sûre et on notera :*

$$f_n(x) \prec_{p.s} g_n(x)$$

si :

$$0 \leq \frac{\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x) - f(x)|}{\overline{\lim_{n\to\infty}} |g_n(x) - f(x)|} < 1 \ p.s.$$

Théorème 2.3.1 *On suppose que les hypothèses* $\boldsymbol{H}_1$ *et* $\boldsymbol{H}_3$ *sont vérifiées. On choisit*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-v},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,\ 0 < v < \frac{1}{d+2},$$

pour tous $l_1, l_2 \in [0,1]$ *:*

(a) *Si* $l_1 < l_2$ *alors :*

$$f_n^{l_1}(x) \prec_v f_n^{l_2}(x)\ (resp.\ f_n^{l_2}(x) \prec_b f_n^{l_1}(x))$$

(b) *Si* $f(x) > 0$ *et* $v = \frac{1}{d+4}$, *et si* $l_1 < l_2$ *alors :*

$$f_n^{l_2}(x) \prec_{L^2} f_n^{l_1}(x)$$

(c) *Dans le cas où les* X_t *sont i.i.d, si* $l_1 < l_2$ *alors :*

$$f_n^{l_1}(x) \prec_{p.s} f_n^{l_2}(x)$$

Preuve 2.3.1 **(a)** *Pour*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-v},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,\ 0 < v < \frac{1}{d+2},$$

la partie variable en l de la variance de nos estimateurs s'écrit :

$$\frac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta^2_{d(1-l)}} = \frac{[1-vd(1-l)]^2}{1-vd(1-2l)} = \frac{v^2d^2l^2+2vd(1-vd)l+(1-vd)^2}{2vdl+1-vd} = F(l).$$

Avec F est définie et dérivable sur $[0,1]$,
puisque

$$0 < v < \frac{1}{d+2},$$

et pour tout $l \in [0,1]$

$$F'(l) = \frac{2v^2d^2l(vdl+1-vd)}{(2vdl+1-vd)^2} = \frac{N(l)}{D(l)}.$$

Avec $N(l)$ *s'annule en 0 et en* $l = \frac{vd-1}{dv} < 0$, $N(l)$ *est positive sur* $[0,1]$.
Par suite, $Varf_n^l(x)$ *est fonction croissante en l.*
On conclut :

$$\frac{\beta_{d(1-2l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} = \frac{1-vd(1-l)}{1-vd(1-l)-2v} = G(l).$$

Avec $G(l)$ *s'annule en* $1-l = \frac{2v+1}{vd}$
Donc la fonction G est définie, positive et dérivable sur $[0,1]$ *et pour tout* $l \in [0,1]$ *:*

$$G'(l) = \frac{-2v^2d}{(1-vd(1-l)-2v)^2} < 0.$$

(b) *On a pour* $f_n^l(x)$ *:*

$$EQMA \sim h_n^4 BCA + \frac{VA}{nh_n^d},$$

[1] *et pour :*

$$h_n \sim \left(\frac{dVA}{4BCA^2}\right)^{\frac{1}{d+4}} n^{-\frac{1}{d+4}}.$$

[1] BCA : le biais au carré, va : la variance et EQMA : l'erreur quadratique moyenne asymptotique

Ainsi, pour tout $l \in [0,1]$ *:*

$$c_{\min}[f_n^l(x)] = \left[\frac{d(2+dl)f(x)\|K\|_2^2}{8(4+d)b_f^2(x)}\right]^{\frac{1}{d+4}},$$

implique que :

$$EQMf_n^l(x) \sim \frac{(4+dl)^2}{(2+dl)^{\frac{2(2+d)}{d+4}}}\left[b_f^2(x)\right]\left[\frac{f(x)\|K\|_2^2}{2(4+d)}\right]^{\frac{4}{d+4}}\left[\left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{4}{d+4}}\left(\frac{d}{4}\right)^{-\frac{4}{d+4}}\right]n^{-\frac{4}{d+4}}.$$

Ainsi, pour avoir le meilleur choix de l *dans* $[0,1]$ *au sens de l'EQM, il faudra minimiser la fonction :*

$$R(l) = (4+dl)^2(2+dl)^{-\frac{2(2+d)}{d+4}},$$

avec R *est définie et dérivable sur* $[0,1]$ *:*

$$R'(l) = \frac{4d^2(dl+4)(l-1)}{(d+4)(dl+2)^{\frac{8+3d}{d+4}}} \leq 0.$$

Donc, R est décroissante sur [0, 1].

Théorème 2.3.2 *On se place sous les hypothèses du théorème précédent alors :*

(a) *tous les estimateurs* $f_n^l(x)$, $l \in [0,1]$ *sont préférables à* $f_n^{PR}(x)$ *au sens de la variance.*

(b) *Aucun estimateur* $f_n^l(x)$, $l \in [0,1]$ *n'est préférable à* $f_n^{PR}(x)$ *au sens du biais.*

(c) *Si* $f(x) > 0$ *et* $v = \frac{1}{d+4}$, $f_n^{PR}(x)$ *est préférable à tous les estimateurs* $f_n^l(x)$, $l \in [0,1]$ *au sens de l'EQM.*

Preuve 2.3.2 **(a)** *Rappelons tout d'abord le résultat suivant :*
sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$*, alors :*

$$nh_n^d Var f_n^{PR}(x) \to f(x)\int_{\mathbb{R}^d} K^2(u)du,$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.
On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Varf_n^1(x)}{Varf_n^{PR}(x)} = \frac{\beta_{-d}}{\beta_0^2}$$

où :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-v},\ 0 < v \leq \frac{1}{d+2} \text{ et } \beta_r = \frac{1}{1-vr}.$$

Donc :

$$\frac{\beta_{-d}}{\beta_0^2} = \frac{1}{1-vr} < 1.$$

Ainsi, $f_n^1(x)$ *est meilleur au sens de la variance que* $f_n^{PR}(x)$. *En utilisant le théorème* (2.3.1) *(a) on obtient le résultat.*

(b) *Nous avons aussi besoin du résultat suivant :*
si $\boldsymbol{H}_1$ *et* $\boldsymbol{H}_2$ *sont vraies, alors :*

$$h_n^{-4}[Ef_n^{PR}(x) - f(x)]^2 \rightarrow b_f^2(x),$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.
On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Ef_n^1(x) - f(x)}{Ef_n^{PR}(x) - f(x)} = \frac{\beta_2}{\beta_0}$$

avec :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-v},\ 0 < v \leq \frac{1}{d+2}$$

donc :

$$\frac{\beta_{-d}}{\beta_0^2} = \frac{1}{1-v(d+2)} > 1.$$

Ainsi, $f_n^{PR}(x)$ *est meilleur au sens du biais que* $f_n^1(x)$. *D'aprés le théorème* (2.3.1) *(a) on obtient le résultat.*

(c) *On reprend les notations de la preuve du Théorème* (2.3.1) *(b).*

On a :

$$c_{\min}[f_n^1(x)] = \left[\frac{d(2+d)f(x)\|K\|_2^2}{8(4+d)b_f^2(x)}\right]^{\frac{1}{d+4}} \quad et c_{\min}[f_n^{PR}(x)] = \left[\frac{f(x)\|K\|_2^2 d}{4b_f^2(x)}\right]^{\frac{1}{d+4}}$$

avec :

$$n^{\frac{4}{d+4}} EQM f_n^1(x) \to \frac{(4+d)^2}{(2+d)^{\frac{2(2+d)}{d+4}}}[b_f^2(x)]^{\frac{d}{d+4}} \left[\frac{f(x)\|K\|_2^2}{2(4+d)}\right]^{\frac{4}{d+4}} \left[\left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{4}{d+4}} + \left(\frac{d}{4}\right)^{-\frac{4}{d+4}}\right]$$

$$n^{\frac{4}{d+4}} EQM f_n^{PR}(x) \to [b_f^2(x)]^{\frac{d}{d+4}} \left[f(x)\|K\|_2^2\right]^{\frac{4}{d+4}} \left[\left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{4}{d+4}} + \left(\frac{d}{4}\right)^{-\frac{4}{d+4}}\right],$$

lorsque $n \to \infty$.

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{EQM f_n^1(x)}{EQM f_n^{PR}(x)} > 1 \Leftrightarrow F(d) := (d+2)\ln\left(\frac{d+4}{d+2}\right) - 2\ln 2 > 0.$$

Ceci est vrai pour tout $d \geq 1$ *puisque nous avons :*

$$F(0) = 0,\ F^{'}(+\infty) = 0 \ et \ F^{"} = -\frac{4}{(d+2)(d+4)} < 0.$$

D'aprés le théorème (2.3.1) *(b) on obtient le résultat.*

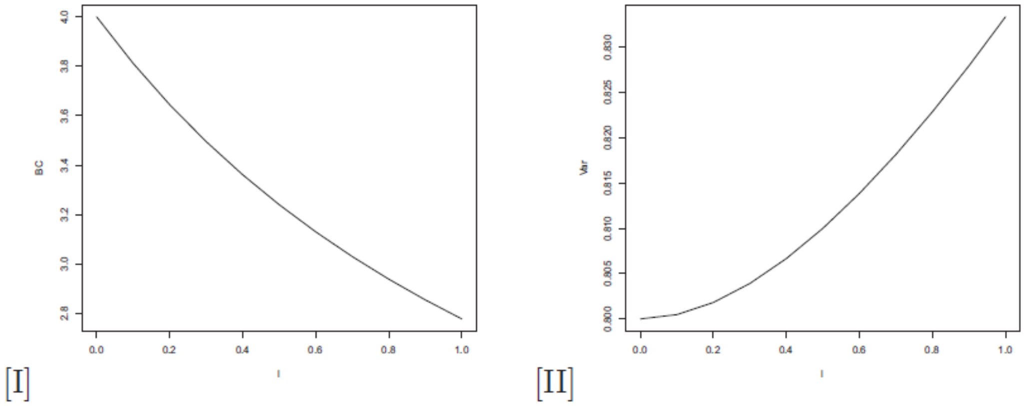

FIG. 2.1 – Constantes asymptotiques pour les Biais et Variance.

