

Table des matières

1 Surfaces régulières	5
1.1 Représentation paramétrique d'une surface régulière	5
1.1.1 Surface régulière	7
1.1.2 Courbe sur une surface régulière	7
1.1.3 Surface de révolution et surface réglée	8
1.1.4 Plan tangent	12
1.2 Première forme fondamentale	14
1.2.1 L'aire d'une surface	17
1.3 Géométrie de l'application de Gauss	19
1.3.1 Vecteur normal	19
1.3.2 Orientation d'une surface régulière	20
1.3.3 Application de Gauss	20
1.3.4 Seconde forme fondamentale	22
1.4 Courbure des surfaces	24
1.4.1 Courbure des courbes sur une surface	24
1.4.2 Courbures normales	26
1.4.3 Application de Gauss en Coordonnées Locales (Courbures principales) . . .	31
1.4.4 Les équations Codazzi-Minardi	34
1.5 Paramétrage orthogonal d'une surface	39
2 Formule d'Harriot	41
2.1 Géodésique	41
2.1.1 Équations géodésiques	44

2.2	Formule d'Harriot	45
2.2.1	Triangle Sphérique	45
2.2.2	Formule d'Harriot	46
2.3	Repère de Darboux-Ribeaucour	48
2.3.1	Repère de Serret-Frenet	48
2.3.2	Repère de Darboux-Ribeaucour	49
3	Théorème de Gauss-Bonnet	53
3.1	Théorème de Gauss-Bonnet (local)	57
3.2	Théorème de Gauss-Bonnet (global)	63

—

Introduction Générale

Le texte fondateur de la topologie algébrique est le mémoire d'Henri Poincaré intitulé "Analysis Situs" publié en 1895, il introduit le concept d'Homologie, les nombres de Betti, le groupe fondamental et la généralisation de la caractéristique d'Euler. Un lien entre topologie et courbure est assuré par le célèbre théorème de Gauss-Bonnet, établi par Carl Friedrich Gauss en 1827, étendu en 1848 par Ossian Bonnet et puis généralisé par Shiing-Shen Chern en 1944. Ce résultat exprime la relation entre la courbure des surfaces et la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Dans le **chapitre I**, nous allons établir des résultats globaux concernant la géométrie des surfaces dans \mathbb{R}^3 . La première notion à laquelle nous allons nous intéresser est celle d'orientabilité d'une surface. Une surface est orientable si elle admet un champ de vecteurs normaux unitaires. Toutes les surfaces ne le sont pas, un contre-exemple étant donné par le ruban de Möbius.

Dans ce même chapitre, nous allons étudier la courbure des surfaces de \mathbb{R}^3 . La notion de courbure d'une surface \mathbb{S} est plus subtile que celle d'une courbe. En effet ; pour un arc géométrique paramétré par la longueur de l'arc de \mathbb{R}^2 , nous avons défini la courbure comme un scalaire qui détermine la dérivée du vecteur tangent à la courbe. Pour une surface de \mathbb{R}^3 , la courbure en un point est vue comme un endomorphisme symétrique (pour le produit scalaire ambiant) du plan tangent, donné par la différentielle de l'application associant à un point de la surface un vecteur normal unitaire à celle-ci (application de Gauss). La forme bilinéaire sur l'espace tangent associée à l'endomorphisme symétrique (application de Weingarten) s'appelle la seconde forme fondamentale de la surface. Cette terminologie suggère qu'il existe une première forme fondamentale. En effet ; celle-ci est juste le produit scalaire sur chaque plan tangent en un point de la surface induit par le produit scalaire ambiant de \mathbb{R}^3 . L'étude des propriétés des surfaces ne dépendant que de la première forme fondamentale. Nous donnerons des interprétations géométriques des courbures et directions principales, courbure de Gauss et courbure moyenne via le théorème de Meusnier.

La fin du chapitre 1, contient une preuve du fait que, à chaque point d'une surface régulière, il existe une paramétrisation orthogonale, qui est, une paramétrisation de telle sorte que ses coordonnées courbes se rejoignent orthogonalement.

Le chapitre II sera consacré à la formule d'Harriot. Le célèbre théorème de Thales montre que la somme des angles intérieurs d'un triangle tracé sur le plan est égale à π . Après ça, Harriot a étudié la trigonométrie sphérique et a découvert sa formule qui a permis de calculer la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique tracé sur la sphère, cette formule s'appelle la formule d'Harriot. La généralisation de cette formule pour des arcs non-géodésiques est dû à Gauss-Bonnet.

Dans le **chapitre III**, nous allons présenter le théorème de Gauss-Bonnet et certains de ses conséquences. La géométrie impliquée dans ce théorème est assez simple, et la difficulté de sa preuve réside dans certains faits topologiques. Ces faits seront présentés sans preuves. Le théorème de Gauss-Bonnet est probablement le plus profond théorème de la géométrie différentielle des surfaces. Une première version de ce théorème a été présentée par Gauss où il traite des triangles géodésiques sur les surfaces (Autrement dit, des triangles dont les côtés sont des arcs de géodésie). L'extension de ce théorème sur des régions limitées par des courbes simples non-géodésiques est dû à O. Bonnet.

Chapitre 1

Surfaces régulières

Une surface est une partie de \mathbb{R}^3 qui ressemble à un morceau de \mathbb{R}^2 au voisinage de tout point donné, comme la surface de la Terre, presque sphérique, semble être une surface plane à un observateur sur la surface qui ne voit que l'horizon. Pour décrire une surface, on se donne des contraintes aux coordonnées de ses points. Cette description paramétrique permet d'en définir l'aire et toutes les courbures qui caractérisent les surfaces (courbure de Gauss et courbure moyenne).

1.1 Représentation paramétrique d'une surface régulière

Définition 1.1 Une surface paramétrée de classe \mathcal{C}^k (avec $k \geq 0$) est un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 de la forme :

$$S = \{f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in U \times V \subset \mathbb{R}^2\}$$

où U, V sont deux intervalles de \mathbb{R} et l'application $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe \mathcal{C}^k , c'est-à-dire que les fonctions $x, y, z : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^k . On appelle :

1/ paramétrisation l'application $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

2/ les variables $u \in U$ et $v \in V$ les paramètres ,

3/ le support de f son image i.e. $\text{supp} f = f(U \times V) \subset \mathbb{R}^3$ (voir Fig.1).

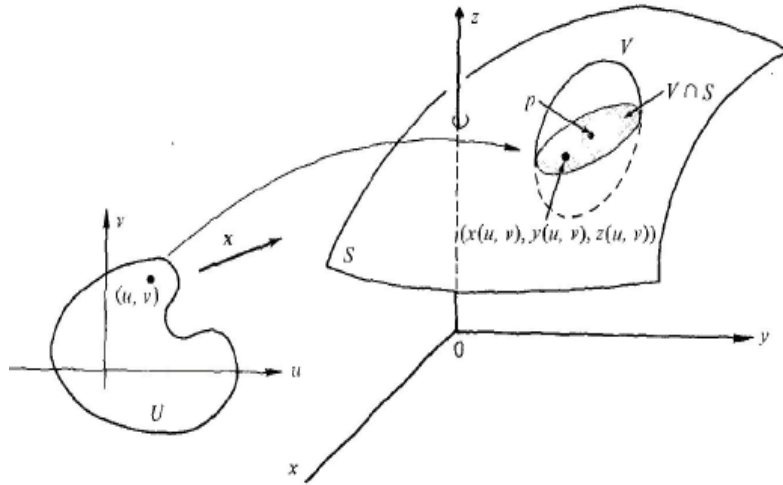


Figure 1

Définition 1.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Un reparamétrage de S est une nouvelle paramétrisation $g : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de S obtenue en composant f avec un difféomorphisme $\Phi : A \times B \longrightarrow U \times V$ telle que $g = f \circ \Phi$. Les nouveaux paramètres sont $(a, b) = \Phi^{-1}(u, v)$ (voir Fig.2).

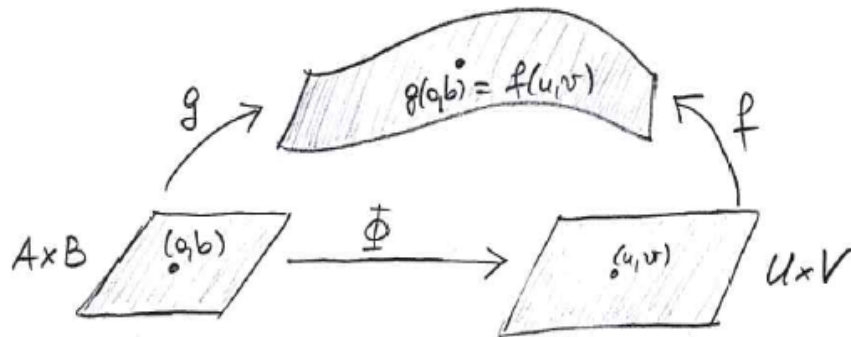


Figure 2

Exemple 1.3 Hélicoïde : $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \in \mathbb{R}^3$, avec $u, v \in \mathbb{R}$ (voir Fig.3).

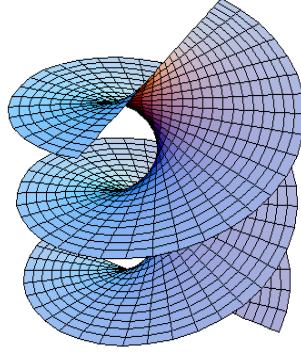


Figure 3

1.1.1 Surface régulière

Définition 1.4 On dit que la surface S paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est régulière en $(u_0, v_0) \in U \times V$ si les vecteurs dérivées partielles de f en (u_0, v_0) , qu'on note $\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$, sont linéairement indépendants, en d'autre terme :

$$\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0) \neq 0$$

1.1.2 Courbe sur une surface régulière

Définition 1.5 Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Une courbe tracée sur S est une courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow S$ obtenue en composant f avec une paramétrisation $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow U \times V$ des paramètres, que l'on indique $\tilde{\gamma}(t) = (u(t), v(t))$ i.e.

$$\gamma(t) = f(\tilde{\gamma}(t)) = f(u(t), v(t))$$

pour tout $t \in I$ (voir Fig.4).

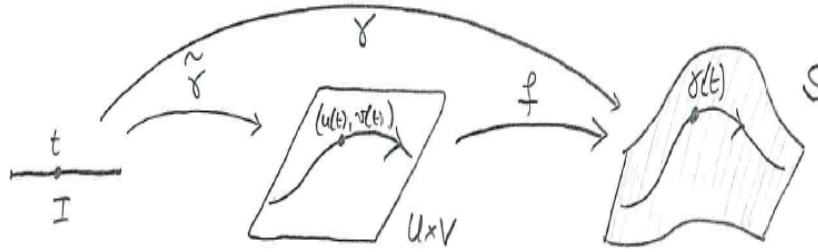


Figure 4

Exemple 1.6 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'hélice $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$ est une courbe gauche qui peut être vue comme courbe contenue dans le cylindre paramétrée par :

$$f(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v) \in \mathbb{R}^3$$

les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par $u(t) = t$ et $v(t) = t$, ou bien comme courbe contenue dans l'hélicoïde paramétrée par :

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v) \in \mathbb{R}^3$$

les paramètres u et v sont à leur tour paramétrés par $u(t) = a$ et $v(t) = t$.

1.1.3 Surface de révolution et surface réglée

Définition 1.7 Une surface de révolution est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme :

$$\begin{aligned} f : U \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, \varphi) &\longmapsto f(u, \varphi) = R_{\varphi}^{\vec{l}}(\alpha(u)) \end{aligned}$$

où $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe plane de classe C^1 appelée méridien de S et $R_{\varphi}^{\vec{l}}$ est la rotation d'angle φ autour d'une droite de direction \vec{l} contenue dans le plan du méridien α , appelée axe de révolution de S (voir Fig.5). On a alors $S = \cup_{\varphi \in [0, 2\pi[} R_{\varphi}^{\vec{l}} \Gamma$, où $\Gamma = \alpha(U)$ est le support de α .
On appelle :

1) méridiens de S les courbes Γ_{φ_0} sur S à angle φ_0 fixé ;

$$\Gamma_{\varphi_0} = \{\alpha(u) = f(u, \varphi_0) \mid u \in U\}$$

2) parallèles de S les courbes Γ_{u_0} sur S à hauteur u_0 fixée ;

$$\Gamma_{u_0} = \{\beta(\varphi) = f(u_0, \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi[\} = \text{cercle}$$

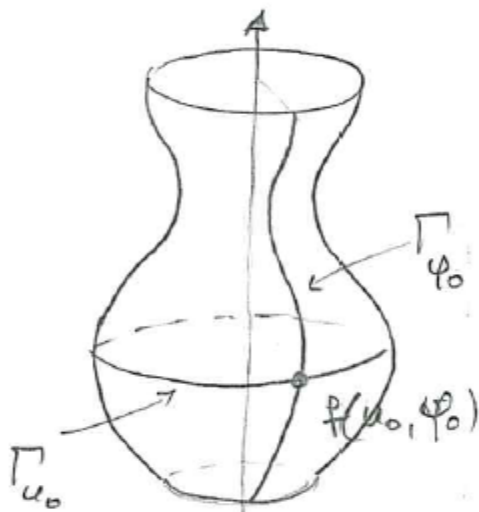


Figure 5

Exemple 1.8 Hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (voir Fig.6).

