République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Grossissement de filtrations

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse Stochastique, Statistique et Applications

par

Khatir Yamina[1]

Sous la direction de

Dr.A.Kandouci

Soutenu le 01 Juin 2016 devant le jury composé de

M^{lle} **F.B**enziadi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Présidente
Dr A.Kandouci	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M^{dme} **O.B**enzatout	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinatrice
Mr L.Mimoune	Université Dr Tahar Moulay- Saïda	Examinateur

[1]e-mail : aminakhatir12@gmail.com

Remerciements

Voici venu le moment où nous tenons à exprimer notre gratitude envers tous ceux qui m'ont aidés et soutenu tout au long de ce travail.
Je remercie en premier lieu le **DR. A.Kandouci**, promoteur de ce mémoire, ses idées, ses conseils et ses critiques m'ont été d'une aide précieuse pour mener ce travail à bien. Au-delà de l'aspect scientifique de nos discussions, j'ai été particulièrement sensible à sa qualité humaine, à l'excellent climat relationnel qu'il a surétabli entre nous et au fait de savoir que je pouvais toujours compter sur lui.
Je remercie honorablement les membres de jury : M^{lle} **F.Benziadi**, Mr **L.Mimoune** et M^{dme}**O.Benzatout**.
Mes profonds remerciements vont à :

- M^{lle}**F.Benziadi**.
- L'ensemble des enseignants qui ont participés à ma formation.
- Toute la promotion ASSPA (2015/2016).
- Tous les responsables du département de Mathématiques.
- Tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

La théorie de grossissement de filtration a été introduite et développée par l'école française de probabilité, dans les années 1970 par de nombreux savants comme barlow [12] et Jeulin-Yor [13] sur le temps honnête L, cette théorie a connue un fort développement dans les années 1980 depuis plusieurs publications sont apparues comme les livres de Jeulin [14] et Jeulin-yor [18], les papiers de Jacod [19] et Yor [20].

La théorie de grossissemnet de filtration vise à comprendre le comportement de semimartingale, en ce qui concerne l'introduction d'information supplémentaire, en particulier le grossissement initial de filtration correspond à l'introduction d'information supplémentaire engendrée par une variable aléatoire L σ-finie à la première sous tribu $\mathcal{F}_0$ d'une filtration de référence $\mathbb{F}$, donnant aussi l'augmentation de la filtration grossie minimale $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. Tandis que le grossissement progressif de filtration est ensuite appliqué à la modélisation de risque de crédit vers la fin des années 1990 pour établir les produits dérivés sensible au risque de défaut.

la propriété de semimartingale peut être conservé dans des hypothèses naturelles sur la v.a L dans le document de Jacod [19] a été démontré que toute $\mathbb{F}$-semimartingale est aussi une $\mathbb{G}$-semimartingale, cette condition joue un rôle important dans la théorie de grossissement de filtration, cette hypothèse est appelée l'hypothèse de densité de Jacod.

Récemment, il y a un regain d'intérêt en raison d'application en finance Mathématique, dans la modélisation du risque de crédit, on distingue souvent l'information sur le marché financier "sans défaut" répresentée par une filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et l'information de défaut. généralement le temps de défaut pas nécessairement un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. L'information globale contient ces deux types d'informations, obtenue par un grossissement de filtrations, on agrandit la filtration par quelques informations supplémentaires ne sont pas représentées sur le marché financier. Le grossissement de filtrations a été appliqué aussi dans autres modèles comme les négociations d'initiés (insider trading), telle que les informations qui ne sont pas accessibles au public. Etant donné que les initiés voient plus d'événements observables. En général, que ne le fait le marché, on peut modéliser cela en utilisant une filtration plus grande.

Une nouvelle approche de modélisation faite dans une série de travaux en collebora-tion à partir de les années 2000 avec M.Jeanblanc, Elliot et Yor [15] sur le modèle de risque de defaut, et plusieurs publications sont apparues comme la théorie générale du processus stochastique par Nikeghbali[6] en 2006, le grossissement progressif par le temps initial par Jeanblanc.M et Le Cam.Y [16], les publications de Li.Libo et Rutkowski [17] en 2012, particullierement dans les deux derniéres années , il y a une nuage de publications sont apparues par les auteurs Philip Protter, Acciaio, Aksamit, Coculescu, Corcuera, Fontana, Jeanblanc, Kardaras, Kchia, Kreher, Nikeghbali, Song, Valdivia et Roseline Bilina Falafala. par exemple les publications de M.Jeanblanc et S.Song[8] sur la propriété de représentation de martingale pour le grossissement progressif et par Jurgen Amendinger [11] dans le cadre de grossissement initial, la publication de Claudio Fontana [10] pour la propriété de représentation prévisible pour le grossissement initial et par Jeanblanc, M. et S.Song [9] pour grossissement progressif.

Ce mémoire est partagé en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on introduit les notions de projections, projections duales et compensateur à temps d'arrêt. Dans le deuxième chapitre, on étudie les types de grossissement de filtrations avec leurs propriétés (grossissement initial, grossissement progressif, grossissement par temps honnête et grossissement succéssif). Le troisième chapitre est consacré à l'étude de quelques exemples d'applications de grossissement de filtrations en finance comme l'utilisation de théorème du Jacod pour trouver la décomposition des prix des actifs dans la filtration grossie, modèle de volatilité stochastique et la consruction de la mesure de risque neutre. Le dernier chapitre représente le coeur de ce mémoire lequel est consacré à la proriété de représentation prévisible qui a été étudiée dans le cadre de grossissement initial par Claudio Fontana [10] et dans le cadre de grossissement progressif par Monique Jeanblanc avec Shiqi Song

[9]. En finance, cette proriété est primordiale pour avoir un marché complet et en Mathématique pour décrire les martingales d'une filtration donnée. En fin de ce chapitre, on donne un exemple d'application de cette propriété dans le domaine de finance dans lequel on exhibe la couverture sous des informations d'initiés (insider trading).

Chapitre 1

Généralités sur les projections, les projections duales et compensateur de temps d'arrêt

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré muni une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions usuelles et $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ une seconde filtration telle que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$.

1.1 Les projections prévisibles, optionnelles et les projections duales

Dans cette section, on va présenter la notion de projection optionnelle (resp.prévisible) d'un processus stochastique qui est lié à la notion de filtration de référence, également on introduit la notion de projection duale qui conduit à la notion de compensateur prévisible.

1.1.1 Les ensembles prévisibles et optionnels

On travaille sur l'espace $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P} \times \lambda)$ où λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 1.1.1 *Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On définit les σ-Algèbres sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ par*

1) *une σ-Algèbre $O_{\mathbb{F}}$-optionnele est une σ-Algèbre $O_{\mathbb{F}}$ engendrée par les processus càdlàg et $\mathbb{F}$-adaptés.*

2) *une σ-Algèbre $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$-prévisible est une σ-Algèbre $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ engendrée par les processus càglàd et $\mathbb{F}$-adaptés.*

Lemme 1.1.1 *[2] La σ-Algèbre prévisible est inclue dans la σ-Algèbre optionnelle.*

Définition 1.1.2 *Soient T et S deux temps d'arrêts tel que $S \leq T$. L'intervalle stochastique est un ensemble $[\![S, T[\![$ inclu dans $\Omega \times \mathbb{R}_+$ défini par*

$$[\![S, T[\![= \{(w, t) \in (\Omega \times \mathbb{R}_+) \setminus S(w) \leq t \leq T(w)\}.$$

1.1.2 Les projections optionnelles et prévisibles

Théorème 1.1.1 *[2] Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus mesurable, tel que pour tout temps d'arrêt prévisible T, $X_T 1_{\{T,\infty\}}$ est intégrable, alors*

1. *il existe un unique processus optionnel ${}^oX$ tel que $\forall$ T on a*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_T 1_{\{T<\infty\}}/\mathcal{F}_T) = {}^oX_T 1_{\{T<\infty\}},$$

Le processus ${}^oX$ est appelé $\mathbb{F}$-projection optionnel de X.

2. *il existe un unique processus prévisible ${}^pX$ tel que :$\forall$ T on a :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_T 1_{\{T<\infty\}}/\mathcal{F}_{T^-}) = {}^pX_T 1_{\{T<\infty\}},$$

Le processus ${}^pX$ est appelé $\mathbb{F}$-projection prévisible de X.

Proposition 1.1.1 *[2] Soient $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus mesurable et $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ un processus optionnel (resp.prévisible), si la projection optionnelle (resp.prévisible) de X existe, alors les projections optionnelle et prévisible de XY existent et données par*

$${}^o(XY) = ({}^oX)Y \qquad , \qquad {}^p(XY) = ({}^pX)Y.$$

Proposition 1.1.2 *[2] On suppose que X est un processus mesurable, si la projection optionnelle et prévisible de X existent, alors*

$$^{p}(^{o}X) = \ ^{p}X.$$

Théorème 1.1.2 *[1] Soit X une $\mathbb{G}$-martingale alors la projection optionnelle de X dans $\mathbb{F}$ où $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G}$ est encore une $\mathbb{F}$-martingale.*

Théorème 1.1.3 *[1] Soient X une $\mathbb{G}$-martingale locale et ^{o}X la projection optionnelle de X sur $\mathbb{F}$. ^{o}X est une martingale locale s'il existe une suite décroissante des temps d'arrêts $(T_n)_{n\geq 1}$ pour X dans $\mathbb{G}$ qui sont aussi des temps d'arrêts dans $\mathbb{F}$. En revanche, si X est positif et ^{o}X est une $\mathbb{F}$-martingale locale, alors la suite des temps d'arrêts pour ^{o}X dans $\mathbb{F}$ est également une suite dans $\mathbb{G}$.*

1.1.3 Les projections duales

Soit l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui satisfait les conditions usuelles et l'espace produit $(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P} \times \lambda)$
Soit A un processus intégrable croissant non-adapté, pour tout processus borné X, on définit une mesure positive μ_A sur σ-Algèbre $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ par

$$\mu_A(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty X(t,w)dA(t,w)\right]$$

Définition 1.1.3 *On dit que la mesure μ est une mesure optionnelle (resp.prévisible), si pour tout processus positif et borné X :*

$$\mu(X) = \mathbb{E}_\mu(X) + \mathbb{E}_\mu(^{o}X) = \mu(^{o}X) \qquad , \qquad \mu(X) = \mathbb{E}_\mu(X) + \mathbb{E}_\mu(^{p}X) = \mu(^{p}X).$$

Lemme 1.1.2 • *Si A est un processus intégrable croissant non-adapté, alors il existe un unique processus optionnel ^{o}A croissant tel que pour tout processus borné positif X on a :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty \ ^{o}X_s dA_s\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty X_s d\ \ ^{o}A_s\right],$$

Le processus ${}^{o}A$ est appelé la projection duale de A.

• *Si A est un processus intégrable croissant non-adapté, alors il existe un unique processus prévisible ${}^{p}A$ croissant tel que pour tout processus positif et borné X on a*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty {}^{p}X_s dA_s\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\int_0^\infty X_s d^{p}A_s\right],$$

Le processus ${}^{p}A$ est appelé la projection duale de A.

Théorème 1.1.4 *[1] Soit A un processus intégrable non-adapté et ${}^{p}A$ est l'unique processus prévisible à variation intégrable tel que ${}^{(o)}A - {}^{(p)}A$ est une martingale.*

1.2 Compensateur de temps d'arrêt

On introduit dans cette section les notions de compensateur et l'intensité, qui fournissent la base théorique de l'approche d'intensité dans la modélisation de défaut.

Lemme 1.2.1 *Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et Y_t une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable alors il existe des variables aléatoires $\overline{Y}_t$ et $\widetilde{Y}_t(.)$ respectivement $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)-$ mesurable telles que :*

$$Y_t = 1_{\{\tau > t\}}\overline{Y}_t + 1_{\{\tau \leq t\}}\widetilde{Y}_t(\tau),$$

où τ est un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt.

Lemme 1.2.2 *Toute variable aléatoire $\mathcal{G}_{t^-}$-mesurable Y_t peut être écrite sous la forme*

$$Y_t = 1_{\{\tau \geq t\}}\overline{Y}_t + 1_{\{\tau < t\}}\widetilde{Y}_t(\tau),$$

où $\overline{Y}_t$ et $\widetilde{Y}_t(.)$ respectivement $\mathcal{F}_{t^-}$ et $\mathcal{F}_{t^-} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables.

1.2.1 Compensateur et intensité

Définition 1.2.1 *Soit τ un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt. Le $\mathbb{G}$-compensateur de τ est un processus prévisible croissant $A^{\mathbb{G}}$ tel que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ où $N_t = 1_{\tau \leq t} - A_t^{\mathbb{G}}, t \geq 0$ est une $\mathbb{G}$-martingale. Si $A^{\mathbb{G}}$ est absulement continu par rapport à la mesure de lebesgue, alors le processus $\lambda^{\mathbb{G}}$ est $\mathbb{G}$-adapté et positif tel que $A_t^{\mathbb{G}} = \int_0^t \lambda_s^{\mathbb{G}} ds$ qui est appelé la $\mathbb{G}$-intensité de τ.*

Proposition 1.2.1 *Le $\mathbb{G}$-compensateur $A^{\mathbb{G}}$ est arrêté en τ. (i.e $A_t^{\mathbb{G}} = A_{t\wedge\tau}^{\mathbb{G}}$ p.s)*

Corollaire 1.2.1 *Si l'intensité $\lambda^{\mathbb{G}}$ de τ existe alors $\lambda_t^{\mathbb{G}} = 0$ p.s sur $\{t \geq \tau\}$.*

Lemme 1.2.3

1. *Tout processus $\mathbb{G}$-optionnel Y peut s'écrire sous la forme suivante*

$$Y_t = 1_{\{\tau>t\}}\overline{Y}_t + 1_{\{\tau\leq t\}}\widetilde{Y}_t(\tau),$$

où $\overline{Y}_t$ et $\widetilde{Y}_t(.)$ sont des processus respectivement $O_{\mathbb{F}}$ et $O_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)-$mesurables.