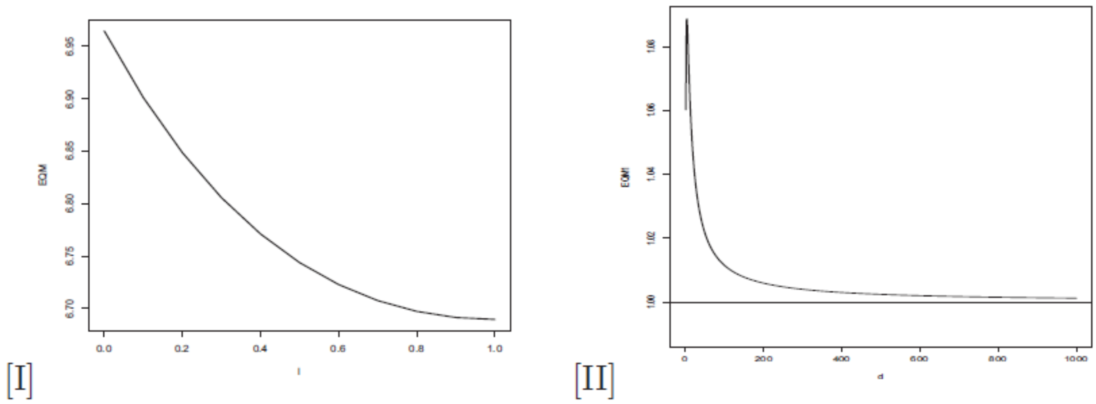

FIG. 2.2 – Constantes asymptotiques pour les EQM.

Chapitre 3

Estimateurs récursifs de la régression

3.1 Estimation

3.1.1 Présentation de l'estimateur

Soit $\{\varsigma_t = (X_t, Y_t), t \in \mathbb{N}\}$ *un processus stochastique bivarie, défini sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'} (d \geq 1, d' \geq 1)$ *tel que les* (X_t, Y_t) *ont la même densité.*
Nous allons estimer de manière récursive une version de la fonction de régression définie par :

$$r(x) = \begin{cases} E(m(Y_0)/X_0 = x) = \dfrac{\int_{\mathbb{R}^{d'}} m(y) f^*(x,y)dy}{f(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}, & si \;\; f(x) > 0 \\ \\ Em(Y_0), & si \;\; f(x) = 0, \end{cases}$$

où m *est une fonction positive Borélienne de* $\mathbb{R}^{d'}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
Nadaraya[22] et Waston [30] proposent l'estimateur non récursif :

$$r_n^{NW}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n m(Y_i) K_{h_n}(x, X_i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x, X_i)}, \; \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

avec :

$$K_{h_n}(.) = \frac{1}{h_n} K\big(\frac{.}{h_n}\big).$$

Dans ce chapitre, nous introduisons et étudions une nouvelle famille générale d'estimateurs récursifs à noyau de la régression, définie par :

$$r_n^l(x) = \frac{\varphi_n^l(x)}{f_n^l(x)}$$

où

$$\varphi_n^l(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \frac{m(Y_i)}{h_i^{dl}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)$$

avec $l \in [0,1]$.
L'estimateur $r_n^l(x)$ *peut se calcul de manière récursive par :*

$$r_{n+1}^l(x) = \frac{\left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right] \varphi_n^l(x) + \left[\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{d(1-l)}\right] m(Y_{n+1}) K_{n+1}^l(x - X_{n+1})}{\left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right] f_n^l(x) + \left[\sum_{i=1}^{n+1} h_i^{d(1-l)}\right] K_{n+1}^l(x - X_{n+1})}$$

où

$$K_i^l(x - X_i) = \frac{1}{h_i^{dl} \sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} K(\frac{x - X_i}{h_i})$$

3.2 Résultats de convergence

3.2.1 Hypothèses

$$\boldsymbol{H}_4 : \begin{cases} \textbf{\textit{i.}}\ f, \varphi \in \mathcal{C}_d^2(b), \\ \textbf{\textit{ii.}}\ \textit{La fonction} \quad \cdot \longmapsto \mathbb{E}[m^2(Y_0)/X_0 = \cdot]f(\cdot) \quad \textit{est continue et bornée,} \\ \textbf{\textit{iii.}}\ \textit{Il existe} \ \lambda > 0, \chi > 0 \ \textit{tels que :} \\ \qquad\qquad \mathbb{E}\exp(\lambda |m(Y_0)|^\chi) < \infty, \\ \textbf{\textit{iv.}}\ \textit{Pour chaque } k \neq k',\ (\zeta_k, \zeta_{k'}) \textit{admet une densité de probabilité } f_{(\zeta_k,\zeta_{k'})}, \textit{telle que :} \\ \qquad G = \sup_{|k-k'|\geq 1} \sup_{(s,t)\in\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^{d'}} |G_{k,k'}(s,u,t,v)|dudv < \infty, \\ \textit{où} \\ \qquad G_{k,k'}(s,u,t,v) = f_{(\zeta_k,\zeta_{k'})}(s,u,t,v) - f^*(s,u)f^*(t,v). \\ \textbf{\textit{v.}}\ (\xi_t) \ \textit{est un processus Géométriquement fortement mélangeant avec :} \\ \qquad \alpha_\xi(u) \leq \rho_0 e^{-\rho_1 u}, u \geq 1, \rho_0 > 0 \ \textit{et} \ \rho_1 > 0. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{H'}_4 : \begin{cases} \textbf{\textit{iv.}}\ \textit{Pour chaque } k \neq k', \textit{on a :} \\ (*) \qquad G_1 = \sup_{|k-k'|\geq 1} \parallel f_{X_k,X_{k'}/Y_{k'}}(s,t/v) - f(s)f_{X_{k'}/Y_{k'}}(t/v) \parallel_\infty < \infty, \\ (**) \qquad G_2 = \sup_{|k-k'|\geq 1} \parallel f_{X_k,X_{k'}/(Y_k,Y_{k'})}(s/u,t/v) - f_{X_k/Y_k}(s/u)f_{X_{k'}/Y_{k'}}(t/v) \parallel_\infty < \infty. \\ \textbf{\textit{v.}}\ (\zeta_t) \ \textit{est un processus 2-}\alpha\textit{-mélangeant avec :} \\ \qquad \alpha_\zeta^{(2)}(k) \leq \rho_0 k^{-\rho_1}, k \geq 1, \rho_0 > 0 \ \textit{et} \ \rho_1 > \max[8, 2(d+2)]. \end{cases}$$

Les hypothèses $\boldsymbol{H}_4$ sont classiques en estimation non paramétrique de la régression. Elles sont utilisées par Bosq et Blanke [11] pour l'étude de l'estimateur de Nadaraya et Woston. La condition $\boldsymbol{H}_4$(iii) est clairement vérifiée si m est bornée. Il est important de remarquer aussi que grâce à un argument de concavité de la fonction $(\ln x)^{\frac{p}{\chi}}$, la condition $\boldsymbol{H}_4$(iii) entraîne que pour tous $p \geq 1$, $n \geq 2$:

$$\mathbb{E}\big(\max_{1\leq i\leq n} \big|m(Y_i)^p\big|\big) = O\big[(\ln n)^{\frac{p}{\chi}}\big]. \tag{3.1}$$

Cette relation est également utilisée par Bosq et Cheze-Payaud pour établir la convergence en moyenne quadratique de l'estimateur non récursif.

3.2.2 Convergence presque sûre

a. Cas i.i.d :

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_2$ et $\boldsymbol{H}_4$ satisfaites. Si pour tout* $\alpha \geq 0$:

$$\frac{nh_n^d}{(\ln n)^{1+\frac{2}{\chi}}(\ln\ln n)^{2(\alpha+1)}} \to \infty,$$

lorsque $n \to \infty$, *et* $\underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{\ln h_n}{\ln n} < \infty$,
et si K *vérifie la condition :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^3 K(u) < \infty,$$

alors le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, \; \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

implique que :

$$\overline{lim}_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \left[r_n^l(x) - r(x)\right] = \mathcal{C}_0(x, K, \varphi, f, l) \;\; p.s,$$

où :

$$\mathcal{C}_0(x, K, \varphi, f, l) := \frac{1}{f(x)} \left[c^{-\frac{d}{2}}\sigma_l(x)\sqrt{2V(x)} + c^2 \frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_{\varphi,f}(x)\right],$$

avec :

$$\begin{aligned}
\sigma_l^2(x) &= \frac{\beta_{d(1-2l)}}{\beta_{d(1-l)}^2} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(x)dx \\
b_{\varphi,f}(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) - r(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right] \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j K(z)dz \\
V(x) &= \mathbb{E}[m^2(Y_0)/X_0 = x] - r^2(x)
\end{aligned}$$