Soit S l'hyperboloïde à une nappe, son intersection avec le plan $\pi = \{y = 0\}$ donne deux possibles méridiens :

$$S \cap \pi = \{(x, 0, z) \mid x^2 - z^2 = 1\} = \alpha(\mathbb{R}) \cup \tilde{\alpha}(\mathbb{R})$$

où $\alpha(u) = (\cosh u, 0, \sinh u)$ et $\tilde{\alpha}(u) = (-\cosh u, 0, \sinh u)$. L'un d'eux est suffisant pour couvrir S par rotation $R_{\varphi}^{\vec{z}}$

$$R_{\varphi}^{\vec{z}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, alors :

$$\begin{aligned}
 S &= \cup_{\varphi \in [0, 2\pi[} R_{\varphi}^{\vec{z}} \alpha(\mathbb{R}) \\
 &= \{f(u, \varphi) = (\cos \varphi \cosh u, \sin \varphi \cosh u, \sinh u) \mid u \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi[\}
 \end{aligned}$$

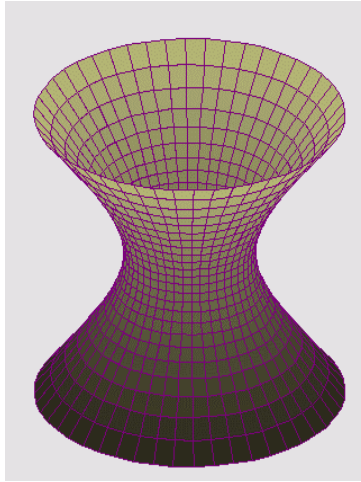


Figure 6

Définition 1.9 Une surface réglée est une surface S pour laquelle il existe une paramétrisation de la forme :

$$\begin{aligned}
 f : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
 (u, v) &\longmapsto f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)
 \end{aligned}$$

où $\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe de classe \mathcal{C}^1 qui s'appelle directrice de S et $\beta : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une famille de vecteurs non nuls, i.e. $\beta(u) \neq 0$ pour tout $u \in U$.

Pour tout $u \in U$, on appelle génératrice de S la droite :

$$\Delta_u = \{v \longmapsto f(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)\}$$

de direction $\beta(u)$ et passant par le point $\alpha(u)$. On a alors $S = \cup_{u \in U} \Delta_u$. En somme, une surface réglée est l'union de ses droites génératrices le long de la courbe directrice (voir Fig.7).

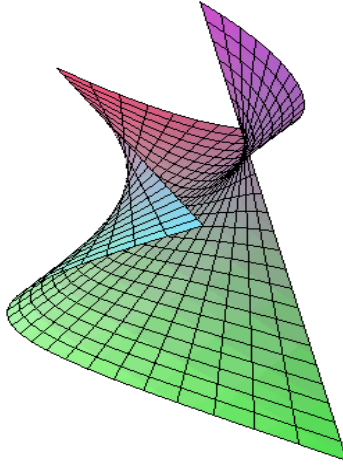


Figure 7

Exemple 1.10 L'hyperboloïde à une nappe $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (voir Fig.8).

Soit S l'hyperboloïde à une nappe, son intersection avec le plan $\pi = \{x = 1\}$ donne deux droites :

$$S \cap \pi = \{(1, y, z) \mid y^2 - z^2 = 0\} = \Delta^+ \cup \Delta^-$$

où $\Delta^+ = \{(1, y, z) \mid z = y\}$ et $\Delta^- = \{(1, y, z) \mid z = -y\}$ sont les droites de direction respectivement $\beta^+ = (0, 1, 1)$ et $\beta^- = (0, 1, -1)$. Puisque S est une surface de révolution, on a :

$$S = \cup_{\varphi \in [0, 2\pi[} R_{\varphi}^{\vec{z}}(\Delta^+) \cup R_{\varphi}^{\vec{z}}(\Delta^-)$$

Mais une droite est suffisante pour remplir S , car pour tout $p \in R_{\varphi}^{\vec{z}}(\Delta^-)$ il existe un $\Psi \in [0, 2\pi]$ tel que $p \in R_{\Psi}^{\vec{z}}(\Delta^+)$. Par conséquent, on a $\Delta^+ = \{(1, 0, 0) + v(0, 1, 1) \mid v \in \mathbb{R}\}$ et

$$\begin{aligned} S &= \cup_{\varphi \in [0, 2\pi[} R_{\varphi}^{\vec{z}}(\Delta^+) = \left\{ R_{\varphi}^{\vec{z}}(1, 0, 0) + v R_{\varphi}^{\vec{z}}(0, 1, 1) \mid \varphi \in [0, 2\pi[, v \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ f(\varphi, v) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) + v(-\sin \varphi, \cos \varphi, 1) \mid \varphi \in [0, 2\pi[, v \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

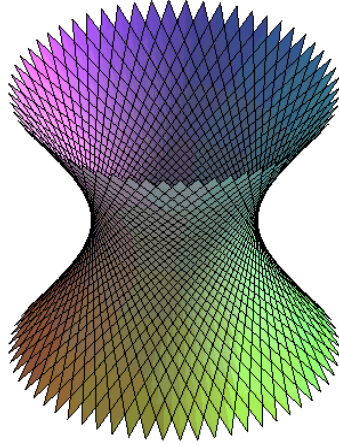


Figure 8

1.1.4 Plan tangent

Définition 1.11 Soit S une surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et soit $p_0 = f(u_0, v_0)$ un point régulier de S . On appelle plan tangent à S au point p_0 le plan engendré par les vecteurs $\partial_u f(u_0, v_0)$ et $\partial_v f(u_0, v_0)$ et passant par p_0

$$T_{p_0}S = p_0 + \text{Vect}(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0))$$

Le plan tangent à S en (u_0, v_0) contient la droite tangente à toutes les courbes régulières sur S passant par $f(u_0, v_0)$.

En effet ; si $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une telle courbe et $(u_0, v_0) = (u(t_0), v(t_0))$, on a :

$$\dot{\gamma}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0, v_0) \dot{u}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0, v_0) \dot{v}(t_0) \in \text{Vect}(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0))$$

Plans tangents à une surface de révolution

En un point régulier m d'une surface de révolution S d'axe D , le plan tangent P_m existe.

Supposons $m \notin D$. Le plan tangent P_m contient la tangente au parallèle C_m du point m , laquelle est orthogonale au plan méridien de m , puisqu'elle est orthogonale à l'axe D et au rayon du point m . Par conséquent, en tout point régulier m d'une surface de révolution, le plan tangent est orthogonal au plan méridien de m . Le plan tangent P_m coupe le plan méridien de m suivant la tangente T_m en m à la méridienne M de ce plan.

Supposons que T_m coupe D en un point s , sans être orthogonale à D . Ce point s reste fixe quand m parcourt le parallèle C_m et la famille des droites T_m engendre le cône de révolution Γ_s de sommet s , contenant C_m . Le plan tangent en m au cône Γ_s est évidemment P_m , qui contient la génératrice T_m et la tangente en m à C_m . Par conséquent, la surface S et le cône Γ_s ont même plan tangent en tout point du cercle C_m . Γ_s est le cône circonscrit à S le long du parallèle C_m .

Si la tangente T_m est parallèle à D , elle engendre, quand m parcourt C_m , le cylindre circonscrit à S le long du parallèle C_m .

Si la tangente T_m est orthogonale à l'axe, le cône Γ_s dégénère en un plan tangent à S en tout point du parallèle C_m . On peut donc énoncer les propositions suivantes

Proposition 1.12 *1/ En un point régulier m d'une surface de révolution S d'axe D , si la tangente en m à la méridienne du point m coupe D obliquement en un point s , elle engendre, quand m parcourt un parallèle C de S , le cône circonscrit à S , de sommet s , la courbe de contact étant C .
2/ Si cette tangente est parallèle à D , elle engendre le cylindre circonscrit à S , parallèlement à D , la courbe de contact étant C .*

Proposition 1.13 *La normale N_m en m à S est orthogonale à P_m , donc elle est incluse dans le plan méridien du point m , et coïncide par conséquent avec la normale en m à la méridienne M passant par m . Si elle coupe l'axe D en un point q , ce point reste fixe quand m parcourt le parallèle C .*

1.2 Première forme fondamentale

Comme la courbe dans \mathbb{R}^3 , dépend d'une manière intrinsèque de deux quantités : courbure et torsion. De la même manière, chaque surface dans \mathbb{R}^3 est déterminée d'une manière unique par deux quantités qui sont localement invariantes, appelées première et seconde formes fondamentales. La première forme fondamentale est le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 restreint sur l'espace tangent $T_p S \subset \mathbb{R}^3$. Il y a trois entités que l'on peut calculer à l'aide des coefficients de la première forme fondamentale à savoir E , F et G sont la longueur d'un arc sur une surface, l'angle entre f_u et f_v et l'aire d'une surface.

Soit $f = f(u, v)$ une représentation paramétrique d'une surface S de classe ≥ 1 . On appelle le différentiel de f , noté df , une application bijective du vecteur (du, dv) dans le plan uv associe le vecteur $df = f_u du + f_v dv$, dans le plan tangent.

Calculons à présent la quantité

$$\begin{aligned} I &= df \cdot df = (f_u du + f_v dv) \cdot (f_u du + f_v dv) \\ &= (f_u \cdot f_u) du^2 + 2(f_u \cdot f_v) dudv + (f_v \cdot f_v) dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned}$$

avec les notations $E = f_u \cdot f_u$, $F = f_u \cdot f_v$, $G = f_v \cdot f_v$.

Définition 1.14 *La forme quadratique :*

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

s'appelle première forme fondamentale de la surface S paramétrée par $f(u, v)$ et les coefficients E, F et G s'appellent coefficients de la première forme fondamentale.

Remarque 1.15 *La forme $I(du, dv)$ ne dépend pas de la représentation paramétrique choisie.*

En effet ; on considère deux représentations paramétriques $f(u, v)$ et $g(p, q)$, en tout point $f(u, v) = g(p(u, v), q(u, v))$, alors :

$$\begin{aligned}
 I^*(dp, dq) &= |dg|^2 = |g_p dp + g_q dq|^2 \\
 &= |g_p(p_u du + p_v dv) + g_q(q_u du + q_v dv)|^2 \\
 &= |(g_p p_u + g_q q_u) du + (g_p p_v + g_q q_v) dv|^2 \\
 &= |f_u du + f_v dv|^2 = |df|^2 = I(du, dv).
 \end{aligned}$$

Par contre les coefficients de la première forme fondamentale ne sont pas invariants par cette représentation.

Exemple 1.16 Considérons la surface définie par :

$$f(u, v) = (u + v) e_1 + (u - v) e_2 + uve_3$$

Il est clair que $f_u = e_1 + e_2 + v e_3$ et que $f_v = e_1 - e_2 + u e_3$. Ainsi les coefficients de la première forme fondamentale sont $E = f_u \cdot f_u = 2 + v^2$, $F = f_u \cdot f_v = uv$, $G = f_v \cdot f_v = 2 + u^2$, et la première forme fondamentale est :

$$\begin{aligned}
 I(du, dv) &= Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2 \\
 &= (2 + v^2) du^2 + 2uvdudv + (2 + u^2) dv^2
 \end{aligned}$$

Faisons à présent un changement de paramètres $p = u + v$ et $q = u - v$. Cette représentation paramétrique est admissible car :

$$\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

De plus la nouvelle représentation est $g(p, q) = pe_1 + qe_2 + \frac{1}{4}(p^2 - q^2)e_3$. Comme $g_p = e_1 + \frac{p}{2}e_3$ et $g_q = e_2 - \frac{q}{2}e_3$, on aura :

$$E^* = 1 + \frac{p^2}{4}, F^* = -\frac{pq}{4}, G^* = 1 + \frac{q^2}{4}$$

Par conséquent aux points $(u, v) = (1, 1)$ et $(p, q) = (2, 0)$, on obtient $f(1, 1) = 2e_1 + e_3 = g(2, 0)$ et en ce point de S

$$E = 3, F = 1, G = 3 \text{ et } E^* = 2, F^* = 0, G^* = 1$$

Théorème 1.17 La forme quadratique $I(du, dv)$ est une forme bilinéaire définie positive.

Preuve. On peut présenter la forme $I(du, dv)$ par une matrice 2×2

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors la forme quadratique $I(du, dv)$ est définie par la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$$

et pour qu'elle soit définie positive il faut et il suffit que :

$$E > 0 \text{ et } EG - F^2 > 0$$

On a bien

$$E = |f_u|^2 > 0 \text{ et } EG - F^2 = (f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2 = (f_u \wedge f_v)^2 > 0$$

On utilisera la formule $(a \wedge b) \cdot (c \wedge d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$. ■

1.2.1 L'aire d'une surface

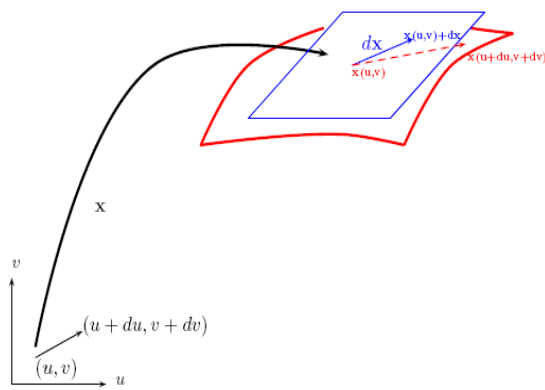


Figure 9

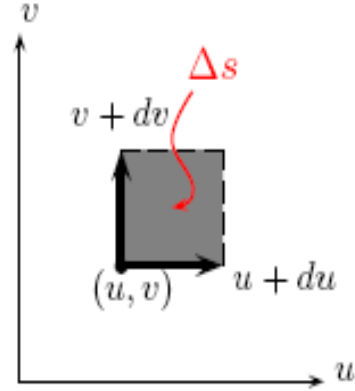


Figure 10

Considérons dans la figure ci-dessus $\Delta s = dudv$ ($du > 0$ et $dv > 0$) une petite surface dans le plan uv encadrée par du et dv au point (u, v) . Soit ΔS l'image de Δs par f (voir Fig.9 et 10).

$$\begin{aligned} \Delta S &= |\Delta x_1 \wedge \Delta x_2| = |f_u du \wedge f_v dv| \\ &= |(f_u \wedge f_v) dudv| = |f_u \wedge f_v| dudv \\ &= \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

On a utilisé l'identité de Lagrange : $\|w_1 \wedge w_2\|^2 + (w_1 \cdot w_2)^2 = \|w_1\|^2 \|w_2\|^2$.