2. *Tout processus $\mathbb{G}$-prévisible Y peut s'écrire sous la forme suivante*

$$Y_t = 1_{\{\tau\geq t\}}\overline{Y}_t + 1_{\{\tau< t\}}\widetilde{Y}_t(\tau),$$

où $\overline{Y}_t$ et $\widetilde{Y}_t(.)$ sont des processus respectivement $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ et $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables.

démonstration

1. Il suffit de considérer $Y = Z1_{[\![S,\infty[\![}$ où Z est une variable aléatoire $\mathcal{G}_s-$mesurable. d'après le lemme (4.2.2)on a

$$Z_t = 1_{\{\tau>s\}}\overline{Z} + 1_{\{\tau\leq s\}}\widetilde{Z}(\tau),$$

où $\overline{Z}_t$ et $\widetilde{Z}_t(.)$ respectivement $\mathcal{F}_{s^-}$ et $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)-$ mesurables.
Alors

$$\begin{aligned} Y_t = Z_t 1_{\{t\geq s\}} & \\ &= (1_{\{\tau>s\}}\overline{Z} + 1_{\{\tau\leq s\}}\widetilde{Z}(\tau))1_{\{t\geq s\}} \\ &= 1_{\{\tau>t\}}(1_{\{t\geq s\}}\overline{Z}) + (1_{\{\tau>s\}}\overline{Z} + 1_{\{\tau\leq s\leq t\}}\widetilde{Z}(\tau))1_{\{\tau\leq t\}}, \end{aligned}$$

On pose :$\overline{Y} = \overline{Z}1_{[\![s,\infty[\![}$ et $\widetilde{Y}(\theta) = 1_{s<\theta}\overline{Z} + 1_{\{s\geq\theta\}}\widetilde{Z}(\theta)1_{[\![s,\infty[\![}$ sont des fonctions respectivement $O_{\mathbb{F}}$-et $O_{\mathbb{F}} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$-mesurables, on a $Y_t = \overline{Y}1_{[\![0,\tau[\![} + \widetilde{Y}(\tau)1_{[\![\tau,\infty[\![}$, alors le résultat est démontré.

2. On utilise le lemme (1.2.2) pour la preuve, qui est simillaire à celle de l'assertion 1.

Par le lemme (1.2.3), il existe un processus $\mathbb{F}$- prévisible $A^{\mathbb{F}}$ tel que les processus $A^{\mathbb{F}}$ et $A^{\mathbb{G}}$ coïncident sur l'ensemble $\{\tau \geq t\}$.

Alors le $\mathbb{F}$-compensateur de τ $A^{\mathbb{F}}$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e) il existe un processus $\mathbb{F}$-adapté $\lambda^{\mathbb{F}}$ tel que $A_t^{\mathbb{F}} = \int_0^t \lambda_s^{\mathbb{F}} ds$ est appelé la $\mathbb{F}$-intensité de τ.

Théorème 1.2.1 *[3] Soit $S_t = M_t - A_t$ la décomposition de Doob-Meyer de la surmartingale S_t, M_t est une $\mathbb{F}-$martingale et A_t est un processus $\mathbb{F}$-prévisible croissant, alors*

$$A_t^{\mathbb{G}} = A_t^{\mathbb{F}} 1_{\{\tau \geq t\}} = \int_0^t 1_{\{\tau \geq u\}} \frac{dA_u}{S_{u^-}}.$$

Proposition 1.2.2 *Si τ est un temps aléatoire, on dit que la $\mathbb{F}$-compensateur prévisible associé à τ est le $\mathbb{F}$-projection prévisible duale A^τ d'un processus croissant $1_{\{\tau \leq t\}}$, cette projection prévisible duale A^τ satisfait :*

$$\mathbb{E}(Y_\tau) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty Y_s dA_s^\tau\right),$$

Il en résulte que le processus $\mathbb{E}(1_{\{\tau \leq t\}} - A_t^\tau)$ est une $\mathbb{F}-$martingale.

Lemme 1.2.4 *[3] Le $\mathbb{F}^X$-compensateur prévisible A associé à le temps aléatoire α_y est le processus A_t défini par $A_t = -\frac{1}{2s(y)} L_t^{s(y)}(Y)$, où $L(Y)$ est un processus de temps locale de la martingale continue $Y = s(X)$.*

Lemme 1.2.5 *[3] Soit $X_t = x + \sigma W_t$, le $\mathbb{F}$-compensateur prévisible A associé à le temps aléatoire $g^a_{T_0(X)}$ est le processus A_t défini par $A_t = -\frac{1}{2\alpha} L^\alpha_{t \wedge T - x/\sigma(W)}(W)$. Où $L^\alpha(W)$ est un processus de temps locale de le mouvement brownien $W = (W_t)_{t\geq 0}$ au niveau $\alpha = (a-x)/\sigma$.*

Lemme 1.2.6 *[3] Le $\mathbb{F}$-compensateur prévisible associé à le temps aléatoire g_T est égale $A_t = \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \int_0^{t\wedge T} \frac{dL_s}{\sqrt{T-s}}$, où L le temps locale au niveau de 0 de mouvement brownien W.*

Définition 1.2.2 *Si (X_t) est un processus borné et A_t est un processus à variation intégrable (pas nécessairement $\mathbb{F}$-adapté), alors :*

$$\mathbb{E}((X * A^p)_\infty) = \mathbb{E}((^pX * A)_\infty),$$

ceci est équivalent à
$\forall \; s < t$

$$\mathbb{E}(A_t - A_s/\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(A_t^p - A_s^p/\mathcal{F}_s),$$

si A_t est $\mathbb{F}-$adapté (pas nécessairement prévisible), alors $(A_t - A_t^p)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale, dans ce cas, A_t^p est aussi appellé le compensateur prévisible de A_t.

Proposition 1.2.3 *[3] On suppose que τ est un pseudo temps initial et le processus (m_t) est une semimartingale avec la décomposition canonique $m_t = N + P$, où N est une martingale locale, si la covariation prévisible de (N_t) et (D_t) sont exisites alors le $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-compensateur de H_t est donne par la formule suivante*

$$H_t^p =< N, D >_t - \int_{(0,t]} {}^pm_u dD_u^p$$

où ${}^pm_t$ est le $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-projection prévisible de m_t.

1.2.2 Compensateur absolument continu

Soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $\tau = sup\{t \leq 1 : W_t - 2W_t = 0\}$ qui est le dernier temps avant 1 lorsque le mouvement brownien est égal à la moitié de sa valeur terminale à l'instant 1, alors

$$\{\tau \leq t\} = \left\{\inf_{t\leq s\leq 1} 2W_s \geq W_1 \geq 0\right\} \cup \left\{\sup_{t\leq s\leq 1} 2W_s \leq W_1 \leq 0\right\},$$

et la qantité

$$\mathbb{P}(\tau \leq t, W_1 \geq 0/\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\inf_{t\leq s\leq 1} 2W_s \geq W_1 \geq 0/\mathcal{F}_t),$$

peut être évaluée l'utilisation des égalités suivantes

$$\begin{aligned}\left\{\inf_{t\le s\le 1} W_s \ge \frac{W_1}{2} \ge 0\right\} &= \left\{\inf_{t\le s\le 1}(W_s - W_t) \ge \frac{W_1}{2} - W_t \ge -W_t\right\} &(1.1)\\ &= \left\{\inf_{0\le u\le 1-t} \widetilde{W}_u \ge \frac{W_{1-t}}{2} - \frac{W_t}{2} \ge -W_t\right\}, &(1.2)\end{aligned}$$

où $(\widetilde{W}_t = W_{t+u} - W_t, u \ge 0)$ est un mouvement brownien indépendent de $\mathcal{F}_t$, il en résulte que

$$\mathbb{P}(\inf_{t\le s\le 1} W_s \ge \frac{W_1}{2} \ge 0/\mathcal{F}_t) = \psi(1-t, W_t),$$

où

$$\begin{aligned}\psi(s,x) &= \mathbb{P}\left(\inf_{0\le u\le s} \widetilde{W}_u \ge \frac{\widetilde{W}_s}{2} - \frac{x}{2} \ge -x\right) &(1.3)\\ &= \mathbb{P}(2M_s - W_s \le \frac{x}{2}, W_s \le \frac{x}{2}) &(1.4)\\ &= \mathbb{P}(2M_1 - W_1 \le \frac{x}{2\sqrt{s}}, W_1 \le \frac{x}{2\sqrt{s}}), &(1.5)\end{aligned}$$

le même type de calcul conduit à

$$\mathbb{P}(\sup_{t\le s\le 1} 2W_s \le W_1 \le 0/\mathcal{F}_t) = \psi(1-t, -W_t),$$

maintenant, par la quantité $\psi(s,x)$ peut être calculé à partir de la loi conjointe du maximum et du processus à l'instant 1. Cependant, on préfère l'utilisation du théorème de Pitman, soit $\widetilde{U}$ une v.a uniformément distribuée sur $[-1,1]$ indépendant de $R_1 = 2M_1 - W_1$, alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2M_1 - W_1 \le y, W_1 \le y) &= \mathbb{P}(R_1 \le y, \widetilde{U}R_1 \le y) &(1.6)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{P}(R_1 \le y, uR_1 \le y)du, &(1.7)\end{aligned}$$

pour $y > 0$:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{P}(R_1 \leq y, uR_1 \leq y)du = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbb{P}(R_1 \leq y)du \tag{1.8}$$

$$= \mathbb{P}(R_1 \leq y), \tag{1.9}$$

pour $y < 0$:

$$\int_{-1}^{1} \mathbb{P}(R_1 \leq y, uR_1 \leq y)du = 0, \tag{1.10}$$

de plus

$$\mathbb{P}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = \psi(1-t, W_t) + \psi(1-t, -W_t) = \rho\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right),$$

où

$$\rho(y) = \mathbb{P}(R_1 \leq y) = \sqrt{\frac{2}{\Pi}}\int_0^y x^2 \exp(-x^2/2)dx,$$

alors $Z_t = \mathbb{P}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = 1 - \rho\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right)$. Maintenant, on peut appliqué la formule de Tanaka à la fonction ρ, notant que $\rho' = 0$, la contribution à la décomposition de Doob-Meyer de Z de temps locale de W_t est nulle en 0. En outre, le processus croissant A_t de la décomposition de Doob-Meyer de Z_t est donnée par

$$dA_t = \left(\frac{1}{2}\rho''\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right)\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\rho'\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right)\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{(1-t)^3}}\right)\right)dt \tag{1.11}$$

$$= \frac{1}{1-t}\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right)e^{-W_t^2/2(1-t)}dt, \tag{1.12}$$

On note que A_t peut être obtenue comme la projection prévisible duale sur la filtration brownienne d'un processus $(A_s^{W_1}, s \leq 1)$, où $(A_s^x, s \leq 1)$ est un compensateur de τ sous la loi de pont brownien $\mathbb{P}^{(1)}0 \to x$.

Chapitre 2

Grossissement de filtrations

Le problème d'élargissement d'une filtration consiste à déterminer si toute $\mathbb{F}$-semimartingale X est une $\mathbb{G}$-semimartingale, alors dans ce cas la question qui se pose, comment construire la nouvelle décomposition de X dans la filtration grossie ?
Il y a plusieurs types de grossissement de filtrations, parmi ces types on présente deux types très importants avec leurs propriétés et quelques exemples sur chaque type.

2.1 Grossissement initial

Les conditions (CA)
pour faire le grossissement on suppose les conditions suivantes :
• condition (C) : toutes les $\mathbb{F}-$martingales locales sont continues.
• condition (A) : Le temps aléatoire L évite les $\mathcal{F}_t-$temps d'arrêt, i.e. pour tout $(\mathcal{F}_t)_t-$temps d'arrêt T on a : $\mathbb{P}(L = T) = 0$.

Définition 2.1.1 *Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On appelle grossissement initial de $\mathbb{F}$ la filtration $\mathcal{F}_t^L$ définie par l'égalité suivante :*

$$\mathcal{F}_t^L = \bigcap_{\epsilon>0}(\mathcal{F}_{t+\epsilon} \vee \sigma(L)),$$

où L est une variable aléatoire .

Théorème 2.1.1 *(Stricker) Soit $\mathbb{F}$ une sous filtration continue à droite de $\mathbb{G}$ et X un processus $\mathbb{F}-$adapté , si X est une $\mathbb{G}-$semimartingale alors X est une $\mathbb{F}-$semimartingale.*

Les hypothèses (H') et (H)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré muni une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ verifiant les conditions habituelles :

• On dit que l'hypothèse (H) est sataisfaite sous $\mathbb{P}$ si toute $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale est une $(\mathbb{P}, \mathbb{G})$-martingale . On note cette propriété par $\mathbb{F} \circlearrowleft \mathbb{G}$ ou on dit que $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$.

• On dit que l'hypothèse (H') est sataisfaite si toute $\mathbb{F}$-semimartingale est une $\mathbb{G}-$semimartingale.

2.1.1 Immersion de filtrations

Définition 2.1.2 *On dit que $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$ si toute $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable est une $\mathbb{G}$-martingale, ceci est désigné également l'hypothèse (H).*

Proposition 2.1.1 *L'hypothèse (H) est équivalent à les propriétés suivantes :*

(H_1) $\forall t \geq 0$, *la tribu σ-finie $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{G}_t$ sont conditionnellement indépendentes à $\mathcal{F}_t$ i.e* $\forall t \geq 0, \;\; \forall G_t \in L^2(\mathcal{G}_t), \;\; \forall F_t \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$

$$\mathbb{E}(G_t F_t/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(F_t/\mathcal{F}_t).$$

(H_2) $\forall t \geq 0, \;\; \forall G_t \in L^1(\mathcal{G}_t), \;\; \mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t).$

(H_3) $\forall t \geq 0, \;\; \forall F_t \in L^1(\mathcal{F}_\infty), \;\; \mathbb{E}(F_t/\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(F_t/\mathcal{F}_t).$

En particulier, (H) est satisfaite si seulement si toute $\mathbb{F}$-martingale locale est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Preuve

1. $(H) \Rightarrow (H_1)$.Soit $F_t \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et on suppose que (H) est satisfaite. Ceci implique que le martingale $F_t = \mathbb{E}(F/\mathcal{F}_t)$ est une $\mathbb{G}$-martingale telle que $F_\infty = F$, alors $F_t = \mathbb{E}(F/\mathcal{G}_t)$. Qui suit que tout t et pour tout $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$:

$$\mathbb{E}(G_t F_t/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t \mathbb{E}(F_t/\mathcal{G}_t)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t \mathbb{E}(F_t/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(F_t/\mathcal{F}_t),$$

ce qui est exactement (H_1)

2. $(H_1) \Rightarrow (H_2)$. Soit $F_t \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et . Soit $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$. Sous (H_1),

$$\mathbb{E}(F\mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(F/\mathcal{F}_t)\mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t)) =^{(H_1)} \mathbb{E}(\mathbb{E}(FG_t/\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(FG_t),$$

ce qui est exactement (H_2)

3. $(H_2) \Rightarrow (H_3)$. Soit $F_t \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et . Soit $G_t \in L^2(\mathcal{G}_t)$. Si (H_2) est satisfaite, alors est facile de prouver, pour $F_t \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$

$$\mathbb{E}(G_t\mathbb{E}(F/\mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}(F\mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_t)) =^{(H_2)} \mathbb{E}(F\mathbb{E}(G_t/\mathcal{F}_\infty))\mathbb{E}(FG_t),$$

ce qui est exactement (H_3)

4. $(H_3) \Rightarrow (H)$ évidemment.

