Remerciments

Tout dabord je tiens a remercier Mon enseignante `Dr.F.Mostefai` *Pour son encadrement, ses conseils ,ses orientations et son aide lors de la rédaction de ce mémoire. Comme je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide et soutien et leur remarques constructives, sans Oublier mes parents qui , malgré leurs ignorance en la matiere m'ont apporté soutiens et reconfort.*

Dédicaces

Au meilleur des pères.

A ma très chère maman.

Qu'ils trouvent en moi la source de leur fierté.

A qui je dois tout.A ma soeure et mes frères .

A qui je souhaite un avenir radieux plein de réussite.

A mes Amis. A tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction

Depuis une dizaine d'années un grand nombre d'articles en mathématiques abordent l'étude des fonctions multivoques. Les origines de cette notion semblent être liées aux préoccupations des mathématiciens pour représenter les singularités de l'ensembles des solutions de problémes de géomtrie ou de mécaniques.

A notre connaissance, c'est à Painlevé (1902) que l'on doit la première représentation de la continuité d'une telle famille d'ensembles. Cette idée fut ensuite reprise et développée dans le même sens par Zoretti en 1905 et Janizewski en 1912.

C'est vers 1920-1930 qu'apparait dans la littérature l'étude des fonctions multivoques plus générales faisant correspondre à un point d'un espace métrique une partie d'un autre espace métrique.
On s'intéressera dans ce travail à l'étude de quelques inclusions différentielles d'ordre entier.

Dans **le chapitre 1** on a donné quelques définitions et propriétés des applications multivoques.

Dans **le chapitre 2**, on présente l'existence de solutions de quelques problèmes aux limites faisant intervenir des inclusions différentielles.

Chapitre 1

Généralités sur les multifonctions

Notation :Dans ce mémoire, nous utiliserons les notations suivants :
-$\mathcal{P}(E) = \{Y \subset E : Y \neq \emptyset\}$,et
-$\mathcal{P}_p(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y$ posséde la propriété "p"$\}$, avec p=f (fermé),p=b (borné),p=cp (compacte), p=cv (convexe), etc.
Alors
-$\mathcal{P}_f(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y$ fermé $\}$
-$\mathcal{P}_b(E) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y$ borné $\}$
-$\mathcal{P}_{cv}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y$ convexe$\}$
-$\mathcal{P}_{cp}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y$ compact$\}$
-$\mathcal{P}_{cv,cp}(E) = \mathcal{P}_{cv}(E) \cap \mathcal{P}_{cp}(E)$, etc.

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Une multifonction (ou application multivoque) F d'un espace X vers un espace Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \to 2^Y$ et $F : X \multimap Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).*

Définition 1.1.2. *On appelle graphe de la multi-fonction F, l'ensemble*

$$Graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

F est à graphe fermé si $Graph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira aussi que F est fermée.

Définition 1.1.3. *On appelle image de F l'union des images $F(x)$*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

et domaine de F l'ensemble

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

Définition 1.1.4. *(a) Une multi-fonction $F : X \to P(Y)$ est à valeurs fermées (respec. convexes) si $F(x)$ est fermée (respec. convexe) pour tout $x \in X$.*
(b) F est dite bornée sur les bornés si l'ensemble

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$$

est borné dans Y pour chaque sous-ensemble $A \in \mathcal{P}_b(X)$,i.e

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{\|y\|_F, y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Enfin, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.1. *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction, et A_1,A_2 deux sous-ensembles de X. Alors*
(a) $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$.
(b) $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.
(c) $Im(F) \setminus F(A) \subset F(X \setminus A)$.
(d) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$.

1.1.1 Image réciproque d'une multifonction

Soit E_1, E_2 deux ensembles et $F : E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ une application multivoque.

Définition 1.1.5. *L'inverse F^{-1}de F est l'application multivoque de E_2 dans E_1 définie par la relation*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in Graph(F).$$

C'est-à-dire

$$F^{-1}(y) = \{x \in E_1 : y \in F(x)\} = \{x \in E_1 : (x, y) \in Graph(F)\}.$$

L'une des différences entre les applications univoques et les applications multivoques est que pour une fonction univoque,l'inverse d'un ensemble est défini de manière unique ; par contre ,il existe deux manières de définir l'image inverse d'un ensemble par une multi-fonction.

Définition 1.1.6. *Soit $F : E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ une application multivoque et B un sous-ensemble de E_2. L'image inverse de B par F notée $F^{-}(B)$, est définie par*

$$F^{-}(B) = \{x \in E_1 : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Le noyau de F, notée $F^{+}(B)$, est défini par

$$F^{+}(B) = \{x \in E_1 : F(x) \subset B\}.$$

Proposition 1.1.2. *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction et $A \subset X$,$B \subset Y$ deux sous-ensembles de X, Y respectivement. Alors*
(a) $A \subset (F^{+}(F(A))$.
(b) $F(F^{+}(B)) \subset B$.

1.1.2 Union, intersection, composition et produit cartésien de multi-fonctions

Définition 1.1.7. *Si $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$ sont des multi-applications, alors*

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x), \quad (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$$

et

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x).$$

Définition 1.1.8. *Si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ et $G : Y \to \mathcal{P}(Z)$ sont des multi-applications, alors la composition $(G \circ F)(\cdot)$est définie par*

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y).$$

1.1.3 Propriétés principales

Proposition 1.1.3. *Soit $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$ deux multi-fonctions, et B un sous-ensemble de Y. Alors*

(a) $(F \cup G)^{-}(B) = F^{-}(B) \cup G^{-}(B)$ *et* $(F \cup G)^{+}(B) = F^{-}(B) \cup G^{+}(B)$.
(b) $(F \cap G)^{-}(B) \subseteq F^{-}(B) \cap G^{-}(B)$ *et* $F^{-}(B) \cap G^{+}(B) \subseteq (F \cap G)^{+}(B)$.

Proposition 1.1.4. *(a) Soit* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *deux multi-fonctions,et* $B \subseteq Y$*. Alors*

$$(G \circ F)^{-}(B) = F^{-}(G^{-}(A)) \; et \; (G \circ F)^{+}(B) = F^{+}(G^{+}(A)).$$

(b) Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *et* $G : Y \to \mathcal{P}(Z)$ *deux multi-fonctions,* $B \subseteq Y$ *et* $C \subseteq Z$*. Alors*

$$(F \times G)^{+}(B \times C) = F^{+} \cap G^{+}(C) \; et \; (F \times G)^{-}(B \times C) = F^{-}(B) \cap G^{-}(C).$$

1.2 Élements de topologie

1.2.1 Métrique de Hausdorff

Soit(E,d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$ et $A \in P(E)$, on définit la distance entre a et A par

$$d(a, A) = inf\{d(a, b) : b \in A\}, \quad d(a, \emptyset) = +\infty.$$

Définition 1.2.1. *soit* (E, d) *un espace métrique et A,B deux sous-ensembles de E.*
(a) On définit la distance entre A et B par

$$H^{*}(A, B) = sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

(b) La distance de Hausdorff entre A,B est donnée par

$$H_d(A, B) = max(H_d^{*}(A, B), H_d^{*}(B, A)).$$

D'après cette définition, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes :
(a) $H_d(A, A) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,
(b) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$,
(c) $H_d(A, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B)$, pour tout A,B,C $\in \mathcal{P}(E)$.

Lemme 1.2.1. *(Caractérisation de la métrique de Hausdorff) Soit (E,d) un espace métrique et A,B deux parties de E. Pour chaque* $\epsilon > 0$*, considérons les ensembles :*

$$A_\epsilon = \{a \in E : d(a, A) < \varepsilon\} \; et \; B_\varepsilon = \{b \in B : d(b, B) < \varepsilon\}.$$

Alors

$$H_d^*(A,B) = inf\{\epsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}, H_d^*(B,A) = inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}$$

et

$$H_d(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon, A \subset B_\varepsilon\}.$$

Démonstration.Soit $\varepsilon > 0$ tel que $A \subset B_\varepsilon$; alors

$$d(a,B) \leq \varepsilon \,\forall\, a \in A \Rightarrow \sup d(a,B) \leq \varepsilon \Rightarrow H_d^*(A,B) \leq \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\ \}.$$

Supposons que $H_d^*(A,B) < \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}$ ceci implique que $d(a,B) < \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}$ pour tout $a \in A$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(a,B) < \alpha < inf\{\epsilon > 0 : A \subset (B_\varepsilon)\}\forall a \in A.$$

Donc $A \subset B_\alpha$, alors $\inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\} \leq \alpha$ est une contradiction. D'où

$$H_d^*(A,B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon\}.$$

De même, on peut montrer que

$$H_d^*(B,A) = inf\{\varepsilon > 0 : B \subset A_\varepsilon\}.$$

Alors

$$H_d(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon, B \subset A_\varepsilon\}.$$

Remarque 1.2.1. *Généralement, H_d ne vérifie pas la condition*

$$H_d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

H_d est une pseudo-métrique . Par exemple, soit ($\mathbb{R}$,|.|), l'espace métrique euclidien et $A = \{\frac{1}{n} : n \in N^*\}$, $B = \{\frac{n}{n+1} : n \in N\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Il est clair que H_d(A,B)=0, mais A≠B ; donc H_d n'est pas une distance sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.On remarque que l'ensemble B n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Le lemme suivant montre que la distance de Hausdorrff peut être une métrique classique.

Lemme 1.2.2. *Soit(E,d) un espace métrique et A un sous-ensemble de E. Alors*

$$H_d(A, B) = 0 \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}.$$

et donc ($P_f(E)$,H_d) est un espace métrique.