Preuve 3.2.1 *En écrivant :*

$$r_n^l(x) - r(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_n^l(x) - r(x) f_n^l(x)}{f_n^l(x)} + \frac{\varphi_n^l(x) - \widetilde{\varphi}_n^l(x)}{f_n^l(x)}$$

où $\widetilde{\varphi}_n^l(x)$ désigne la version tronquée de $\varphi_n^l(x)$ définie par :

$$\widetilde{\varphi}_n^l(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \sum_{i=1}^n \frac{m(Y_i)}{h_i^{dl}} \mathbb{1}_{\{|m(Y_i)| \leq b_n\}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right), \tag{3.2}$$

avec b_n une suite réelle tendant vers $+\infty$ lorsque $n \to \infty$.
Pour étudier le terme résiduel, si l'on choisit :

$$b_n = (\delta \ln n)^{\frac{1}{\chi}},$$

alors nous avons pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} P\left[|\varphi_n^l(x) - \widetilde{\varphi}_n^l(x)| > \varepsilon \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+4}}\right] &\leq P\left[\frac{\sum_{i=1}^n |m(Y_i)| \mathbb{1}_{\{|m(Y_i)| > b_n\}} K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)}{\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} > \varepsilon\right] \\ &\leq P(\cup_{i=1}^n \{|m(Y_i)| > b_n\}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n P(|m(Y_i)| > b_n) = nP(|m(Y_0)| > b_n) \\ &\leq \mathbb{E} e^{\lambda\{|m(Y_0)|\chi} n^{1-\lambda\delta}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $\boldsymbol{H}_4(\boldsymbol{iii})$, il vient que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left[|\varphi_n^l(x) - \widetilde{\varphi}_n^l(x)| > \varepsilon \left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+4}}\right] < \infty,$$

si $\delta > \frac{2}{\chi}$ implique que :

$$\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+4}} |\varphi_n^l(x) - \widetilde{\varphi}_n^l(x)| \to 0 \; p.s,$$

lorsque $n \to \infty$.
On en déduit que le terme résiduel est négligeable, en vertu de la convergence

$$f_n^l(x) \to f(x)\; p.s.$$

Étudions maintenant la convergence du terme principal. Ce dernier se décompose de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_n^l(x) - r(x)f_n^l(x) &= \{\widetilde{\varphi}_n^l(x) - r(x)f_n^l(x) - \mathbb{E}[\widetilde{\varphi}_n^l(x) - r(x)f_n^l(x)]\} \\
&+ \{\mathbb{E}[\widetilde{\varphi}_n^l(x) - r(x)f_n^l(x)]\} \\
&= I_1^* + I_2^*.
\end{aligned}$$

On commence par étudier I_1^*. *Pour cela, on pose :*

$$Z_i^* = W_{n,i} - \mathbb{E}W_{n,i},$$

avec :

$$W_{n,i} = \frac{K\left(\frac{x - X_i}{h_i}\right)[m(Y_i) - r(x)]\mathbb{1}_{\{|m(Y_i)| \le b_n\}}}{h_i^{dl}},$$

et :

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n Z_i^*.$$

Alors :

$$I_1^* = \frac{S_n^*}{nB_{n,d(1-l)}h_n^{d(1-l)}}.$$

Donc :

$$V_n^* = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}Z_i^{*2}. \tag{3.3}$$

La première étape consiste à établir que :

$$\frac{S_n^*}{\sqrt{2V_n^* \ln\ln V_n^*}} \to 1 \;\; p.s;$$

lorsque $n \to \infty$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{V_n^*}{nh_n^{d(1-2l)}B_{n,d(1-2l)}} &= \frac{nh_n^d}{\left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^2}\sum_{k=1}^n\left\{h_k^{-2dl}\mathbb{E}K^2\left(\frac{x-X_0}{h_k}\right)[m(Y_0)-r(x)]^2\right. \\
&+ \left. h_k^{-2dl}\mathbb{E}K^2\left(\frac{x-X_0}{h_k}\right)m(Y_0)\left[2r(x)-m(Y_0)\right]\mathbb{1}_{\{|m(Y_0)|>b_n\}}\right\} \\
&\leq \frac{nh_n^d}{\left[\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\right]^2}\sum_{k=1}^n\left[h_k^{d(1-2l)}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{h_k^d}K^2\left(\frac{x-u}{h_k}\right)V(u)f(u)du\right] \\
&+ \frac{\|K\|_\infty^2\{\mathbb{E}m^2(Y_0)[2r(x)-m(Y_0)]^2P(|m(Y_0)|>b_n)\}^{\frac{1}{2}}nh_n^d\sum_{k=1}^n h_k^{-2dl}}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}} \\
&\leq \frac{nh_n^d}{B_{n,d(1-l)}^2 n^2 h_n^d}\sum_{k=1}^n\left[\left(\frac{h_k}{h_n}\right)^{d(1-2l)}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{h_k^d}K^2\left(\frac{x-u}{h_k}\right)V(u)f(u)du\right] \\
&+ \frac{\|K\|_\infty^2\{\mathbb{E}m^2(Y_0)[2r(x)-m(Y_0)]^2P(|m(Y_0)|>b_n)\}^{\frac{1}{2}}B_{n,-2dl}}{h_n^d B_{n,d(1-l)}^2} \\
&= D_1 + D_2.
\end{aligned}$$

Les hypothèses $\boldsymbol{H}_4$*(ii),* $\boldsymbol{H}_4$*(iii), le théorème de convergence dominée et le lemme de Bochner impliquent d'une part que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{h_k^d}K^2\left(\frac{x-u}{h_k}\right)V(u)f(u)du \longrightarrow f(x)V(x)\|K\|_2^2,$$

lorsque $k \to \infty$*, par suite l'hypothèse* $\boldsymbol{H_2}$*(ii), et le lemme* (2.2.1) *permettent d'en déduire que :*

$$D_1 \to \sigma_l^2(x)V(x)$$

lorsque $n \to \infty$.
D'autre part, si l'on choisi :

$$b_n = (\delta \ln n)^{\frac{1}{\chi}}$$

avec $\delta > \frac{2}{\lambda}$, *alors en utilisant la relation* (3.1) *et l'inégalité de Markov on obtient :*

$$D_2 = O\left[\frac{\exp\left(-\frac{\lambda b_n^\chi}{2}\right)(\ln n)^{\frac{2}{\chi}} B_{n,-2dl}}{h_n^d B_{n,d(1-l)}^2}\right] = O\left[\frac{n^{\frac{d}{d+4}-\frac{\lambda\delta}{2}}}{(\ln n)^{\frac{d}{d+4}-\frac{2}{\chi}}}\right] \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.
Il vient alors que :

$$V_n^* \sim n h_n^{d(1-2l)} \beta_{d(1-2l)} f(x) V(x) \int_{\mathbb{R}^d} K^2(u) du, \tag{3.4}$$

lorsque $n \to \infty$.
Maintenant par la condition (3.2.1), *nous avons :*

$$\frac{n h_n^d (\ln n)^{-\frac{2}{\chi}}}{\ln\left[n h_n^{d(1-2l)}\right]\left\{\ln\ln\left[n h_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{2(\alpha+1)}} \to \infty$$

lorsque $n \to \infty$. *Par suite le choix :*

$$b_n = (\delta \ln n)^{\frac{1}{\chi}}$$

implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$, *on ait :*

$$\frac{n h_n^d (\ln n)^{-\frac{2}{\chi}}}{\ln\left[n h_n^{d(1-2l)}\right]\left\{\ln\ln\left[n h_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{2(\alpha+1)}} > \|K\|_\infty^2 h_n^{-2dl} (\delta \ln n)^{-\frac{2}{\chi}} \geq Z_n^{*2}.$$

On apllique le Théorème (1.3.1) *pour obtenir :*

$$\frac{S_n^*}{(2V_n^* \ln\ln V_n^*)^{\frac{1}{2}}} \to 1 \ \ p.s,$$

lorsque $n \to \infty$.
La deuxième étape consiste à établir la convergence de I_1^* *à partir de cette dernière convergence.*

En utilisant la condition (3.2.1) *et le fait que :*

$$\frac{\left\{nh_n^{d(1-2l)}\ln\ln\left[nh_n^{d(1-2l)}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}B_{n,d(1-l)}}{(2V_n^*\ln\ln V_n^*)^{\frac{1}{2}}}\to\frac{\beta_{d(1-l)}}{\left[2\beta_{d(1-2l)}f(x)V(x)\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)du\right]^{\frac{1}{2}}}$$

lorsque $n\to\infty$*, on déduit que :*

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\left(\frac{nh_n^d}{\ln\ln n}\right)^{\frac{1}{2}}I_1^*=\frac{\left[2\beta_{d(1-2l)}f(x)V(x)\int_{\mathbb{R}^d}K^2(u)du\right]^{\frac{1}{2}}}{\beta_{d(1-l)}}\ p.s. \tag{3.5}$$

Maintenant, nous étudions le terme I_2^* *de* (3.3)*. Nous procédons de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}I_2^* &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}}\sum_{i=1}^n h_i^{-dl}\int_{\mathbb{R}^d}K\left(\frac{x-u}{h_i}\right)[r(u)-r(x)]f(u)du\\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}}\sum_{i=1}^n h_i^{d(1-l)}\int_{\mathbb{R}^d}[r(x-h_iz)-r(x)]f(x-h_iz)k(z)dz.\end{aligned}$$

Les hypothèses $\boldsymbol{H}_4$*(i),* $\boldsymbol{H}_4$*(ii) ainsi que la formule taylor donnent :*

$$\begin{aligned}I_2^* &= \frac{h_n^2}{B_{n,d(1-l)}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{h_k}{h_n}\right)^{d(1-l)+2}\\ &\times\ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\Big[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x-\theta h_kz)-r(x-\theta h_kz)\partial^2 f\partial x_i\partial x_j(x-\theta h_kz)\Big]z_iz_jK(z)dz,\end{aligned}$$

avec $0<\theta<1$.
Ensuite soit :

$$w_k=\sum_{i,j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\Big\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(x-\theta h_kz)-r(x-\theta h_kz)\partial^2 f\partial x_i\partial x_j(x-\theta h_kz)\Big\}z_iz_jK(z)dz.$$