Théorème 2.1.2 *(critère de Jacod)[2] Soit L un temps aléatoire à valeurs dans un espace borélien (E, ζ) et $Q_t(w, dx)$ désigne la distribution $\mathcal{F}_t-$conditionnelle. Supposons que pour chaque t il existe une mesure η_t positive $\sigma-$finie sur (E, ε) telle que $Q_t(w, dx) << \eta_t(dx)$ p.s, alors toute $\mathbb{F}-$semimartingale est aussi $\mathbb{G}(L)$-semimartingale.*

Preuve
Sans perte de généralité, on suppose que $\mathrm{Q}_t(\omega, dx) \ll \eta_t(dx)$. Alors il existe une fonction $\xi \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable notée $q_t(x, \omega)$ telle que $\mathrm{Q}_t(\omega, dx) = q_t(x, \omega)\eta_t(dx)$. En outre, comme

$$\mathbb{E}\{\int_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}(\cdot, dx)\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\mathbf{1}_{\{Y\in \mathrm{E}\}}|\mathcal{F}_t\}\} = \mathbb{P}(Y \in \mathrm{E}) = 1,$$

On a :

$$\mathbb{E}\{\int_{\mathrm{E}} \mathrm{Q}(\cdot, dx)\} = \mathbb{E}\{\int_{\mathrm{E}} q_t(x, \omega)\eta_t(dx)\} = \int_{\mathrm{E}} \mathbb{E}\{q_t(x, \omega)\}\eta_t(dx) = 1.$$

Ainsi pour presque tout x, on a $q_t(x, \cdot) \in \mathrm{L}^1(d\mathbb{P})$.
Soit X une $\mathbb{F}$-semimartingale, et supposons que X n'est pas $\mathbb{G}(L)$ semimartingale. Alors il existe un $u > 0$ et $\epsilon > 0$, et une suite H^n de processus prévisibles simples par rapport

à la filtration $\mathbb{G}$, convergeant uniformément vers 0 telle que $\inf_n \mathbb{E}\{1\wedge \mid \mathrm{H}^n \cdot X \mid\} \geq \epsilon$. Supposons que $t_n \leq u$, et

$$\mathrm{H}_t^n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{J}_i^n \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

avec $\mathrm{J}_i^n \in \mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathrm{L})$. Où J_i^n est de la forme $g_i(\omega, \mathrm{L}(\omega))$, où $(\omega, x) \mapsto g_i(\omega, x)$ est $\mathcal{F}_{t_i} \otimes \xi$ mesurable. Depuis H^n tend uniformément vers 0, nous pouvons prendre sans perte $\mid \mathrm{H}^n \mid \leq \frac{1}{n}$, et donc nous pouvons aussi supposer que $\mid g_i \mid \leq \frac{1}{n}$. Nous écrivons

$$\mathrm{H}_t^{n,x}(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i(\omega, x) \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

et pour cela $(x, \omega) \mapsto \mathrm{H}_t^{n,x}$ et $(x, \omega) \mapsto (\mathrm{H}^{n,x} \cdot X)_t(\omega)$ sont toutes $\xi \otimes \mathcal{F}_u$ mesurable, pour $0 \leq t \leq u$. De plus, on a clairement $\mathrm{H}^n \cdot X = \mathrm{H}^{n,\mathrm{L}} \cdot X$. En combinant avec la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{1\wedge \mid \mathrm{H}^n \cdot X_u \mid\} &= \mathbb{E}\{\int_{\mathrm{E}} (1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x} \cdot X_u \mid) \mathrm{Q}(\cdot, \mathrm{dx})\} \\
&= \mathbb{E}\{\int_{\mathrm{E}} (1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x} \cdot X_u \mid) q_u(\cdot, dx) \eta_u(dx)\} \\
&= \int_{\mathrm{E}} \mathbb{E}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x} \cdot X_u \mid) q_u(\cdot, dx)\} \eta_u(dx)
\end{aligned}$$

Cependant, la fonction $h_n = \mathbb{E}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x} \cdot X \mid)\} q_u(\cdot, x) \leq \mathbb{E}\{q_u(\cdot, x)\} \in \mathrm{L}^1(d\eta_u)$ et puisque h_n est positive, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{1\wedge \mid \mathrm{H}^n \cdot X_u \mid\} = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{E}} \mathbb{E}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^n \cdot X \mid)) q_u(\cdot, x)\} \eta_u(dx) \tag{2.1}$$

$$= \int_{\mathrm{E}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{(1 \wedge |\mathrm{H}^n \cdot X_u|) q_u(\cdot, x)\} \eta_u(dx) \tag{2.2}$$

On définit une nouvelle probabilité par $d\mathbb{Q} = c q_u(\cdot, x) d\mathbb{P}$ et pour cela

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^n \cdot X_u \mid)\} = 0,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{C}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x}\cdot X_u \mid)\} \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^{n,x}\cdot X_u \mid))q_u(\cdot,x)\} \end{aligned}$$

Combinant ce résultat avec l'équation (2.2) , on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\{(1\wedge \mid \mathrm{H}^{n}\cdot X_u \mid)\} = 0$$

ce qui contredit que X est une $\mathbb{G}$-semimartingale.
Soit $X = M + A$ la décomposition de X sous $\mathcal{H}^0$. Comme $\mathcal{H}^0$ n'est pas nécessairement càd, la martingale locale n'est pas nécessairement càd. On définit $\tilde{M}_t$ par :

$$\tilde{M}_t = \begin{cases} M_t, & si\ t\ est\ rationnel \\ \lim\limits_{u\searrow t, u\in\mathbb{Q}} \tilde{M}_u, & sinon \end{cases}$$

Alors $\tilde{M}_t$ est une martingale càd pour $\mathbb{G}$ où $\mathcal{H}_t = \bigcap_{u>t}\mathcal{H}_u^0$, soit $\tilde{A}_t = X_t - \tilde{M}_t$, donc $X_t = \tilde{M}_t + \tilde{A}_t$ est la décomposition de X sous $\mathbb{G}$.

Définition 2.1.3 *On dit que le couple $(L,\mathbb{P})$ satisfait l'hypothèse de densité s'il existe un champ aléatoire $(h_{s,t})_{s,t\in\mathbb{Q}^+}$ et une mesure σ-finie η sur $\overline{\mathbb{R}}^+$ tel que pour $s \geq 0$ fixé, le processus $(h_{s,t})_{t\geq s}$ est une $(\mathbb{P},\mathcal{F})$-martingale et la distribution $\mathcal{F}$-conditionnelle $\mathcal{F}_{u,t}^L$ est donnée par l'égalité suivante :*

$$\mathcal{F}_{u,t}^L = \int_{[0,u]} h_{s,t}d\eta_s \quad , \quad u \leq t.$$

Théorème 2.1.3 *[2] Soit X une $(\mathbb{P},\mathcal{F})$-martingale locale et L satisfait l'hypothèse de densité, alors le processus $\overline{X}$ défini comme suit, est une $(\mathbb{P},\mathcal{F}^L)$- martingale locale.*

$$\overline{X}_t = X_t + \int_{[0,t]} \frac{1}{h_{u,s^-}} d < X, h_{u,} >_s |_{u=L}$$

Proposition 2.1.2 *[2] Soit L un temps aléatoire. Si la loi $\mathcal{F}$-conditionnelle de L vérifie la condition de Lipshiz aléatoire, alors l'hypothèse (H') est satisfaite entre $\mathbb{F}$ et son grossissement initial par le temps aléatoire L.*

Ce résultat est une extention du critère de Jacod.

Lemme 2.1.1 *[4] (Identité maximal de Doob) pour tout $a > 0$, on a :*

1.
$$\mathbb{P}(S_\infty > a) = \left(\frac{x}{a}\right) \wedge 1, \tag{2.3}$$
par conséquent $\frac{x}{S_\infty}$ est une variable aléatoire suit la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$.

2. *pour tout temps d'arrêt T :*
$$\mathbb{P}\left(S^T > a/\mathcal{F}_T\right) = \left(\frac{N_T}{a}\right) \wedge 1, \tag{2.4}$$
où
$$S^T = \sup_{u \geq T} N_u,$$
par conséquent, $\frac{N_T}{S^T}$ est aussi une variable aléatoire suit la loi uniforme $\mathcal{U}(0,1)$ et indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Proposition 2.1.3 *[4] Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale de classe C^0 et son processus supermum (S_t) est continu. Soit f une fonction borélienne localement bornnée et on définit $F(x) = \int_0^t dy f(y)$. Alors $X_t = F(S_t) - f(S_t)(S_t - N_t)$ est une martingale locale et admet une autre représentation :*

$$X_t = F(S_t) - f(S_t)(S_t - N_t) = \int_0^t f(S_s) dN_s + F(S_0). \tag{2.5}$$

Lemme 2.1.2 *[4] Les résultats suivants sont satisfaits*

1. *$g = \inf\{t : N_t = S_\infty\}$; Alors g est un $\mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)}-$temps d'arrêt.*

2. *On a*

$$\mathcal{F}_t^g \subset \mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)}.$$

Proposition 2.1.4 *(Méthode de Yor)*
Pour toute fonction borélienne, bornée et positive f, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) &= f(S_t)\left(1-\frac{N_t}{S_t}\right)+\int_0^{\frac{N_t}{S_t}} dx f\left(\frac{N_t}{x}\right) &(2.6)\\ &= f(S_t)\left(1-\frac{N_t}{S_t}\right)+N_t\int_{S_t}^{\infty} dx\frac{f(x)}{x^2}. &(2.7)\end{aligned}$$

Preuve : Soit U est une variable aléatoire suit la loi uniforme standard et est indépendant de $\mathcal{F}_t$, par le lemme (2.1.1) on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(f(S_t \vee S^t)/\mathcal{F}_t) &(2.8)\\ &= \mathbb{E}(f(S_t)1_{\{S_t\geq S^t\}}/\mathcal{F}_t)+\mathbb{E}(f(S^t)1_{\{S_t<S^t\}}/\mathcal{F}_t) &(2.9)\\ &= f(S_t)\mathbb{P}(S_t \geq S^t/\mathcal{F}_t)+\mathbb{E}(f(S^t)1_{\{S_t<S^t\}}/\mathcal{F}_t) &(2.10)\\ &= f(S_t)\mathbb{P}\left(U\leq\frac{N_t}{S_t}/\mathcal{F}_t\right)+\mathbb{E}\left(f\left(\frac{N_t}{U}\right)1_{\{U<\frac{N_t}{U}\}}/\mathcal{F}_t\right) &(2.11)\\ &= f(S_t)\left(1-\frac{N_t}{S_t}\right)+\int_0^{\frac{N_t}{S_t}} dx f\left(\frac{N_t}{x}\right). &(2.12)\end{aligned}$$

Un changement simple d'une variable dans la dernière intégrale donne également :

$$\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) = f(S_t)\left(1-\frac{N_t}{S_t}\right)+\int_{S_t}^{\infty} dy\frac{f(y)}{y^2}.$$

La question qui ce pose, peut-on écrire $\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t)$ sous la forme (2.5)?
la réponse est positive, et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) &= f(S_t)\left(1-\frac{N_t}{S_t}\right)+N_t\int_{S_t}^{\infty} dy\frac{f(y)}{y^2} &(2.13)\\ &= S_t\int_{S_t}^{\infty} dy\frac{f(y)}{y^2}-(S_t-N_t)\left(\int_{S_t}^{\infty} dy\frac{f(y)}{y^2}-\frac{f(S_t)}{S_t}\right), &(2.14)\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) = H(1) + H(S_t) - h(S_t)(S_t - N_t),$$

avec

$$H(x) = x\int_x^\infty dy\frac{f(y)}{y^2},$$

et

$$h(x) = h_f(x) = \int_x^\infty dy\frac{f(y)}{y^2} - \frac{f(x)}{x} = \int_x^\infty \frac{dy}{y^2}(f(y) - f(x)).$$

De plus, on a une autre représentation de $\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t)$ comme une intégrale stochastique

$$\mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(S_\infty)) + \int_0^t h(S_s)dN_s.$$

Maintenant, on résume ces résultats, on introduit quelques notations expliquées ci-dessous :

$$\begin{aligned}\lambda_t(f) &= \mathbb{E}(f(S_\infty)/\mathcal{F}_t) &(2.15)\\ &= f(S_t)\left(1 - \frac{N_t}{S_t}\right) + N_t\int_{S_t}^\infty dx\frac{f(x)}{x^2} &(2.16)\end{aligned}$$

et

$$\lambda_t(f) = \mathbb{E}(f(S_\infty)) + \int_0^t \dot{\lambda}_s(f)dN_s,$$

où

$$\dot{\lambda}_s(f) = h_f(S_s).$$

De plus, il existe deux familles de mesures aléatoires $(\lambda_t(dx))_{t\geq 0}$ et $(\dot{\lambda}_t(dx))_{t\geq 0}$ avec :

$$\begin{aligned}\lambda_t(dx) &= \left(1 - \frac{N_t}{S_t}\right)\delta_{S_t}(dx) + N_t 1_{\{x>S_t\}}\frac{dx}{x^2} &(2.17)\\ \dot{\lambda}_t(dx) &= -\frac{1}{S_t}\delta_{S_t}(dx) + 1_{\{x>S_t\}}\frac{dx}{x^2} &(2.18)\end{aligned}$$

alors

$$\lambda_t(f) = \int \lambda_t(dx) f(x) \tag{2.19}$$

$$\dot{\lambda}_t(f) = \int \dot{\lambda}_t(dx) f(x). \tag{2.20}$$

Finalement, on remarque qu'il y a une relation de continuité absolue entre $(\lambda_t(dx))_{t\geq 0}$ et $(\dot{\lambda}_t(dx))_{t\geq 0}$; plus précisément :

$$\dot{\lambda}_t(dx) = \lambda_t(dx)\rho(x,t),$$

avec

$$\rho(x,t) = \frac{-1}{S_t - N_t} 1_{\{S_t = x\}} + \frac{1}{N_t} 1_{\{S_t < x\}}.$$

Théorème 2.1.4 *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale de classe C^0, le couple de filtrations $(\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)})$ satisfait l'hypothèse (H') et chaque $\mathcal{F}_t$-martingale locale (X_t) est une $\mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)}$-semimartingale admet une décomposition canonique :*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t 1_{g>s} \frac{d < X, N >_s}{N_{s^-}} - \int_0^t 1_{g\leq s} \frac{d < X, N >_s}{S_\infty - N_{s^-}},$$

où $(\widetilde{X}_t)$ est une $(\mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)})$-martingale locale.