Si W^* est l'image de W dont l'aire est à calculer, alors cette aire est égale à :

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2} dudv \quad (1.1)$$

Lorsque S est une surface orientée (par exemple $\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} > 0$ en tout point de W), alors A est indépendant du choix de paramétrage admissible.

Exemple 1.18 Soit S la surface d'une sphère unité paramétrée par

$$f(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \text{ avec } (\varphi, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[.$$

On a :

$$\begin{aligned}f_\varphi &= (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0), \\f_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta).\end{aligned}$$

Alors, les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = f_\varphi \cdot f_\varphi = \sin^2 \theta, \quad F = f_\varphi \cdot f_\theta = 0 \quad \text{et} \quad G = f_\theta \cdot f_\theta = 1$$

L'aire de cette surface est :

$$\begin{aligned}A_S &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\varphi d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\sin \theta) d\varphi d\theta \\&= 2\pi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi\end{aligned}$$

$A_S = 4\pi R^2$ si $R \neq 1$ est le rayon de la sphère.

1.3 Géométrie de l'application de Gauss

1.3.1 Vecteur normal

Définition 1.19 Soient S une surface paramétrée par $f : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $p_0 = f(u_0, v_0)$ un point régulier de S . On appelle vecteur normal (unitaire) de S en p_0 le vecteur

$$\mathbf{N}_s(u_0, v_0) = \frac{\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)}{\|\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)\|}$$

Par définition, les trois vecteurs $(\partial_u f(u_0, v_0), \partial_v f(u_0, v_0), \mathbf{N}_s(u_0, v_0))$ forme une base directe de l'espace au-dessus du point $f(u_0, v_0)$ de la surface (c'est-à-dire un repère mobile).

Remarque 1.20 Mais attention, cette base n'est ni orthogonale ni normale.

Soit $g : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une autre représentation paramétrique d'une surface régulière S de paramètres (θ, ϕ) contenant le point p_0 tel que $p_0 = g(\theta_0, \phi_0)$, on a, alors :

$$\begin{aligned} \partial_\theta g(\theta_0, \phi_0) \wedge \partial_\phi g(\theta_0, \phi_0) &= (\partial_u f(u_0, v_0) u_\theta + \partial_v f(u_0, v_0) v_\theta) \wedge (\partial_u f(u_0, v_0) u_\phi + \partial_v f(u_0, v_0) v_\phi) \\ &= (\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)) (u_\theta v_\phi - u_\phi v_\theta) \\ &= (\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* &= \frac{\partial_\theta g(\theta_0, \phi_0) \wedge \partial_\phi g(\theta_0, \phi_0)}{\|\partial_\theta g(\theta_0, \phi_0) \wedge \partial_\phi g(\theta_0, \phi_0)\|} \\ &= \frac{\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)}{\|\partial_u f(u_0, v_0) \wedge \partial_v f(u_0, v_0)\|} \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \left/ \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right| \right) \\ &= \text{sign} \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right) \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ainsi \mathbf{N} et \mathbf{N}^* ont le même sens si et seulement si $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} > 0$ au point p_0 . Ceci montre que \mathbf{N} et \mathbf{N}^* sont deux vecteurs normaux unitaires de deux représentations paramétriques qui se chevauchent sur une partie contenant le point p_0 se différencient seulement par un signe \pm .

1.3.2 Orientation d'une surface régulière

Définition 1.21 Une surface régulière S est dite orientable, si $f(u, v)$ et $g(\theta, \phi)$ sont deux représentations paramétriques se chevauchent sur une partie contenant le point p_0 de S , alors en tout point de cette partie $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\theta,\phi)} > 0$.

Sur une surface régulière orientable le vecteur normale unitaire peut varier continûment sans changer de sens. L'exemple le plus standard d'une surface non orientable est la bande de Möbius (voir Fig.11).

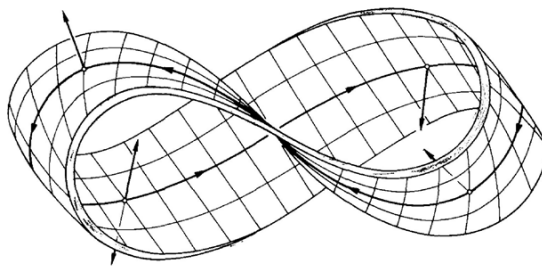


Figure 11 : La bande de Möbius

Cette remarque implique qu'une surface régulière S ne peut pas être toujours globalement orientable. Le vecteur normale \mathbf{N} s'appelle l'orientation de S .

1.3.3 Application de Gauss

Définition 1.22 Soient S une surface régulière avec une orientation \mathbf{N} et \mathbb{S}^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 . L'application définie par $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ s'appelle application de Gauss (voir Fig.12).

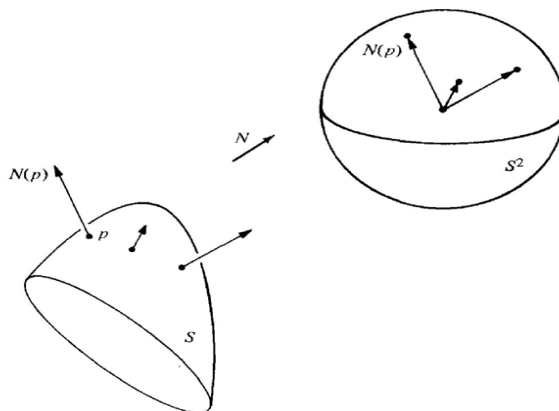


Figure 12

Remarque 1.23 Comme la surface est régulière, l'application de Gauss en chaque point $p \in S$ est différentiable et sa différentielle, noté $d\mathbf{N}_p$, est une application linéaire du plan tangent T_pS en $T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$. Ses deux plans sont parallèles, alors, on considère $d\mathbf{N}_p$ comme une application linéaire de T_pS dans lui même.

Théorème 1.24 La différentielle $d\mathbf{N}_p$ de l'application de Gauss au point p est une application linéaire auto-adjointe.

Preuve. La différentielle d'une application $\mathbf{N} : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ est toujours une application linéaire de $T_pS \longrightarrow T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$. Comme nous avons identifié T_pS à $T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$ ($T_pS // T_{\mathbf{N}(p)}\mathbb{S}^2$), alors $d\mathbf{N}_p$ est une application linéaire de T_pS dans lui même. Pour qu'elle soit auto-adjointe il suffit de montrer que pour une base $\{w_1, w_2\}$ quelconque de T_pS on a $d\mathbf{N}_p(w_1) \cdot w_2 = w_1 \cdot d\mathbf{N}_p(w_2)$.

Si $f(u, v)$ est une paramétrisation de S et si $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une courbe paramétrisée de S avec $\gamma(0) = p$, alors, d'une part on a :

$$d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) = d\mathbf{N}_p(f_u \dot{u}(0) + f_v \dot{v}(0)) = \dot{u}(0) d\mathbf{N}_p(f_u) + \dot{v}(0) d\mathbf{N}_p(f_v)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}(p) &= d\mathbf{N}\gamma(0) = d[\mathbf{N}(\gamma(0))] = d\mathbf{N}(\gamma(0)) \circ d\gamma(0) \\ &= d\mathbf{N}(\gamma(0)) \circ \dot{\gamma}(0) = d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} d\mathbf{N}_p(\dot{\gamma}(0)) &= d\mathbf{N}(\gamma(0)) = \frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t)) |_{t=0} \\ &= \mathbf{N}_u \dot{u}(0) + \mathbf{N}_v \dot{v}(0) \end{aligned}$$

Ceci implique que $d\mathbf{N}_p(f_u) = \mathbf{N}_u$ et $d\mathbf{N}_p(f_v) = \mathbf{N}_v$.

Par ailleurs comme \mathbf{N} est perpendiculaire au plan $T_p S$, alors $\mathbf{N} \cdot f_u = \mathbf{N} \cdot f_v = 0$ et en dérivant respectivement par rapport à v et u on aura :

$$\mathbf{N}_v \cdot f_u + \mathbf{N} \cdot f_{vu} = 0, \quad \mathbf{N}_u \cdot f_v + \mathbf{N} \cdot f_{vu} = 0$$

Ainsi, on en déduit :

$$d\mathbf{N}_p(f_u) \cdot f_v = d\mathbf{N}_p(f_v) \cdot f_u$$

■

De ce théorème, il s'ensuit que la matrice de $d\mathbf{N}_p$ admet des valeurs et vecteurs propres que l'on va les étudier dans les paragraphes suivants.

1.3.4 Seconde forme fondamentale

La seconde forme fondamentale joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour les courbes, elle contient l'information au deuxième ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation. Nous allons présenter les définitions de courbures et directions principales, Gauss et courbure moyenne.

Soit $f(u, v)$ une représentation paramétrique d'une surface de classe ≥ 2 . Alors en tout point (u, v) de cette surface on peut correspondre un vecteur normal unitaire $\mathbf{N} = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ qui est une fonction de (u, v) de classe au moins \mathcal{C}^1 .

Nous notons par $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$ la différentielle de \mathbf{N} .

Comme :

$$0 = d(1) = d(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 2d\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$$

alors $\mathbf{N} \perp d\mathbf{N}$ au point $f(u, v)$ et, en ce point, $d\mathbf{N}$ est dans le plan tangent T .

Nous considérons à présent la quantité :

$$\begin{aligned} II(du, dv) &= -df \cdot d\mathbf{N} = -(f_u du + f_v dv) \cdot (\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) \\ &= -f_u \cdot \mathbf{N}_u du^2 - (f_u \cdot \mathbf{N}_v + f_v \cdot \mathbf{N}_u) dudv - f_v \cdot \mathbf{N}_v dv^2 \\ &= Ldu^2 + Mdudv + Ndv^2 \end{aligned}$$

avec $L = -f_u \cdot \mathbf{N}_u$, $M = -(f_u \cdot \mathbf{N}_v + f_v \cdot \mathbf{N}_u)$, $N = -f_v \cdot \mathbf{N}_v$.

La quantité $II(du, dv)$ s'appelle la seconde forme fondamentale associée à $f(u, v)$. II est aussi une forme quadratique avec les coefficients L , M et N , appelés coefficients de la seconde forme fondamentale. Enfin, II est aussi indépendante des représentations paramétriques et on peut montrer que si $g(p, q)$ est une autre représentation paramétrique telle que $f(u, v) = g(p(u, v), q(u, v))$, alors :

$$LN - M^2 = \left(\frac{\partial(p, q)}{\partial(u, v)} \right)^2 (L^* N^* - (M^*)^2)$$

Comme f_u et f_v sont orthogonaux à \mathbf{N} en tout point (u, v)

$$\begin{aligned} 0 &= (f_u \cdot \mathbf{N})_u = f_{uu} \cdot \mathbf{N} + f_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ 0 &= (f_u \cdot \mathbf{N})_v = f_{uv} \cdot \mathbf{N} + f_u \cdot \mathbf{N}_v, \\ 0 &= (f_v \cdot \mathbf{N})_u = f_{vu} \cdot \mathbf{N} + f_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ 0 &= (f_v \cdot \mathbf{N})_v = f_{vv} \cdot \mathbf{N} + f_v \cdot \mathbf{N}_v. \end{aligned}$$

Ce qui donne $L = f_{uu} \cdot \mathbf{N}$, $M = f_{uv} \cdot \mathbf{N}$, $N = f_{vv} \cdot \mathbf{N}$, et par conséquent :

$$II(du, dv) = d^2 f \cdot \mathbf{N}$$

où $d^2 f = f_{uu} du^2 + 2f_{uv} dudv + f_{vv} dv^2$.

1.4 Courbure des surfaces

Soit S une surface de classe ≥ 2 paramétrée par $f(u, v)$ et contient le point $p = f(u_0, v_0)$. Soit $T_p S$ le plan tangent à la surface S au point p et \mathbf{N} la normale unitaire à $T_p S$ au point p . Considérons la courbe C définie par $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ et le vecteur de la courbure de C :

$$K = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} / \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|$$

1.4.1 Courbure des courbes sur une surface

Si $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une courbe sur une surface donnée f , alors $\dot{\gamma}$ est un vecteur unitaire et il est, par définition, un vecteur tangent à f . Par conséquent, $\dot{\gamma}$ est perpendiculaire à la normale unitaire standard \mathbf{N} de f , alors $\dot{\gamma}$, \mathbf{N} et $\mathbf{N} \times \dot{\gamma}$ (" \times " est le produit vectoriel) sont mutuellement des vecteurs unitaires perpendiculaires. Encore une fois puisque γ est telle $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, $\ddot{\gamma}$ est perpendiculaire à $\dot{\gamma}$, et par conséquent, est une combinaison linéaire de \mathbf{N} et $\mathbf{N} \times \dot{\gamma}$

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n \mathbf{N} + \kappa_g \mathbf{N} \times \dot{\gamma} \tag{1.2}$$

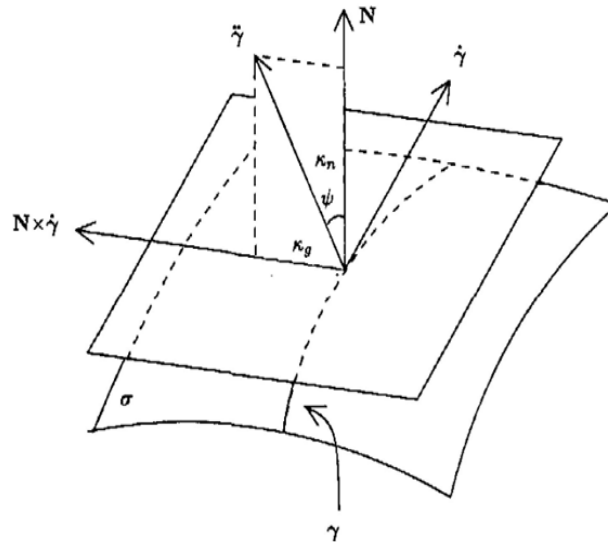


Figure 13

Les scalaires κ_n et κ_g sont appelés, respectivement, la courbure normale et la courbure géodésique de γ (voir Fig.13).