D'aprés les hypothèses $\boldsymbol{H}_4$(ii), $\boldsymbol{H}_4$(iii) et le théorème de convergence dominée implique que :

$$w_k \to \sum_{i,j=1}^{d} \{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) - r(x)\partial^2 f \partial x_i \partial x_j(x)\} \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j K(z) dz,$$

lorsque $k \to \infty$.
Donc

$$h_n^{-2} I_2^* \to \frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_{\varphi,f}(x),$$

lorsque $n \to \infty$, *d'aprés les hypothèses* $\boldsymbol{H}_2$ *et le lemme* (2.2.1)
Ainsi, cette convergence utilisée conjointement avec (3.5) *et le choix :*

$$h_n = \mathcal{C}\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

permettent de conclure que :

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} \left[\tilde{\varphi}_n^l(x) - r(x) f_n^l(x)\right] = c^{-\frac{d}{2}} \sigma_l(x)\sqrt{2V(x)} + c^2 \frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_{\varphi,f}(x) \ p.s.$$

ce qui donne le résultat.

b. Cas dépendant :

Théorème 3.2.2 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$ et si K vérifie la condition :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^3 K(u) < \infty,$$

alors le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}}, \ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

implique que :

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} |r_n^l(x) - r(x)| \leq \mathcal{C}_1(x, K, \varphi, f, l) \ p.s,$$

où :

$$\mathcal{C}_1(x,K,\varphi,f,l) := \frac{1}{f(x)}\left\{2c^{-\frac{d}{2}}\left[1+\sigma_l^2(x)V(x)\right]+c^2\frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}}b_{\varphi,f}(x)\right\}.$$

Preuve 3.2.2 *La preuve se fait avec les mêmes étapes que celles de la preuve du théorème le terme résiduel se traite exactement comme pour la preuve du théorème, en remplaçant* $\ln\ln n$ *par* $\ln n$*. Eensuite, on reprend la décomposition du terme principal. Il suffit alors d'étudier le terme* I_1^**, car le terme* I_2^* *ne depend pas de la dépendance ou non des observations. Soit alors :*

$$Z_{i,n} = W_{n,i} - EW_{n,i}$$

$$\textit{avec} \ : W_{i,n} = \frac{K\left(\frac{x-X_i}{h_i}\right)[m(Y_i)-r(x)]1_{\{|m(Y_i)|\le b_n\}}}{B_{n,d(1-l)}h_n^{d(1-l)}h_i^{dl}}.$$

On procède de la même façon que pour la preuve de la proposition, en utilisant les mêmes définitions des suites p_n *et* q_n *et des sommes partielles, mais en remplaçant les blocs de variables* $\widetilde{V}_n(j)$ *par :*

$$V_n(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=(j-1)p_{n+1}}^{jp_n} Z_{k,n}, j=1,....,2q_n. \tag{3.6}$$

Avec cette nouvelle définition des blocs, on reprend la relation :

$$\mathbb{P}\left(|S_n'| > \frac{\epsilon}{2}\right) \le \mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=1}^{q_n} V_n(2j-1) - V_n^*(2j-1)\right| > \frac{\epsilon k}{2(1+k)}\right] + \mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=1}^{q_n} V_n^*(2j-1)\right| > \frac{\epsilon k}{2(1+k)}\right]$$

Où V_n^* *sont des variables aléatoires i.i.d de même loi que les* $V_n(j)$*. Pour l'étude du terme de mélange de cette décomposition, nous avons d'après* (3.6) *et la décroissance de* h_n*, que :*

$$\max_{1\le j\le 2q_n}|V_n(2j-1)| \le \frac{2p_nb_n\|K\|_\infty}{B_{n,d(1-l)}nh_n^d}.$$

On peut alors écrire que :

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=1}^{q_n} V_n(2j-1) - V_n^*(2j-1)\right| > \frac{\epsilon k}{2(1+k)}\right] \le \frac{4\|K\|_\infty(1+k)}{\epsilon k}\rho_0\frac{b_ne^{-\rho_1\rho_0\ln n}}{B_{n,d(1-l)}nh_n^d}.$$

Le second membre de cette dernière inégalité est le terme général d'une série convergente, compte-tenu des choix :

$$b_n = (\delta \ln n)^{1/x} \text{ avec } \delta > \frac{2}{\lambda} \text{ et } h_n = C_n(\frac{\ln n}{n})^{1/d+4}, \quad C_n \downarrow c > 0, \tag{3.7}$$

Maintenant pour le terme i.i.d, si l'on considère λ_n et ϵ_n définis dans, les choix (3.7) *impliquent que :*

$$|\lambda_n V_n^*(j)| \leq \frac{\|K\|_\infty p_n b_n}{B_{n,d(1-l)}} (\frac{\ln n}{n h_n^d})^{1/2} \longrightarrow 0,$$

Lorsque $n \longrightarrow \infty$. Ce qui permet de retrouver la majoration suivante :

$$\mathbb{P}\left[|\sum_{j=1}^{q_n} V_n^*(2j-1)| > \frac{\epsilon_n}{2(1+k)}\right] \leq 2\exp\left[-\frac{\lambda_n \epsilon_n}{2(1+k)} + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^{q_n} EV_n^{*2}(2j-1)\right]$$

Ensuite, le contrôle de la somme des moments d'ordre 2 des $V_n^*(2j-1)$, se fait en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.2.1 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$, nous avons :*

$$\frac{h_n^d}{n} \sum_{k=1}^{n} VarZ_{k,n} \to \sigma_l^2(x)V(x) \text{ et } \frac{h_n^d}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} Cov(Z_{k,n}, Z_{k',n}) \to 0$$

,

lorsque $n \to \infty$.
Ainsi :

$$\lambda_n^2 \sum_{j=1}^{q_n} \mathbb{E}V_n^{*2}(2j-1) \leq \sigma_l^2 V(x) \ln n[1 + o(1)]$$

lorsque $n \to \infty$.
Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left[\left|\sum_{j=1}^{q_n} V_n^*(2j-1)\right| > \frac{\eta}{2(1+k)}\sqrt{\frac{\ln n}{n h_n^d}}\right] \leq 2\exp\left\{\left[-\frac{\eta}{2(1+k)} + \sigma_l^2 V(x)[1+o(1)]\ln n\right]\right\}.$$

Donc on conclut :

$$\overline{lim}_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{2}{d+4}} I_1^* \leq 2c^{-\frac{d}{2}}[1+\sigma_l^2 V(x)]\ p.s. \tag{3.8}$$

Pour la preuve de lemme (3.2.1) *(voir [2])*

Nous donnons maintenant un résultat uniforme sur la convergence presque sûre de notre famille d'estimateurs de la régression.

Théorème 3.2.3 *Soit D un compact de $\mathbb{R}^d$. Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$, si K est lipschitzienne et satisfait la condition :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|^3 K(u) < \infty,$$

et si :

$$\inf_{x\in D} f(x) > 0,$$

alors le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

implique que :

$$\sup_{x\in D} \mid r_n^l(x) - r(x) \mid = O\left[\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+4}} (\ln n)^{\frac{1}{\chi}}\right].$$

Pour la preuve de théorème (3.2.3) *(voir [2])*

3.2.3 Convergence en moyenne quadratique

On s'intéresse maintenant à la convergence en moyenne quadratique de $r_n^l(x)$ dans le cas dépendant.

Lemme 3.2.2 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$, en remplaçant $\boldsymbol{H}_4$**(iv)** par $\boldsymbol{H}_4^{'}$**(iv)**, si :*

$$(\ln n)^{\frac{1}{\chi}} h_n^d \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, *alors :*

$$nh_n^d Cov\big[f_n^l(x), \varphi_n^l(x)\big] \to \sigma_l^2(x) r(x),$$

lorsque $n \to \infty$.

Pour la preuve de lemme (3.2.2) (voir [2])

Remarque

Par conséquent, le lemme (3.2.2) avec le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0,$$

permettent d'écrire que :

$$n^{\frac{4}{d+4}} Cov\big[f_n^l(x), \varphi_n^l(x)\big] \to \frac{(4+dl)^2 f(x) r(x) \|K\|_2^2}{2\rfloor^d (4+d)(2+dl)},$$

lorsque $n \to \infty$.

Par suite, en utilisant la relation (3.12), nous avons :

$$\mathbb{E}_2 \to \frac{2r(x)}{f^2(x)} \left[\rfloor^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl} \right)^2 b_f(x) b_\varphi(x) + \frac{(4+dl)^2 f(x) r(x) \|K\|_2^2}{2\rfloor^d (4+d)(2+dl)} \right], \tag{3.9}$$

lorsque $n \to \infty$.

Lemme 3.2.3 *Sous les hypothèses* $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$ *et en remplaçant* $\boldsymbol{H}_4$***(iv)*** *par* $\boldsymbol{H}_4^{'}$***(iv)***, *si :*

$$(\ln n)^{\frac{2}{\chi}} h_n^d \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, *alors :*

$$nh_n^d Var\varphi_n^l(x) \to \sigma_l^2(x)\big[V(x) + r^2(x)\big],$$

lorsque $n \to \infty$.

Il vient alors que :

$$n^{\frac{4}{d+4}} \mathbb{E}_3 \to \frac{1}{f^2(x)} \left[c^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl} \right) b_\varphi^2(x) + \frac{(4+dl)^2 \big[V(x) + r^2(x)\big] f(x) \|K\|_2^2}{2c^d (4+d)(2+dl)} \right], \tag{3.10}$$

lorsque $n \to \infty$.