En effet ce résultat découle du fait que

$$d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in \bar{A}.$$

Définition 1.2.2. *Soit $\{A_n : n \in N\}$ une suite dans $P_f(E)$. On dira que A_n converge vers $A \in P_f(E)$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow H_d(A_n, A) \leq \varepsilon).$$

On dit que $\{A_n : n \in N\}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0 : \forall n, p \in N(n, p \geq n_0 \Rightarrow H_d(A_n, A_p) \leq \varepsilon)$$

Lemme 1.2.3. *(Caractérisation de la limite d'une suite.) Soit $\{A_n,A\} \in P_f(E)$ et $A_n \to A$.alors*

$$A = \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon\geq 0} \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon.$$

Démonstration. Soit $A_n \longrightarrow^{H_d} A$. alors il existe $n_0(\varepsilon) \geq 0$ tel que pour chaque $m \geq n_0(\varepsilon)$, on a $A \subset (A_m)_\varepsilon$ et $A_m \subset A_\varepsilon$. D'après la définition de la limite, on obtient

$$A \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$$

et

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \subset A.$$

Donc

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} \subseteq A \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{m\geq n} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon.$$

Inversment, soit $x \in \bigcap_{\varepsilon\geq 0} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $n_0(\varepsilon) \geq 1$ tel que $m \geq n_0(\varepsilon)$, donc $x \in (A_m)_\varepsilon$. Pour $n \geq 1$, il existe $m \geq \max(n, n_0(\varepsilon))$ tel que $x \in (A_m)_\varepsilon \subset (\bigcup_{m\geq n} A_m)_\varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est aléatoire, on obtient que $x \in \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$ et alors $x \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m}$, d'où le résultat demandé.

Théorème 1.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet, alors $(P_f(X), H_d)$ est aussi complet.*

Démonstration. En effet, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de cauchy dans $P_f(X)$. D'après le Lemme 1.2.3, la seule limite possible est $A = \cap_{n\geq 1}\overline{\cup_{m\geq n}A_m}$. Montrons que $A \in P_f(X)$ et que A_n converge vers A. La suite $(A_n)_{n\in N}$ étant de Cauchy alors pour tout ε positive,il existe
$n(\varepsilon) \in N$ tel que chaque $n, m \geq n(\varepsilon)$ on a $H_d(A_n, A_m) \leq \varepsilon$ et donc

$$A_n \subset (A_m)_\varepsilon et A_m \subset (A_n)_\varepsilon.$$

Alors

$$\sup_{x\in A_n} d(x, A_m) \leq \varepsilon et \sup_{x\in A_n}) \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe N_k telle que pour chaque $n, m \geq N_k$,on a

$$\sup_{x\in A_n} d(x, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} et \sup_{x\in A_m} d(x, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite $(x_k)_{k\in N}$dans X telle que pour $\varepsilon > 0$ et pour tout K,

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \ (1.1)$$

•$K = 0$, il existe $n_0 \geq N_0$ et $n_1 > \max(n_0, N_1)$ telle que $H_d(A_{n0}, A_{n1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$,alors
il existe $(x_0, x_1) \in A_{n0} \times A_{n1}$ tel que $d(x_0, x_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
•$K = 1$, il existe $n_2 > \max(n_1, N_2)$ tel que $H_d(A_{n1}, A_{n2}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$; donc il existe
$x_2 \in A_{n2}$ tel que $d(x_1, x_2) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$.
• Supposons que pour $n_k > \max(n_{k-1}, N_k)$,il existe $x_k \in A_{nk}$ tel que

$$d(x_{k-1}, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

• Montrons qu'il existe $n_{k+1} \in N$ et $x_{k+1} \in A_{nk+1}$ tel que

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Comme c'est suite de Cauchy, alors il existe $n_{k+1} > \max(n_k, N_{k+1})$ tel que

$$H_d(A_{nk}, A_{nk+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

D'où l'existence de $x_{k+1} \in A_{nk+1}$tel que $d(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.
Par 1.6.1, la suite $(x_k)_{k\in N}$ est de Cauchy dans N, et donc converge vers un certain élement

$x \in X$. ($\{n_k\}_{k\in N}$ étant une suite strictement croissante, pour tout $n \geq 1$,il existe $K_n$tel que $n_{kn} \geq n$) Ceci montre que, pour tout $n \geq 1$et$K \geq K_n$, on a $x_k \in \cup_m \geq nA_m$, d'où $x \in \overline{\cup_{m\geq n} A_m}$. Alors $x \in A$.De plus

$$\begin{aligned} d(x, x_0) = \lim d(x_n, x_0) \leq & \lim \sum_{k=0}^{k=n} d(x_k, x_{k+1}) \\ \leq & \lim \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ = & \varepsilon \lim(1 - (\tfrac{1}{2})^n) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc pour chaque $n_0 \geq N_0$ et $x_0 \subset A_{n0}$, il existe $x \in A$ tel que $d(x, x_0) < \varepsilon$, ce qui exprime le fait que $A_{n0} \subset A_\varepsilon$. il reste à montrer que $A \subset (A_n)_\varepsilon \forall n \geq N_0$. Soit $x \in A$, alors $x \in \overline{\cup_{m\geq N0} A_m}$ et donc il existe $m \geq N_0$,$y \in A_m$ tel que $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\begin{aligned} d(x, A_n) \leq & \ d(x, A_m) + H_d(A_n, A_m) \\ \leq & \ d(x, y) + H_d(A_n, A_m) \\ \leq & \ \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow A \subset (A_n)_\varepsilon, \forall n \geq N_0. \end{aligned}$$

Donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A.

1.3 Topologie de l'espace $(P_{cp}(X), H_d)$

Définition 1.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $A \subset X$ une partie de X.A est dite totalementt bornée si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie $\{x_1, x_2, ..., x_{n(\varepsilon)}\}$ d'éléments de A tels que $A \subset \cup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B(x_i, \varepsilon)$.*

Rappelons le théorème suivant qui donne un critère de la compacité relative.

Théorème 1.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et A une partie de X.*
Les deux assertions suivantes sont équivalentes
(a) A est totalement bornée (précompacte).
(b) A est relativement compacte.

Lemme 1.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors $P_{tb}(X)$ est fermée dans $P_f(X)$.*

Démonstration. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset P_{tb}(X)$ une suite convergente vers A. Montrons que $A \in P_{tb}(X)$.$\lim A_n = A$.alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n(\varepsilon) \in N$ tel que pour tout $n \in N$, $n \geq n(\varepsilon)$ on a $A \subset (A_n)_\varepsilon$ et $(A_n)_\varepsilon \subset A$.Puisque A_n est totalement bornée, il existe un ensemble fini $\{x_1^n, x_2^n, ..., x_m^n\} \subset A_n$ tel que $A_n \subset \cup_{j=1}^m B(x_j^m, \varepsilon)$.
Il clair que pour chaque $x_j^n \in A_n$ il existe $x_j^{n,A} \in A$ vérifiant
$d(x_j^n, x_j^{n,A}) \leq \varepsilon, j = 1, ..., m$.
Soit $x \in A$. Alors

$$\begin{aligned} d(x, x_j^{n,A}) \leq & \; d(x,y) + d(y, x_j^n) + d(x_j^n, x_j^{n,A}), \forall y \in A \\ \leq & \; d(x, A) + d(x_j^n, x_j^{n,A}) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci exprime que $A \subset \cup_{j=1}^m B(x_j^{n,A}, 2\varepsilon)$. D'où $A \in P_{tb}(X)$.

Lemme 1.3.2. *Soit (X,d) un espace métrique complet. Alors $P_{cp}(X)$ est fermé dans $P_f(X)$; de plus $(P_{cp}(X), H_d)$ est complet.*

Démonstration. En effet, soit $\{A_n\}_{n\in N}$ une suite dans $P_{cp}(X)$ convergente vers A. Montrons que $A \in P_{cp}(X)$. D'après le Lemme 1.2.3 $A \in P_f(X)$.
D'autre part $\{A_n\}_{n\in N}$ est totalement bornée, donc $A \in P_{tb}(X)$. Donc A est compact. De plus, si $\{A_n\}_{n\in N} \subset P_{cp}(X)$ une suite de Cauchy, alors $\{A_n\}_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans $P_f(X)$ et comme X est complet, il existe $A \in P_f(X)$tel que $\{A_n\}_{n\in N}$ converge vers A. Finalement, on obtient $A \in P_{cp}(X)$

Corollaire 1.3.1. *Soit (X,d) un espace métrique, $K \subset X$ une partie compacte et $A \subset X$ un ensemble fermé tel que $K \cap A \neq \emptyset$. Alors $\sup_{x\in A} d(x, K) > 0$.*

Démonstration. Supposons que $d(K, A) = \inf\{d(x,y) : x \in K, y \in A\} = 0$. Alors pour tout ε strictement positif, il existe $x_\varepsilon \in K, y_\varepsilon \in A$ tel que $d(y_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \varepsilon$.
Posons $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tel que

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}, \forall (x_n, y_n) \in K \times A, n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme K est compacte, donc il existe une sous-suite $\{x_{n_m}\}_{m\in N^*}$ qui converge vers $x \in K$. On obtient alors

$$d(x_{nm}, y_{nm}) \leq \frac{1}{m} \Rightarrow d(x, y_{nm}) \leq d(x, x_{nm}) + d(x_{nm}, y_{nm}) \leq d(x, x_{nm}) + \frac{1}{m}.$$

Ce qui montre $\{y_{nm}\}_{m\in\mathbb{N}}$ est suite convergente et sa limite égale à $x \in A$. Contradiction avec $K \cap A \neq \emptyset$.

Théorème 1.3.2. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors la topologie de Hausdorff sur les parties compactes de X est engendrée par les ensembles :*

$$\mathcal{L}_u = \{K \in P_{cp}(X) : K \subset U\}$$

et

$$\mathcal{L}_l = \{K \in P_{cp}(X) : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

où U est un ouvert de X. De plus, la famille

$$\beta_{ul} = \{K \in P_{cp}(X) : K \subset U, K \cap U, K \cap V_1 \neq \emptyset, ..., K \cap V_n \neq \emptyset\},$$

où U ,$V_i, i = 1, ..., m$ sont des ouverts de X, forme une base de topologie de $P_{cp}(X)$.