Étant donné que \mathbf{N} et $\mathbf{N} \times \dot{\gamma}$ sont des vecteurs unitaires perpendiculaires, l'équation 1.2 implique que $\kappa_n = \ddot{\gamma} \cdot \mathbf{N}$ (Le vecteur de la courbure normale est $K_n = (\ddot{\gamma} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}$), $\kappa_g = \ddot{\gamma} \cdot (\mathbf{N} \times \dot{\gamma})$ et

$$\|\ddot{\gamma}\|^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$$

Par conséquent, la courbure $\kappa = \|\ddot{\gamma}\|$ de γ est donnée par :

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \quad (1.3)$$

Par ailleurs, si n est la normale principale de γ , de sorte que $\ddot{\gamma} = \kappa n$, on a :

$$\kappa_n = \kappa n \cdot \mathbf{N} = \kappa \cos \theta$$

où θ est l'angle entre n et \mathbf{N} . (Fig14)

Puis, à partir de l'équation 1.3,

$$\kappa_g = \pm \kappa \sin \psi$$

En d'autres termes, κ_n est la longueur de la projection du vecteur K_n sur la normale de la surface en p , de signe donné par l'orientation \mathbf{N} de S en p (voir Fig.14).

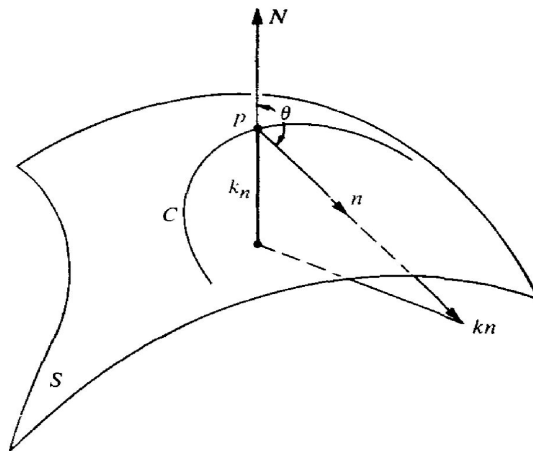


Figure 14

1.4.2 Courbures normales

Proposition 1.25 Si $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une courbe vitesse unitaire sur une partie de la surface f , sa courbure normale est donnée par :

$$\kappa_n = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

où $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ est la seconde forme fondamentale de f .

Remarque 1.26 Soit $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$ est une courbe régulière, mais pas nécessairement une vitesse unitaire sur la surface f . On remarque que $\dot{\gamma} \perp \mathbf{N}$, donc :

$$\frac{d}{dt}(\dot{\gamma} \cdot \mathbf{N}) = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \cdot \mathbf{N} + \dot{\gamma} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} = 0$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \ddot{\gamma} \cdot \mathbf{N} = \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \cdot \mathbf{N} \Big/ \left| \frac{df}{dt} \right| = -\dot{\gamma} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} \Big/ \left| \frac{df}{dt} \right| = -\frac{df}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} \Big/ \left| \frac{df}{dt} \right|^2 \\ &= -\frac{df}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} \Big/ \frac{df}{dt} \cdot \frac{df}{dt} \\ &= -\left(f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{N}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{N}_v \frac{dv}{dt} \right) \Big/ \left(f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} \right) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\kappa_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \quad (1.4)$$

Théorème 1.27 La courbure normale κ_n dépend seulement de la direction de la tangente au point p et les coefficients des formes quadratiques I et II .

Preuve. Comme

$$T = \left(f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt} \right) / \left| \frac{df}{dt} \right|$$

la direction de ce vecteur dépend du quotient $r = \frac{du}{dt} / \frac{dv}{dt}$. Alors si on divise le numérateur et le dénominateur de l'équation 1.4 par $\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$, on trouve :

$$\kappa_n = \frac{L r^2 + 2M r + N}{E r^2 + 2F r + G}$$

et dans cette expression on remarque que κ_n ne dépend que de r , L , M , N , E , F et G . ■

Remarque 1.28 *La courbure normale de C ne dépend pas de l'orientation de C mais elle change de signe si la surface change d'orientation.*

Pour donner une interprétation de la seconde forme fondamentale II_p , on considère une courbe régulière $C \subset S$ paramétrisée par $\alpha(s)$, où s est la longueur de l'arc de C , avec $\alpha(0) = p$. Si on note par $\mathbf{N}(s)$ la restriction du vecteur normal \mathbf{N} sur la courbe $\alpha(s)$, on a $\langle \mathbf{N}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = 0$, donc :

$$\langle \mathbf{N}(s), \ddot{\alpha}(s) \rangle = - \langle \dot{\mathbf{N}}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle$$

Par conséquence :

$$\begin{aligned} II_p(\dot{\alpha}(0)) &= - \langle d\mathbf{N}_p(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0) \rangle \\ &= - \langle \dot{\mathbf{N}}(0), \dot{\alpha}(0) \rangle = \langle \mathbf{N}(0), \ddot{\alpha}(0) \rangle \\ &= \langle \mathbf{N}, K \rangle(p) = \kappa_n(p) \end{aligned}$$

En d'autres termes, la valeur de la seconde forme fondamentale II_p pour un vecteur $v \in T_p S$ est égale à la courbure normale de la courbe régulière qui passe par p et tangente à v . En particulier, on obtient le résultat suivant

Proposition 1.29 [2] (Meusnier) *Toutes les courbes tracées sur une surface S et ayant en un point donné $p \in S$ la même droite tangente, ont, en ce point, la même courbure normale.*

Soit $v \in T_p S$, l'intersection de S avec le plan qui contient v et $\mathbf{N}(p)$ est appelé la section normale de S en p le long de v . En un voisinage de p , la section normale de S en p est une courbe régulière plane en S dont le vecteur normal n en p est $\pm \mathbf{N}(p)$ ou bien zéro ; sa courbure est donc égale à la valeur absolue de la courbure normale le long de v en p . Avec cette terminologie, la proposition ci-dessus dit que la valeur absolue de la courbure normale en p de la courbe $\alpha(s)$ est égale à la courbure de la section normale de S en p le long de $\alpha(0)$ (voir Fig.15).

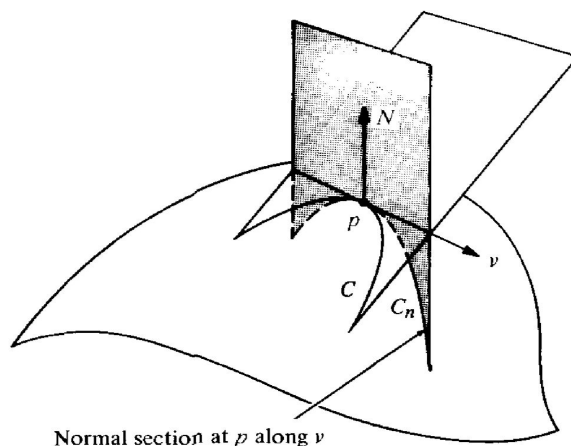


Figure 15

Exemple 1.30 On considère la surface de révolution obtenue par rotation de la courbe $C : z = y^4$ autour de l'axe z (voir Fig.16). On va montrer qu'en $p = (0, 0, 0)$ la différentielle $d\mathbf{N}_p = 0$. Pour le voir, on remarque que la courbure de la courbe $z = y^4$ en p est égale à zéro car si f est une paramétrisation de C , alors :

$$f(y, z) = (y, y^4) \text{ et } \kappa = \left\| \ddot{f}(y, z) \right\| = 12y^2$$

en $p = (0, 0, 0)$, $K = 0$.

De plus, puisque le plan xy est le plan tangent de la surface en p , le vecteur normal $\mathbf{N}(p)$ est parallèle à l'axe z . Donc, n'importe quelle section normale en p est obtenue par rotation de la courbe $z = y^4$; par conséquent, sa courbure est nulle. Il s'ensuit que toutes les courbures normales sont nulles en p (d'après la proposition précédente) et, puisque $\kappa_n = \frac{II}{I}$, alors $II = 0$. Soit g la paramétrisation de cette surface définie par $g(x, y) = (x, y, y^4)$, alors :

$$\mathbf{N} = \left(0, \frac{-4y^3}{\sqrt{16y^6 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{16y^6 + 1}} \right)$$

en $p = (0, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$, alors, $d\mathbf{N}_p = 0$.

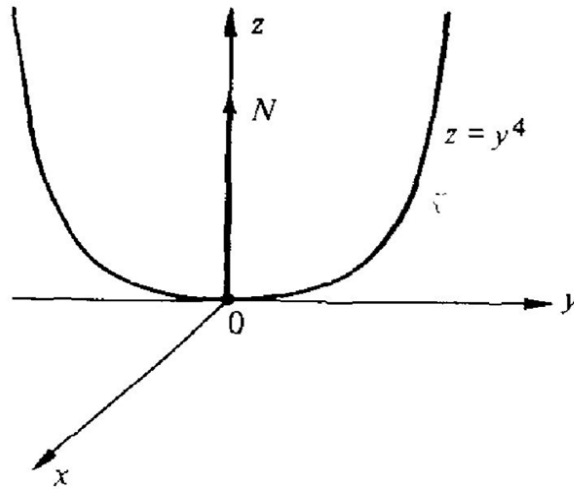


Figure 16

Exemple 1.31 Dans le plan, toutes les sections normales sont des lignes droites et puisque les lignes droites sont des courbes de courbure nulle, alors, d'après la proposition précédente, toutes les courbures normales sont nulles. Ainsi, la seconde forme fondamentale est identique à zéro en tous points.

Exemple 1.32 Sur la sphère unité \mathbb{S}^2 avec $\mathbf{N} = (x, y, z)$ comme orientation, les sections normales en un point $p \in \mathbb{S}^2$ sont des cercles de rayon 1 et donc de courbure égale à 1. Ainsi, toutes les courbures normales sont égales à 1, et la seconde forme fondamentale est $II_p(v) = 1$ pour tout $p \in \mathbb{S}^2$ et tout $v \in T_p\mathbb{S}^2$ (voir Fig.17).

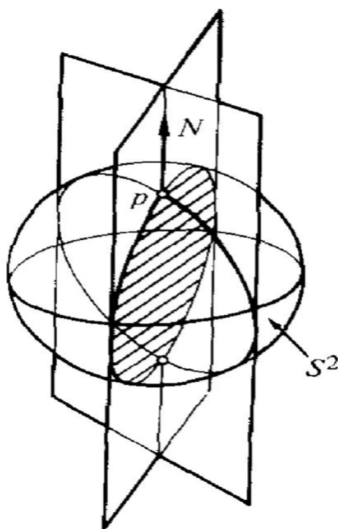


Figure 17

Exemple 1.33 Soit \mathbb{S} une sphère de rayon a paramétrée en coordonnées sphériques :

$$f(\theta, \phi) = a \sin \phi \cos \theta e_1 + a \sin \phi \sin \theta e_2 + a \cos \phi e_3, \quad (\theta, \phi) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$

$$f_\theta = -(a \sin \phi \sin \theta) e_1 + (a \sin \phi \cos \theta) e_2,$$

$$f_\phi = (a \cos \phi \cos \theta) e_1 + (a \cos \phi \sin \theta) e_2 - (a \sin \phi) e_3,$$

$$f_{\theta\theta} = -(a \sin \phi \cos \theta) e_1 - (a \sin \phi \sin \theta) e_2,$$

$$f_{\phi\phi} = -(a \sin \phi \cos \theta) e_1 - (a \sin \phi \sin \theta) e_2 - (a \cos \phi) e_3,$$

$$f_{\phi\theta} = -(a \cos \phi \sin \theta) e_1 + (a \cos \phi \cos \theta) e_2,$$

$$\mathbf{N} = -(\sin \phi \cos \theta) e_1 - (\sin \phi \sin \theta) e_2 - \cos \phi e_3.$$

Ainsi ,les coefficients de la première forme fondamentale sont :

$$E = f_\theta \cdot f_\theta = a^2 \sin^2 \phi, \quad F = f_\theta \cdot f_\phi = 0, \quad G = f_\phi \cdot f_\phi = a^2$$

et les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$L = f_{\theta\theta} \cdot \mathbf{N} = a \sin^2 \phi, \quad M = f_{\phi\theta} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad N = f_{\phi\phi} \cdot \mathbf{N} = a$$

Ce qui donne :

$$\kappa_n = \frac{II(d\theta, d\phi)}{I(d\theta, d\phi)} = \frac{a \sin^2 \phi d\theta^2 + a d\phi^2}{a^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + a^2 d\phi^2} = \frac{1}{a}$$

1.4.3 Application de Gauss en Coordonnées Locales (Courbures principales)

Considérons la formule suivante :

$$d\mathbf{N}(\dot{\gamma}(t)) = \dot{\mathbf{N}}(u(t), v(t)) = \mathbf{N}_u \dot{u}(t) + \mathbf{N}_v \dot{v}(t)$$

avec $\gamma(0) = p$. Comme \mathbf{N}_u et $\mathbf{N}_v \in T_p S$, en considérant $\{f_u, f_v\}$ une base de $T_p S$, on peut écrire :

$$\mathbf{N}_u = w_{11}f_u + w_{21}f_v \quad \text{et} \quad \mathbf{N}_v = w_{12}f_u + w_{22}f_v$$

par conséquent :

$$d\mathbf{N}(\dot{\gamma}(t)) = (w_{11}\dot{u} + w_{12}\dot{v})f_u + (w_{21}\dot{u} + w_{22}\dot{v})f_v$$

Ce qui donne l'expression matricielle de $d\mathbf{N}$, à savoir :

$$d\mathbf{N} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = W_\gamma$$

La matrice W s'appelle la matrice de Weingarten et ses valeurs et vecteurs propres jouent un rôle important dans l'étude des surfaces. En effet ;

d'après la démonstration du théorème 1.23, puisque l'application $d\mathbf{N}_p$ est auto-adjointe dans la base $\{f_u, f_v\}$, il existe une base notée $\{w_1, w_2\}$, avec $|w_1| = |w_2| = 1$ telle que :

$$d\mathbf{N}_p(w_1) = -\kappa_1 w_1 \text{ et } d\mathbf{N}_p(w_2) = -\kappa_2 w_2$$

Les valeurs κ_1 et κ_2 ($\kappa_1 \geq \kappa_2$) sont les valeurs maximale et minimale de la seconde forme fondamentale appelées courbures principales et les vecteurs propres associés, les directions principales de la surface S au point p .