Pour la preuve de lemme (3.2.3) (voir [2])

Théorème 3.2.4 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$ et en remplaçant $\boldsymbol{H}_4$* ***(iv)-(v)*** *par $\boldsymbol{H}_4^{'}$* ***(iv)-(v)****, le choix :*

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

implique que pour tout $l \in [0,1]$:

$$n^{\frac{4}{d+4}} E\left[r_n^l(x) - r(x)\right]^2 \to \mathcal{C}_2(x, K, \varphi, f, l),$$

lorsque $n \to \infty$,
avec :

$$\mathcal{C}_2(x, K, \varphi, f, l) := \left\{\frac{c^2(4+dl)[r(x)b_f(x) + b_\varphi(x)]}{f(x)(2+dl)}\right\}^2 + \frac{(4+dl)^2\|K\|_2^2 V(x)}{2c^d(4+d)(2+dl)f(x)},$$

où :

$$b_\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \int_{\mathbb{R}^d} v_i v_j K(v) dv.$$

Preuve 3.2.3 *En décomposant l'EQM de $r_n^l(x)$ de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[r_n^l(x) - r(x)\big]^2 &= \frac{r^2(x)}{f^2(x)}\mathbb{E}\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2 - \frac{2r(x)}{f^2(x)}\mathbb{E}\big\{\big[f_n^l(x) - f(x)\big]\big[\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big]\big\} \\
&+ \frac{1}{f^2(x)}\mathbb{E}\big[\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big]^2 + \frac{1}{f^2(x)}\mathbb{E}\big\{\big[r_n^l(x) - r^2(x)\big]\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2\big\} \\
&- \frac{2}{f^2(x)}\mathbb{E}\big\{\big[r_n^l(x) - r(x)\big]\big[\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big]\big[f_n^l(x) - f(x)\big]\big\} \\
&= \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_3 + \mathbb{E}_4 + \mathbb{E}_5.
\end{aligned}$$

Le Théorème (2.2.2) implique que :

$$n^{\frac{4}{d+4}}\mathbb{E}_1 \to \frac{r^2(x)}{f^2(x)}\left[\rfloor^4\left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_f^2(x) + \frac{(4+dl)^2 f(x)\|K\|_2^2}{2\rfloor^d(4+d)(2+dl)}\right] \tag{3.11}$$

lorsque $n \to \infty$.
On a :

$$\mathbb{E}\big[f_n^l(x) - f(x)\big]\big[\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big] = \big[\mathbb{E}f_n^l(x) - f(x)\big]\big[\mathbb{E}\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big] + Cov\big[f_n^l(x), \varphi_n^l(x)\big].$$

De façon similaire que pour le Théorème (2.2.1) *(a), en remplaçant* f *par* φ*, il vient que :*

$$h_n^{-2}\big[\mathbb{E}\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big] \to \frac{\beta_{d(1-l)+2}}{\beta_{d(1-l)}} b_\varphi(x),$$

lorsque $n \to \infty$.
Ainsi :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{1}{d+4}},\ \mathcal{C}_n \downarrow \rfloor > 0,$$

donc :

$$n^{\frac{4}{d+4}}\big[\mathbb{E}f_n^l(x) - f(x)\big]\big[\mathbb{E}\varphi_n^l(x) - \varphi(x)\big] \to \rfloor^4 \left(\frac{4+dl}{2+dl}\right)^2 b_f(x) b_\varphi(x), \tag{3.12}$$

lorsque $n \to \infty$.
Le lemme (3.2.2) *démontré le terme de covariance.*
Soient deux nombres réels ε, γ*, on a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_4 &\leq \mathbb{E}\big\{\big|r_n^l(x) - r(x)\big|\big|r_n^l(x) + r(x)\big|\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2 \mathbb{1}_{|r_n^l(x)| \leq n^\gamma}\big\} \\ &+ \mathbb{E}\big\{\big[r_n^l(x) - r(x)\big]\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2 \mathbb{1}_{|r_n^l(x)| \leq n^\gamma}\big\} \\ &= G_1 + G_2. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$\begin{aligned} G_2 &\leq \mathbb{E}\big\{\max_{0 \leq i \leq n} |m(Y_i)|^2 \big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2 \mathbb{1}_{|r_n^l(x)| \leq n^\gamma}\big\} \\ &\leq \big\{\mathbb{E}\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^4 \mathbb{E}\big[\max_{1 \leq i \leq n} |m(Y_i)|^4\big] P\big[|r_n^l(x)| \leq n^\gamma\big]\big\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

D'abord le Théorème (2.2.2) *(i) entraîne que :*

$$\big\{\mathbb{E}\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^4\big\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\|K\|_\infty h_n^{-d} B_{n,-dl}}{B_{n,d(1-l)}} \big\{\mathbb{E}\big[f_n^l(x) - f(x)\big]^2\big\}^{\frac{1}{2}} = O\left[\frac{n^{\frac{d-2}{d+4}} B_{n,-dl}}{B_{n,d(1-l)}}\right].$$

Ensuite, nous avons :

$$\mathbb{E}\big[\max_{0\leq i\leq n}|m(Y_i)|^4\big] = O\big[(\ln n)^{\frac{4}{\chi}}\big].$$

Enfin :

$$P\big[|r_n^l(x)|\leq n^\gamma\big]\leq P\Bigg[\bigcup_{i=1}^n\{|m(Y_i)|>n^\gamma\}\Bigg]\leq n\exp(-\lambda n^{\chi\gamma})\mathbb{E}[\exp(\lambda|m(Y_0))|^\chi].$$

Par suite :

$$n^{\frac{4}{d+4}}G_2 = O\left[\frac{n^{\frac{d-8}{2(d+4)}}(\ln n)^{\frac{2}{\chi}}B_{n,-dl}}{\exp\left(\frac{\lambda n^{\gamma\chi}}{2}\right)B_{n,d(1-l)}}\right]\to 0,$$

lorsque $n\to\infty$.
Maintenant le terme G_1 *de* (3.13) *est contrôle par l'inégalité de Hölder, comme suit :*

$$\begin{aligned}
G_1 &\leq \big[n^\gamma + r(x)\big]\mathbb{E}\big\{\big[f_n^l(x)-f(x)\big]\big|r_n^l(x)-r(x)\big|\mathbb{1}_{\{|r_n^l(x)|\leq n^\gamma,|r_n^l(x)-r(x)|\leq n^{-(1+\varepsilon)\gamma}\}}\big\}\\
&+ \big[n^\gamma + r(x)\big]\mathbb{E}\big\{\big[f_n^l(x)-f(x)\big]\big|r_n^l(x)-r(x)\big|\mathbb{1}_{\{|r_n^l(x)|\leq n^\gamma,|r_n^l(x)-r(x)|> n^{-(1+\varepsilon)\gamma}\}}\big\}\\
&\leq n^{-(1+\varepsilon)\gamma}\big[n^\gamma+|r(x)|\big]\mathbb{E}\big[f_n^l(x)-f(x)\big]^2 + [n^\gamma+|r(x)|]\big\{\mathbb{E}\big[\big]^4\big\}^{\frac{1}{2}}\\
&\times \big\{\mathbb{E}\big|r_n^l(x)-r(x)\big|^{2v}\mathbb{1}_{\{|r_n^l(x)|\leq n^\gamma\}}\big\}^{\frac{1}{2v}}\big\{P\big[\big|r_n^l(x)-r(x)\big|>n^{-(1+\varepsilon)\gamma},\big|r_n^l(x)\big|\leq n^\gamma\big]\big\}^{\frac{1}{w}}\\
&= H_1+H_2,
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=1$
Il est clair que :

$$n^{\frac{4}{d+4}}H_1 = O\big(n^{-\varepsilon\gamma}\big)\to 0,$$

lorsque $n\to\infty$.
Nous avons d'abord :

$$[n^\gamma+|r(x)|]\big\{\mathbb{E}\big[f_n^l(x)-f(x)\big]^4\big\}^{\frac{1}{2}} = O\left[\frac{n^{\frac{d-2}{d+4}+\gamma}B_{n,-dl}}{B_{n,d(1-l)}}\right]. \tag{3.13}$$

Ensuite, puisque :

$$r_n^l - r(x) = r_n^l(x)\frac{f_n^l(x)-f(x)}{f(x)} + \frac{\varphi_n^l-\varphi(x)}{f(x)}$$

alors :

$$\mathbb{E}\big\{[r_n^l(x)-r(x)]^2 1_{\{|r_n^l(x)|\le n\gamma\}}\big\} \le \frac{2}{f^2(x)}\big\{n^2\gamma\mathbb{E}[f_n^l(x)-f(x)]^2+\mathbb{E}[\varphi_n^l(x)-\varphi(x)]^2\big\}$$

$$= O(n^{2\gamma-\frac{4}{d+4}}).$$

il en résulate que :

$$\begin{aligned}\big\{\mathbb{E}\big[|r_n^l(x)-r(x)|^{2v}1_{\{|r_n^l(x)|\le n^\gamma\}}\big]\big\}^{1/2v} &= \big\{\mathbb{E}\big[|r_n^l(x)-r(x)|^{2(v-1)+2}1_{\{|r_n^l(x)|\le n^\gamma\}}\big]\big\}^{1/2v}\\ &\le n^{\frac{2\gamma(v-1)}{2v}}\mathbb{E}\big\{[r_n^l(x)-r(x)]^2 1_{\{|r_n^l(x)|\le n^\gamma\}}\big\}\\ &= O(n^{\gamma-\frac{2}{v(d+4)}}).\end{aligned}$$