Preuve :
D'abord, on suppose que (X_t) est une martingale de carré intégrable ; le cas général par localisation, soit A_s un ensemble $\mathcal{F}_s$-mesurable et on prend $t > s$, alors pour toute fonction

bornée f et une martingale bornée $\lambda_t(f)$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(1_{A_s} f(S_\infty)(X_t - X_s)\right) &= \mathbb{E}\left(1_{A_s}\left(\lambda_t(f)X_t - \lambda_s(f)X_s\right)\right) && (2.21)\\
&= \mathbb{E}\left(1_{A_s}\left(<\lambda(f), X>_t - <\lambda(f), X>_s\right)\right) && (2.22)\\
&= \mathbb{E}\left(1_{A_s}\left(\int_s^t \dot{\lambda}_u(f) d<X, N>_u\right)\right) && (2.23)\\
&= \mathbb{E}\left(1_{A_s}\left(\int_s^t \int \lambda_u(dx)\rho(x,u)f(x) d<X, N>_u\right)\right) && (2.24)\\
&= \mathbb{E}\left(1_{A_s}\left(\int_s^t \rho(S_\infty, u) d<X, N>_u\right)\right), && (2.25)
\end{aligned}$$

et par la méthode de Yor on a trouvé :

$$\rho(x,t) = \frac{-1}{S_t - N_t} 1_{\{S_t = S_\infty\}} + \frac{1}{N_t} 1_{\{S_t < S_\infty\}}.$$

Maintenant, il suffit de noter par le lemme (2.1.2) que S_t devient canstante après l'instant g, où g le premier temps qui vérifie $S_\infty = S_t$, autrement dit :

$$1_{\{S_\infty > S_t\}} = 1_{\{g > t\}} \quad et \quad 1_{\{S_\infty = S_t\}} = 1_{\{g \le t\}}.$$

Quelques exemples

Exemple 1 :
Soit $(N_t)_{t\ge 0}$ une martingale locale avec $N_0 = 1$ et $N_t \to 0$ quand $t \to \infty$.
On étudie le grossissement initial avec $X_t = \overline{N_\infty} = \sup_{s\le t} N_s$, pour toute fonction borélienne bornée on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_t(f) &= \mathbb{E}\left(f(\overline{N_\infty})/\mathcal{F}_t\right) && (2.26)\\
&= \mathbb{E}\left(f(\overline{N_t} \vee \overline{N}^t)/\mathcal{F}_t\right) && (2.27)\\
&= f(\overline{N}_t)\mathbb{P}\left(\overline{N_t} > \overline{N}^t/\mathcal{F}_t\right) + \mathbb{E}\left[f(\overline{N}_t) 1_{\{\overline{N_t} < \overline{N}^t\}}/\mathcal{F}_t\right], && (2.28)
\end{aligned}$$

où $\overline{N_t} = \sup_{t \leq s} N_s$

D'après le lemme de Doob, la variable aléatoire $\overline{N}_t$ est distribuée comme $\frac{N_t}{U}$ avec $U \rightsquigarrow \mathcal{U}(0,1)$ et indépendante de $\mathcal{F}_t$, on trouve :

$$\lambda_t(f) = f(\overline{N}_t)\left(1 - \left(\frac{N_t}{\overline{N}_t}\right)\right) + \int_0^{\frac{N_t}{\overline{N}_t}} duf\left(\frac{N_t}{u}\right),$$

alors

$$\lambda_t(dx) = \left(1 - \left(\frac{N_t}{\overline{N}_t}\right)\right)\delta_{\overline{N}_t}(dx) + N_t \frac{dx}{x^2} 1_{[\overline{N},\infty[}(x),$$

donc

$$\dot{\lambda}_t(dx) = -\left(\frac{1}{\overline{N}_t}\right)\delta_{\overline{N}_t}(dx) + \frac{dx}{x^2} 1_{[\overline{N},\infty[}(x),$$

par conséquent,

$$\rho(x,t) = \frac{1}{N_t - \overline{N}_t} 1_{\{\overline{N}_t = x\}} + \frac{1}{N_t} 1_{\{\overline{N}_t < x\}},$$

alors on obtient la formule de décomposition de grossissement suivante :

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^{t \wedge l} \frac{d < X, N >_s}{N_s} - \int_0^{l \vee t} \frac{d < X, N >_s}{N_s - \overline{N}_s},$$

avec X_t est une $\mathcal{F}_t-$ martingale est $\widetilde{X}_t$ est une $\mathcal{G}_t-$ martingale et L est un temps aléatoire défini par :

$$L = sup\{t \geq 0, \overline{N}_t - N_t\} = sup\{t \geq 0, \overline{N}_\infty = N_t\}.$$

Exemple 2 :

Soit

$$\mathcal{F}_t^{(B_1)} = \cap_{\epsilon > 0}(\mathcal{F}_{t+\epsilon} \vee \sigma(B_1))$$

une filtration grossie de $\mathcal{F}_t$ satisfait les conditions usuelles. Le processus $\beta_t = B_t - \int_0^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds$ est une $\mathcal{F}_t^{(B_1)}$-martingale, on définit un autre $\mathcal{F}_t^{(B_1)}$-mouvement brownien par la décomposition suivante :

$$B_t = \beta_t + \int_0^{t \wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1 - s} ds,$$

on peut dire que (B_t) est une $\mathcal{F}_t^{(B_1)}$-semimartingale.

On note $\mathcal{F}_t^{(B_1)} = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1) = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1 - B_s)$ telle que $\mathcal{F}_s$ est indépendante de $((B_{s+h} - B_s), h \geq 0)$ on a :

$$\mathbb{E}(B_t - B_s/\mathcal{F}_s^{(B_1)}) = \mathbb{E}(B_t - B_s/B_1 - B_s),$$

pour $t < 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_s^t \left(\frac{B_1 - B_u}{1-u} du/\mathcal{F}_s^{(B_1)}\right)\right) &= \int_s^t \frac{1}{1-u}\mathbb{E}(B_1 - B_u/B_1 - B_s)du && (2.29)\\
&= \int_s^t \frac{1}{1-u}(B_1 - B_s) - \mathbb{E}(B_1 - B_s/B_1 - B_s)du && (2.30)\\
&= \int_s^t \frac{1}{1-u}(B_1 - B_s) - (\frac{u-s}{1-s}(B_1 - B_s))du && (2.31)\\
&= \frac{1}{1-s}(B_1 - B_s)\int_s^t du = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s), && (2.32)
\end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{E}(\beta_t - \beta_s/\mathcal{F}_t^{(B_1)}) = 0,$$

Donc (β_t) est une $\mathcal{F}_t^{(B_1)}$-martingale. Il suffit de monter que (β_t) est une martingale bornée alors est une martingale locale, puis on utilise le critère de Lévy pour monter que (β_t) est un $\mathcal{F}_t^{(B_1)}$- movement brownien.

2.2 Grossissement progressif

Définition 2.2.1 *Le grossissement progressif de la filtration $\mathbb{F}$ est le grossissement minimal i.e la plus petite filtration grossie $\mathbb{F}^L$ qui satisfait les conditions habituelles telle que $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^L$ et L est un $\mathbb{F}^L$-temps d'arrêt. Plus précisement ,*

$$\mathcal{F}_t^L = \bigcap_{s>t} \sigma(L \wedge t) \vee \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0.$$

Temps honnête : On appelle temps honnête toute v.a. L positive verifiant pour $t > 0$, il existe une v-a L_t, $\mathcal{F}_t$-mesurable telle que L est égale à L_t sur l'événement $\{L \leq t\}$, i.e. $L.\mathbb{1}_{\{L\leq t\}} = L_t.\mathbb{1}_{(L\leq t)}$.

Pseudo-temps d'arrêt : σ_T est un pseudo-temps d'arrêt si et seulement si pour toute $\mathbb{F}$-martingale bornée M,$(M_{t\wedge\sigma_T}; t \geq 0)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_t^{\sigma_T}, t \geq 0)$.

Théorème 2.2.1 *[2] Soit $\mathbb{F}_t^L$ le grossissement progressif de $\mathbb{F}_t$ avec L est un temps aléatoire arbitraire, si X est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$-martingale locale alors le processus arrêté X^L est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t^L)$-semimartingale et on a deux processus définis comme suit :*

i *) Le premier processus*

$$X_{t\wedge L} - \int_{(0,t\wedge L]} \frac{1}{G_{u^-}} d(< X, M >_u + \widetilde{X}_u^p)$$

est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t^L)$-martingale locale, où $\widetilde{X}^p$ représente le $\mathcal{F}_t$-projection duale prévisible de $\widetilde{X}_t = \triangle X_L 1_{\{L\leq t\}}$.

ii *) Le deuxième processus*

$$X_{t\wedge L} - \int_{(0,t\wedge L]} \frac{1}{G_{u^-}} d(< X, \overline{M} >_u$$

est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t^L)$-martingale locale, où $\overline{M}$ est l'unique martingale de l'espace BMO [1] tels que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_L) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_\infty \overline{M}_\infty)$ pour toute $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$-martingale bornée N.

Théorème 2.2.2 *On suppose que L satisfait l'hypothèse de densité et X est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$-martingale locale, alors le processus défini par*

$$X_t^{F_t^L} = X_t - \int_{(0,t\wedge L]} \frac{1}{G_{s^-}} dc_s + \int_{(L,t\vee L]} \frac{1}{m} < X, m_{u,.} >_s$$

(où $c \ =< X, m > +B^p$) est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t^L)$-martingale locale.

[1] L'espace BMO est définie comme un sous espace de $\mathcal{H}^2$ est composé par les martingales locales N telle que $\mathbb{E}(N_\infty - N_{T^-}/\mathcal{F}_T) \leq k$ pour tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt T. $\|N\|_{BMO}^2$ désigne le petit k s'il existe (i.e,$N \in BMO$)

Les résultats suivantes ci-dessous ont été prouvés par l'auteur Libo.Li [2].

Théorème 2.2.3 *[2] On suppose que L un pseudo temps honnête tel que pour tout $s \geq 0$, la $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale bornée $(F_{s,u})_{u \geq s}$ est strictement positive, si U_t est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale alors U_t^* est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale donnée par la formule suivante :*

$$U_t^* = U_t - \int_{(0,t \wedge L)} (G_{u^-})^{-1} d(< U, M >_u + \widetilde{U}_u^p) - \int_{(t \wedge s, t]} (F_{s,u^-})^{-1} d < U, F_{s,.} >_u |_{s \equiv L}, \quad (2.33)$$

par conséquent U_t est une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}_t^L)$-semimartingale et l'égalité ci-dessus donne sa décomposition canonique.

Théorème 2.2.4 *[2] On suppose que L un pseudo temps initial, si U_t est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale alors U_t^* est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale donnée par la formule suivante :*

$$U_t^* = U_t - \int_{(0,t \wedge L)} (G_{u^-})^{-1} d\widetilde{C}_u + \int_{(t \wedge s, t]} (m_{s,u^-})^{-1} d < U, m_{s,.} >_u |_{s \equiv L}, \quad (2.34)$$

Théorème 2.2.5 *[2] Soient $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_t^L$ deux filtrations telle que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^L$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Toute $\mathcal{F}_t$-martingale bornée est une $\mathcal{F}_t^L$-martingale (i.e (H) est satisfaite pour $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_t^L$).*

ii) *Toute $\mathcal{F}_t^L$-temps d'arrêt est un $\mathcal{F}_t$-pseudo temps d'arrêt.*

iii) *La $\mathcal{F}_t$-projection optinnelle duale de tout processus $\mathcal{F}_t^L$-optionnel de variation intégrable est égale à sa projection optionnelle.*

Corollaire 2.2.1 *Le couple $(\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t^g)$ satisfait l'hypothèse (H'). En outre, toute $\mathcal{F}_t$-martingale locale X se décompose comme suit :*

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t 1_{\{g > s\}} \frac{d < X, N >_s}{N_{s^-}} - \int_0^t 1_{\{g \leq s\}} \frac{d < X, N >_s}{S_\infty - N_{s^-}},$$

où $\widetilde{X}_t$ est une $(\mathcal{F}_t^g)$-martingale locale.