Définition 1.34 Soient $p \in S$ et $d\mathbf{N}_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ la différentielle de l'application de Gauss. Le déterminant de $d\mathbf{N}_p$ est la courbure de Gauss K de S en p . Le négatif de la demi trace de $d\mathbf{N}_p$ est appelé la courbure moyenne H de S en p .

En termes de courbures principales, on peut écrire :

$$K = \kappa_1 \kappa_2, H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Par ailleurs, comme $W w_i = -\kappa_i w_i$ pour $i = 1, 2$, en prenant $A_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ et $z_i = A_I^{-1} w_i$, on

a $A_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. Ce qui est équivalent à dire que :

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

$\kappa = \kappa_i$ pour $i = 1, 2$. Ce qui donne les valeurs des courbures de Gauss et moyenne :

$$K = \det(W) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \text{ et } H = \frac{-2FM + EN + LG}{2(EG - F^2)}$$

A partir de K et H , on trouve les courbures principales :

$$\kappa_i = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

racines du polynôme $\kappa^2 - 2H\kappa + K$.

Exemple 1.35 *Considérons une surface de révolution paramétrée par :*

$$f(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)) \quad , \quad 0 < u < 2\pi \quad , \quad a < v < b \quad , \quad \varphi(v) \neq 0$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par :

$$E = \varphi^2 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = (\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2$$

On suppose que la courbe tournante est paramétrisée par la longueur d'arc, ce qui donne :

$$(\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2 = G = 1$$

Les coefficients de la seconde forme fondamentale sont :

$$L = \frac{(f_u, f_v, f_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} -\varphi \sin u & \dot{\varphi} \cos u & -\varphi \cos u \\ \varphi \cos u & \dot{\varphi} \sin u & -\varphi \sin u \\ 0 & \dot{\psi} & 0 \end{vmatrix} = -\varphi \dot{\psi},$$

$$M = 0,$$

$$N = \dot{\psi} \ddot{\varphi} - \ddot{\psi} \dot{\varphi}.$$

On dérive $(\dot{\varphi})^2 + (\dot{\psi})^2 = 1$, on obtient, $\dot{\varphi} \ddot{\varphi} = -\dot{\psi} \ddot{\psi}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\dot{\psi}(\dot{\psi}\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\dot{\varphi})}{\varphi} = -\frac{(\dot{\psi})^2\ddot{\varphi} + (\dot{\varphi})^2\ddot{\psi}}{\varphi} = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}, \\
H &= \frac{1 - \dot{\psi} + \varphi(\dot{\psi}\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\dot{\varphi})}{2\varphi}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Corollaire 1.36 [7] *La courbure de Gauss est donnée par :*

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}$$

1.4.4 Les équations Codazzi-Minardi

Proposition 1.37 [7] (*Équations de Gauss*) *Soit $f(u, v)$ une paramétrisation d'une surface.*

Alors :

$$\begin{aligned}
f_{uu} &= \Gamma_{11}^1 f_u + \Gamma_{11}^2 f_v + LN, \\
f_{uv} &= \Gamma_{12}^1 f_u + \Gamma_{12}^2 f_v + MN, \\
f_{vv} &= \Gamma_{22}^1 f_u + \Gamma_{22}^2 f_v + NN.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

où :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_u}{2(EG - F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Les coefficients Γ_{ij}^k sont appelés symboles de Christoffel.

Exemple 1.38 Soit le tore paramétré par :

$$f(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u) , 0 < u, v < 2\pi$$

$$f_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u) ,$$

$$f_v = (-(a + r \cos u) \sin v, (a + r \cos u) \cos v, 0) ,$$

$$f_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u) ,$$

$$f_{uv} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0) ,$$

$$f_{vv} = (-(a + r \cos u) \cos v, -(a + r \cos u) \sin v, 0) .$$

Ainsi :

$$E = \langle f_u, f_u \rangle = r^2 , F = \langle f_u, f_v \rangle = 0 , G = \langle f_v, f_v \rangle = (a + r \cos u)^2$$

Puisque $|f_u \wedge f_v| = \sqrt{EG - F^2}$,

$$\begin{aligned} L &= \left\langle \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}, f_{uu} \right\rangle = \frac{(f_u, f_v, f_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r^2 (a + r \cos u)}{r (a + r \cos u)} = r, \\ M &= \frac{(f_u, f_v, f_{uv})}{r (a + r \cos u)} = 0, \\ N &= \frac{(f_u, f_v, f_{vv})}{r (a + r \cos u)} = \cos u (a + r \cos u). \end{aligned}$$

Finalemment :

$$K = \frac{\cos u}{r (a + r \cos u)}$$

A partir de cette expression, il découle que $K = 0$ le long des parallèles $u = \frac{\pi}{2}$ et $u = \frac{3\pi}{2}$; les points de ces parallèles sont donc des points paraboliques. Dans la région du tore donnée par $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, K est négatif (notez que $r > 0$ et $a > r$) ; les points dans cette région sont donc des points hyperboliques. Dans la région donnée par $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < u < 2\pi$, la courbure est positive et les points sont des points elliptiques (voir Fig.18).

La courbure moyenne et normale, respectivement, sont :

$$H = \frac{-2FM + EN + LG}{2(EG - F^2)} = \frac{a + 2r \cos u}{2r(a + r \cos u)},$$

$$\kappa_n = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)} = \frac{rdu^2 + \cos u(a + r \cos u)dv^2}{r^2du^2 + (a + r \cos u)^2dv^2}.$$

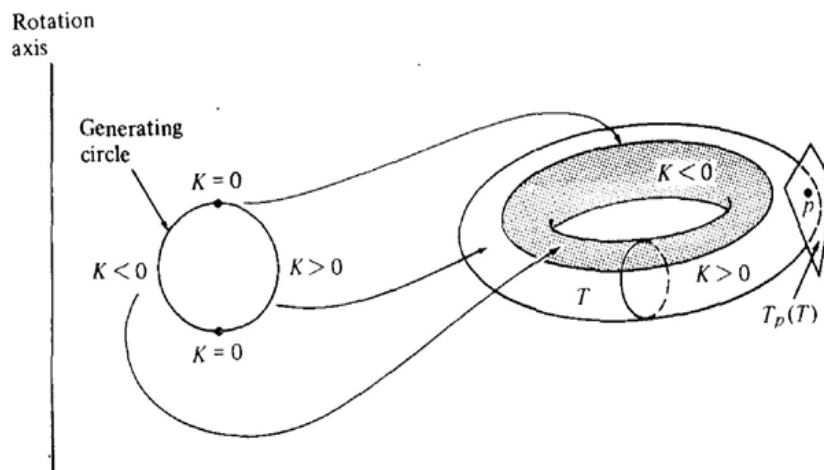


Figure 18

Exemple 1.39 Pour un plan donné par $ax+by+cz+d=0$, on a le vecteur unitaire $\mathbf{N} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ est constant, et donc $d\mathbf{N} \equiv 0$ (voir Fig.19). Par conséquence :

$$II = -df \cdot d\mathbf{N} = 0, \text{ alors } L = M = N = 0$$

On obtient :

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = 0, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0 \text{ et } H = \frac{-2FM + EN + LG}{2(EG - F^2)} = 0$$

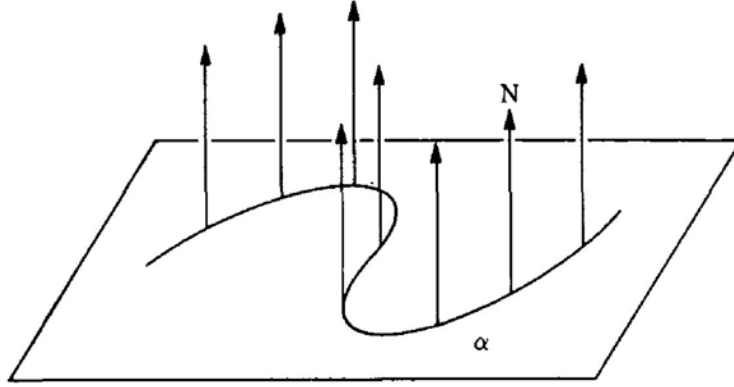


Figure 19

Exemple 1.40 *Considérons la sphère unité :*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est une courbe paramétrée sur \mathbb{S}^2 , alors :

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$$

ce qui montre que le vecteur (x, y, z) est normale à la sphère au point (x, y, z) . Ainsi :

$$\bar{\mathbf{N}} = (x, y, z) \text{ et } \mathbf{N} = (-x, -y, -z)$$

sont des champs de vecteurs unitaires normaux dans \mathbb{S}^2 . On fixe une orientation dans \mathbb{S}^2 par choisir $\mathbf{N} = (-x, -y, -z)$ comme un champ normal. Notez que \mathbf{N} est orienté vers le centre de la sphère. Restreindre le vecteur normal $\mathbf{N}(t) = (-x(t), -y(t), -z(t))$ sur la courbe $\alpha(t)$, alors :

$$d\mathbf{N}(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \dot{\mathbf{N}}(t) = (-\dot{x}(t), -\dot{y}(t), -\dot{z}(t))$$

ce qui donne $d\mathbf{N}_p(v) = -v$, pour tout $p \in \mathbb{S}^2$ et tout $v \in T_p\mathbb{S}^2$. Notez qu'avec le choix de $\bar{\mathbf{N}}$ comme un champ normal, on va obtenir $d\bar{\mathbf{N}}_p(v) = v$.

La courbure de Gauss et la courbure moyenne sont données par :

$$\begin{aligned} K &= \kappa_1 \kappa_2 = 1, \\ H &= \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = 1. \end{aligned}$$

La courbure normale est obtenue par la paramétrisation de la sphère suivante :

$$f(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \text{ avec } (\varphi, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$

On a :

$$\begin{aligned} f_\varphi &= (-\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, 0), \\ f_\theta &= (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta), \\ f_{\varphi\varphi} &= (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, 0), \\ f_{\theta\theta} &= (-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, -\cos \theta), \\ f_{\varphi\theta} &= (-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0), \\ \mathbf{N} &= (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta). \end{aligned}$$

Alors, les coefficients de la première et la seconde forme fondamentale sont donnés, respectivement, par :

$$\begin{aligned} E &= f_\varphi \cdot f_\varphi = \sin^2 \theta, \quad F = f_\varphi \cdot f_\theta = 0 \text{ et } G = f_\theta \cdot f_\theta = 1, \\ L &= \mathbf{N} \cdot f_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta, \quad M = \mathbf{N} \cdot f_{\varphi\theta} = 0 \text{ et } N = \mathbf{N} \cdot f_{\theta\theta} = 1. \end{aligned}$$

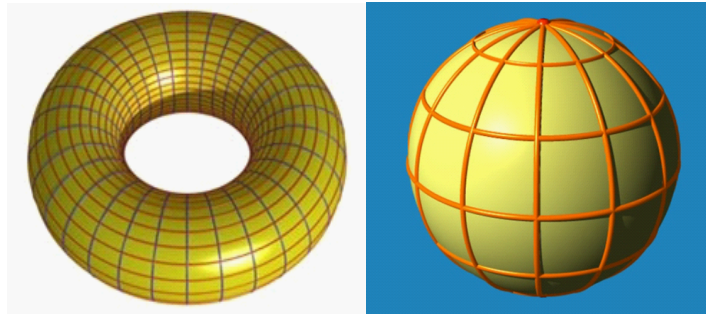
Ainsi, la courbure normale est :

$$\kappa_n = \frac{II(d\varphi, d\theta)}{I(d\varphi, d\theta)} = \frac{Ld\varphi^2 + 2Md\varphi d\theta + Nd\theta^2}{Ed\varphi^2 + 2Fd\varphi d\theta + Gd\theta^2} = \frac{\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2}{\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2} = 1.$$

1.5 Paramétrage orthogonal d'une surface

Définition 1.41 Soit S une surface régulière paramétrée par $f : U \longrightarrow S$. On dit que f est un paramétrage orthogonal de S si, dans la base $\{f_u, f_v\}$, la matrice de la première forme fondamentale est de la forme $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, autrement dit, si $F = 0$.

Théorème 1.42 [1] Soient S une surface régulière paramétrée par une application injective f de U dans S et $p = f(u_0, v_0) \in S$. Alors, il existe un voisinage $W \subset U$ de (u_0, v_0) et un difféomorphisme $\varphi : V \longrightarrow W$ tel que $g = f \circ \varphi$ soit un paramétrage orthogonal du voisinage $g(V)$ de p dans S .



Le paramétrage orthogonal de la sphère et le tore

Corollaire 1.43 [7] (i) Si $F = 0$, on a :

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}$$

(ii) Si $E = 1$ et $F = 0$, on a :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

Exemple 1.44 *Pour la surface de révolution*

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

où $f > 0$ et $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ (le point désigne d/du), nous avons trouvé que :

$$E = 1, F = 0, G = f(u)^2$$

Par conséquent, le corollaire (1.42-ii), implique que :

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{\ddot{f}}{f}$$

en accord avec l'équation 1.5 de l'exemple (1.34).