Enfin, sur l'ensemble :

$$\big\{|r_n^l(x)|\le n^\gamma\big\},$$

on a :

$$\big|r_n^l(x)-r(x)\big| \le \frac{1}{f(x)}\big\{n^\gamma[|f_n^l(x)-f(x)|]+[|\varphi_n^l(x)-\varphi(x)|]\big\}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}P\big(\big|r_n^l(x)-r(x)\big|>n^{-(1+\varepsilon)\gamma}\big|r_n^l(x)\big|\le n^\gamma\big) &\le P\big[n^\gamma\big(\big|f_n^l(x)-f(x)\big|\big)>\frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{2}\big]\\ &+ P\big[\big(\big|\varphi_n^l(x)-\varphi(x)\big|\big)>\frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{2}\big].\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}P\big[\big(\big|\mathbb{E}\varphi_n^l(x)-\varphi(x)\big|\big)>\frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{4}\big] &\le\\ &+ P\big[\big(\big|\varphi_n^l(x)-\mathbb{E}\varphi_n^l(x)\big|\big)>\frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{4}\big]\end{aligned}$$

Puisque :

$$\mathbb{E}\varphi_n^l(x)-\varphi(x)=o\big(h_n^2\big),$$

si l'on choisit γ *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *:*

$$0 < (1+\varepsilon)\gamma < \frac{2}{(d+2)},$$

alors le choix :

$$h_n = \mathcal{C}_n n^{-\frac{(1+\varepsilon)\gamma}{2}}, \mathcal{C}_n \downarrow c > 0$$

satisfait les hypothèses $\boldsymbol{H}_2$. *Il vient que le premier terme de* (3.14) *vaut zero. Le second s'écrit :*

$$\begin{aligned} P\big(\big|\varphi_n^l(x) - \mathbb{E}\varphi_n^l(x)\big| > \frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{4}\big) &\leq P\big[\big|\tilde{\varphi}_n^l(x) - \mathbb{E}\tilde{\varphi}_n^l(x)\big| > \frac{f(x)n^{-(1+\varepsilon)\gamma}}{8}\big] + P\big[\big|\big[\varphi_n^l(x) - \tilde{\varphi}_n^l(x)\big] \\ &= P_1 + P_2. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{|m(Y_i)| \leq b_n\} \subset \big\{\big|\big[\varphi_n^l(x) - \tilde{\varphi}_n^l(x)\big] - \mathbb{E}\big[\varphi_n^l(x) - \tilde{\varphi}_n^l(x)\big]\big| = 0\big\}.$$

Il vient que :

$$P_2 \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{|m(Y_i)| \leq b_n\}\right) \leq n\exp(-\lambda b_n^{\chi})\mathbb{E}e^{\lambda|m(Y_0)|^{\chi}} \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$.
Concernant P_1, *on sait que :*

$$\begin{aligned} P\big(\big|\tilde{\varphi}_n^l(x) - \mathbb{E}\tilde{\varphi}_n^l(x)\big| > \eta\sqrt{\frac{\ln n}{nh_n^d}}\big) &\leq \frac{8\|K\|_\infty(1+k)}{\eta k}\rho_0\frac{n^{-\rho_1\rho_0}b_n}{B_{n,d(1-l)}h_n^d} \\ &+ 4\exp\big\{-\big[\frac{\eta}{2(1+k)}\eta\eta - \sigma_l^2(x)[1+o(1)]\big]\ln n\big\}. \end{aligned}$$

le choix :

$$h_n = \left[\frac{64\eta^2\ln n}{n^{1-2\gamma(1+\varepsilon)}f^2(x)}\right]^{\frac{1}{d}}$$

si l'on choisit γ et ε tels que :

$$\frac{1}{(d+2)} < (1+\varepsilon)\gamma < 1,$$

et implique que :

$$P_1 = O\left[\frac{n^{1-2\gamma(1+\varepsilon)-\rho_1\rho_0}b_n}{B_{n,d(1-l)}\ln n}\right]. \tag{3.14}$$

Enfin, si l'on choisit $v = w = 2$, alors les relations (3.13), (3.14) *et* (3.14) *alors :*

$$n^{\frac{4}{d+4}}H_2 = O\left[\frac{n^{\varsigma}b_n^{\frac{1}{2}}B_{n,-dl}^{\frac{1}{2}}}{B_{n,d(1-l)}(\ln n)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

avec :

$$\varsigma = \frac{d+2}{d+4} + \gamma(1-\varepsilon) - \frac{\rho_1 p_0}{2}.$$

Donc :

$$n^{\frac{4}{d+4}}H_2 \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, si l'on choisit :

$$p_0 > \frac{2}{\rho_1}, \varepsilon \geq 1 \; et \; \frac{1}{(d+2)(1+\varepsilon)} < \gamma < \frac{2}{(d+2)(1+\varepsilon)}.$$

3.2.4 Normalité asymptotique

Lemme 3.2.4 *Sous les hypothèses $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$ si :*

$$(\ln n)^{\frac{1}{\chi}}h_n^d \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$, alors :

$$nh_n^d Cov\left[f_n^l(x), \tilde{\varphi}_n^l(x)\right] \to \sigma_l^2(x)r(x).$$

Pour la preuve de lemme (3.2.4) (voir [2])

Théorème 3.2.5 *Supposons que les hypothèses* $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{H}_4$ *satisfaites et que la suite* h_n *est décroissante telle que :*

$$nh_n^{d+4} \to 0 \; et \; (\ln n)^{\frac{1}{\chi}} h_n^d \to 0,$$

lorsque $n \to \infty$,
pour toutes suites d'entiers u_n *et* v_n *on a :*

$$u_n \sim v_n \Rightarrow h_{u_n} \sim h_{v_n}.$$

S'il xiste un réel positif $\varsigma_0 > 4$ *tel que :*

$$\frac{nh_n^d}{(\ln n)^{\varsigma_0}} \to +\infty,$$

lorsque $n \to \infty$.
Alors :

$$\sqrt{nh_n^d}\left[r_n^l(x) - r(x)\right] \to \mathcal{N}\left[0, \frac{\beta_{d(1-2l)}\|K\|_2^2 V(x)}{\beta_{d(1-l)}^2 f(x)}\right],$$

lorsque $n \to \infty$.

Pour la preuve de théorème (3.2.5) (voir [2])

Chapitre 4

Simulation

Dans ce chapitre, nous nous donnons des premiers éléments de simulation ayant pour but de présenter l'avantage des estimateurs récursifs en terme de temps de calcul. Nous analysons nos estimateurs dans le cas où la dimension $d = 1$.

Choix du noyau et de la fenêtre :

Pour construire nos estimateurs, nous utilisons :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Choix du paramètre de lissage :

Plusieurs auteurs parmi lesquels on peut citer Deheuvels [17], Carbon et Francq [10] recommandent le choix :

$$h_n = s_n n^{-\frac{1}{5}},$$

où s_n désigne l'écart-type estimé des observations.

4.1 Estimation de la densité

Dans cette section, nous analysons par des considérations numériques, les performances de la famille d'estimateurs récursifs de la densité $(f_n^l(x))$. Pour cela, on considère une suite (X_n) de variables aléatoire i.i.d, de densité de probabilité f. Le problème consiste donc en l'estimation permanente de f sur un intervalle $I = [a, b]$, sur la base des k premières observations $X_1, \ldots, X_k$, pour $k = n, \ldots, N$ avec n et N deux entiers naturels non nuls tels que $n < N$. Plus précisément, soit ω une subdivision de l'intervalle I définie par :

$$\omega = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_j = b\},\ j \geq 1$$

et pour $k = n, \ldots, N$. On calcule les valeurs $f_k^l(x_j)(l \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\})$ et $f_k^{PR}(x_j)$ en tout point x_j de ω.

Il est important de préciser que pour $k = n$, les estimateurs récursifs $f_n^l(x)$ sont calculés en un point x de ω, en utilisant la formule de récursivité (2.2.1), c'est à dire que nous avons initialisé l'algorithme à $f_n^l(x) = 0$, ensuite on a calculé $f_2^l(x)$, puis $f_3^l(x)$, en fonction de $f_2^l(x)$, et ainsi de suite jusqu'à $f_n^l(x)$.

Quant à l'estimateur non récursif le calcul de sa valeur pour $k = n$ est fait en utilisant sa formule exacte définie au chapitre 1.

Les performances des estimateurs sont évaluées par une mesure adéquate de la distance entre l'estimateur et la vraie valeur de la densité et par son temps de calcul.

1.Erreur quadratique moyenne empirique (EQME) : elle est définie (pour un estimateur $\widehat{f_k}$ de f) par :

$$EQME(\widehat{f_k}) = \frac{1}{J+1} \sum_{j=0}^{J} \left[\widehat{f_k}(x_j) - f(x_j)\right]^2.$$

2.Temps de calcul : on appelle temps de calcul d'un programme informatique le temps nécessaire à son exécution. On s'intéresse ici à l'évolution du temps de calcul d'un programme calculant un estimateur $\widehat{f_k}$ (on l'appellera temps de calcul de l'estimateur) en fonction de la taille des données $X_1, \ldots, X_k$, utilisées pour l'estimation.

Résultats :

Nous considérons un l'estimateur d'une densité gaussienne. Pour calculer les EQME, nous procédons de la manière suivante : on simule T échantillons ($T \in \mathbb{N}^*$) de taille N suivant une loi de densité f. Ensuite, pour chacun de ces échantillons, nous calculons l'EQME, correspondant à l'estimation de f à partir de l'échantillon considéré. Enfin, nous prenons la moyenne des T EQME obtenues.

Dans le cas étudiés, nous représentons d'abord la vraie densité avec ses estimateurs obtenus à partir du premier échantillon simulé (on aurait peut choisir un autre échantillon),

pour différentes valeurs de k et l. Ensuite, nous donnons l'EQME de nos estimateurs. Enfin, nous donnons leur temps de calcul.
Les résultats suivants sont obtenus pour :

$$n = 200,\ N = 500,\ \sigma = 5,\ I = [-10, 10],\ J = 400\, et\, x_j = x_{j-1} + 0.05,\ pour\, j = 1, \ldots, 400.$$

Dans la figure, les cinq premiers schémas représentent les estimateurs $f_k^l(x)$ pour $l \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ et $k = 200, 400$ avec la densité $f(x)$ sur l'intervalle $[-10, 10]$, tandis que la dernière représente l'estimateur non récursif de Parzen-Rosenblatt.