Démonstration. Montrons que les ensemblles $\mathcal{L}_u$ et $\mathcal{L}_l$ sont des ouverts de $P_{cp}(X)$. En effet, soit $K_0 \in \mathcal{L}_u$; alors il existe un ouvert $U \in X$ tel que $K_0 \subset U$.D'aprés le corolaire1.3.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(K_0, X \setminus U) = \varepsilon$. Considérons l'ensemble

$$B(K_0, \varepsilon) = \{K \in P_{cp}(X) : H_d(K, K_0) < \varepsilon\}.$$

Soit $K \in B(K_0, \varepsilon)$.Alors $H_d(K, K_0) < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in K, d(x, K_0) < \varepsilon$.Supposons qu'il existe $x \in K$tel que $x \notin U$; donc

$$\varepsilon = d(K, k_0) \leq d(x, K_0) < \varepsilon;$$

d'où une contradiction et alors $K \in U$. Ceci montre que $\mathcal{L}_u$ est un ouvert dans $P_{cp}(X)$. Soit $K_0 \in \mathcal{L}_i$; alors il existe un ouvert U tel que $K_0 \cap U \neq \emptyset$, et donc il existe $x_0 \in K_0 \cap U$, tel que pour $\varepsilon > 0$, on a $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.Posons

$$B(K_0, \varepsilon) = \{K \in P_{cp}(X) : H_d(K, K_0) < \varepsilon\} \Rightarrow K \cap U \neq \emptyset.$$

Sinon $K \cap B(x_0, \varepsilon) = \emptyset$, pour tout $x \in K$ on a $d(x, x_0) \geq \varepsilon$. Alors

$$\varepsilon \leq \sup d(x, x_0) \leq H_d(K, K_0) < \varepsilon$$

d'où $\mathcal{L}_i$est un ouvert dans $P_{cp}(X)$,$\varepsilon > 0, B(K_0, \varepsilon)$ contient un élément de β_{ul}. Soit

$$U = \{x \in X : d(x, K_0) < \varepsilon\}.$$

Puisque K_0 est compact, alors il existe $\{x_1, ..., x_m\} \subset K_0$ tel que

$$k_0 \subset \cup_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \text{ et } K_0 \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset, i = 1, ..., m.$$

On considère l'ensemble

$$W = \{K \in P_{cp}(X) : K \subset U\} \cap_{i=1}^{m} \{K \in P_{cp}(X) : K \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})\}.$$

Il clair que $K_0 \in W$. Soit $K \in W$; alors $K \subset U$ et $K \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset, i = 1, ..., m$.
$K \cap B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ et $K \subset U \Rightarrow \exists y_i \in B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap K$, ce qui implique que

$$d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et} d(x, K_0) < \varepsilon \forall x \in K \Rightarrow d(x_i, K) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et} \sup d(x, K_0) < \varepsilon.$$

De plus, on a
$d(y, K) \leq d(y, x_i) + d(x_i, K) < \varepsilon \forall y \in K_0$ et $\sup_{x \in K} d(x, K_0) \leq \varepsilon \Rightarrow H_d(K, K_0) < \varepsilon$.
On en déduit que $H_d(K, K_0) < \varepsilon$. Donc $W \subset B(K_0, \varepsilon)$.

Proposition 1.3.1. *$P_{bf}(X)$ est un ensemble fermé dans $(P_f(X), H_d)$. De plus si (X, d) est un espace métrique complet, alors $(P_{bf}(X), H_d)$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset P_{bf}(X)$ une suite convergente vers A. On se propose de montrer que $A \in P_{bf}(X)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $n_0(\varepsilon) \geq n, A \subset (A_n)_\varepsilon$. Comme $A_{n_0(\varepsilon)}$ est borné ; il existe $x_0 \in A_{n_0(\varepsilon)}$ et $M > 0$ tel que $A_{n_0(\varepsilon)} \subset B(x_0, M)$; par conséquent $A \subset B(x_0, \varepsilon + M)$. Ceci montre que A est borné. Puisque X est complet, $P_f(X)$ et par suite $(P_{tb}(X), H_d)$, est complet.

Théorème 1.3.3. *Soit X un espace métrique séparable, alors $(P_{cp}(X), H_d)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \subset X$ un ensemble dénombrable d'éléments de X tel que $\bar{B} = \overline{\{x_1, x_2, ..., x_n, ..\}} = X$. Considèrons

$$K = \{A \in P(B) : B \text{ une partie finie}\}.$$

Soit $f : K \to \mathbb{N}^*$ une application définie par

$$A \to f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sigma(i), A = \{x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}\}, n = cardA.$$

On peut facilement montrer que f est bijective, et donc K est un ensemble dénombrable.
Montrons que $\bar{K} = P_{cp}(X)$. En effet, soit W un ouvert ; alors pour tout $K_0 \in W$ il existe une famille d'ouverts $U, V_1, ..., V_m$ dans X tels que

$$W_k = \{K \in P_{cp}(X) : K \subset U, K \cap V_1 \neq \emptyset, ..., V_m \cap K \neq \emptyset\} \subset W$$

avec

$$K_0 \subset U, K_0 \cap V_1, ..., K_0 \cap V_m.$$

Posons

$$A = \{x_u, x_{v1}, ..., x_{vm}\}$$

où

$$x_u \in k \cap U, x_{vi} \in K \cap V_i, i = 1, ..., m.$$

Ceci exprime que $K \cap W \neq \emptyset$.

Définition 1.3.2. *Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est un espace polonais s'il est métrisable et séparable.*

Corollaire 1.3.2. *Si X un espace polonais, alors $P_{cp}(X)$ l'est aussi.*

Démonstration. D'après la définition d'une espace polonais et les Théorèmes1.2.1, 1.3.3, on peut déduire que $P_{cp}(X)$ est un espace polonais.

Théorème 1.3.4. *Soit X un espace métrique et A,$B \in P(X)$. Alors*

$$H_d(A, B) = \sup\{\mid d(x, A) - d(x, B) \mid : x \in X\}.$$

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors

$$\begin{aligned} d(x, A) \leq &\ d(x, y) + d(y, A) \forall y \in B \\ \leq &\ d(x, y) + H_d(A, B) \forall y \in B \\ \leq &\ d(x, B) + H_d(A, B) \Rightarrow d(x, A) - d(x, B) \leq H_d(A, B) \end{aligned}$$

De même, on peut montrer que

$$d(x, B) - d(x, A) \leq H_d(A, B).$$

Donc

$$|d(x, A) - d(x, B)| \leq H_d(A, B) : \forall x \in X.$$

Ceci exprime le fait que

$$\sup\{\mid d(x, A) - d(x, B) \mid : x \in X\} \leq H_d(A, B).$$

D'après la définition de H_d, on obtient

$$\begin{aligned}\sup d(x,A) = & \sup\{d(x,A) - d(x,B) : x \in B\} \\ \leq & \sup\{\mid d(x,A) - d(x,B) \mid : x \in X\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sup d(x,B) = & \sup\{d(x,B) - d(x,A) : x \in A\} \\ \leq & \sup\{|(x,A) - d(x,B)| : x \in X\}.\end{aligned}$$

Donc

$$H_d(A,B) \leq \sup\{\mid d(x,A) - d(x,B) \mid : x \in X\}.$$

Par suite

$$H_d(A,B) = \sup\{|d(x,A) - d(x,B)| : x \in X\}.$$

Dans tout ce qui suit, on suppose que $(X, \| \, . \, \|)$ est un espace normé.

Proposition 1.3.2. *Soit X un espace normé, $P_{cv,f}(X)$ est un ensemble fermé dans $(P_f(X), H_d)$.*

Démonstration.En effet, soit $\{A_n\}_{n\in N}$ une suite dans $P_{cv,f}(X)$, convergente vers A. Montrons que $A \in P_{cv,f}(X)$. D'après le Lemme 1.2.3, $A \in P_f(X)$ et $A = \cap_{\varepsilon \geq 0} \cup_{n\geq 1} \cap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon$. Montrons que $(A_m)_\varepsilon \in P_{cv}(X)$.Soit $x, y \in (A_m)_\varepsilon$ et $\lambda \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}d(\lambda x + (1-\lambda)y, A_m) \leq & \; d(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda A_m + (1-\lambda)A_m) + d(\lambda A_m + (1-\lambda)A_m, A_m) \\ \leq & \; \lambda d(x, A_m) + (1-\lambda)d(y, A_m) \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Comme $A_m \in P_{cv,f}(X)$, on obtient

$$d(\lambda x + (1-\lambda)y, A_m) \leq \lambda d(x, A_m) + (1-\lambda)d(y, A_m) < \varepsilon.$$

donc $A_m \in P_{cv,f}(X) \Rightarrow \cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon \in P_{cv}(X)$. Puisque $\{\cap_{m\geq n}(A_m)_\varepsilon\}$ est une suite d'ensembles convexes et décroissants, alors $\cup_{n\geq 1} \cap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \in P_{cv}$,ce qui montre que

$$A = \cap_{\varepsilon \geq 0} \cup_{n\geq 1} \cap_{m\geq n} (A_m)_\varepsilon \in P_{cv,f}(X).$$

Définition 1.3.3. *Soit X un espace normé, A une partie de X et X^* le dual topologique de X. On appelle fonction support de A la fonction $\sigma(.,A) : X^* \to \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$\sigma(x^*, A) = \sup\{(x^*, x) : x \in A\}$$

où $(.,.)$ est le crochet de dualité.