Preuve :
On donne une nouvelle preuve de la formule de décomposition du théorème (2.1.4) dans le cas de grossissement progressif ; plus précisement on a :
Soit X_t est $\mathcal{F}_t$-martingale locale de carré intégrable d'après le théorème (2.1.4) on a :

$$X_t = \widetilde{X}_t + \int_0^t 1_{\{g>s\}} \frac{d < X, N >_s}{N_{s^-}} - \int_0^t 1_{\{g \leq s\}} \frac{d < X, N >_s}{S_\infty - N_{s^-}},$$

où $\widetilde{X}_t$ désigne une $\mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)}$-martingale, ainsi $\widetilde{X}_t$ est égale à :

$$X_t - \left(\int_0^t 1_{\{g>s\}} \frac{d < X, N >_s}{N_{s^-}} - \int_0^t 1_{\{g \leq s\}} \frac{d < X, N >_s}{S_\infty - N_{s^-}} \right),$$

est $\mathcal{F}_t^g$-adapté (rappellons que $\mathcal{F}_t^g \subset \mathcal{F}_t^{\sigma(S_\infty)}$), et par conséquent , c'est une $\mathcal{F}_t^g$-martingale.
Exemple :
On considère le mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t \geq 0}$. On étudie le grossissement progressif avec le temps aléatoire $L = \inf(t \geq T, B_t = S_T)$, où S_t est un supermum de (B_t) et T est fixé,

$$Z_t = \frac{2}{\sqrt{2\Pi(T-t)}} \int_{S_t - B_t}^\infty \frac{x^2}{2(T-t)} dt \tag{2.35}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\Pi}} \int_{\frac{S_t - B_t}{\sqrt{T-t}}}^\infty e^{-y^{2/2}} dy. \tag{2.36}$$

En effet

$$Z_t = \mathbb{P}(L > t / \mathcal{F}_t) \tag{2.37}$$

$$= \mathbb{P}(S_t < S_T / \mathcal{F}_t) \tag{2.38}$$

$$= \widehat{\mathbb{P}}(\widehat{S}_{T-t} > S_t - B_t), \tag{2.39}$$

où la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ ne concerne pas la variable aléatoire $\widehat{S}_{T-t}$.
La formule de grossissement est définie par

$$B_t = \widetilde{B}_t + \int_0^{t \wedge L} ds \frac{S_T - B_s}{T - s} + \int_L^{t \vee L} ds \frac{e^{(S_T - B_S)^2 / 2(T-s)}}{\int_0^{S_T - B_s} e^{-y^2/2(T-s)}} dy.$$

Avec $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien pour la filtration grossie $(\mathcal{F}_t^L)_{t\geq 0}$.

2.3 La relation entre le grossissement progressif et initial

Notations

Soient $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de référence satisfait les conditions habituelles, $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ la filtration grossie de $\mathbb{F}$ obtenue par le grossissement progressif avec le temps aléatoire τ satisfait $\mathcal{G}_t \cap \{\tau > t\} = \mathcal{F}_t \cap \{\tau > t\}$ et $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ le grossissement initial de $\mathbb{F}$ définie par

$$\mathcal{H}_t = \cap_{u>t}\mathcal{H}_u^0, \ \ \mathcal{H}_t^0 = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau).$$

Théorème 2.3.1 *Soient $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathbb{F}$-martingale locale, $Z_t = \mathbb{P}(\tau > t/\mathcal{F}_t)$ une projection optionnelle de $1_{[\![\tau,\infty[\![}$ dans $\mathbb{F}$, μ la partie martingale de la décomposition du Doob-Meyer et J la projection duale de $\triangle\ M_\tau 1_{[\![\tau,\infty[\![}$ dans $\mathbb{F}$, alors :*

$$M_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d < M, \mu >_s + dJ_s}{Z_{s^-}}$$

est une $\mathbb{G}^\tau$ et martingale locale.

Lemme 2.3.1 *Soient $\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ trois filtrations et X une $\mathbb{G}$-martingale locale, si la projection optionnelle de X dans $\mathbb{E}$ est une $\mathbb{E}$-martingale locale, alors la projection de X dans $\mathbb{F}$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale.*

Le théorème (2.3.1) et le lemme (2.3.1) montrent la $\mathbb{G}$-décomposition avant τ d'une $\mathbb{F}$-martingale locale dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale, alors*

$$M_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d < M, \mu >_s + dJ_s}{Z_{s^-}}$$

est une $\mathbb{G}$-martingale locale.

Définition 2.3.1 *Soient $\mathbb{H}$ et $\mathbb{G}$ deux filtrations telle que $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$ et τ un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt, alors $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont coïncides après τ si tout processus $\mathbb{H}$-optionnel X, le processus $1_{[\![\tau,\infty[\![}(X - X_\tau)$ est $\mathbb{G}$-adapté.*

Lemme 2.3.2 *soit $\mathbb{H}$ le grossissement initial de $\mathbb{F}$, alors $\mathbb{G}^\tau$ et $\mathbb{H}$ sont coïncides après τ.*

Preuve
Soit $X = h1_{[\![s,t[\![}$; où h est une v.a $\mathcal{H}_s$-mesurable et on a fixé $0 \leq s \leq t$, alors

$$\begin{aligned} Y_r &= 1_{[\![\tau,\infty[\![}(r)(X - X_\tau) && (2.40)\\ &= 1_{\{\tau \leq r\}}(h1_{\{s \leq r \leq t\}} - h1_{\{s \leq \tau \leq t\}}) && (2.41)\\ &= h1_{\{s \leq r \leq t\}}1_{\{\tau \leq r\}} - h1_{\{s \leq \tau \leq t\}}1_{\{t \leq r\}} - h1_{\{s \leq \tau \leq r\}}1_{\{r \leq t\}}. && (2.42) \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que les trois termes de côté droit sont $\mathbb{G}^\tau_r$-mesurable.
On considère le premier terme, les autres sont semblables, tout d'abord soit h de forme $fk(\tau)$, où f est $\mathcal{F}_s$-mesurable et k une fonction borélienne, alors

$$h1_{\{s \leq r < t\}}1_{\{\tau \leq r\}} = fk(\tau)1_{\{s \leq r < t\}}1_{\{\tau \leq r\}}$$

$$= fk(r \wedge \tau)1_{\{s \leq r < t\}}1_{\{\tau \leq r\}},$$

qui est $\mathbb{G}^\tau_r$-mesurable. En utilisant le théorème de classe monotone pour le résultat qui suit pour chaque $\mathcal{H}^0_s$-mesurable h et enfin pour chaque $\mathcal{H}_s$-mesurable h.

2.4 Autres types de grossissement de filtrations

2.4.1 Grossissement par temps honnête

Définition 2.4.1 *Soit la famille $\widehat{\mathbb{F}}^L = (\widehat{\mathcal{F}}^L_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ définie pour tout $t \geq 0$ par :*

$$\widehat{\mathcal{F}}^L_t = \left\{A \in \mathcal{F}^L / \exists X_t \in \mathcal{F}_t \text{ et } Y_{L,t} \in \mathcal{F}^L_t \text{ tel que } A = (X_t \cap (L > t)) \cup (Y_{u,t} \cap (L \leq t))\right\}$$

Alors on note $\forall t \geq 0$:

$$\widehat{\mathcal{F}}^L_t \cap (L > t) = \mathcal{F}_t \cap (L > t),$$

et

$$\widehat{\mathcal{F}}_t^L \cap (L \leq t) = \mathcal{F}_t^L \cap (L \leq t).$$

Définition 2.4.2 *On dit que le grossissement $\mathbb{G}$ est admissible avant L si l'égalité $\mathcal{G}_t \cap (L > t) = \mathcal{F}_t \cap (L > t)$ est satisfaite $\forall t \geq 0$.*

Définition 2.4.3 *On dit que le grossissement $\mathbb{G}$ est admissible après L si l'égalité $\mathcal{G}_t \cap (L \leq t) = \mathcal{F}_t^L \cap (L \leq t)$ est satisfaite $\forall t \geq 0$.*

2.4.2 Grossissement succéssif

Soit l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ telle que la filtration $\mathbb{F}$ satisfait les conditions habituelles. On considère l'horizon de temps $T > 0$ et les intervalles de temps $\{t_i, i = 1, ..., n\}$ avec $t_1 = 0$ et $t_{n+1} = T$ et on considère le flot d'information privé $\sigma\{L^i, i = 1, ..., n\}$ où L^i est $\mathcal{A}$-mesurable. L'information sur le phénomène étudié contient $\mathbb{F}$ et l'information privé $\sigma\{L^i, i = 1, ..., n\}$, alors on a la nouvelle filtration définie par :

$$\mathbb{H}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L^1) \vee ... \vee \sigma(L^i).$$

On définit $\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^i, t \in [t_i, t_{i+1})$ tel que

$$\mathbb{H}_t^i = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L^1) \vee ... \vee \sigma(L^i),$$

est la famille de grossissements initiaux succéssifs.

Proposition 2.4.1 *Soit $L_1 < L_2$, p.s, $\mathbb{H}^i$ la filtration engendrée par le processus par défaut $\mathbb{H}_t^i = 1_{L_i \leq t}$, et $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee \mathbb{H}^2$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*

i) *$\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$.*

ii) *$\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ est immergée dans $\mathbb{G}$.*

Preuve
Il suffit seulement de vérifier que si $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$, alors $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ est immergée dans $\mathbb{G}$, ou que

$$\mathbb{P}(L_2 > t/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1) = \mathbb{P}(L_2 > t/\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{H}_\infty^1),$$

ça est équivalent à, pour tout h, pour tout $A_\infty \in \mathcal{F}_\infty$

$$\mathbb{E}(A_\infty h(L_1)1_{\{L_2>t\}}) = \mathbb{E}(A_\infty h(L_1)\mathbb{P}(L_2 > t/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1)),$$

on partage cette égalité en deux parties, la première égalité :

$$\mathbb{E}(A_\infty h(L_1)1_{\{L_1>t\}}1_{\{L_2>t\}}) = \mathbb{E}(A_\infty h(L_1)1_{\{L_1>t\}}\mathbb{P}(L_2 > t/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1)),$$

est évident puisque $1_{\{L_1>t\}}1_{\{L_2>t\}} = 1_{\{L_1>t\}}$ et $1_{\{L_1>t\}} = 1_{\{L_1>t\}}\mathbb{P}(L_2 > t/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1))$ puisque $\mathbb{F}$ est immergée dans $\mathbb{G}$, on a $\mathbb{E}(A_\infty/\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(A_\infty/\mathcal{F}_t)$ et il suit que $\mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{G}_t) = \mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1)$? donc $\mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{G}_t)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\infty|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1))$, de plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_\infty h(L_1)1_{\{L_2>t\geq L_1\}}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\infty/\mathcal{G}_t)h(L_1)1_{\{L_2>t\geq L_1\}}) && (2.43)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(A_\infty/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1)h(L_1)1_{\{L_2>t\geq L_1\}}) && (2.44)\\
&= \mathbb{E}(A_\infty/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1))\mathbb{E}(h(L_1)1_{\{L_2>t\geq L_1\}}/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1) && (2.45)\\
&= \mathbb{E}(A_\infty \mathbb{E}(h(L_1)1_{\{L_2>t\geq L_1\}}/\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t^1)). && (2.46)
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Applications de grossissement de filtrations en finance

3.1 Décomposition des prix d'actifs réduits dans la filtration grossie

Notations : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré muni la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles, $\mathbb{P}$ désigne la mesure de probabilité physique et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ est séparable. On considère un marché financier qui est composé d'un actif risqué S, un actif sans risque B et deux commerçants : une liquidité d'un commerçant de marché et un initié.
On définit la filtration d'initié grossie $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ par le grossissemnet initial.

3.1.1 Admissibilité d'une stratégie

Notatoins
Les prix d'actions réduits est une $\mathbb{F}$-martingale locale ce qui implique qu'il est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-semimartingale

$$dS_t = dM_t$$

Soit $\mathbb{H}$ une autre filtration telle que $\mathbb{H} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ et $\mathcal{P}^{\mathbb{H}(S)}$ l'ensemble des processus $\mathbb{H}$-prévisibles à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ et S sont des processus $\mathbb{H}$-intégrables.

Définition 3.1.1 *Une stratégie de négociation H est une stratégie de négociation prévi-*

sible simple si elle peut être écrite comme :

$$H_t = H_0 1_{\{0\}}(H) + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{\{\tau_i, \tau_{i+1}\}}(H), \quad t \geq 0,$$

où $0 = \tau_1 < ... < \tau_{n+1} < \infty \;\; \mathbb{P} - p.s$ *est une suite finie des temps d'arrêts,* $H_i \in H_{\tau_i}$ *avec* $|H_i| < \infty \;\; p.s, \;\; 0 \leq i \leq n.$

Définition 3.1.2 *Pour* $a \in \mathbb{R}^+$, $\varphi = (\varphi_t)_{t \geq 0}$ *est un élément de* $\mathcal{P}^{\mathbb{H}}(S)$ *est dit admissible si* $(\varphi, S)_T = \lim_{t \to T} (\varphi, S)_t$ *existe et* $(\varphi, S)_t \geq -a \;\; \mathbb{P} - p.s.$ *pour tout* $t \in [0, T]$, *si* $\mathcal{A}_a^{\mathbb{H}}$ *est l'ensemble de tous les* $\mathbb{H}$*-stratégies de négociations admissibles, on dit que* φ *est une* $\mathbb{H}$*-stratégie admissible si* $\varphi \in \mathcal{A}^{\mathbb{H}} = \cup_{a \in \mathbb{R}^+} \mathcal{A}_a^{\mathbb{H}}$.
On peut dire que toute les $\mathbb{F}$*-stratégies de négociations admissibles sont des* $\mathbb{G}$*-stratégies de négociations admissibles.*

Définition 3.1.3 *On appelle une stratégie d'arbitrage une stratégie admissible de valeur initiale nulle et à valeur finale non nulle.*
une opportunité d'arbitrage est de manière générale la possibilité d'obtenir un profit sans risque.

Mesure de risque neutre
Une mesure de probabilité sous laquelle les prix des produits financiers sont des martingales.

Notations
On suppose que de la probabilité physique $\mathbb{P}$ est une mesure de risque neutre du marché, ce qui est équivalent à supposer que le marché satisfait la condition (NFLVR) (i.e enlarged market satisfies no free lunch with vanishing risk) ou l'absense d'opportunité d'arbitrage. En utilisant le théorème de Jacod, on obtient le lemme suivant qui donne la décomposition de $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-semimartingale du prix des actions réduites.

Lemme 3.1.1 *Il existe un processus* $(x, w, t) \to K_t^x(w)$ $\mathcal{P}(\widehat{\mathbb{F}}) = E \otimes \mathcal{P}(\mathbb{F})$*-mesurable, tel que :*

$$< q^x, S >= (k^x, q^x). < S, S >,$$

de plus, on a les propriétés suivantes

1. $\int_0^t |k_s^L| d < S, S >_s < \infty$ *p.s*, $\forall t \geq 0$, *où* L *représente l'information supplémentaire d'initié.*
2. *Le processus suivant est une* $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$*-martingale locale*

$$\widetilde{S}_t = S_t - \int_0^t k_s^L d < S, S >_s,$$

et la décomposition de S *dans* $\mathbb{G}$ *est donnée par :*

$$dS_t = \begin{cases} dM_t, & si\ t < \tau \\ d\widetilde{S}_t + k_t^L d < S, S >_t, & si\ t \geq \tau \end{cases}$$

où $\widetilde{S}_t$ *est une* $\mathbb{G}$*-martingale locale continue et* $d < S, S >= d < \widetilde{S}, \widetilde{S} >$.