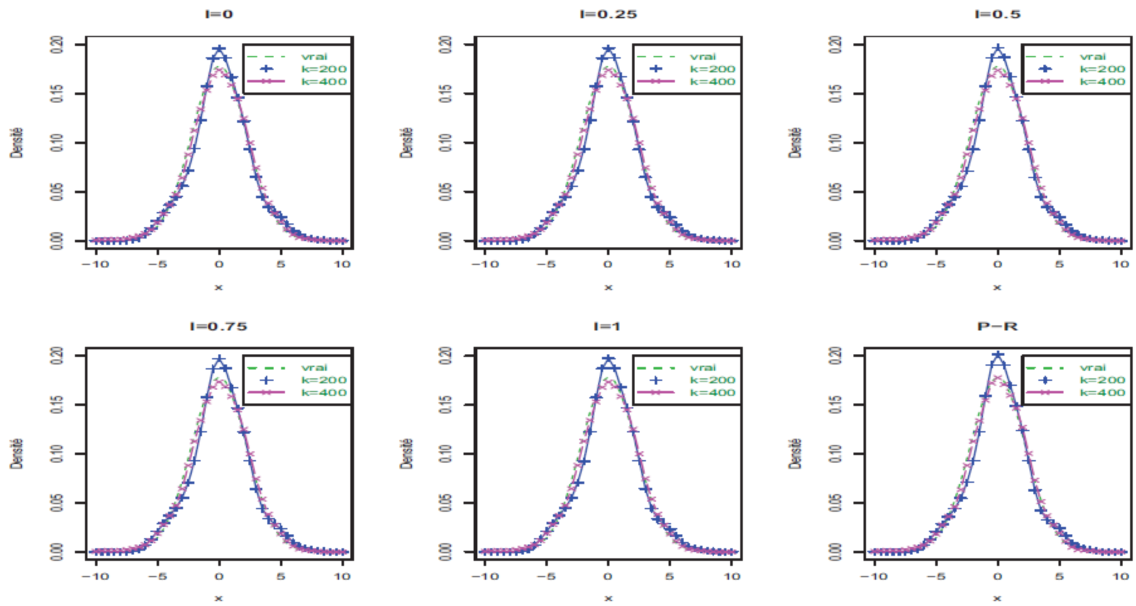

FIG. 4.1 – Estimateurs de la densité d'une loi normale sur [-10, 10]

Remarque : Nous remarquons que les six estimateurs sont tous compétitifs pour l'estimation de $f(x)$, mais nous allons faire un zoom au voisinage de 0, en réduisant l'intervalle de représentation à $[-2, 2]$, pour mieux visualiser l'évolution de nos estimateurs en fonction du nombre k d'observations considérées au graphe suivant.

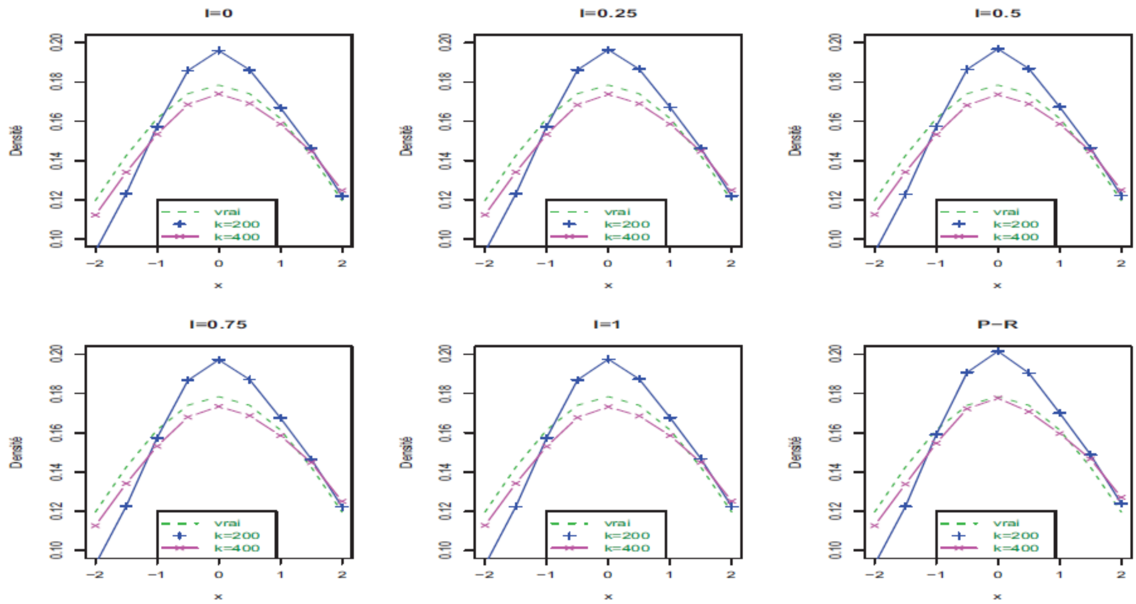

Fig. 4.2 – Estimateurs de la densité d'une loi normale sur [-2, 2]

Pour cela, nous étudions leurs EQME. Nous obtenons ainsi les résultats du tableau suivant avec $T = 100$ échantillons.

n	200	250	300	350	400	450	500
l=0	0.094	0.083	0.072	0.066	0.060	0.054	0.051
l=0.25	0.090	0.079	0.069	0.063	0.057	0.051	0.049
l=0.5	0.086	0.076	0.066	0.060	0.055	0.049	0.047
l=0.75	0.83	0.074	0.064	0.059	0.053	0.048	0.046
l=1	0.081	0.072	0.062	0.057	0.052	0.047	0.045
P-R	0.075	0.067	0.057	0.052	0.048	0.044	0.042

Tab. 4.1 – $EQME \times 10^3$ pour les estimateurs d'une densité gaussienne

Les résultats du tableau précédent sont représentés graphiquement à la figure suivante :

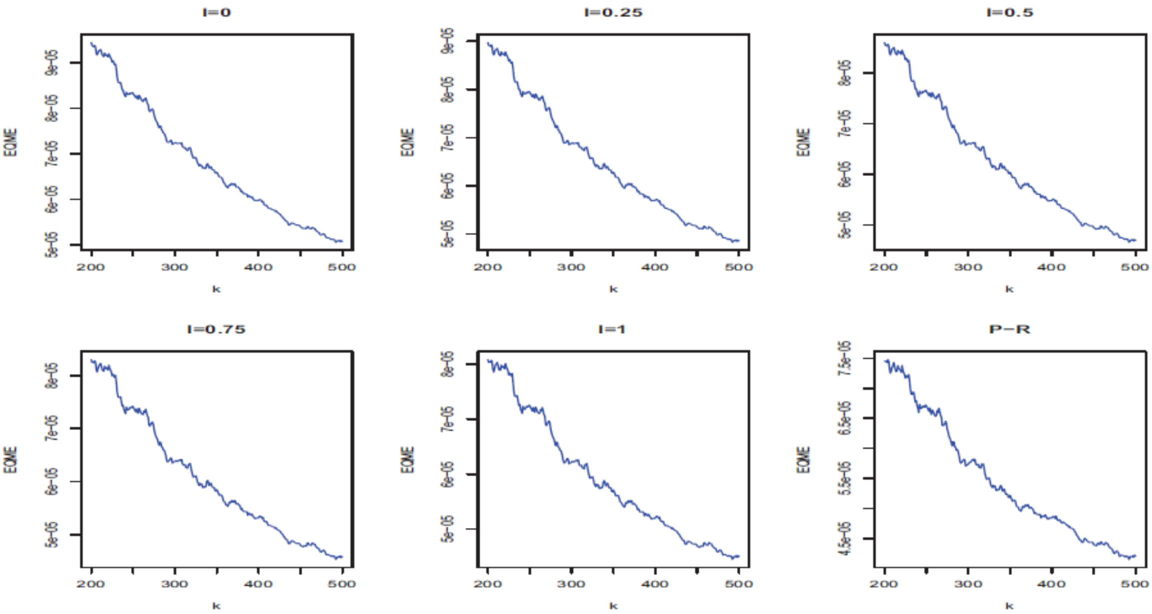

FIG. 4.3 – EQME pour les estimateurs d'une densité gaussienne

Le tableau suivant donne le temps CPU en secondes pour nos estimateurs récursifs

k	200	250	300	350	400	450	500
l=0	0.05	0.14	0.19	0.27	0.39	0.46	0.49
l=0.25	0.06	0.16	0.27	0.28	0.39	0.53	0.53
l=0.5	0.03	0.14	0.18	0.24	0.33	0.36	0.44
l=0.75	0.03	0.18	0.27	0.27	0.40	0.42	0.60
l=1	0.06	0.16	0.17	0.24	0.31	0.37	0.38
P-R	0.08	3.24	6.60	10.17	14.34	19.36	24.82

TAB. 4.2 – Temps CPU pour les estimateurs d'une densité gaussienne

Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail de nouvelles familles d'estimateurs récursifs de la densité et de la régression incluant les estimateurs récursifs usuels ainsi qu'une nouvelle famille de prédicteurs non paramétrique récursifs qui permettent de réduire le temps de calcul.
Notre étude a permis de constater que pour l'estimation de la densité et de la régression, le cas $l = 1$ est meilleur dans nos familles d'estimateurs. En effet, ce choix de paramètre minimise à la fois les erreurs d'estimation et le temps de calcul par rapport aux autres choix étudiés, bien que l'on peut considérer, au vu de ces résultats, que le choix de l n'a pas d'influence majeure sur le temps de cacul. Ce constant est trés important puisque les travaux réalisés sur le sujet mettent en avant l'efficacité du cas $l = 0$ à cause de la minimalité de sa variance.
Notre travail montre également qu'il y a une trés des erreurs d'estimation, en passant du noyau classique au noyau récursif, mais on regard du gain de temps de calcul.