Théorème 1.3.5. *Soit X un espace normé et $A, B \in P_{cv,f,b}(X)$. Alors*

$$H_d(A, B) = \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, B)| : \|x^*\| \leq 1\}$$

où

$$d(x, y) = \|x - y\| :, \forall x, y \in X.$$

Démonstration. Soit $A, C \in P_{cv,b,f}(X)$. Alors

$$H_d(A, C) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset C_\varepsilon etC \subset A_\varepsilon\}.$$

Montrons que

$$inf\{\varepsilon > 0 : A \subset C_\varepsilon etB \subset A_\varepsilon\} = \sup\{\|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)\| : \|x^*\| \leq 1\}.$$

On peut facilement montrer que

$$C_\varepsilon = \{x \in X : |x - A| < \varepsilon\} = A + \varepsilon B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}.$$

Soit $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, A) = \sup\{\langle x^*, a\rangle : a \in A\}, \varepsilon > 0$ tel que $A \subset C + \varepsilon B(0, 1)$ et $C \subset A + \varepsilon B(0, 1)$. On a

$$\begin{aligned} \langle x^*, a\rangle = &\ \langle x^*, a - b\rangle + \langle x^*, b\rangle \forall\ b \in C \\ \leq &\ \| x^* \|\| a - b \| + \langle x^*, b\rangle \forall b \in C \\ \leq &\ \| a - b \| + \sigma(x^*, C) \\ \leq &\ \varepsilon + \sigma(x^*, C) \Rightarrow \sigma(x^*, A) - \sigma(x^{*,C}) < \varepsilon \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\sigma(x^*, C) - \sigma(x^*, A) < \varepsilon$$

et donc

$$\sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| : \|x^*\| \leq 1\} \leq inf\{\varepsilon > 0 : A \subset C_\varepsilon \text{ et } C \subset A_\varepsilon\}.$$

Soit $\varepsilon = H_d(A, C)$ et $x_0 \notin \overline{A - C}$. Comme $A, C \in P_{cv,f,b}(X)$, alors d'aprés le théorème de Han-Banach il existe une forme linéaire

$$x^* \in 1 \text{ et} \varepsilon \leq \langle x^* a\rangle - \langle x^*, b\rangle, \forall a \in A, \forall b \in C$$

ce qui montre que

$$H_d(A, C) \leq \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| : \|x^*\| \leq 1\}$$

D'où

$$H_d(A, C) = \sup\{|\sigma(x^*, A) - \sigma(x^*, C)| : \|x^*\| \leq 1\}$$

1.3.1 Limites d'ensembles

Soit (X, d) un espace métrique et $\{A_n\}_{n\in N}$ une famille des sous-ensemble de X.

Définition 1.3.4. *Le sous ensemble*

$$A^\sharp = \lim_{n\to+\infty} supA_n = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} \inf d(x, A_n) = 0\}$$

est la limite supérieure au sens de Painlevé-Kuratowski de la suite A_n *et le sous ensemble*

$$A^\flat = \lim_{n\to+\infty} infA_n = \{x \in X : \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0\}$$

est la limite inférieure de la suite A_n*.On dit que la suite d'ensembles* A_n *converge vers* A *au sens de Painlevé-Kuratowski si*

$$A = A^\flat = A^\sharp := \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

Corollaire 1.3.3. *Les ensembles limites inférieures et supérieures sont des fermés vérifiant :*

$$\lim_{n\to+\infty} infA_n \subset \lim_{n\to+\infty} \sup A_n.$$

Toute suite décroissante de sous-ensembles A_n *admet une limite qui est intersection de leurs fermetures :*

$$siA_n \subset A_m \ quand \ \ n \geq m, \ alors \lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}.$$

Démonstration. Soit $\{x_m\}_{m\in N} \subset A^\natural$ une suite convergente vers x. Montrons que $x \in A^\natural$. $d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + d(x_m, A_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) \leq d(x, x_m) + \liminf_{n\to+\infty} d(x_m, A_n)$. Doù $\liminf_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0$. Par la même méthode, on peut facilement montre que $A^\flat$ est un ensemble fermé. Soit $x \in A^\flat$. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} d(x, A_n) \leq \lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0 \Rightarrow x \in A^\natural.$$

Finalement, montrons que $\lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$. Soit $x \in \lim_{n\to+\infty} A_n$; alors

$$\lim_{n\to+\infty} d(x, A_n) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} telque \forall n \in N, n \geq N \Rightarrow d(x, A_n) \leq \varepsilon.$$

En effet,la suite$\{A_n\}_{n\in N}$ est décroissante et donc

$$\forall\varepsilon > 0, d(x, A_n) \leq \varepsilon, \forall n \in N.$$

Alors

$$x \in \overline{A_n}, \forall n \in N \Rightarrow x \in \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}.$$

Réciproquement, soit $x \in \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$; alors $x \in \overline{A_n}\forall n \in N$. D'après le Lemme, on obtient

$$d(x, A_n) = 0, \forall xn \in N \Rightarrow x \in A^{\flat}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} A_n = \cap_{n\geq 0}\overline{A_n}$.

Proposition 1.3.3. *Si* $\{A_n\}_{n\in N}$ *est une suite de sous-ensembles d'un espace métrique, alors* $\lim_{n\to+\infty} inf A_n$ *est l'ensemble des limites des valeurs d'adhérences de suites* $x_n \in A_n$*, c'est-à-dire les limites de sous-suites convergentes* $x_m \in A_m$.

1.3.2 Topologie de Vietoris

Dans toute la suite, on suppose que (X, τ) est un espace topologique de Hausdorff.
Pour $A \in P(X)$,on définit les ensembles qui touchent A et qui ne rencontrent pas le complémentaire de A,respectivement :

$$A^- = \{B \in P(X) : A \cap B \neq \emptyset\}$$

et

$$A^+ = \{B \in P(X) : B \subseteq A\}.$$

Définition 1.3.5. *Soit* (X, τ) *un espace topologique et* $\mathcal{L}_{UV}, \mathcal{L}_{LV}$ *deux familles de parties de* X *définies par*

$$\mathcal{L}_{UV} = \{U^+ : U \in \tau\} et \mathcal{L}_{LV} = \{U^- : U \in \tau\}.$$

(a) La topologie engendrée par $\mathcal{L}_{UV}$ *est appellé topologie de Vietoris supérieure et est notée par* τ_{UV} *et* $(P(X), \tau_{UV})$ *est dit l'espace topologique de Vietoris supérieur.*

(b) La topologie engendrée par $\mathcal{L}_{LV}$ *est appellée topologie de Vietoris inférieur et on note par* τ_{LV} *et* $(P(X), \tau_{LV})$ *l'espace topologique de Vitoris inférieur.*

(c) La topologie engendée par $\mathcal{L}_{UV} \cup \mathcal{L}_{LV}$ *est appellée la topologie de Vietoris est on par* τ_V *et* $(P(X), \tau_V)$ *l'espace topologique de Vietoris.*

Remarque 1.3.1. *La famille des parties de* $P(X)$ *définie par* $\mathrm{B}(\mathrm{U}, \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n) = \{\mathrm{A} \in P(X) : \mathrm{A} \subseteq \mathrm{U}, \mathrm{A} \cap \mathrm{V}_k \neq \emptyset, k = 1, ..., n\}$*, où* $\mathrm{U}, \mathrm{V}_1, ..., \mathrm{V}_n \in \tau$ *forme une base de la topologie de Vietoris.*

Lemme 1.3.3. *Soit* $\mathrm{I} : X \to (P(X), \tau_V)$ *l'application multivoque définie par* $\mathrm{I}(x) = \{x\}$*. Alors* $\mathrm{I}(.)$ *est continue.*

Démonstration. Soit $\mathrm{U} \in \tau$. Alors $\mathrm{I}^{-1}(\mathrm{U}^+) = \{x \in: \{x\} \subseteq \mathrm{U}\} = \mathrm{U} \in \tau$. Par la même mèthode,si $V_1, ..., V_n \in \tau$, alors $\mathrm{I}^{-1}(\cap_{k=1}^n V_k^-) = \{x \in X : \{x\} \cap V_k \neq \emptyset, k = 1, ..., n\} = \cap_{k=1}^n V_k^- \in \tau$. Ceci exprime le fait que $\mathrm{I}(.)$ est continue.

1.4 Continuité de multi-fonctions

1.4.1 Définitions et propriétés principales

Les trois versions de la topologie de Vietoris introduites nous amènent aux concepts de continuité de multi-fonctions.

Définition 1.4.1. *Soit* $F : X \to P(Y)$ *une multi-fonction.*

(a) Si $F : X \to (P(Y), \tau_{UV})$*, est continue, alors on dit que* $F(.)$ *est semi-continue supérieurement (s.c.s)*

(b) Si $F : X \to (P(Y), \tau_{LV})$*, est continue, alors on dit que* $F(.)$ *est semi-continue inférieurement (s.c.i).*

(c) Si $F : X \to (P(Y), \tau_V)$ *est continue,alors* $F(.)$ *est dite continue (ou continue au sens de Vietoris).*

Définition 1.4.2. *Soit* $F : X \to P(Y)$ *une multi-fonctions.*

(a) F *est dite semi-continue supérieurement eu* $x_0 \in X$ *si pour tout ouvert* U *de* Y *avec* $F(x_0) \subseteq U$*,il existe un ouvert* V *de* x_0 *tel que pour tout* $x \in V$*, on a que* $F(x) \subseteq U$*.*

(b) F *est dite semi-contiue inférieurement au point* $x_0 \in X$ *si l'ensemble* $\{x \in X : F(x) \subseteq U \neq \emptyset\}$
est ouvert pour tout ouvert $U \in Y$*.*

Utilisant les trois versions des topoloies de Vietoris, on obtient les résultats immédiats suivants. Rappellons d'abord qu'un ensemble $\mathcal{M}$ muni d'un préordre $\geq$ est dit dirigé si tout sous-ensemble fini est majoré. Une suite généralisée est une application

$$\upsilon \in \mathcal{M} \mapsto x_\mu \in X,$$

où (X, τ) est un espace topologique. Un élément $x \in X$ est limite de $(x_\mu)_{\mu \in \mathcal{M}}$ si, pour chaque voisinage $\mathcal{V}$ de x il existe $\mu_0 \in \mathcal{M}$ tel que $x_\mu \in \mathcal{V}$ pour tout $\mu \succeq \mu_0$.