Chapitre 2

Formule d'Harriot

2.1 Géodésique

Les géodésiques sont des courbes sur une surface vue comme une droite. Nous allons donner une définition différente des géodésiques, basée sur le fait qu'une courbe C est une ligne droite si son accélération est nulle, puisque cette définition est plus facile à manipuler pour, finalement, aboutir à l'idée de chemins le plus courts.

Définition 2.1 Une courbe γ sur une surface S est appelée une géodésique si $\ddot{\gamma}(t)$ est égal à zéro ou perpendiculaire à la surface au point $\gamma(t)$, i.e. parallèle à sa normale, pour toutes valeurs du paramètre t .

D'après la formule 1.2, γ est une géodésique ssi $\forall t \in I$, $(\ddot{\gamma}(t))^T = 0$, où $(\cdot)^T$ désigne la partie tangentielle de $\ddot{\gamma}(t)$ sur $T_{\gamma(t)}S$.

Proposition 2.2 Toute géodésique a une vitesse constante.

Preuve. Soit $\gamma(t)$ une géodésique sur une surface S . Désignant d/dt par un point,

$$\frac{d}{dt} \|\dot{\gamma}\|^2 = \frac{d}{dt} (\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}) = 2\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}$$

Puisque γ est une géodésique, $\ddot{\gamma}$ est perpendiculaire au plan tangent et est donc perpendiculaire au vecteur tangent $\dot{\gamma}$. Donc $\ddot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} = 0$ et la dernière équation montre que $\|\dot{\gamma}\|$ est constante. ■

Remarque 2.3 *Il existe une définition équivalente d'une géodésique exprimée en termes de courbure géodésique κ_g .*

Proposition 2.4 *Une courbe sur une surface est une géodésique si et seulement si sa courbure géodésique est zéro partout.*

Preuve. D'après la formule 1.2, γ est une géodésique $\Leftrightarrow \ddot{\gamma} // \mathbf{N} \Leftrightarrow \ddot{\gamma} \perp \mathbf{N} \times \dot{\gamma}$. D'où

$$\kappa_g = \ddot{\gamma} \cdot (\mathbf{N} \times \dot{\gamma}) = 0$$

■

Le résultat suivant donne l'exemple le plus simple de géodésique.

Proposition 2.5 *Toute (partie d'une) ligne droite sur une surface est une géodésique.*

Preuve. Une ligne droite peut être paramétriser par :

$$\gamma(t) = a + bt$$

où a et b sont des vecteurs constants, d'où le résultat. ■

Proposition 2.6 *Toute section normale d'une surface est une géodésique.*

Preuve. Rappelons qu'une section normale est une courbe obtenue par l'intersection de la surface S avec le plan Π qui contient la normale \mathbf{N} de la surface S et le vecteur tangent $\dot{\gamma}$, alors le plan Π est perpendiculaire à la surface S en chaque point de γ , donc $\Pi \perp T_{\gamma(t)}S$.

Étant donné que γ est contenue dans Π , la normale principale n est parallèle à Π , alors n est orthogonale à $\dot{\gamma}$, et puisque \mathbf{N} est orthogonale à $\dot{\gamma}$ et $\dot{\gamma}$ est parallèle à Π , donc n est parallèle à \mathbf{N} , i.e. l'angle ψ entre n et \mathbf{N} est 0 ou π .

Alors $\kappa_g = \pm\kappa \sin \psi = 0$ et d'après la proposition (2.4) la section normale γ est une géodésique.

■

Exemple 2.7 *Tout les grands cercles dans une sphère sont des géodésiques. Un grand cercle est l'intersection de la sphère avec un plan Π qui passe par le centre o de la sphère, donc, si p est un point du grand cercle, le vecteur OP se trouve dans Π et est perpendiculaire au plan tangent de la sphère unité en p . Par conséquent, Π est perpendiculaire au plan tangent en p donc il contient le vecteur normale et le vecteur tangent de la sphère, alors, le grand cercle est une section normale donc c'est une géodésique (voir Fig.22).*

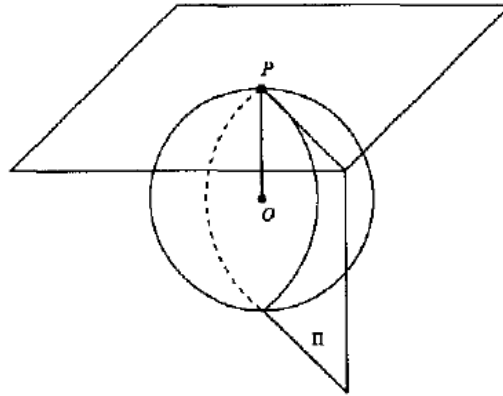


Figure 22

Remarque 2.8 *Les propositions (2.5) et (2.6) ne sont pas habituellement suffisantes pour déterminer toutes les géodésiques dans une surface donnée. Pour cela, on a besoin du résultat suivant*

2.1.1 Équations géodésiques

Théorème 2.9 [7] *Une courbe sur une surface S est une géodésique si et seulement si, pour toute courbe γ paramétrée par $\gamma(t) = f(u(t), v(t))$, les deux équations suivantes sont satisfait :*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Eu + Fv) &= \frac{1}{2}(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2), \\ \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) &= \frac{1}{2}(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ est la première forme fondamentale de f . Les équations différentielles de la formule 2.1 sont appelées les équations géodésiques.

Proposition 2.10 *Soit $f : U \rightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et soit :*

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow U \\ t &\mapsto (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

une courbe régulière. Alors $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ est une géodésique si et seulement si

$$\begin{aligned} 1/ \ddot{u} + \Gamma_{11}^1 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 (\dot{v})^2 &= 0, \\ 2/ \ddot{v} + \Gamma_{11}^2 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 (\dot{v})^2 &= 0. \end{aligned}$$

Preuve. On a :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t)f_u(u(t), v(t)) + \dot{v}(t)f_v(u(t), v(t))$$

d'où

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{u}f_u + \dot{u}(\dot{u}f_{uu} + \dot{v}f_{uv}) - \dot{v}(\dot{u}f_{uv} + \dot{v}f_{vv})$$

En exprimant f_{uu} , f_{uv} et f_{vv} dans la base (f_u, f_v) d'après la formule 1.6, il vient,

$$\begin{aligned} (\ddot{\gamma}(t))^T &= (\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 (\dot{v})^2) f_u \\ &\quad + (\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 (\dot{v})^2) f_v \end{aligned} \quad (2.2)$$

■

2.2 Formule d'Harriot

2.2.1 Triangle Sphérique

On suppose que l'espace euclidien \mathbb{R}^3 est orienté.

Définition 2.11 *On appelle triangle sphérique un domaine T de la sphère homéomorphe à un disque et dont le bord est formé de trois arcs géodésiques dont aucun n'est réduit à un point (voir Fig.23).*

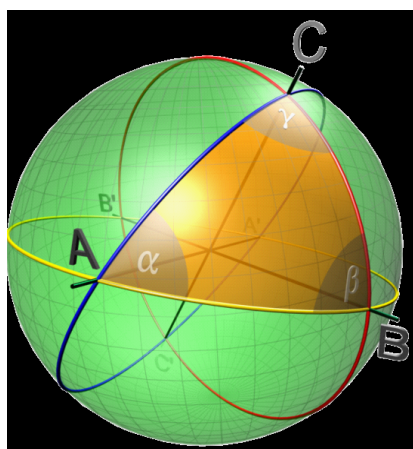


Figure 23

Remarque 2.12 1/ *Un arc géodésique est un arc sur une courbe géodésique.*

2/ *On note A , B et C les extrémités des arcs géodésiques et α , β et γ les angles intérieurs définis par les tangentes aux géodésiques. Ces angles peuvent être orientés par le choix d'une normale à la sphère.*

3/ *Si l'union des trois arcs géodésiques forme un grand cercle de la sphère, alors, le triangle sphérique correspondant est une demi-sphère.*

Définition 2.13 *On appelle biangle sphérique un domaine B de la sphère homéomorphe à un disque et dont le bord est formé de deux arcs géodésiques dont les extrémités communes sont deux points antipodaux (voir Fig.24).*



Figure 24

Remarque 2.14 *L'aire du biangle B_α d'angle au sommet α est $2\alpha R^2$. En effet ; le biangle est un cas particulier de la sphère tel que si on a utilisé la sphère de l'exemple (1.32), le biangle B_α doit être paramétriser par la même paramétrisation que la sphère mais avec $0 < \theta < \alpha$ et $0 < \phi < \pi$, alors l'aire du biangle B_α est donnée par :*

$$A = \int_0^\pi \int_0^\alpha (a^2 \sin \phi) d\theta d\phi = 2\alpha a^2$$

2.2.2 Formule d'Harriot

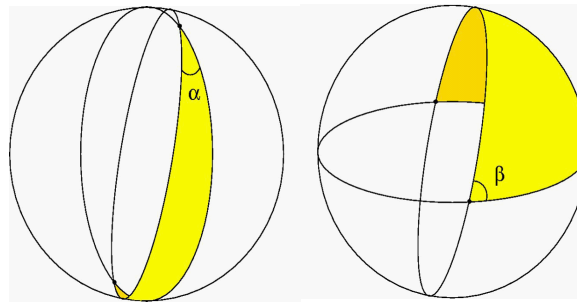
Théorème 2.15 *(La formule d'Harriot) Soit T un triangle sphérique, on a :*

$$\frac{\text{Aire}(T)}{R^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

où R est le rayon de la sphère.

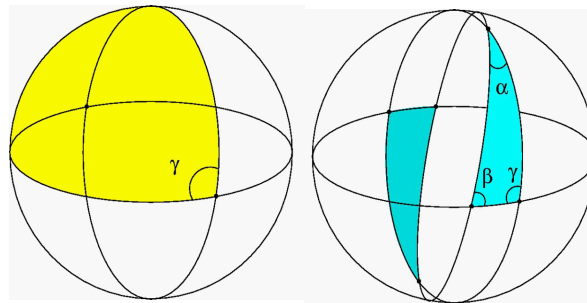
Notons que $\frac{1}{R^2}$ est la courbure de Gauss de la sphère de rayon R .

Preuve. Elle repose sur la partition de la sphère induite par un triangle sphérique.



Biangle B_α

Biangle B_β



Biangle B_γ

Triangle T

Ainsi

$$\text{Aire}(2B_\alpha + 2B_\beta + 2B_\gamma) = \text{Aire}(\mathbb{S}^2) + 4\text{Aire}(T)$$

i.e.

$$\text{Aire}(T) = \frac{1}{2}\text{Aire}(B_\alpha + B_\beta + B_\gamma) - \frac{1}{4}\text{Aire}(\mathbb{S}^2)$$

On remplace

$$\begin{aligned} \text{Aire}(T) &= \frac{1}{2}(2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2) - \frac{1}{4}(4\pi R^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2 \end{aligned}$$

C'est la formule d'Harriot. ■

2.3 Repère de Darboux-Ribeaucour

2.3.1 Repère de Serret-Frenet

On peut décrire une courbe dans l'espace semblablement à une surface, par la représentation vectorielle à un paramètre $f = f(s)$, où s est l'abscisse curviligne le long de la courbe.

En tout point A de cette courbe, on construit le repère de Frenet (T, N, B) par les vecteurs unités

$$T = \frac{df}{ds}, \quad N = \rho \frac{dT}{ds}, \quad B = T \wedge N$$

portés par la tangente T , la normale principale N et la binormale B . Le rayon de courbure ρ est positif car N est toujours dirigé vers le centre de courbure. Les plans construits sur les vecteurs unités sont le plan osculateur (T, N) , le plan normal (N, B) et le plan rectifiant (T, B) (voir Fig.25).

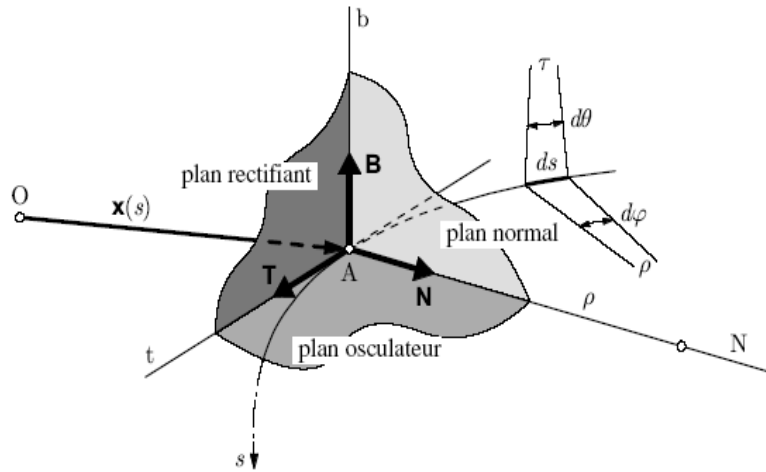


Figure 25 : Repère de Frenet

Les formules de Frenet lient les vecteurs unités à leurs dérivées.