3.2 Modèle de volatilité stochatique avec des informations supplémentaires

On suppose que (B_t^1) et (B_t^2) sont des mouvements browniens standards et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration commerce réguliére satisfaisant les conditions habituelles définie comme suit :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u^1, B_u^2 : u \leq t),$$

On suppose que le prix d'action réduit suit un modèle de volatilité stochastique décrit ci-dessous :

$$dS_t = \gamma(S_t, B_t^2) dB_t^1 \tag{3.1}$$

$$d < B^1, B^2) >_t = \rho dt \tag{3.2}$$

$$L = \int_0^\infty g(s) dB_s^2 \tag{3.3}$$

Dans le modèle décrit ci-dessus, l'initié a des informations qui peuvent affecter la volatilité du processus de prix des actions réduits, ce type d'information supplémentaire est adapté dans notre contexte, depuis qu'il ne depend pas de la propriété du chemin des prix d'actions réduites négociées. Cette approche est en contraste avec le type de connaissances supplémentaires qui peuvent être trouvées dans la littérature, par exemple certaines informations supplémentaires sont généralement considèrées comme le dernier temps, le prix d'action réduit est égal à une certaine valeur ou le dernier temps, le prix d'action réduit est égal à sa tenue (fonctionnement) maximale ou minimale.

Supposons d'abord que

$$a = \inf\left\{t : \int_t^{\infty} g^2(s)ds = 0\right\} = \infty, \quad \gamma_t > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

Par exemple, si $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0$, l'équation (3.4) est satisfaite, l'information supplémentaire est représentée par une variable aléatoire gaussienne L, le grossissement gaussien de la filtration brownienne a été étudiée d'abord par Chaleyat-Maurel et Jeulin [23] et a été révisité par Protter[24].
Pour trouver la décomposition de S dans la filtration grossie $\mathbb{G}$ sous $\mathbb{P}$, on a besoin de trouver q^x et k^x, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L < x/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(\int_0^t g(s)dB_s^2 \int_t^{\infty} g(s)dB_s^2 < x/\mathcal{F}_t) && (3.5)\\
&= \mathbb{P}(\int_t^{\infty} g(s)dB_s^2 < x - \int_0^t g(s)dB_s^2/\mathcal{F}_t) && (3.6)\\
&= \mathbb{P}(\int_t^{\infty} g(s)dB_s^2 < x - \int_0^t g(s)dB_s^2/\sigma\{B_u^1; u \leq t\}) && (3.7)
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $d < B^1, B^2 >_t = \rho dt$, ce qui implique que $B^2 = \rho B^1 + \sqrt{1+\rho^2}Z$, où Z est indépendant de (B_t^1) et un mouvement brownien standard par rapport à $\sigma(B_u^1, Z_u; u \leq t) = \sigma(B_u^1, B_u^2; u \leq t)$.

Donc $\int_t^\infty g(s)dB_s^2$ est indépendante de $\sigma\{B_u^1; u \leq t\}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L < x/\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(\int_t^\infty g(s)dB_s^2 < x - \int_0^t g(s)dB_s^2/\sigma\{B_u^1; u \leq t\}) && (3.8)\\
&= \phi^v(x - \int_0^t g(s)dB_s^2), && (3.9)
\end{aligned}$$

où ϕ^v est la fonction de répartition d'une v.a gaussienne centrée de variance égale à $v_t = \int_0^\infty g(s)^2 ds$, ϕ^v est bien définie quand $a = \infty$, par conséquent ;

$$Q_t(w, dx) = \phi^v(x - \int_0^t g(s)dB_s^2)dx$$

$$q_t^x = \frac{1}{\sqrt{2\Pi V_t}} \exp\left(\frac{1}{2V_t}\left(x - \int_0^t g(s)dB_s^2\right)^2\right).$$

Soit $X = \int g(s)dB_s^2$, par la formule d'Itô, l'EDS est satisfaite par q^x, pour tout x est calculée comme suit

$$dq_t^x = -\frac{1}{2v_t}\frac{\partial v_t}{\partial t}q_t^x dt - \frac{(x - X_t)^2}{2v_t^2}\frac{\partial v_t}{\partial t}q_t^x dt$$

$$+\frac{(x - X_t)}{v_t}q_t^x dX_t + \frac{1}{2}\left[\frac{q_t^x}{v_t} - \frac{(x - X_t)^2}{v_t^2}q_t^x\right] d[X, X]_t,$$

on a $d[X, X]_t = g(t)^2 dt$ et $\frac{\partial v_t}{\partial t} = -g(t)^2$, alors :

$$dq_t^x = \frac{g(t)^2}{2v_t}q_t^x dt + g(t)^2\frac{(x - X_t)^2}{2v_t^2}q_t^x dt$$

$$+\frac{(x - X_t)}{v_t}q_t^x g(t)dB_t^2 - \frac{g(t)^2}{2v_t}q_t^x dt - g(t)^2\frac{(x - X_t)^2}{2v_t^2}q_t^x dt$$

$$= \frac{(x - X_t)}{v_t}q_t^x g(t)dB_t^2,$$

par conséquent, pour tout t, on a :

$$\begin{aligned} d < q^x, S >_t &= \rho\gamma_t q_t^x \frac{g(t)(x - \int_0^t g(s)dB_s^2)}{v_t} dt & (3.10)\\ &= \rho q_t^x \frac{g(t)(x - \int_0^t g(s)dB_s^2)}{\gamma_t v_t} d < S, S >_t & (3.11)\\ &= \rho q_t^x \frac{g(t) \int_0^t g(s)dB_s^2}{\gamma_t v_t} d[S, S]_t, & (3.12) \end{aligned}$$

ce qui implique que pour tout t

$$\begin{aligned} k_t^x &= \rho g(t) \frac{(x - \int_0^t g(s)dB_s^2)}{\gamma_t v_t} & (3.13)\\ k_t^L &= \rho g(t) \frac{(L - \int_0^t g(s)dB_s^2)}{\gamma_t \int_0^\infty g(s)^2 ds} & (3.14)\\ &= \rho g(t) \frac{\int_0^\infty g(s)dB_s^2 - \int_0^t g(s)dB_s^2}{\gamma_t \int_0^\infty g(s)^2 ds} & (3.15)\\ &= \frac{\rho g(t) \int_t^\infty g(s)dB_s^2}{\gamma_t \int_0^\infty g(s)^2 ds}, & (3.16) \end{aligned}$$

par (3.13) et(3.14) les processus prévisibles k^x et k^L sont bien définis et $\widetilde{S}_t = S_t - \int_0^t k_s^L d[S, S]_s$ est une $(\mathbb{G}, \mathbb{P})$-martingale locale, alors la décomposition de S_t dans la filtration grossie sous $\mathbb{P}$ est donnée par

$$dS_t = d\widetilde{S}_t \frac{\rho g(t) \int_t^\infty g(s)dB_s^2}{\gamma_t \int_0^\infty g(s)^2 ds} d[S, S]_t.$$

3.3 La consruction de la mesure de risque neutre de l'initié

On peut écrire (S_t) sous la probabilité $\mathbb{P}$ par la décomposition suivante :

$$S_t = S_0 + M_t + A_t, \quad t \geq 0,$$

la probabilité de risque neutre est unique car le marché est supposé complet, et comme M dans le cadre brownien, on a la représentation martingale qui est $M_t = \int_0^t J_s dB_s$ pour tout processus prévisible J, et aussi S satisfait NFLVR (i.e enlarged market satisfies no free lunch with vanishing risk), donc A est de la forme $A_t = \int_0^t H_s ds$, pour tout processus prévisible H. On a :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(\int_0^T -\frac{H_s}{J_s} dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{H_s^2}{J_s^2} ds\right), \tag{3.17}$$

Soit (Z_t) l'unique solution de l'équation exponontielle stochastique :

$$Z_t = 1 - \int_0^t Z_s \frac{H_s}{J_s} dB_s, \tag{3.18}$$

et par le théorème de Girsanov, on a :

$$N_t = \int_0^t J_s dB_s - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, J.B]_s, \tag{3.19}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.
On fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned} [Z, J.B]_t &= [-Z\frac{H}{J}.B, J.B]_t & (3.20)\\ &= -\int_0^t Z_s \frac{H_s}{J_s} J_s d[B, B]_s & (3.21)\\ &= -\int_0^t Z_s H_s ds. & (3.22)\end{aligned}$$

La combinaison de ce calcul avec (3.19) donne ce résultat

$$\begin{aligned} N_t &= \int_0^t J_s dB_s - \int_0^t -\frac{1}{Z_s} Z_s H_s ds & (3.23)\\ &= \int_0^t J_s dB_s + \int_0^t H_s ds, & (3.24)\end{aligned}$$

est une $\mathbb{Q}$-martingale locale.
Maintenant, on note que $N = S$ qui implique que S est une $\mathbb{Q}$-martingale locale, puisque il y a une seule mesure qui transfère S à une martingale locale (le marché est complet), on remarque que notre point de vue concernant la définition de $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ qui donne que $\mathbb{Q}$ est la bonne et la seule qui donne la mesure de risque neutre. De plus, dans l'analyse ci-dessus, on a supposé que toutes les intégrales stochastiques existent et en particulier que la division par le processus J ne pose pas de problème.
Le point important des calculs ci-dessus est que la densité de Radom-Nikodym $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ en (4.12) dépend des processus H et J, ces processus peuvent changer selon un grossissement de filtrations, et donc ils affectent $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, en changeant la mesure de risque neutre.
On note $H^\star$ et $J^\star$ les $\mathbb{G}$-processus dans la décomposition de S. la mesure de risque neutre change de $\mathbb{Q}$ à une nouvelle mesure $\mathbb{Q}^\star$ pour l'initié, et elle est différent de celle du marché. Etant donné que les prix de dérives sont des espérance sous $\mathbb{Q}$ pour le marché collectif utilisant $\mathbb{F}$, et ils sont les espéances sous $\mathbb{Q}^\star$ pour l'initié utilisant l'information $\mathbb{G}$ le résultat est que l'initié a des prix des produits dérivés utilisant la filtration $\mathbb{G}$, lui donnant potentiellement d'avantage énorme avec lequel il peut dérivé plus de profits, en sachant quand une négociation qui apparaît neutre et équitable pour le marché sous $\mathbb{Q}$ est en fait une bonne affaire (ou est trop cher) si le prix est calculé pour l'initié sous $\mathbb{Q}^\star$.

Chapitre 4

La propriété de représentation prévisible (PRP) pour le grossissement de filtrations

Dans ce chapitre, on étudie les problèmes liés à la proprité de représentation prévisible pour le grossissement de filtrations. Notre objectif est de trouver si la PRP est satisfaite pour la filtration de référence $\mathbb{F}$, alors elle est vérifiée aussi par rapport à la filtration grossie $\mathbb{G}$. Pour cela, on étudie cette propriété pour deux types de grossissements d'abord, dans le cadre de grossissement initial qui a été présenté par Claudio Fontana [10] et dans le cadre de grossissement progressif par Monique Jeanblanc avec Shiqi Song [9]. Cette propriété joue un rôle important en finance puisque elle est primordiale pour avoir un marché complet et de point de vue Mathématiques, cette propeiété a pour objectif de décrire les martingales d'une filtration donnée.

4.1 La propriété de représentation prévisible (PRP) pour le grossissement initial

La propriété de représentation de martingale (PRM)

Définition 4.1.1 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *une base stochastique supportant la filtration* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *et* $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *une martingale locale sur* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, *si toute* $\mathbb{F}$*-martingale locale peut être représentée comme une intégrale stochastique de* S, *alors* S *possède la propiété*

(PRM)sur $\mathbb{F}$.

Définition 4.1.2 *On dit que la martingale locale* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *possède la propriété de représentation prévisible forte sur* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *si*

$$\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}, \mathbb{F}) = \left\{\xi + (\varphi.X), \xi \in L^0(\mathcal{F}_0)\right\},$$

où $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ *l'espace de* $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$*-martingale locale et* $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ *est un processus* $\mathbb{F}$*-prévisible.*

D'autre terme, la martingale locale X *possède la proriété de représentation prévisible forte sur* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *si et seulement si chaque martingale locale sur cet espace nulle en 0 peut être écrite comme une intégrale stochastique par rapport à* X.

Hypothèse (1)

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe une mesure σ-finie γ sur (E, B_E) tel que $v_t \ll \gamma$ est satisfaite sous $\mathbb{P} - p.s.$

Lemme 4.1.1 *[10] si l'hypothèse(1) est satisfaite, alors il existe une fonction* $(x, w, t) \to q_t^x \in \mathbb{R}^+$ $(\mathcal{B}_E, \mathcal{O}_{\mathbb{F}})$*-mesurable telle que :*

1. $v_t(dx) = q_t^x \lambda(dx)$ *est satisfaite* $\mathbb{P}p.s$ *pour tout* $t \geq 0$.
2. $q_t^x = (q_t^x)_{t\geq 0}$ *est une* $\mathbb{F}$*-martingale, pour toute* $x \in E$.

Proposition 4.1.1 *[10] On suppose que l'espace* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est séparable et soit :*

$$S^{\mathbb{G}} = S - \frac{1}{q^l}[S, q^L] + (\triangle\ S_{\eta^x} 1_{[\eta^x, \infty[})^{P,\mathbb{F}}|_{x=L}$$

Avec $(\triangle\ S_{\eta^x} 1_{[\eta^x, \infty[})^{P,\mathbb{F}}$ *est une* $\mathbb{F}$*-projection duale prévisible de* $\triangle\ S_{\eta^x} 1_{[\eta^x, \infty[}$*, alors* $S^{\mathbb{G}} = (S_t^{\mathbb{G}})_{t\geq 0}$ *est une* $\mathbb{G}$*-martingale locale.*
Où $\eta^x = \inf\{t \geq 0 : q_t^x = 0$ *et* $q_{t^-}^x > 0$ *pour tout* $x \in E\}$.

Théorème 4.1.1 *[10] supposons que* $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est séparable et* $S = (S_t)_{t\geq 0}$ *a la propriété PRPF sur* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$*, alors* $S_t^{\mathbb{G}} = (S_t^{\mathbb{G}})_{t\geq 0}$ *a la propriété PRPF sur* $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$.