Proposition 1.4.1. *Pour une multi-fonction $F : X \to P(Y)$, les propositions suivants sont équivalentes :*
(a) F est s.c.s.
(b) $F^+(V)$ est ouvert dans X pour tout ouvert $V \subseteq Y$.
(c) Pour tout fermé $\mathcal{C} \subseteq Y, F^-(\mathcal{C})$ est fermé dans X.
(d) $\overline{F^-(D)} \subseteq F^-(\overline{D})$.
(e) Pour tout $x \in X$, si $\{x_\alpha\}_\alpha \in J$ est une suite généralisée, $x_\alpha \to x$,et $V \subseteq Y$ est un ouvert tel que $F(x) \subseteq V$, alors il existe $\alpha_0 \in J$ tel que pour tout $\alpha \in J, \alpha \geq \alpha_0$ on a que $F(x_\alpha) \subseteq V$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.
$\bullet(a) \Rightarrow (b)$.
Soit W ouvert dans Y, $F^+(W) = \{x \in X : F(x) \subset W\}$ et soit $x \in F^+(W)$.
Alors $F(x) \subset W$. Comme F est s.c.s, alors il existe $V(x) \in \mathrm{N}(x)$ tel que

$$F(V(x)) \subset W \Rightarrow V(x) \subset F^-(W).$$

Donc $F^+(W)$ est ouvert dans X.
$\bullet(b) \Rightarrow (c)$.
Soit Q un ensemble fermé dans Y et $F^-(\mathrm{Q}) = \{x \in X : F(x) \cap \mathrm{Q} \neq \emptyset\}$. Alors

$$X \backslash F^-(\mathrm{Q}) = \{x \in X : F(x) \subset X \backslash \mathrm{Q}\} = F_+^{-1}(X \backslash \mathrm{Q}).$$

Q est un ensemble fermé dans Y ; alors $X \backslash \mathrm{Q}$ est fermé dans Y. De (b), on déduit que $F^-+(X \backslash \mathrm{Q})$ est ouvert dans X. Ainsi $F^-(\mathrm{Q}$ est fermé dans X.
$\bullet(c) \Rightarrow (d)$.
Soit D un sous-ensemble de Y. Alors

$$D \subset \overline{D} \Longrightarrow F^-(D) \subset F^-(\overline{D}) \Longrightarrow \overline{F^-(D)} \subset \overline{F^-(\overline{D})}.$$

Comme $F^-(\overline{D})$ est fermé, alors $F^-(\overline{D}) = \overline{F^-(\overline{D})}$. Ainsi

$$\overline{F^-(D)} \subset F^-(\overline{D}).$$

$\bullet(d) \Rightarrow (e)$.
Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée, $x \in X, x_\alpha \to x$ et V un ouvert de Y tel que $F(x) \subset V$. Montrons qu'il existe $\alpha_0 \in J$ tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, on a $F(x_\alpha) \subset V$. Dans le cas contraire, pour tout $\alpha \in J$, il existe $\beta \in J$ tel que $\beta \geq \alpha$ et $F(x_\beta) \not\subset V$; ceci implique que $x_\beta \in F^-(Y \backslash V)$;

ainsi $x_\beta \in \overline{F^-(Y\backslash V)}$.
Comme $x_\alpha \to x$, on peut facilement montrer que $x_\beta \in \overline{F^-(Y\backslash V)}$. De (d), on tire $x \in F^-(Y\backslash V)$,ce qui contredit $F(x) \subset V$.
$\bullet(e) \Rightarrow (a)$.
Soit $x \in X$ et V des sous-ensembles ouverts de Y tels que $F(x) \subseteq V$. Supposons que pour tout $V \in \mathcal{N}(x)$, on a $x_v \in V$ tel que $F(x_v) \cap Y\backslash V \neq \emptyset$. Soit

$$\mathrm{R} = \{[x_v, V] \in V \times \mathcal{N}(x) : x_v \in F^-(Y\backslash V)\}.$$

Introduisons un ordre partiel sur R,$[x_v, V] \leq [x_{v'}, V']$ si $V' \subset V$. Montrons qu'avec cet ordre partiel,R devient un ensemble dirigé. En effet, soit $[x_v, V], [x_{v'}, V'] \in \mathrm{R}$. Comme $V \cap V' \in \mathcal{N}(x)$, il existe $x_{v\cap v'} \in V \cap V'$ tel que $x_{v\cap v'} \in F^-(Y\backslash V \cap V')$ et $[x_{v'}, V'] \leq [x_{v\cap v'}, V \cap V']$.
Soit $\phi : \mathrm{R} \to \mathcal{N}(x)$ et $[x_v, V] \to \phi([x_v, V]) = V$, Il est clair que $\phi(\mathrm{R})$ est cofinal dans $\mathcal{N}(x)$. Pour tout $[x_v, V]$, soit $x_{\phi[x_v,V]} = x_v$. Montrons que $x_v \to x$ et soit $V' \in \mathcal{N}(x)$. Alors il existe $x_v \in V'$ tel que $x_{v'} \in F^-(Y\backslash V)$. Alors pour tout $[x_v, V] \geq [x_{v'}, V']$, on a que $x_v \in V \subset V'$. Donc $x_v \to x$.
Comme $F(x) \subset V$, alors d'après (e), il existe $[x_v, V] \in \mathrm{R}$ tel que $[x_{v'}, V'] \geq [x_v, V]$, implique $F(x_{v'}) \subset V$. Ainsi $x_{v'} \notin F^-(Y\backslash V')$, ce qui est une contradiction.
Pour la semi-continuité inférieure, on a le résultat correspondant suivant

Proposition 1.4.2. *Soit $F : X \to P(Y)$ une multi-fonction. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
(a) F est s.c.i.
(b) Pour chaque ouvert $V \subseteq Y, F^-(V)$ est ouvert dans X ;
(c) Pour chaque fermé $\mathcal{C} \subseteq Y, F^+(\mathcal{C})$ est fermé dans X ;
(d) $\overline{F^+(D)} \subseteq F^+(\overline{D})$
(e) $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$, pour chaque sous-ensemble $A \subseteq X$
(f) Pour chaque $x \in X$, si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$ est une suite généralisée,$x_\alpha \to x$, alors pour chaque $y \in F(x)$ il existe une suite généralisée $\{y_\alpha\}_{\alpha\in J} \subset Y, y_\alpha \in F(x_\alpha), y_\alpha \to y$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$.
$\bullet(a) \Rightarrow (b)$.
Soit W ouvert dans Y,$F^-(W) = \{x \in X : F(x) \subseteq W\}$ et soit $x \in F^-(W)$, alors $F(x) \cap W \neq \emptyset$.Comme F est s.c.i.,alors il existe $V(x) \in \mathcal{N}(x)$ tel que

$$F(z) \cap W \neq \emptyset, z \in V(x) \Rightarrow V(x) \subseteq F^-(W).$$

Donc $F^-(W)$ est ouvert dans X.

$\bullet(b) \Rightarrow (c)$.

Soit ϕ fermé dans Y et $F^+(\phi) = \{x \in X : F(x) \subseteq \phi\}$. Alors

$$X \backslash F^+(\phi) = \{x \in X : F(x) \cap X \backslash \phi\} = F^-(X \backslash \phi).$$

ϕ est fermé dans Y ; donc $X\backslash_\phi$ est ouvert dans Y. De (b),on a que $F^-(X\backslash\phi)$ est ouvert dans X. Ainsi $F^+(\phi)$ est fermé dans X.

$\bullet(c) \Rightarrow (d)$.

Soit D un sous-ensemble de Y ;alors on

$$F^+(D) \subseteq F^+(\overline{D}) \Longrightarrow \overline{F^+(D)} \subseteq \overline{F^+(\overline{D})}.$$

De (c), on obtient

$$\overline{F^+(D)} \subseteq F^+\overline{(D)}.$$

$\bullet(d) \Rightarrow (e)$.

Soit A un sous-ensemble de X. Montrons que $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$. Supposons que $F(\overline{A}) \nsubseteq \overline{F(A)}$; alors il existe $y \in F(\overline{A})$ tel que $y \in \overline{F(A)}$ et donc il existe $V(y) \in \mathcal{N}(y)$ avec $V(y) \cap F(A) = \emptyset$; ceci implique que

$$A \subseteq F^+(Y \backslash V(y)).$$

De (d) on a que

$$A \subseteq \overline{F^+(Y \backslash V(y))}.$$

$y \in F(\overline{A})$; alors il existe $x \in \overline{A}$, tel que $y \in F(x)$. Comme $x \in \overline{A}$, alors on a une suite généralisée $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ dans A,$x_\alpha \to x$. Donc $x \in F^+(Y\backslash V(y))$; par définition de F^+, on obtient que $F(x) \cap V(y) = \emptyset$, ce qui est en contradiction avec $y \in F(x)$.

$\bullet(e) \Rightarrow (f)$.

Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée, $x \in X, x_\alpha \to x$ et $y \in F(x)$. Posons $A = \{x_\alpha : \alpha \in J\}$ où J est un ensemble dirigé. D'après (e), on a

$$F(\overline{A}) = F(A \cup \{x\}) \subseteq \overline{F(A)}.$$

et

$$\mathrm{R} = \{[x_\alpha, V] \in V \times \mathcal{N}(y) : x_v \in F^-(V)\}.$$

Comme $y \in F(\overline{A})$,alors $y \in \overline{F(\{x_\alpha : \alpha \in J\})}$, et donc $\mathrm{R} \neq \emptyset$. On définit un ordre partiel sur R en posant $[\alpha, V] \leq [\alpha', V']$ si $V' \subset V$ et $\alpha' \leq \alpha$.

Montrons que R muni de cet ordre partiel est un ensemble dirigé. En effet, soit $[\alpha, V], [\alpha', V'] \in$ R. Comme J est dirigé,il existe $\beta \in J$ tel que $\alpha \leq \beta$ et $\alpha' \leq \beta$.

Comme $y \in \cap_{\alpha\in J}\overline{\cup_{\beta\geq\alpha}F(x_\beta}$ et $V \cap V' \in \mathcal{N}(y)$, on peut trouver $\gamma \in J, \gamma \geq \alpha$, tel que $x_\gamma \in F^-(V \cap V')$. Alors $[\alpha, V] \leq [\gamma, V \cap V']$ et $[\beta, V'] \leq [\gamma, V \cap V']$. Donc R est dirigé. Définissons $\phi : R \to \mathcal{N}(y)$ par $\phi([\alpha, V]) = \alpha$. Alors il est clair que $\phi(R)$ est confinal dans J. Pour tout $[\alpha, V] \in$ R,soit $y_{\phi([\alpha,V])} \in F(x_\alpha) \cap V$.

De même, $x_{\phi([\alpha,V])} = x_\alpha$.Comme ϕ(R) est confinal dans J,on a que $x_{\phi([\alpha,V])} \to x$.