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & \frac{1}{\tau} \\ 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Le rapport $\frac{1}{\tau}$ est la torsion de la courbe et τ est le rayon de torsion. Entre les normales principales et les binormales élevées aux extrémités d'un arc ds de la courbe apparaissent les angles $d\varphi$ et $d\theta$; la courbure et la torsion sont données par :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{ds}$$

2.3.2 Repère de Darboux-Ribeaucour

Au point A d'une courbe γ quelconque tracée sur une surface Σ , on construit le repère de Darboux (t, g, n) où t est porté par la tangente à la courbe, g est normal à t dans le plan tangent T à Σ en A , et n est normal à Σ . Ce repère diffère de celui de Frenet d'un angle ω autour de la tangente commune ($t = T$). On a donc, ω désignant l'angle entre le vecteur g et la normale principale à la courbe γ (voir Fig.26),

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Si s désigne la coordonnée curviligne le long de la courbe γ , la dérivée des vecteurs unités du repère de Darboux est donnée par :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_g} & \frac{1}{r_n} \\ -\frac{1}{r_g} & 0 & \frac{1}{t_g} \\ -\frac{1}{r_n} & -\frac{1}{t_g} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

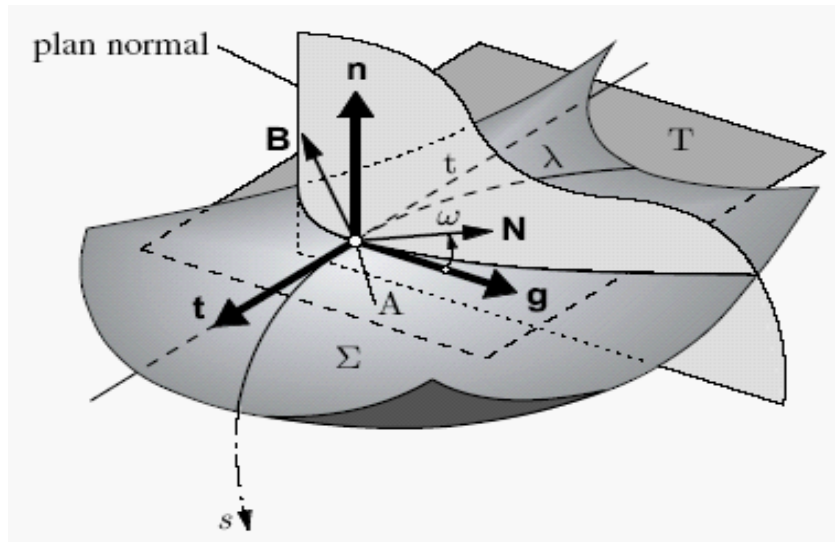


Figure 26 : Repère de Darboux-Ribaucour

Dans la matrice antisymétrique de 2.5, $\frac{1}{r_n}$ est la courbure normale, tandis que $\frac{1}{r_g}$ est la courbure géodésique et $\frac{1}{t_g}$ la torsion géodésique. De cette matrice on a :

$$\frac{1}{r_g} = \frac{dt}{ds} \cdot g, \quad \frac{1}{r_n} = \frac{dt}{ds} \cdot n \quad \text{et} \quad \frac{1}{t_g} = \frac{dg}{ds} \cdot n$$

Sachant que :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{N}{\rho} = \frac{dt}{ds}$$

on obtient, avec 2.4 pour N et 2.5 pour dt/ds

$$\frac{\cos \omega}{\rho} g + \frac{\sin \omega}{\rho} n = \frac{1}{r_g} g + \frac{1}{r_n} n$$

d'où, par identification :

$$\frac{1}{r_n} = \frac{\sin \omega}{\rho}, \quad \frac{1}{r_g} = \frac{\cos \omega}{\rho}$$

Ces formules montrent que, dans le plan normal (contenant g , n , N et B ; fig. 26), les trois centres de courbure (C_ρ , C_n et C_g) sont alignés.

Proposition 2.16 Soit $f : U \longrightarrow S$ un paramétrage orthogonal. Si $\bar{\gamma} = f \circ \gamma : I \longrightarrow S$ est une courbe paramétrée par la longueur d'arc, alors, sa courbure géodésique vaut :

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) + \dot{\varphi}$$

où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'angle orientée (par n) du couple de vecteurs $(f_u \circ \gamma, \dot{\bar{\gamma}})$.

Preuve. Si f est un paramétrage orthogonal i.e. $F = 0$, d'après la proposition (1.36), on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{E_u}{E}, \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \frac{G_u}{E}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{E_v}{G}, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \frac{G_v}{G}. \end{aligned}$$

Soit $\bar{\gamma} = f \circ \gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc. Dans la base (f_u, f_v) on a $\dot{\bar{\gamma}}(s) = \dot{u}f_u + \dot{v}f_v$.

Puisque la base $(\frac{f_u}{\sqrt{E}}, \frac{f_v}{\sqrt{G}})$ est orthonormée, on peut aussi choisir d'écrire :

$$\dot{\bar{\gamma}}(s) = \cos(\varphi(s)) \frac{f_u}{\sqrt{E}} + \sin(\varphi(s)) \frac{f_v}{\sqrt{G}}$$

où $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

En identifiant $\dot{u} = \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{E}}$ et $\dot{v} = \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{G}}$:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\dot{\varphi} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{E}} - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{E^2} E_u - \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{E\sqrt{EG}} E_v, \\ \ddot{v} &= \dot{\varphi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{G\sqrt{EG}} G_u - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \varphi}{G^2} G_v. \end{aligned}$$

Puisque $(\ddot{\bar{\gamma}})^T = \kappa_g g$ et d'après la relation 2.2, on a :

$$\kappa_g g = (\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 (\dot{v})^2) f_u + (\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 (\dot{u})^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 (\dot{v})^2) f_v$$

Le vecteur g s'écrit dans la base $(\frac{f_u}{\sqrt{E}}, \frac{f_v}{\sqrt{G}})$:

$$\begin{aligned} g &= n \wedge t \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sqrt{G}} f_v - \frac{\sin \varphi}{\sqrt{E}} f_u \end{aligned}$$

Il suffit de remplacer pour obtenir :

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{G_u}{\sqrt{G}} \sin(\varphi) - \frac{E_v}{\sqrt{E}} \cos(\varphi) \right) + \dot{\varphi}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u \dot{v} - E_v \dot{u}) + \dot{\varphi}$$

■

Chapitre 3

Théorème de Gauss-Bonnet

Dans ce chapitre, nous allons présenter le théorème de Gauss-Bonnet et certaines de ses conséquences. La géométrie impliquée dans ce théorème est assez simple, et la difficulté de sa preuve réside dans certains faits topologiques. Ces faits seront présentés sans preuves. Le théorème de Gauss-Bonnet est probablement le plus profond théorème de la géométrie différentielle des surfaces.

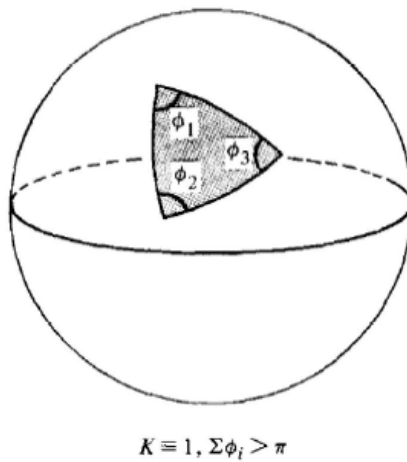
L'ancêtre de ce théorème est le théorème de Thales qui dit que la somme des angles intérieurs d'un triangle tracé sur le plan est égale à π . Après ça, Harriot a étudié la trigonométrie sphérique et a découvert sa formule qui a permis de calculer la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique tracé sur la sphère, cette formule s'appelle la formule d'Harriot qui nous l'avons vue dans le chapitre 2. La première version du théorème de Gauss-Bonnet a été présentée par Gauss dans un célèbre article et traite des triangles géodésiques sur n'importe quelle surface. Il affirme que le dépassement de π de la somme des angles intérieurs ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 d'un triangle géodésique T est égale à l'intégrale de la courbure de Gauss K sur T i.e.

$$\sum_{i=1}^3 \phi_i - \pi = \iint_T K \, d\sigma$$

En particulier, on retrouve que, si $K \equiv 0$ on obtient que $\sum_{i=1}^3 \phi_i = \pi$, alors cette version est une extension du théorème de Thales. En outre, si on a dans le cas de la sphère unité où $K \equiv 1$ on obtient que $\sum_{i=1}^3 \phi_i - \pi = \text{aire}(T)$,

alors la somme des angles intérieurs d'un triangle géodésique est supérieur à π , et que le dépassement de π est précisément l'aire de T . Donc cette version est aussi une extension de la formule d'Harriot.

L'extension du théorème de Gauss-Bonnet à une région délimitée par une courbe simple non géodésique est due à O. Bonnet. Pour étendre encore plus loin, par exemple, sur des surfaces compactes, quelques considérations topologiques entreront en jeu. Actuellement, l'une des caractéristiques les plus importantes du théorème de Gauss-Bonnet est qu'il fournit une relation remarquable entre la topologie d'une surface compacte et l'intégrale de sa courbure.



Nous allons maintenant commencer les détails d'une version locale du théorème de Gauss-Bonnet. Nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 3.1 Une courbe paramétrée $\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite fermée, simple et \mathcal{C}^k -régulière par morceaux si

- (i) $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(b)$
- (ii) $\forall t_1, t_2 \in [a, b[, t_1 \neq t_2 \Rightarrow \bar{\gamma}(t_1) \neq \bar{\gamma}(t_2)$
- (iii) Il existe une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$$

de $[a, b]$ telle que $\bar{\gamma}$ soit \mathcal{C}^k et régulière sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \{0, \dots, k\}$ (voir Fig.27).

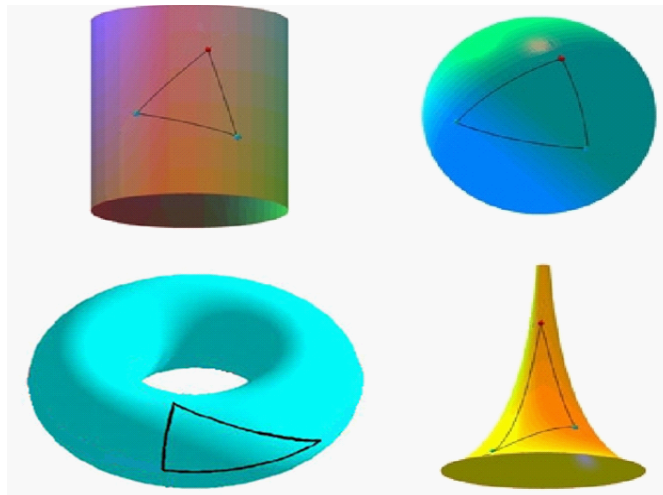


Figure 27 : Courbes fermées simples et régulières par morceaux

On suppose maintenant que $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ où f est une paramétrisation régulière et injective. On note θ_i , $i \in \{0, \dots, k\}$, les angles en $\bar{\gamma}(t_i)$ formés par les couples de vecteurs $(\bar{\gamma}'(t_{i-}), \bar{\gamma}'(t_{i+}))$ et orientés par la normale de f (voir Fig.28), et on note φ l'angle orienté entre f_u et $\bar{\gamma}'$.

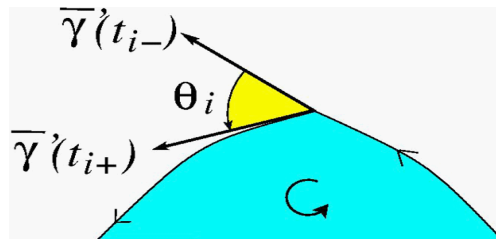


Figure 28

Théorème 3.2 [2] (*Théorème des tangentes tournantes pour les surfaces*) Si $f(U)$ est homéomorphe à un disque on a :

$$\sum_{i=0}^k (\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi$$

le signe dépendant de l'orientation de $\bar{\gamma}$ (voir Fig.29).

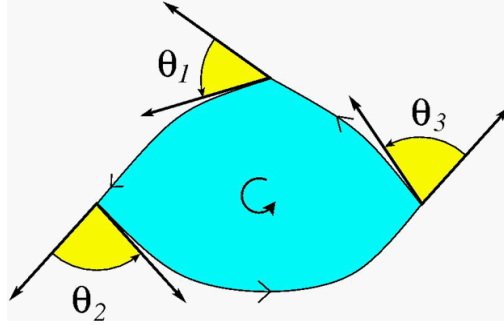


Figure 29

Définition 3.3 On dit que $D \subset S$ est un domaine simple si D est homéomorphe à un disque fermé et si le bord ∂D de D est le support d'une courbe paramétrée

$$\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \partial D \subset S$$

fermée, simple et régulière par morceaux (voir Fig.30).

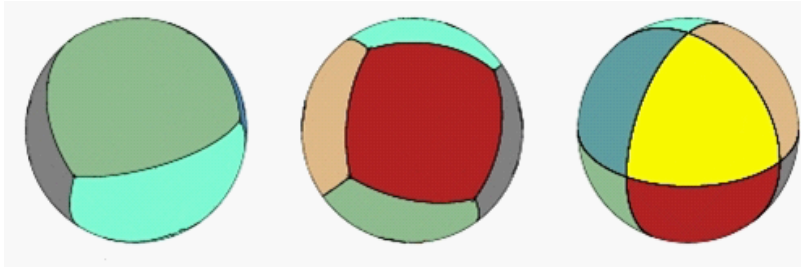
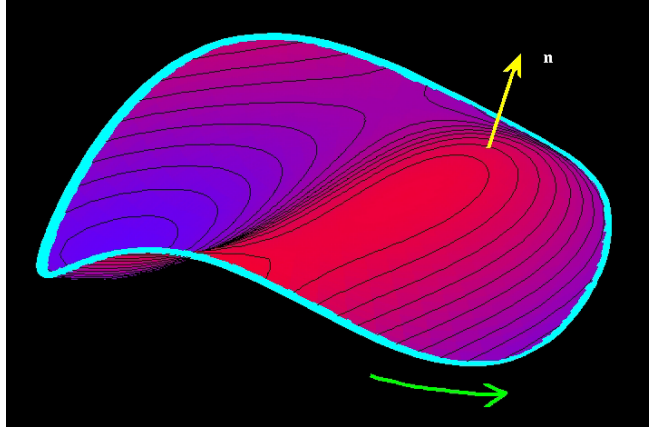
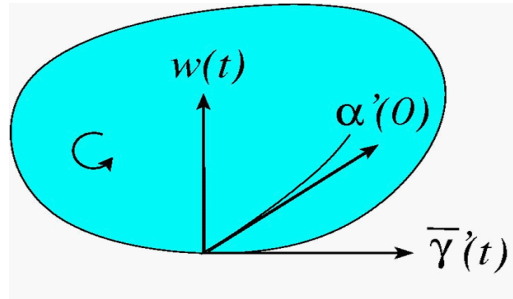


Figure 30 : Des domaines simples sur la sphère

Définition 3.4 Soit $\bar{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \partial D \subset S$ une courbe paramétrée fermée, simple et régulière par morceaux. On dit que $\bar{\gamma}$ est orientée positivement si pour tout $t \in]t_k, t_{k+1}[$, lorsque l'on complète $\bar{\gamma}'(t)$ en une base $(\bar{\gamma}'(t), w(t))$ orthogonale directe pour l'orientation induite par n , alors le vecteur $w(t)$ "pointe à l'intérieur de D ".