Remarque 4.1.1 *Sous les hypothèses du théorème (4.1.1), toute $\mathbb{G}$-martingale locale $M = (M_t)_{t\geq 0}$ peut être représentée par :*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_u dS_u^{\mathbb{G}}, \quad t \geq 0, \quad \mathbb{P}p.s$$

Où $\varphi \in L_m(S^{\mathbb{G}}, \mathbb{P}, \mathbb{G})$ et un processus $\mathbb{G}$-prévisible.

Preuve

Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathbb{G}$-martingale qui peut être écrite comme $M_t = m_t^L$, où $(x, w, t) \to m_t^x(w)$ une fonction mesurable telle que $(m_t^x q_t^x)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale $\forall x \in E$:

1. puisque S a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, on peut écrire ;$\forall x \in E$:

$$m_t^x q_t^x = m_0^x q_0^x + \int_0^t k_u^x dS_u, \tag{4.1}$$

$$q_t^x = q_0^x + \int_0^t H_u^x dS_u, \tag{4.2}$$

2. Notons que $q_t^L > 0$, $\mathbb{P}p.s$, $\forall t \geq 0$, on peut écrire :

$$M_t = m_t = \frac{m_t^L q_t^L}{q_t^L} = \frac{1}{q_t^L} m_t^x q_t^x|_{x=L}$$

L'intégration par parties dans (4.1) et (4.6) donnera une représentation d'une intégrale stochastique dans $\mathbb{G}$.

Corollaire 4.1.1 *[10] On suppose que $\mathbb{P}(\eta^x < \infty) = 0$ pour λ-p.s. $x \in E$ et $S = (S_t)_{t\geq 0}$ a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors le processus $(\frac{1}{q_t^L}, \frac{S_t}{q_t^L})_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$ a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$, où $(\frac{1}{q_t^L}, \frac{S_t}{q_t^L})_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{G}$-martingale locale.*

Corollaire 4.1.2 *[10] supposons que $v_t \leqslant \lambda$ $\mathbb{P} - p.s$ pour tout $t \in [0, T]$, pour $T < \infty$ est fixé, et soit $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ possède la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ possède la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{Q})$, avec $d\mathbb{Q} = (q_0^L, q_t^L)d\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité de martingale.*

Proposition 4.1.2 *[9] On suppose que $S = (S_t)_{t\geq 0}$ a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et soit $(x, w, t) \to m_t^x(w)$ une fonction $(\mathcal{B}_E, \otimes\mathcal{O}_\mathbb{F})$-mesurable telle que $(m_t^x q_t^x)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{F}$-martingale pour tout $x \in E$, alors il existe une fonction $(\mathcal{B}_E, \otimes P_\mathbb{F})$-mesurable $(x, w, t) \to k_t^x(w) \in \mathbb{R}^d$, satisfisant $k_t^x \in L_m(S, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, pour tout $x \in E$ et de telle sorte que*

$$m_t^x q_t^x = m_0^x q_0^x + \int_0^t k_u^x dS_u, \quad (\mathbb{P} \otimes \lambda) - p.s \text{ pour tout } t \geq 0$$

Proposition 4.1.3 *[9] On suppose que $S = (S_t)_{t\geq 0}$ a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une $\mathbb{G}$-martingale, alors il existe un processus $\mathbb{G}$-prévisible et intégrable $(k_t^L)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :*

$$M_t = \frac{1}{q_t^L}(q_0^L M_0 + \int_0^t k_u^x dS_u), \quad \mathbb{P} - p.s \text{ pour tout } t \geq 0,$$

où l'intégrale stochastique est une $\mathbb{G}$-semimartingale.

4.2 La propriété PRP pour le grossissement progressif

4.2.1 La propriété PRP pour le grossissement d'une filtration générale

Définition 4.2.1 *Etant donné une base stochastique $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q}, \mathbb{F})$, soit $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un processus multidimentionnelle, $\mathbb{F}$-adapté et càdlàg on dit que W possède la propriété (PRM) dans la filtartion $\mathbb{F}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$, si toute $(\mathbb{Q}, \mathbb{F})$-martingale locale peut être représenté par une intégrale stchastique par rapport à W et si*

$$\mathcal{M}_{loc,0}(\mathbb{Q}, \mathbb{F}, W) = \mathcal{M}_{loc,0}(\mathbb{Q}, \mathbb{F}).$$

Hypothèse (2)

On suppose que le processus $h \in H^o(\mathbb{F}, \tau)$, le temps τ telle que la filtration $\mathbb{F}$ est immergé dans son grossissement progressif $\mathbb{G}$ et la surmartingale d'Azema Z décroissante et $\mathbb{F}$-prévisible de sorte que $Z = 1 - A^p$, où $H^o(\mathbb{F}, \tau)$ est un ensemble des processus $\mathbb{F}$-optionnels et intégrables.

Lemme 4.2.1 *On dit que l'hypothèse (2) est satisfaite, si*

$$\int_0^t \triangle \mu_s^h dM_s^\tau = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.3}$$

Alors $Y^h \in \mathcal{M}(\mathbb{G}, \tau)$ admet la représentation suivante :

$$dY_t^h = \frac{Z_{t^-}}{Z_{t^-} - \triangle A_t^p}(h_t - \frac{X_{t^-}^h}{Z_{t^-}})dM_t^\tau + \frac{1 - H_{t^-}}{Z_{t^-}} d\mu_t^h,$$

où $(\mathbb{G}, \tau)$ est un ensemble des $\mathbb{G}$-martingales arrêtées à τ.

Proposition 4.2.1 *On suppose que l'hypothèse (2) est vérifiée. Si une $\mathbb{F}$-martingale (M_t) a la PRP, alors $Y^h \in (\mathbb{G}, \tau)$ admet la représentation suivante :*

$$dY_t^h = (h_t - \frac{X_t^h}{Z_t})dM_t^\tau + \frac{1 - H_{t^-}}{Z_{t^-}} \phi_t^h dM_t,$$

pour un processus $\mathbb{F}$-prévésible ϕ^h.En outre, si la condition (4.3) est satisfaite alors :

$$dY_t^h = \frac{Z_{t^-}}{Z_{t^-} - \triangle A_t^p}(h_t - \frac{X_{t^-}^h}{Z_{t^-}})dM_t^\tau + \frac{1 - H_{t^-}}{Z_{t^-}} \phi_t^h dM_t,$$

Remarque 4.2.1 *On note que ce cadre a été étudié par Kusuoka [5] sous l'hypothèse que la filtration $\mathbb{F}$ est engendrée par un mouvement brownien, on note que si $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne, alors toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues, sous la condition (4.3), alors la proposition (4.2.1)est valable lorsque $M = W$ est un mouvement brownien.*

Remarque 4.2.2 *La proposition (4.2.1) n'est pas couverte par les résultats récents de Jeanblanc et song [8], où les auteurs montrent que si l'hypothèse (H') est satisfaite entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ et la PRP est vérifiée pour la filtration $\mathbb{F}$ par rapport à une $\mathbb{F}$-martingale, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$M_t^\tau \in \mathcal{F}_{\tau_-}$ et la filtration est immergé dans $\mathbb{G}$ est satisfaite.*
2. *La PRP par rapport à M_t et M^τ est satisfaite et l'égalité $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{G}_{\tau^-}$ est vérifiée.*

4.2.2 La propriété PRP pour le grossissement d'une filtration engendrée par un processus de Poisson

Soit $N = (N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson standard avec la suite de temps de sauts $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ et λ l'intensité constante, on prend $\mathbb{F}$ la filtration engendrée par le processus de Poisson N, On suppose que $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{G}$. Maintenant, on définit le processus de Poisson composé $M_t = N_t - \lambda_t$ qui est une $\mathbb{F}$-martingale, de la PRP bien connue de le processus de Poisson composé, les $\mathbb{F}$-martingales μ et μ^h admettent les représentations intégrales :

$$\mu_t = 1 + \int_0^t \phi_s dM_s, \quad \mu_t^h = \mu_0^h + \int_0^t \phi_s^h dM_s,$$

Où ϕ_s^h et ϕ_s sont des processus $\mathbb{F}$-prévisibles.

Lemme 4.2.2 *Soit $Z = e^{-N}$, où N est un processus de Poisson, alors les assertions suivantes sont satisfaites :*

i) *Z admet la décomposition de Doob-Meyer $Z = \mu - A^p$ où*

$$\mu_t = 1 - \int_0^t \gamma e^{-N_{s^-}} dM_s, \quad A_t^p = \int_0^t \gamma\lambda e^{-N_s} ds,$$

et $\gamma = 1 - \frac{1}{\epsilon} > 0$.

ii) *Le processus $M_t^\tau = H_t - \gamma\lambda(t \wedge \tau)$ est une $\mathbb{G}$-martingale et le temps aléatoire τ est totalement inaccessible $\mathbb{G}$-temps d'arrêt.*

Proposition 4.2.2 *[9] On suppose que le temps aléatoire τ est donné par la formule $\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : N_t \geq \xi\}$, où ξ une v.a indépendante de la filtration $\mathbb{F}$. On considère la $\mathbb{G}$-martingale $Y^h \in \mathcal{M}(\mathbb{G}, \tau)$ où $h \in \mathcal{H}^p(\mathbb{F}, \tau)$ est donné par $h_t = h(N_{t^-})$ pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Alors Y^h admet la représentation suivante :*

$$dY_t^h = (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-} + 1))dM_t^\tau + (1 - H_{t^-})(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1) - \widetilde{h}(N_{t^-}))dM_t, \tag{4.4}$$

est equivalent à :

$$dY_t^h = (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-}))dM_t^\tau + (1 - H_{t^-})(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1) - \widetilde{h}(N_{t^-}))d\overline{M_t^\tau}, \tag{4.5}$$

où $M_t^\tau = H_t - \gamma\lambda(t \wedge \tau)$ *et* $\overline{M_t^\tau} = M_t - M_t^\tau$ *sont des* $\mathbb{G}$*-martingales et* $\widetilde{h}$ *une fonction donnée par* $\widetilde{h}(x) = \mathbb{E}\left(\int_0^\infty \gamma\lambda h(N_s + x)e^{-N_s}ds\right)$.

Preuve

On note $X = X^h$ et $Y = Y^h$, par le lemme et l'équation

$$Y_t^h = 1_{\{\tau \leq t\}}h_\tau + 1_{\{t<\tau\}}\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}(\int_t^\infty h_s dA_s^p / \mathcal{F}_t) = H_t h_\tau + (1 - H_t)X_t^h(Z_t)^{-1} \tag{4.6}$$

On a :

$$Y_t = \int_0^t h_s dH_s + (1 - H_t)\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}(\int_t^\infty \gamma\lambda h_s e^{-N_s}ds/\mathcal{F}_t). \tag{4.7}$$

on utilise l'indépendance des incréments de processus de Poisson N, on obtient :

$$X_t = \mathbb{E}(\int_0^\infty \gamma\lambda h(N_s)e^{-N_s}ds/\mathcal{F}_t) = \widetilde{h}(N_t)e^{-N_t} = \widetilde{h}(N_t)Z_t \tag{4.8}$$

Les équations (4.7) et (4.8)donnent

$$Y_t = \int_0^t h_s dH_s + (1 - H_t)\widetilde{h}(N_t),$$

et par conséquent, puisque $\{\triangle\ H > 0\} \subset \{\triangle\ N > 0\}$,

$$\begin{aligned} dY_t &= (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-}))dH_t + (1 + H_{t^-})d\widetilde{h}(N_t) - \triangle\ H_t \triangle\ \widetilde{h}(N_t) && (4.9) \\ &= (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-}))dH_t + (1 + H_{t^-})(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1) - \widetilde{h}(N_{t^-}))dN_t - (\widetilde{h}(N_{t^-} + 1) - \widetilde{h}(N_{t^-}))dH_t && (4.10) \\ &= (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-} + 1))dH_t + (1 - H_{t^-})(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1) - \widetilde{h}(N_{t^-}))dN_t, && (4.11) \end{aligned}$$

par conséquent

$$dY_t = (h_t - \widetilde{h}(N_{t^-} + 1))dM_t^\tau + (1 - H_{t^-})(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1)) - \widetilde{h}(N_{t^-})dM_t$$

$$+(1 - H_t)\lambda\gamma(h(N_{t^-})) - \widetilde{h}(N_{t^-} + 1)dt + (1 - H_t)\lambda(\widetilde{h}(N_{t^-} + 1)) - \widetilde{h}(N_{t^-})dt.$$

pour compléter la preuve, il suffit de montrer que l'égalité suivante est satisfaite $\forall x \geq 0$

$$\gamma h(x) + (1-\gamma)\widetilde{h}(x+1) - \widetilde{h}(x) = 0. \tag{4.12}$$

pour établir (4.12), d'abord on observe que

$$\widetilde{h}(x+1) = \mathbb{E}(\int_0^\infty \gamma\lambda h(N_s+x+1)e^{-N_s}ds = \exp\mathbb{E}(\int_0^\infty \gamma\lambda h(N_s+x+1)e^{-(N_s+1)}ds),$$

Si on désigne T_1 par la première instant de saut de N alors on obtient :

$$\widetilde{h}(x) = \mathbb{E}(\int_0^\infty h(N_s+x)e^{-N_s}ds) = \mathbb{E}(\int_0^{T_1} \gamma\lambda h(x)ds) + \mathbb{E}(\int_{T_1}^\infty \gamma\lambda h(N_s+x)e^{-N_s}ds$$

$$= \gamma h(x) + \mathbb{E}(\int_0^\infty \gamma\lambda h(N_s+x+1)e^{-(N_s+1)}ds)$$

$$= \gamma h(x) + e^{-1}\widetilde{h}(x+1) = \gamma h(x) + (1-\gamma)\widetilde{h}(x+1),$$

on conclue que (4.12) est vérifié et la preuve de (4.4)est terminée et la représentation (4.5) est une conséquence de (4.4).
Maintenant, on étudie l'inflluence du changement de probabilité sur la PRP dans la filtration grossie.