Montrons que $y_{\phi([\alpha,V])} \to y$.Soit $V' \in \mathcal{N}(y)$.Alors il existe $\alpha' \in J$ tel que $x_{\alpha'} \in F^-(V')$.Ainsi pour tout $[\alpha, V] \geq [\alpha', V']$,on a que $y_{\phi([\alpha,V])} \in V \subseteq V'$ ce qui implique que $y_{\phi([\alpha,V)]} \to y$.

$\bullet(g) \Rightarrow (a)$.

Soit $x \in X$ et W ouvert dans Y tel que $F(x) \cap W \neq \emptyset$. Montrons qu'il existe $V \in \mathcal{N}(x)$ tel que $F(z) \cap V \neq \emptyset$,pour tout $z \in W$. Dans le cas contraire, pour tout $V \in \mathcal{N}(x)$, on a $x_v \in V$ tel que $F(x_v) \cap V = \emptyset$.Soit

$$\text{R} = \{[x_v, V] \in V \times \mathcal{N}(x) : x_v \in F^-(V)\}.$$

et

$$\phi : \text{R} \to \mathcal{N}(x) \ par \ ([x_v, V]) = V.$$

Comme dans la proposition1.4.1 on peut montrer que R est dirigé et $\phi(R)$ est confinal dans $\mathcal{N}(x)$.Pour tout $[x_v, V]$,soit $x_{\phi[x_v,V]} = x_v$.Montrons que $x_v \to x$.

Soit $V' \in \mathcal{N}(x)$; alors il existe $x_{v'} \in V'$ tel que $x_{v'} \in F^-(V)$.Ainsi pour tout $[x_v, V] \geq [x_{v'}, V']$,on a que $x_v \in V \subset V'$.Alors $x_v \to x$.Comme $F(x) \cap W \neq \emptyset$,alors il existe $y \in F(x) \cap W$. D'après (f), il existe $y_{\phi([x_v,V])} \in F(x_v)$ tel que $y_{\phi([\alpha,V])} \to y$.Mais $y_{\phi([\alpha,V])} \in F(x_v) \subseteq Y\backslash W$. Ainsi $y \in Y\backslash W$,ce qui est contradictoire.

$[x_{v'}, V'] \geq [x_v, V]$, implique $F(x_{v'}) \subset V$. Ainsi $x_{v'} \notin F^-(V')$,ce qui est une contradiction.

Remarque 1.4.1. *Dans le cas où X sont Y deux espaces topologiques à bases dénombrables,on peut prendre des suites ordinaires plutôt que des suites généralisées dans le cadre des conditions (e) et (f) des propositions 1.4.1,1.6.17 respectivement.*

Définition 1.4.3. *Soit $F, G, : X \to Y$ deux multi-applications. On définit, quand cela existe, les multi-applications :*

(a) $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$.

(b) $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$.

Proposition 1.4.3. *Si F et G sont s.c.s.,alors $F \cap G$ et $F \cup G$ le sont aussi.*

Démonstration. Montrons la première assertion. Soit $x \in X$ et V un voisinage ouvert de $F(x) \cap G(x)$ dans Y. Alors $F(x)\backslash V$ et $G(x)\backslash V$ sont des sous-ensembles fermés de Y tel que $F(x)\backslash V \cap G(x)\backslash V = \emptyset$. Soit W_1 et W_2 deux voisinage ouverts disjoins de $F(x)\backslash V$ et $G(x)\backslash V$ respectivement. F etant s.c.s.,soit U_1 voisinage ouvert de x dans X tel que $F(U_1) \subset U \cap W_1$ et U_2 voisinage ouvert de x dans X tel que $G(U_2) \subset U \cap W_2$. Si $U = U_1 \cap U_2$,alors $(F \cap G)(U) \subset V$, ce qui complète la démonstration.

1.4.2 Exemples et contre-exemples

Exemple 1.4.1. *Les applications multivoques suivantes sont semi-continues supérieurement :*
(1) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ \{-1, 1\} & x = 0, \\ \{-1\} & x \leq 0 \end{cases}$$

(2) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \\ x - 1 & x < 0, \end{cases}$$

(3) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par $F(x) = [f(x), g(x)]$,où $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont s.c.i. et s.c.s respectivement.

Exemple 1.4.2. *Les application multivoques suivantes sont semi-continues inférieument :*
(1) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} [a, b] & x \neq 0 \\ \{\alpha\} & \alpha \in [a, b]. \end{cases}$$

(2) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} [0, |x| + 1], & x \neq 0 \\ \{1\} & x = 0. \end{cases}$$

(3) $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ définie par $F(x) = [f(x), g(x)]$,où les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont s.c.s et s.c.i respectivement.

(4) Soit $X = Y = [0, 1]$ et

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & x \neq \frac{1}{2} \\ [0, \frac{1}{2}] & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En général, les concepts de semi-continuité supérieure et inférieure sont distincts comme le montre l'exemple standard suivant :

Exemple 1.4.3. *Soit $X = Y = \mathbb{R}$ et*

$$F_1(x) = \begin{cases} \{1\}, & x \neq 0, \\ [0,1], & x = 0. \end{cases}$$

et

$$F_2(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 0, \\ [0,1] & x \neq 0. \end{cases}$$

On peut facilement montrer que F_1 est s.c.i. alors que F_2 est s.c.i. mais non s.c.s.

1.4.3 d_H-continuité

Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $F : X \to P_b(Y)$ une multi-application.

Définition 1.4.4. *F est dite d_H-continu si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, (\forall x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d_H(F(x_0, F(x)) < \varepsilon).$$

On peut montrer que ssi F est s.c.s., alors elle est d_H-continu.

Proposition 1.4.4. *Soit $F : X \to P_{cp}(Y)$ une multi-application à valeurs compactes. Alors F est dite d_H-continu si seulement si F est à la fois s.c.s. et s.c.i.*

Remarque 1.4.2. *Les multi-fonctions des exemples 1.1 et 1.2 sont s.c.s. mais ne sont pas d_H-continu. L'exemple suivant fournit une s.c.s. mais non d_H-continuité. Soit $F : [0, 1] \to P([0, 1])$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1], & x \neq 0, \\ \{0\} & x = 0. \end{cases}$$

En effet F est s.c.s.à valeurs compactes mais $d_H(F(0), F(x)) = 1, \forall x \neq 0$.

1.4.4 Fermeture du graphe

Une autre notion de continuité liée à ces dernières est obtenue en utilisant les graphes de fonctions. On appelle une multi-fonction fermée si son graphe est fermé. On a d'abord la caractérisation suivante.

Théorème 1.4.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) la multi-fonction F est fermée.
(b) Pour chaque $(x, y) \in X \times Y$ tel que $y \notin F(x)$, il existe des voisinages $V(x)$ de x et $W(y)$ de y tel que $F(V(x)) \cap W(y) = \emptyset$.
(c) Pour des suites généralisées $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset X, \{y_\alpha\}_{\alpha \in J}$, si $x_\alpha \to x$, et $y_\alpha \in F(x_\alpha), y_\alpha \to y$ alors $y \in F(x)$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.
$\bullet (a) \Rightarrow (b)$.
Soit $(x, y) \in X \times Y$ tel que $y \notin F(y)$;alors $(x, y) \notin GraF$, ce qui implique que $(x, y) \in X \times Y \backslash GraF$. Comme F est fermée ou de manière équivalente,$GraF$ est fermée, il existe $(V(x), W(y)) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ tel que $V(x) \times W(y) \cap GraF = \emptyset$. Pour montrer que $F(V(x)) \cap W(y) = \emptyset$, supposons qu'il existe $z \in F(V(x)) \cap W(y)$; alors il existe $r \in V(x)$ tel que $z \in F(r)$; ceci implique que $(r, z) \in GraF$, ce qui est contradictoire.
$\bullet (b) \Rightarrow (c)$.
Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ une suite généralisée telle que

$$x_\alpha \to x, y_\alpha \in F(x_\alpha), y_\alpha \to y.$$

Supposons que $y \in F(x)$; alors il existe $(V(x), W(y)) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ telle que
$F(V(x)) \cap W(y) \neq \emptyset$.

$$x_\alpha \to x \Rightarrow \exists \alpha_0 \in J \text{ tel que } \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{ on a }, x_\alpha \in V(x),$$

et

$$y_\alpha \to y \Rightarrow \exists \alpha_1 \in J \text{ tel que } \forall \alpha \geq \alpha_1 \text{ on a }, y_\alpha \in W(y).$$

Comme J est dirigé, il existe $\beta \in J$ tel que $\alpha_0, \alpha_1 \leq \beta$; donc pour tout $\alpha \geq \beta$,on a que $x_\alpha \in V(x)$ et $y_\alpha \in W(y)$, avec $y_\alpha \in F(x_\alpha)$.Alors $F(V(x)) \cap W(y) \neq \emptyset$ ce qui est contradictoire.
$\bullet (c) \Rightarrow (d)$.
Soit $(x_\alpha, y_\alpha) \in GraF, \alpha \in J, x_\alpha \to x, y_\alpha \to y$ et $y_\alpha \in F(x_\alpha)$. De (c), on obtient que $y \in F(x)$. Alors $GraF$ est fermé.