"Pointe à l'intérieur de D " signifie que pour toute courbe $\alpha : [0, \epsilon[\longrightarrow D$ telle que $\alpha(0) = \bar{\gamma}(t)$ et $\alpha'(0) \notin \mathbb{R}\bar{\gamma}'(t)$ on a $\langle \alpha'(0), w(t) \rangle > 0$.



Avec ces définitions, nous affirmons maintenant

3.1 Théorème de Gauss-Bonnet (local)

Théorème 3.5 (Théorème de Gauss-Bonnet) Soit $D \subset S = f(U)$ un domaine simple bordé par $\bar{\gamma}$ orientée positivement et paramétrée par la longueur d'arc. Alors :

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \int_D K d^2s + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad (3.1)$$

Corollaire 3.6 Si le support de $\bar{\gamma}$ est formé d'arcs géodésiques alors :

$$\int_D K d^2s = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

Preuve. Puisque le support de $\bar{\gamma}$ est formé d'arcs géodésiques, alors, d'après la proposition (2.4) $\kappa_g = 0$. ■

1/ Si D est un triangle dans un plan ($K = 0$), la formule de Gauss-Bonnet s'écrit :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$$

(voir Fig.31).

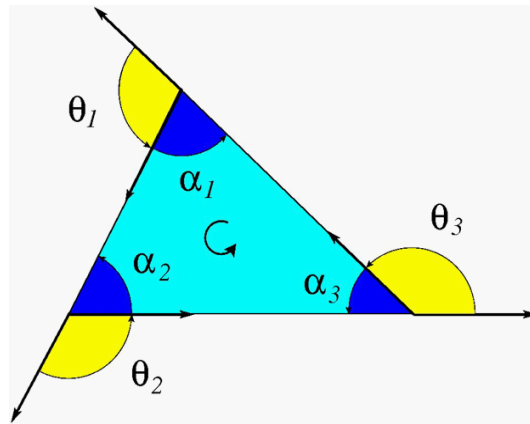


Figure 31

Si on note α_i les angles intérieurs, on obtient $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, on retrouve le théorème de la somme des angles d'un triangle (Thales).

2/ Si D est un triangle sphérique tracée sur une sphère de rayon R alors :

$$\int_D K d^2s = \frac{\text{Aire}(D)}{R^2}$$

La formule de Gauss-Bonnet s'écrit donc :

$$\frac{\text{Aire}(D)}{R^2} = 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

En passant aux angles intérieurs on retrouve la formule d'Harriot

$$\frac{\text{Aire}(D)}{R^2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Preuve. On suppose pour simplifier la preuve que $f : U \rightarrow S$ est un paramétrage orthogonal.

Ainsi :

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds = A + B$$

où

$$A = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds$$

et

$$B = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi' ds$$

On s'occupe en premier de A . On note :

$$P = -\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \text{ et } Q = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}}$$

Par Green-Riemann

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} (G_u v' - E_v u') ds \\ &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} (P u' + Q v') ds \\ &= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) dudv \\ &= \int_D \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right) dudv \end{aligned}$$

A un facteur $-\sqrt{EG}$ près on reconnaît l'expression de la courbure de Gauss, d'où :

$$A = - \int_D K \sqrt{EG} du dv$$

Or \sqrt{EG} est l'élément d'aire puisque $F = 0$. Ainsi

$$A = - \int_D K d^2 s$$

On s'occupe de B maintenant. On a :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi' ds \\ &= \sum_{i=0}^k (\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)) \end{aligned}$$

Le théorème des tangentes tournantes permet ensuite d'écrire que :

$$\sum_{i=0}^k (\varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i)) = 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds &= A + B \\ &= - \int_D K d^2 s + 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i \end{aligned}$$

C'est la formule de Gauss-Bonnet. ■

Pour globaliser le théorème de Gauss-Bonnet, nous avons besoin de plus de préliminaires topologiques.

Soit S une surface régulière. Un domaine $D \subset S$ est dit régulier si D est compact et son bord ∂D est l'union finie de courbes simples, fermées, régulières et différentiables par morceaux qui ne se croisent pas (le domaine de la fig.32 (a) est régulier, mais l'autre dans la fig.32 (b) n'est pas régulier).

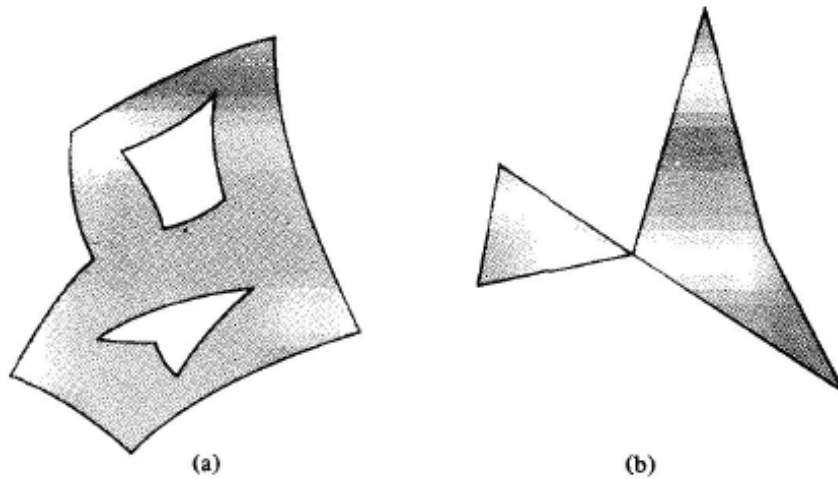


Figure 32

Pour plus de commodité, nous considérons une surface compacte comme un domaine régulier, son bord est vide. Un domaine simple qui n'a que trois sommets avec des angles extérieurs $\alpha_i, i = 1, 2, 3$, est appelée un triangle.

Une triangulation d'un domaine régulier $D \subset S$ est une famille finie \mathcal{J} de triangles $(T_i)_{i=1, \dots, n}$ de telle sorte que

- 1) $\cup_{i=1}^n T_i = D$,
- 2) Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, alors $T_i \cap T_j$ est soit un bord commun de T_i et T_j ou un sommet commun de T_i et T_j .

Étant donné une triangulation \mathcal{J} d'un domaine régulier $D \subset S$ d'une surface S , nous désignerons par F le nombre de triangles (faces), par E le nombre de côtés (bords), et par V le nombre de sommets de la triangulation.

Le nombre

$$F - E + V = \chi$$

est appelé la caractéristique d'Euler-Poincaré de la triangulation.

Proposition 3.7 [2] *Chaque domaine régulier d'une surface régulière admet une triangulation.*

Proposition 3.8 [2] *Soit S une surface orientée et $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de paramétrisations compatible avec l'orientation de S . Soit $D \subset S$ un domaine régulier de S . Alors, il y a une triangulation \mathcal{J} de D telle que chaque triangle $T \in \mathcal{J}$ est contenu dans un certain voisinage de coordonnée de la famille $\{X_\alpha\}$. En outre, si le bord de chaque triangle de \mathcal{J} est orienté positivement, les triangles adjacents déterminent une orientation opposée dans le bord commun (voir Fig.33).*



Figure 33

Proposition 3.9 [2] *Si $D \subset S$ est un domaine régulier d'une surface S , la caractéristique d'Euler-Poincaré ne dépend pas de la triangulation de D . Il est commode, par conséquent, de l'indiquer par $\chi(D)$.*

Enfin, soit $D \subset S$ un domaine régulier d'une surface orientée S et \mathcal{J} une triangulation de D tel que chaque triangle $(T_j)_{j=1, \dots, k}$ est contenu dans un voisinage de coordonnées $X_j(U_j)$ d'une famille de paramétrisations $\{X_\alpha\}$, $\alpha \in A$, compatible avec l'orientation de S .

Proposition 3.10 [2] Avec les notations ci-dessus, la somme

$$\sum_{j=1}^k \int \int_{X_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$$

ne dépend pas de la triangulation \mathcal{J} ou sur la famille $\{X_j\}$ de paramétrisations de S .

3.2 Théorème de Gauss-Bonnet (global)

Théorème 3.11 [2] Soit $D \subset S$ un domaine régulier d'une surface orientée S et soit C_1, \dots, C_n les courbes simples, fermées, régulières et différentiables par morceaux du bord ∂D de D . Supposons que chaque C_i est orientée positivement, et soit $\theta_1, \dots, \theta_p$ l'ensemble de tous les angles extérieurs des courbes C_1, \dots, C_n . Alors

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi \mathcal{X}(D)$$

où s représente la longueur d'arc de C_i , et l'intégrale sur C_i signifie la somme des intégrales dans chaque arc régulier de C_i .

Preuve. Considérons une triangulation \mathcal{J} du domaine D de telle sorte que chaque triangle T_i est contenu dans un voisinage de coordonnées d'une famille de paramétrisations orthogonales compatibles avec l'orientation de S . Une telle triangulation existe par la proposition 3.8.

En outre, si le bord de chaque triangle de \mathcal{J} est orienté positivement, on obtient des orientations opposées dans les bords qui sont communs aux triangles adjacents (voir fig.34).

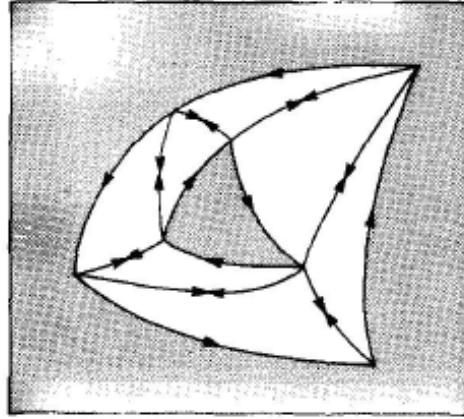


Figure 34

En appliquant à chaque triangle le théorème de Gauss-Bonnet local et en additionnant les résultats que nous obtenons, en utilisant la proposition 3.10 et le fait que chaque côté "intérieur" est décrit deux fois dans des orientations opposées,

$$\sum_i \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F$$

où F désigne le nombre de triangles de \mathcal{J} et $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ sont les angles extérieurs du triangle T_j .

Nous allons maintenant introduire les angles intérieurs du triangle T_j , donnés par $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$. Ainsi,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}$$

Nous allons utiliser les notations suivantes :

- E_e = nombre d'arêtes externes de \mathcal{J} ,
- E_i = nombre d'arêtes internes de \mathcal{J} ,
- V_e = nombre de sommets externes de \mathcal{J} ,
- V_i = nombre de sommets internes de \mathcal{J} .

Étant donné que les courbes C_i sont fermées $E_e = V_e$. En outre, on montre par récurrence que $3F = 2E_i + E_e$, et par conséquent :

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}$$

Nous observons maintenant que les sommets externes peuvent être soit des sommets d'une certaine courbe C_i ou sommets introduits par la triangulation. Nous fixons $V_e = V_{ec} + V_{et}$, où V_{ec} est le nombre de sommets des courbes C_i et V_{et} est le nombre de sommets externes de la triangulation qui ne sont pas des sommets d'une certaine courbe C_i .

Étant donné que la somme des angles autour de chaque sommet interne est égale à 2π , on obtient :

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_i (\pi - \theta_i)$$

En ajoutant πE_e et en le soustrayant de l'expression ci-dessus, et en tenant compte du fait que $E_e = V_e$, nous concluons que :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_i \theta_i \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_i \theta_i \end{aligned}$$

En mettant les choses ensemble, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \kappa_g(s) ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i &= 2\pi (F - E + V) \\ &= 2\pi \mathcal{X}(D) \end{aligned}$$

■

Puisque la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un domaine simple est 1, on obtient

Corollaire 3.12 *Si D est un domaine simple de S , alors :*

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_i}^{S_{i+1}} \kappa_g(s) ds + \iint_D K d\sigma + \sum_{i=1}^k \theta_i = 2\pi$$

Conclusion 3.13 *On a introduit, dans le cas des surfaces deux importantes notions qui sont ; la caractéristique d'Euler et la courbure. Ces concepts admettent des généralisations pour des variétés plus complexes. La courbure est un concept métrique à la fois local et global, la caractéristique d'Euler est de nature purement globale.*

L'origine combinatoire de ces invariants topologiques clarifie le rôle fondamentale de la topologie algébrique qui consiste à étudier les espaces topologiques à travers des invariants algébriques.

Bibliographie

- [1] V. Borrelli, CM-S5 : Le Théorème de Gauss-Bonnet, Université de Lyon (math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli/Enseignement/Geom/diaporama_CM-S5.pdf).
- [2] M. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall, 1976.
- [3] H. Emamirad, Courbes et Surfaces, Cours de M1, Université de Poitiers(www-math.univ-poitiers.fr/~emamirad/Cours_M1.pdf).
- [4] A. Frabetti, Cours de géométrie et calcul différentiel, Université Claude Bernard Lyon1(math.univ-lyon1.fr/~frabetti/GeoL2/cours-geometrie-ch2.pdf).
- [5] F. Frey, M. A. Studer, Analyse des Structures et Milieux Continus, Traité de Génie Civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Volume 5, 2000.
- [6] M. Hindry, courbes et surfaces, L2 option Math, Université Paris VII (webusers.imj-prg.fr/~marc.hindry/coursCS3.pdf).
- [7] A. Pressley, Elementary Differential Geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2001.