Bibliographie

[1] **Ahmad**, I. and **Lin**, P.E. (1976). Nonparametric sequential estimatiion of a multiple regression function, *Bull. Math. Stati. 17, 63-75.*

[2] **Amiri**, A. Estimateurs fonctionnels récursifs et leurs applications à la prévision, *ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE, école Doctorale ED 536 Sciences et Agrosciences*

[3] **Amiri**, A.(2009). Sur une famille paramétrique d'estimateurs séquentiels de la densité pour un processus fortement mélangeant, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 347, 309-314.*

[4] **Banon**, G.(1976). Sur un estimateur non paramétrique de la densité de probabilité,*Revue de statistique apliquée. 24(4), 61-73.*

[5] **Berlinet**, A,**Biau**, G. and **Rouvière**, L.(2005). Optimal L^1 bandwidth selection for variable kernel density estimates, *Statist. Probab. Lett. 74(2), 116-128.*

[6] **Bilingsley**, P.(1986). Probability and Measure, *2nd ed, New York : Wiley.*

[7] **Blanke**, D.(1997). Estimation non paramétrique pour des processus à temps continu bruités ou partiellement observés, *Thèse de doctorat université Paris 6.*

[8] **Bochner**, S. (1955). Harmonic analysis and the theory of probability, *University of California Press.*

[9] **Bosq**, D.(1983). Sur la prédiction non paramétrique de variables aléatoires et mesures aléatoires,*Z, Wahrschein. Verw. Get. 64, 541-553.*

[10] **Bosq**, D.(1998). Nonparametric statistics for stochastic processes lecture. Estimation and prediction,*Lecture notes in statistics, 2nd ed. Springer-Verlag, New York.*

[11] **Bosq**, D. and **Blanke**, D.(2007). Inference and prediction in large dimensions,*Wiley series in probability and statistics.*

[12] **Bosq**, D. et **Lecoutre**, J.P. (1987). Théorie de l'estimation fonctiennelle,*cd. Economica.*

[13] **Box**, G.E.P, **Jenkins**, G.M. and **Reinsel**, G.C.(1994). Time series analysis : forcasting and control, *3rd ed. Prentice-Hall, New Jersey.*

[14] **Carbon**, M. et **Francq**, C.(1995). Estimation non paramétrique de la densité et de la régression-Prévision non paramétrique, *La Revue de Modulad, ISSN 1145-895X,15,1-25.*

[15] **Carbon**, M. and**Tran**, L.T. (1996). On histograms for linear processus, *J. Statist. Plann. Inference, 53(3), 403-419.*

[16] **Davies**, H. I. (1973). Strong consistency of a sequentiel estimator of a probability density function,*Bull. Math. Statist. 15, 49-54.*

[17] **Davydov**, Y.A. (1970) The invariance principle for stationary processus,*Theory Probab. Appl. 14, 487-498.*

[18] **Deheuvels**, P.(1973). Sur l'estimation séquentielle de densité, *C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. A, 276, 1119-1220.*

[19] **Deheuvels**, P.(1974). Conditions nécesssaires et suffisantes de convergence ponctuelle presque sûre et uniforme presque sûre des estimateurs de la densité,*C. R. Acad. Sci, Paris, 278, 1217-1220.*

[20] **Deheuvels**, P.(1974). Estimation séquentielle de la densité,*Thèse de doctorat, université Paris 6.*

[21] **Deheuvels**, P.(1977). Estimation non paramétrique de la densité par histogrammes généralisés, *Revue de Statistique appliquée, XXV, 5-42.*

[22] **Devroye**, L.(1979). On the pontwise and the integral convergence of recursive kernel estimates densities,*Util. Math. 15, 113-128.*

[23] **Devroye**, L. and**Wagner**, T.J.(1980). On the L^1 convergence of kernel estimators of regression funtions with application in discrimination,*Z. Wahrschein. Verw. Get. 51, 15-25.*

[24] **Ferraty**, F, **Goiab**, A. et **Vieu**, P. (2002). Régression non-paramétrique pour des variables aléatoires fonctionnelles mélangeantes, **C. R.Acad. Sci, Paris, Ser. I, 334,217-220.**

[25] **Ferraty**, F. and**Vieu**, P.(2006). Non parametric functional data analysis : Methods theory, applications and implementations.*Springer, London.*

[26] **Greblecki**, W. and **Pawlak**, M. (1987). Necessary and sufficient consistency conditions for a recursive kernel regression estimate,*J. Multivariate Anal. 23, 67-76.*

[27] **Györfi**, L. **Kholer**, M, **Krzyzak**, A. and **Walk**, H. (2002). A distribution-free theory of nonparametric regression, *Springer-Verlag New york.*

[28] **Isogai**, E. (1984). Joint asymptotic normality of nonparametric recursive density estimators at a finite number of distinct points, *J. Japan Statist. Soc. 14 (2), 125-135.*

[29] **Krzyzak**, A. (1992). Global convergence of the recursive kernel regression estimates with applications in classification and nonlinear system estimation, *IEEE Trans. Inform. Theory 38, 1323-1338.*

[30] **Krzyzak**, A. and **Pawlak**, M. (1983). Universal consistency results for Wolverton-Wagner regression function estimates with appliction in discrimination, *Probl. Contr. Inform. Theory 12, 33-42.*

[31] **Krzyzak**, A. and **Pawlak**, M. (1984). Almost everywhere convergence of a recursive regression function estimate and classification, *IEEE Trans. Inform. Theory. 30, 91-93.*

[32] **Lévy**, P. (1965). Processus stochastiques et mouvement brownien, *Gauthier-Villars (2nd éd).*

[33] **Liang**, H.Y. and **Baek**, J. (2004). Asymptotic normality of recursive density estimates under some dependence assumptions, *Metrika 60, 155-166.*

[34] **Loève**, M. (1963). Probability theory, Princeton,*New Jersey Van Nostrand.*

[35] **Masry**, E. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent stationary processes, *IEEE Trans. Inform. Theory 32, no 2, 254-267.*

[36] **Masry**, E. (1987). Almost sure convergence of recursive density estimators for stationary mixing processes, Statist. *Probab. Lett. 5, 249-254.*

[37] **Masry**, E. and **Györfi**, L. (1987). Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes, *J. Multivariate Anal. 22, 79- 93.*

[38] **Nadaraya**, E.(1964). On estimating regression,*Theory Probab. Appl. 9, 141-142.*

[39] **Parzen**,E.(1962). On the estimation of probability density function and the mode.*Ann. Math. Statist. 33, 1065-1076.*

[40] **Prakasa Rao**, B.L.S. (1983), Nonparametric functional estimation, *New-York : Academic Press.*

[41] **Rao**, C.R. (1965). Linear statistical inference and its applications,*2nd ed, Wieley New york.*

[42] **Rio**, E. (2000) Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants,*vol 31 Mathematics and applications Springer- Verlag, Berlin.*

[43] **Roussas**, G.G. and **Tran**, L.T. (1992). Asymptotic normality of the recursive kernel regression estimate under dependence conditions, *Annals of Statist. 20 (1), 98-120.*

[44] **Rosenblatt**, F.(1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function,*Ann. Math. Statist. 38, 482-493.*

[45] **Sarda**, P. and**Vieu**, P(1991). Smoothing parameter selection in hazard estimation,*Statist. Probab. Lett. 11, 429-434.*

[46] **Schwartz**, S.C. (1967). Estimation of a probability density by an orthogonal series,*Ann. Math. Statist. 38, 1261-1265.*

[47] **Singh**, R.S. (1977). Applications of estimators of a density and its derivatives to certain statistical problems, *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 39, 357-363.*

[48] **Takahata**, H. (1980). Almost sure convergence of density estimators for weakly dependent stationary processes, *Bull. Tokyo Gakugei Univ. Nat. Sci. Ser. IV, 11-32.*

[49] **Tran**, L.T (1989). Recursive density estimation under dependence. *IEEE Trans. Inform. Theory 35 (5), 1103-1008.*

[50] **Tran**, L.T.(1994). Density estimation for time series by histograms,*J. Statist. Plann. Inference, 40(1), 61-79.*

[51] **Volkonskii**, V.A. and **Rozanov**, Yu.A.(1959). Some limit theorems for randon functions, *Theory Probab. Appl. 4, 178-197.*

[52] **Walk**, H. (2001). Strong universal pointwise consistency of recursive regression estimates, *Ann. Inst. Statist. Math. 53 (4), 691-707.*

[53] **Wang**, L. and **Ling**, H.Y (2004). Strong uniforme convergence of the recursive regression estimators under ϕ-mixing conditions, *Metrika 59, 245-261.*

[54] **Watson**, G.S. (1964). Smooth regression analysis.*Shkhaya Ser. A 26, 359-372.*

[55] **Wegman**, E.J. and**Davies**, H.I. (1979). Remarks on some recursive estimators of a probability density,*Ann. Statist. 7(2), 316-327.*

[56] **Wolverton**, C. and**Wagner**, T.J.(1969). Recursive estimates of probability densities,*IEEE Trans. Syst. Cybern. 5, 307-308.*

[57] **Yamato**, H. (1972). Sequential estimation of a continuous probability density function and mode,*Bull. Math. Statist. 14, 1-12.*