Exemple 1.4.4. *Soit $f : Y \to X$ une application surjective entre deux espaces vectoriels topologiques. Alors l'application inverse $F : X \to P(Y), F(x) = f^{-1}(x)$ est fermée.*
La fermeture des applications s.c.s. est assurée par :

Théorème 1.4.2. *Soit X un e.v.t.,Y un e.v.t.séparé et $F : X \to P(Y)$ une multi-fonction s.c.s. Alors F est fermée.*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{E} = X \times Y \backslash Gr(F)$ est ouvert. Soit $(x, y) \in \mathcal{E}$. Alors il existe $V_1 \in \mathcal{V}_y$ et $V_2 \in \mathcal{V}_{F(x)}$ tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Soit $U_x \cap V_1$ est un voisinage ouvert de (x, y) dans $X \times Y$. De plus $(U_x \times V_1) \cap Gr(F) = \emptyset$.En effet,si $(x', y') \in U_x \times V_1$, alors $F(x') \subset V_2$ et par conséquent $y' \notin V_2$.
Dans le résultat qui suit, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une muli-fonction fermée soit s.c.s. On aura d'abord besoin de quelques notions préliminaires :

Définition 1.4.5. *Une multi-fonction $F : X \to P(Y)$ est dite :*
(a) compacte si l'image $F(X)$ est relativement compacte dans Y,i.e $\overline{F(X)}$ est compacte dans Y ;
(b) relativement compacte si tout point $x \in X$ posséde un voisinage $V(x)$ tel que la restriction de F à $V(x)$ est compacte ;
(c) quasicompacte si la restriction à tout sous-ensemble compact $A \subseteq X$ est compact.
Il est clair que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

Théorème 1.4.3. *Soit $F : X \to P_{cp}(Y)$ une muli-fonction fermée et localement compacte. Alors F est s.c.s.*

Démonstration. Soit $x \in X, W$ un voisinage ouvert de $F(x)$ et $V(x)$ un voisinage ouvert de x tel que la restriction de F à $V(x)$ est compacte. Supposons que l'ensemble $\phi = \overline{F(V(x))} \backslash W$ non vide. Comme F est fermée, pour tout $y \in \phi$, il existe des voisinages de $\widetilde{W}(y)$ de y et $V_y(x)$ de x tels que $F(V_y(x)) \cap \widetilde{W}(y) = \emptyset$.
D'aprés la compacité de ϕ, il existe un recouvrement fini $\widetilde{W}(y_1), \widetilde{W}(y_2), ..., \widetilde{W}(y_n)$.
Si on considère le voisinage ouvert de x défini par $\widetilde{V}(x) = V(x) \cap (\cap_{i=1}^{n} V_{y_1}(x)$, alors $F(\widetilde{V}(x)) \subset W$.

Exemple 1.4.5. *La compacité locale est essentielle. Autrement,la multi-fonction $F : [-1, 1] \to P_{cp}(\mathbb{R})$ définie par*

$$F(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & x \neq 0, \\ \{0\}, & x = 0. \end{cases}$$

est fermée mais n'est pas s.c.s. au point $x = 0$.

On termine ce chapitre par un résultat qui s'avére utile dans de nombreuses applications. Mais on commence par donner la définition suivante

Définition 1.4.6. *Une multi-application* F *est dite de* $s-$*Carathéodory si*
(a) La fonction $t \mapsto F(t,x)$ *est mesurable pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
(b) Pour p.p.$t \in J$, *l'application* $x \mapsto F(t,x)$ *est s.c.s.(respec s.c.s.).*
Elle est en plus $L^1 s - Carathodory$ *si elle localement intégrablement bornée, i.e.pour chaque réel* $r > 0$,*il existe une fonction* $h_r \in \mathrm{L}^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$\|F(t,x)\| \leq h_r(t) \text{ p.p. } t \in J \text{ et } \|x\| \leq r.$$

Exemple 1.4.6. *La multi-application* $F : [0,1] \times \mathrm{R} \to (\mathbb{R})$ *définie par*

$$F(t,x) = \begin{cases} \{0\}, & x = 0, \\ [0,1], & sinon. \end{cases}$$

est $i-$*Carathéodory mais non* $s-$*Carathéodory.*

Lemme 1.4.1. *Soit* X *un espace de Banach,*$F : [a,b] \to P_{cp,cv}(X)$ *une multi-application* $L^1 - Carathodory$ *et soit* Γ *un opérateur linéaire continu de* $L^1([a,b],X)$ *vers* $C([a,b],X)$. *Alors, l'opérateur*

$$\begin{aligned} \Gamma \circ S_F : C([a,b],X) \to \quad & P_{cp,cv}(C([a,b],X)) \\ x \mapsto \quad & (\Gamma \circ S_F)(x) = \Gamma(S_{F,x}) \end{aligned}$$

est à graphe fermé $C([a,b],X) \times C([a,b],X)$.

1.4.5 Opérateur Linéaire Multivoque

Définition 1.4.7. *Soit* X *et*Y *deux espaces vectoriels topologiques (e.v.t). Un opérateur multivoque* $A : X \to P(Y)$ *est dit opérateur linéaire multivoque si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*
(a) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ *pour toute constante* $\alpha \neq 0$ *et tout* $x \in X$.
(b) $A(x+y) \subset A(x) + A(y)$ *pour tout* $x, y \in X$.

Remarque 1.4.3. *Par convention,on pose* $0.A(x) = A(0)$ *pour tout* $x \in X$.

Proposition 1.4.5. *Soit $A : X \to P(X)$ un opérateur linéaire multivoque. Alors,pour tout $y \in A(x)$ on a*

$$A(x) = y + A(0)$$

et il existe une application linéaire $\widetilde{A} : X \to P(Y/A(0))$ tele que

$$A(x) = \pi^{-1}(\widetilde{A}(x)), x \in X,$$

où π est la surjection canonique de Y dans $Y/A(0)$.

Lemme 1.4.2. *Soit $A : X \to P(Y)$ un opérateur multivoque linéaire. A est s.c.s. (ou continu) si et seulement si A est s.c.s.en 0 (c'est-à-dire que pour tout voisinage V de 0 dans Y,il existe un voisinage U de 0 dans X tel que $A(x) \subset A(0) + V$ pour tout $x \in U$.).*

Définition 1.4.8. *Une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ d'opérateurs linéaires multivoques continus de X dans Y est dite simplement bornée si pour tout voisinage V de 0 dans Y et tout $x \in X$,il existe $r > 0$ tel que $s > r$,on a*

$$A_i(x) \subset A_i(0) + sV, i \in I.$$

$\{A_i\}_{i \in I}$ est équicontinue si pour tout voisinage V de 0 dans Y,il existe un voisinage U de 0 dans X tel que

$$A_i(x) \subset A_i(0) + V \text{ pour tout } x \in U \text{ et tout } i \in I.$$

1.5 Mesurabilité de multi-fonctions et de sélections

1.5.1 Tribu ou σ-algèbre

Définition 1.5.1. *Soit Ω un ensemble, Σ une famille de parties Ω (i.e.$\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$).*
La famille Σ est une tribu (on dit aussi une σ-algèbre) sur Ω si Σ vérifie :

1. *$\emptyset \in \Sigma$, $\Omega \in \Sigma$.*
2. *Σ est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, on a $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.*
3. *Σ est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute la famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$, on a $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.*

4. Σ est stable par passage ou complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \Sigma$, on a $A^c \in \Sigma$ (on rappelle que $A^c = \Omega \setminus A$.

Proposition 1.5.1. *(Stabilité par des tribus) soit Ω et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu Σ_i sur Ω. Alors, la famille (de parties de Ω)*

$$\cap_{i\in I}\Sigma_i = \{A \subset \Omega : A \subset \Sigma_i \quad \forall i \in I\}$$

est encore une tribu sur Ω.

Cette proposition nous permet de définir la notion de tribu engendrée.

Définition 1.5.2. *(Tribu engendrée) Soit Ω un ensemble et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la tribu $\Sigma(\mathcal{C})$ intersection de toutes les tribus sur Ω contenant $\mathcal{C}$ (cette intersection est non vide car $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$).*

Il est parfois utile d'utiliser la notion d'algèbre, qui est identique à celle de tribu, en remplaÃ§ant "dénombrable" par "fini".

Définition 1.5.3. *(algèbre) Soit Ω un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de Ω (i.e.$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$). La famille Σ est une tribu (on dit aussi une algèbre) sur Ω si $\mathcal{A}$ vérifie :*

1. *$\emptyset \in \mathcal{A}$, $\Omega \in \mathcal{A}$*
2. *$\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cup B \in \mathcal{A}$*
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a $A \cap B \in \mathcal{A}$*
4. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$*

Soit Ω un ensemble. On rappelle qu'une topologie sur Ω est donnée par une famille de parties de Ω, appelées ouverts de Ω, contenant $\emptyset$ et Ω, stable par union quelconque et par intersection finie. L'ensemble Ω, muni de cette famille de paries est alors un espace topologique .

Définition 1.5.4. *(Tribu borélienne) Soit Ω un ensemble muni d'une topologie (un espace métrique, par exemple). On appelle tribu borélienne (ou tribu de Borel) la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de Ω, cette tribu notée $\mathrm{B}(\Omega)$. Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^n$, cette tribu est donc notée $\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Théorème 1.5.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique séparable, alors la tribu Borélienne de* $\mathcal{P}_{cp}(X)$ *engendrée par les parties de* $\mathcal{P}_{cp}(X)$ *définie par*

$$\mathcal{L}_u = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) : K \subset U\}$$

et

$$\mathcal{L}_l = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$$

ou U *représente un ouvert dans* X. *De plus la famille*

$$\mathcal{B}_{ul} = \{K \in \mathcal{P}_{cp}(X) : K \subset U, K \cap V_l \neq \emptyset, ..., K \cap V_n \neq \emptyset\}$$

ou les V_i, $i = 1, ..., m$ *sont des ouverts de* X .

1.5.2 Propriétés de mesures

Définition 1.5.5. *(Mesure) Soit* Ω *un ensemble non vide et* Σ *une tribu. On appelle mesure une application* $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *(avec* $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$*) vérifiant :*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) μ *est* σ*-additive, c'est-à-dire que pour toute famille* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ *de parties disjointes deux à deux, (i.e t.q.*$A_n \cap A_m \neq \emptyset$ *si* $n \neq m$*), on a*

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

.

Définition 1.5.6. *On appelle espace mesurable un triple* (Ω, Σ, μ) *ou* Σ *est une* σ*-algèbre sur l'ensemble* Ω *et* μ *une mesure.*

Définition 1.5.7. *On dit qu'une multi-application* $\mathrm{F} \in \mathcal{P}(\Omega)$ *est mesurable si l'image réciproque*

$$\mathrm{F}^{-}(\mathcal{O}) = \{\omega \in \Sigma : \mathrm{F}(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\}$$

de tout ouvert $\mathcal{O}$ *est dans* Σ.