Notations

Soient $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration de référence et $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ la petite filtration par rapport à τ (le temps d'arrêt), on note le grossissement progressif de $\mathbb{F}$ par le temps aléatoire τ par $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.
On considère le changement du la mesure de probabilité, après de vérifier que le processus L qui donné par $L_t = \frac{1}{p_t(\tau)}$, $\forall t \geq 0$, est une $(\mathbb{P}, \mathbb{G}^\tau)$-martingale, on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}^\star$ équivalente à $\mathbb{P}$, telle que

$$d\mathbb{P}^\star|_{\mathcal{G}_t^\tau} = L_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}_t^\tau} = \frac{1}{p_t(\tau)} d\mathbb{P}|_{\mathcal{G}_t^\tau}.$$

Hypothèse (3)

PRP pour $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$, il existe un processus $Z \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$

peut être représenté comme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s dZ_s,$$

où Z est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale, $\mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ l'espace de $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale locale et $\varphi \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ tel que $\mathcal{L}(Z, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ l'espace de processus $\mathbb{F}$- prévisible et intégrable par rapport à Z.

Proposition 4.2.3 *La PRP pour* $(\mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$. *Sous l'hypothèse (3), toute* $X \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$ *admet la représentation suivante*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dZ_s + \int_0^t \psi_s dM_s^\star,$$

où $\phi \in \mathcal{L}(Z, \mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$, $\psi \in \mathcal{L}(M^\star, \mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$ *et* $M_s^\star$ *est une* $(\mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$*-martingale. si* $X \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$, *pour toute* $t \geq 0$ *on a*

$$\mathbb{E}^\star(\int_0^t \phi_s^2 dZ_s) < \infty, \ \ \mathbb{E}^\star(\int_0^t \psi_s^2 \lambda^\star(s) \mathcal{V}(ds)) < \infty,$$

et la représentation est unique.

Preuve
Soit (ξ_t) une $(\mathbb{P}^\star, \mathbb{H})$-martingale locale représentée par $\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \psi_s dM_s^\star$, où $\psi \in \mathcal{L}(M^\star, \mathbb{P}^\star, \mathbb{H})$, on remarque que ψ a un rôle avant τ, pour cela on choisit ψ déterministe.
Sous $\mathbb{P}^\star$, on a :

i) La PRP est satisfaite dans $\mathbb{F}$ par rapport à (Z_t)

ii) La PRP est satisfaite dans $\mathbb{H}$ par rapport à $(M_t^\star)$

iii) les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{H}$ sont indépendantes.

La filtration $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ satisfaisant la PRP sous $\mathbb{P}^\star$ par rapport à le couple $(Z, M^\star)$.
On suppose que $X \in \mathcal{M}^2(\mathbb{P}^\star, \mathbb{G})$, on trouve :

$$\mathbb{E}^\star(X_t - X_0)^2 = \mathbb{E}^\star \left(\int_0^t \phi_s dZ_s + \int_0^t \psi_s dM_s^\star \right)^2 < \infty$$

$$= \mathbb{E}^\star\left(\int_0^t \phi_s^2 dZ_s\right) + 2\mathbb{E}^\star\left(\int_0^t \phi_s dZ_s + \int_0^t \psi_s dM_s^\star\right) + \mathbb{E}^\star\left(\int_0^t \psi_s^2 \lambda^\star \mathcal{V}(ds)\right),$$

où dans la dernière égalité on utilise l'isomité d'Itô. Le terme de produit croisé dans la dernière égalité est egal 0 dû de l'orthogonalité entre Z et $M^\star$(sous $\mathbb{P}^\star$), de cette inégalité de l'integrabilité la condition d'unicité de représentation est vérifiée.

4.3 Application sur la couverture sous les informations d'initiés (insider trading)

Soit $\mathbb{F}$ représente les informations disponibles publiquement à tous les participants du marché et la v.a L représente l'information supplémentaire qui est disponible uniquement sur certains agents mieux informés et $\mathbb{G}$ a un flux d'information, les agents mieux informés sont autorisées à négocier sur le même ensemble des titres comme les agents uninformés mais peuvent compter sur leurs informations personnelles quand ils choisissent leurs stratégies, pour $\mathbb{H} \in \{\mathbb{F}, \mathbb{G}\}$, on note $\mathcal{H}(\mathbb{H})$ l'ensemble des stratégies admissibles sur la filtration $\mathbb{H}$.
Ce qui revient à exclure des stratégies de négociations exigeant un accés à une ligne illimité de crédit.
L'un des problèmes fondamentaux de Mathématique financière est représenté par la couverture de créances éventuelles, on interprète toute v.a ξ $\mathcal{A}$-mesurable positive comme une créance éventuelle, le problème de couverture par rapport à $\mathbb{H} \in \{\mathbb{F}, \mathbb{G}\}$ consiste à trouver une stratégie $H \in \mathcal{H}(\mathbb{H})$ de telle sorte que $\xi = v^{\mathbb{H}}(\xi) + (H.S)_T$ est satisfaite $\mathbb{P} - p.s$, pour une fortune initiale $v^{\mathbb{H}}(\xi)$. Si c'est possible, alors la stratégie H est sensée à répliquer la créance éventuelle ξ et $v^{\mathbb{H}}(\xi)$ représente le prix initial de la production ξ, H ayant accés aux flux d'information, si chaque créance éventuelle peut être reproduite, alors le marché financier est dit complet.

Puisque $S = (S_t)_{t\geq 0}$ une $\mathbb{F}$-martingale représente les prix d'actions reduits a la propriétie PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, il est bien connu que chaque créance éventuelle $\xi \in L_t^L(\mathcal{F}_T)$ peut être reproduite. En effet, il suffit de considérer une version càdlàg $\mathbb{F}$-martingale et positive $M = (M_t)_{t\geq 0}$ définie par $M_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t)$, $\forall t \in [0, T]$, alors par la définition

(4.1.2), il existe un processus $H = (H_t)_{t\geq 0} \in L_m(S, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $\xi = M_T = M_{0+(H.S)_T}, \ \ \mathbb{P} - p.s.$

De plus, il satisfait que $(H.S)_t = M_t - M_0 \geq -\mathbb{E}(\xi)$, cela montre que $H \in \mathcal{H}(\mathbb{F})$, le prix initial de replication est donné par $v^{\mathbb{F}}(\xi) = M_0 = \mathbb{E}(\xi)$ ce qui résout le problème de couverture d'un créance éventuelle $\mathcal{F}_t$-mesurable.

La proposition suivante est le résultat central et montre que le marché financier est complet sur $\mathbb{G}$.

Soient $\mathcal{F}_0$ une tribu triviale et $T < \infty$ l'horizon de temps .

Proposition 4.3.1 *[7] Soit $X : E \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{B}_E \otimes \mathcal{O}(\mathbb{F})$-mesurable, tel que X^x est càdlàg pour tout $x \in E$. Alors les résultats suivantes sont satisfaites*

1. *si X^x est un surmartingale sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ pour $\gamma - p.s$, alors X^j/P^j est un surmartingale sur $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$.*
2. *si X^x est une martingale locale sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ et $[\![\eta^x, \infty[\![\subseteq \{X^x = 0\}$ sont satisfaites pour $\gamma - p.s \ \ x \in E$, alors X^j/P^j est une martingale locale sur $(\Omega, \mathbb{G}, \mathbb{P})$.*

Proposition 4.3.2 *on suppose que l'hypothèse (1) est satisfaite et $S = (S_t)_{t\geq 0}$ a la propriété PRPF sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors*

Si ξ une v.a bornée positive $\mathcal{G}_T$-mesurable, alors il existe une $\mathbb{G}$-stratigie admissible H telle que

$$\xi = v^{\mathbb{G}}(\xi) + \int_0^T (H_u) dS_u, \ \ \mathbb{P} - p.s,$$

avec $v^{\mathbb{G}}(\xi) = \mathbb{E}(\frac{\xi}{q_T^L}/\sigma(L))$

Preuve

Soit $M = (M_t)_{t\in[0,T]}$ une version càdlàg $\mathbb{G}$-martingale positive définie par $\mathbb{E}(\frac{\xi}{q_T^L}/\mathcal{G}_t \ \ \forall t \in [0, T]$, on suppose $q_0^x = 1, \ \forall x \in E$ et $\mathcal{F}_0$ est une tribu triviale, il existe un processus $\mathbb{G}$-prévisible k^L tel que :

$$q_t^L \mathbb{E}[\frac{\xi}{q_T^L}/\mathcal{G}_t] = q_t^L M_t = M_0 = M_0 + (k^L + S)_t, \ \ \mathbb{P} - p.s, \ \ \forall t \in [0, T],$$

où $k^L \in L(S, \mathbb{P}, \mathbb{G})$, puisque $\xi \geq 0, \ \ \mathbb{P} - p.s$, il satisfait que $(k^L, S)_t \geq -M_0, \ \ \mathbb{P}p.s, \ \ \forall t \in [0, T]$. En plus la bornitude de ξ et la propriété sur martingale $(\frac{1}{q_t^L})_{t\in[0,T]}$ d'après la proposition (4.3.1) donnent que $M_0 \leq C, \ \ \mathbb{P} - p.s,$ pour $C \in \mathbb{R}^+$, montrant que $k^L \in \mathcal{H}(\mathbb{G})$ l'évaluation de l'éxprèssion ci-dessus pour $t = T$ donnent $\xi = \mathbb{E}[\xi/q_T^L/\sigma(L)], \ \ \mathbb{P} - p.s,$ prouvant ainsi la demande.

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire avait pour objectif :
l'étude des différents types de grossissements de filtrations avec leurs propriétés (le grossissement initial, progressif, par temps honnête et succéssif), on a vu aussi la conservation de la propriété de semimartingale entre la filtration de départ et la filtration grossie par des hypothèses naturelles et dans ce cas on a déterminé la nouvelle décomposition de semimartingale dans la filtration grossie, on a donné quelques exemples d'applications de grossissement en finance qui joue un rôle important d'ajout des informations supplémentaires sur les marchés financiers.

Dans ce mémoire, je me suis intéressée par la propriété de représentation prévisible pour deux types de grossissements de filtrations. D'abord pour le grossissement initial qui a été présenté par Claudio Fontana [10] et puis pour le grossissement progressif par Monique Jeanblanc avec Shiqi Song [9]. Le concept de cette propriété est d'écrire les processus sous forme d'une intégrale stochastique et donc généraliser les résultats de la propriété de de représentation de martingale et nous avons entre autre étudié le passage de cette propriété de la filtration de départ vers la filtration grossie et on a ainsi étudier l'inflluence du changement de probabilité sur cette propriété.

Comme perspectives, on peut étudier d'autres types de grossissements de filtrations ayant des applications plus importantes en pratique et on peut aussi étudier les résultats relatifs à la propriété de représentation prévisible pour le cas de grossissement succéssif ou le grossissement par temps honnête.

Bibliographie

[1] Roseline Bilina Falafala.MATHEMATICAL MODELING OF INSIDER TRADING.doctorate thesis COLUMBIA UNIVERSITY (2014)

[2] Libo Li. Random times and enlargements of filtration. Doctorate Thesis University of sydney .2012 .

[3] Monique Jeanblanc . Enlargements of Filtrations. .2010.

[4] ASHKAN NIKEGHBALI AND MARC YOR.DOOBŠS MAXIMAL IDENTITY, MULTIPLICATIVE DECOMPOSITIONS AND ENLARGEMENTS OF FILTRATIONS.Doctorate Thesis. 2007.

[5] Kusuoka, S. : A remark on default risk models. Advances in Mathematical Economics 1 (1999), 69-82.

[6] Nikeghbali, A. : An essay on the general theory of stochastic processes. Probability Surveys 3 (2006), 345Ű412.

[7] B. Acciaio, C. Fontana, and C. Kardaras. Arbitrage of the first kind and filtration enlargements in semimartingale financial models. Preprint available at http ://arxiv.org/abs/1401.7198, 2015.

[8] Jeanblanc, M. and Song, S. : Martingale representation property in progressively enlarged filtration. Stochastic Processes and their Applications 123, (2015), 4242-4271.

[9] Monique Jeanblanc and Song, PREDICTABLE REPRESENTATION PROPERTY FOR PROGRESSIVE ENLARGEMENTS OF A POISSON FILTRATION,Anna Aksamit Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, United Kingdom,10 December 2015.

[10] Claudio Fontana , The strong predictable representation property in initially enlarged filtrations, doctorate thesis Université Paris Diderot, 25-26, 2015.

[11] Jurgen Amendinger, Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations,7 February 2000.

[12] Barlow M. Study of a filtration expanded to include an honest time, Probability Theory and Related Fields 44, 307-324 (1978).

[13] Jeulin and Yor. grossissement de filtration et semi-martingales : formules explicites, Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes in Mathematics 649, Springer-Verlag, 78-97 (1978).

[14] Jeulin, semimartingale et Grossissement d'une filtration, Lectures Notes in Mathematics 833, Springer-Verlag, (1980).

[15] Elliott, R.J., Jeanblanc, M. and Yor, M. : On models of default risk. Mathematical Finance 10 (2000), 179Ű195.

[16] Jeanblanc, M. and Le Cam, Y. : Progressive enlargement of filtration with initial times. Stochas- tic Processes and their Applications 119 (2009), 2523Ű2543.

[17] Li, L. and Rutkowski, M. : Random times and multiplicative systems. Stochastic Processes and their Applications 122 (2012), 2053Ű2077.

[18] Jeulin and Yor, Grossissement de filtrations , Exemples et applications Lectures Notes in Mathematics 1118, Springer-Verlag (1985)

[19] Jacod, grossissement initial,Hypothèse H' et théorème de Girsanov, Grossissement de filtrations : exemples et applications, eds. Jeulin,T. and Yor,M., Lectures Notes in Mathematics 1118, Springer-Verlag, 197-315 (1985).

[20] yor. Grossissement progressif de filtration, Grossissement de filtrations : exemples et applications, eds. Jeulin,T. and Yor,M., Lectures Notes in Mathematics 1118, Springer-Verlag, 197- 315 (1985). 2007.

[21] Monique Jeanblanc,y Shiqi Song z,Random times with given survival probability and their F-martingale decomposition formula, 22 juin 2010.

[22] Shiqi Song, $\natural$-model with jumps, Université d'Evry Val D'Essonne, France,29/11/ 2013.

[23] Mireille Chaleyat-Maurel and Thierry Jeulin, Grossissement gaussien de la filtration Brownienne, Grossissements de filtrations : exemples et applications. T. Jeulin, M. Yor (eds.), Lecture Notes in Mathematics 1118, 59-109, 1985.

[24] Philip E. Protter, Stochastic integration and differential equations, Springer, 2005.