Lemme 1.5.1. *Soit* $\mathrm{F} : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *une fonction multivoque. Alors F est mesurable si et seulement si* $\overline{\mathrm{F}}$ *est mesurable.*

Démonstration. En effet, si U ouvert dans X, alors

$$\mathrm{F}^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : \mathrm{F}(\omega) \cap U \neq \emptyset\}.$$

$$\overline{\mathrm{F}}^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : \overline{\mathrm{F}}(\omega) \cap U \neq \emptyset\}.$$

1.5.3 Mesurabilité Forte

Définition 1.5.8. *On dit que F est fortement mesurable si l'image réciproque de tout fermé $\mathcal{B}$*

$$\mathrm{F}^{-}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Sigma : \mathrm{F}(\omega) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset\}$$

est dans Σ.

Lemme 1.5.2. *Soit $\mathrm{F} : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une application multivoque fortement mesurable, alors F est mesurable.*

Démonstration . Soit U un ouvert dans X, donc $U = \cup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r)$ (car X est un espace métrique séparable). De plus, on peut facilement montrer que pour tout $r > 0$, on a

$$B(x_n, r) = \cup_{m=1}^{+\infty} \overline{B(x_n, r - m^{-1})}.$$

Par suite

$$\mathrm{F}^{-1}(B(x_n, r)) = \cup_{m=1}^{+\infty} \mathrm{F}^{-1}(\overline{B(x_n, r - m^{-1})}).$$

La réciproque du lemme est en général fausse, i.e la mesurabilité n'implique pas la mesurabilité forte, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.5.1. *Soit $\Omega = [0, 1], \Sigma = \varrho$:σ-algèbre de mesure de Lebesgue et A un sous-ensemble de Ω qui n'est pas mesurable et F une fonction multivoque définie par :*

$$F(\omega) = \begin{cases} [0, 1) & si\ \omega \in A^c, \\ [0, 1] & si\ \omega \in A. \end{cases}$$

Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}$. Alors

$$F^{-1}(U) = \{\omega \in \Omega : F(\Omega) \cap U \neq \emptyset\}$$

Donc

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \Omega & si\ [0, 1] \subset U, \\ \emptyset & si\ U \cap [0, 1] = \emptyset, \\ intervaleouvert & si\ U \cap [0, 1] \neq \emptyset. \end{cases}$$

Donc F est mesurable. Mais F n'est pas fortement mesurable car

$$F^{-1}(\{1\}) = A \notin \Sigma$$

Par contre, on peut vérifier sans peine le

Théorème 1.5.2. *Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_f(X)$ une multi-fonction. Alors F est mesurable si et seulement si F est fortement mesurable.*

1.5.4 Mesurabilité du graphe

Définition 1.5.9. *Soit X, Y deux espaces métriques et (Ω, Σ) un espace mesurable. Une fonction univoque $f : \Omega \times X \to Y$ est dite de Carathédory si :*

(a) $\omega \longrightarrow f(\omega, x)$ *est mesurable pour tout $x \in X$;*

(b) $x \longrightarrow f(\omega, x)$ *est semi-continue supérieurement presque pour tout $\omega \in \Omega$.*

Dans ce que suit, on suppose que X est un espace métrique separable.

Proposition 1.5.2. *Soit $f : \Omega \times X \longrightarrow Y$ une fonction Carathédory. Alors $f(.,.)$ est mesurable.*

Démonstration. Comme Y est un espace métrique séparable, il existe un sous-ensemble D dans Y dénombrable tel que $\overline{D} = X$. Soit C un ensemble fermé de Y. Alors

$$C = \{y \in Y : d_Y(y, C) = 0\} = \cap_{n=1}^{+\infty} \{y \in Y : d_y(y, C) < 1/n\}.$$

Montrons que $f(\omega, x) \in \mathbf{C}$ si et seulement si pour tout $n \geq 1$, il existe $v \in D$ tel que

$$d_X(x, v) < 1/n \quad et \quad f(\omega, v) \in C_n,$$

avec

$$C_n = \{y \in Y : d_y(y, C) < 1/n\}$$

Comme $x \in X$, alors il existe $v_m \in D$ telle que v_n converge vers x, c'est-à-dire

$$\forall \xi > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad telque \quad , \forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0 \Rightarrow d_X(v_m, x) < \xi$$

En utilisant la continuitê de $f(\omega, .)$, on obtient

$$d_Y(f(\omega, x), f(\omega, v_m)) \leq \xi.$$

Donc on peut conclure qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq m_0$ tel que

$$d_X(v_m, x) < \frac{1}{n} \quad et \quad d_Y(f(\omega, v_m), C) < 1/n.$$

Pour tout $n \geq 1$, il existe $v_n \in D$ tel que

$$d_X(v_n, x) < 1/n \quad et \quad f(\omega, v_n) \in C_n.$$

Alors

$$d(f(\omega, x), f(\omega, v_n)) \leq \xi.$$

Par suite

$$f^{-1}(C) = \cap_{n \geq 1} \cup_{v \in D} \{\omega \in \Omega : f(\omega, x) \in C_n\} \times \{x \in X : d_X(x, v) < 1/n\}.$$

Lemme 1.5.3. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : \Omega \longrightarrow \widehat{\mathcal{P}}(X)$ une application multivoque mesurable, alors le graphe de F est mesurable (i.e. $Gra\mathrm{F} \in \Sigma \times B(X)$).*

1.5.5 Sélection mesurable

Définition 1.5.10. *On dit que $f : \Omega \longrightarrow X$ est une sélection mesurable de F si*

$$f(\omega) \in F(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Théorème 1.5.3. *(Kuratowski-Rull Nardzewski) Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ une multi-fonction mesurable à images fermés non vides et supposons X séparable. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

Remarque 1.5.1. *Dans le théorème précédent, on peut remplacer l'image de F fermée par F à valeurs fermées.*

Lemme 1.5.4. *Soit (Ω, Σ) un espace mesure, X un espace polonais et*

$$F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_f(X)$$

une fonctions multivoque mesurable. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *F est mesurable.*

(b) *Il existe une suite de sélection $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable de F telle que*

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \geq 1\}}.$$

Théorème 1.5.4. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_f(X)$ une application multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *F est mesurable*

(b) *Pour chaque $x \in X$, la fonction $\omega \longmapsto h(\omega) = d(x, F(\omega))$ est mesurable*

(c) *F admet une sélection telle que*

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Exemple 1.5.2. *Soit $\Omega = [0,1] = X, \Sigma = \wp$ σ-algèbre engendrée par les sous-ensembles mesurables au sens de Lebesgue dans Ω. On considère D_1, D_2 deux ensemble dénombrable dans Ω. Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.*

$$F(\omega) = \begin{cases} D_1 & si \quad \omega \in A \\ D_2 & si \quad \omega \in A^c \end{cases}$$

ou A est un sous-ensemble de $[0,1]$ qui n'est pas mesurable. On peut facilement montrer que F est mesurable mais n'admet pas de sélection mesurable. Suppposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que

$$f(\omega) \in F(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

On pose $h : \Omega \longrightarrow X$.

$$h(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in D_1 \\ 0 & si \quad \omega \in D_2 \\ \frac{1}{2} & si \quad \omega \in \Omega \backslash (D_2 \cup D_1) \end{cases}$$

Il est clair que

$$f(\omega) = (h^{-1} \circ \mathcal{X}_A)(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

Alors

$$(h \circ f)(\omega) = \mathcal{X}_{\mathbf{A}}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

D'après de la définition de h, on obtient

$$h^{-1}(\{1\}) = D_1 \in B([0,1])$$

et

$$f^{-1}(h(\{1\})) \in \wp.$$

Mais

$$f^{-1}(h^{-1}(\{1\})) = \mathcal{X}_A(\{1\}) = A \notin \wp,$$

ce qui est une condradiction avec f mesurable. On remarque que $F(.) \notin \mathcal{P}_f(X)$.

On termine cette section sur la mesurabilité par récapitulatif d'assertions équivalentes.

Théorème 1.5.5. *Soit (Ω, Σ) un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_f(X)$ une application multivoque. les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $F^{-1}(D) \in \Sigma, \quad \forall D \in B(X)$.

(2) *F est fortement mesurable.*

(3) *F est mesurable.*

(4) *pour chaque $x \in X$, le fonction $\omega \longrightarrow h(\omega) = d(x, F(\omega))$ est mesurable.*

(5) *F admet des sélections msurables telles que*

$$F(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

(6) *$GrF \in \Sigma \otimes B(X)$.*

Alors

(a) (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6).

(b) Si X est un espace métrique complet, alors (3) $\Leftrightarrow$ (5).

(c) Si X est σ-compact, alors (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(d) Si $\Sigma = \hat{\Sigma}$ et X est un espace complet, alors les propriétés $(1) - (6)$ sont équivalentes.

1.5.6 Sélection continue

Nous allons énoncer un théorème très important en analyse multivoque, le théorème de sélection de Michael. Mais d'abord nous allons commencer par deux lemmes :

Lemme 1.5.5. *Soit (X, d) un espace métrique,Y un espace de Banach et $F_1 : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ s.c.i. et $F_2 : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ à graphe ouvert tel que $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$, pour tout $x \in X$. Alors, l'operateur multivoque $F_1 \cap F_2$ est s.c.i.*

Lemme 1.5.6. *Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \to \mathcal{P}_{cv}(Y)$ s.c.i. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a que $f_\varepsilon(x) \in \mathbf{V}(\mathrm{F}(x), \varepsilon)$.*

Démonstration. Comme F est s.c.i., on peut associer à tout $x \in X$ et à tout $y_x \in F(x)$ un voisinage ouvert U_x tel que $F(x) \cap B(y_x, \varepsilon) \neq \emptyset$ pour tout $x' \in U_x$. L'espace X étant paracompact, il existe un recouvrement local fini $\{\mathbf{U}_x\}_{x\in X}$ de $\{U_x\}_{x\in X}$ (i.e ; pour tout $y \in X$, il existe $V \in V(y)$ tel que $V \cap U_x^{'} \neq \emptyset, \quad \forall x \in X$. De plus à tout recouvrement local fini, on peut associer une partition de l'unité localement lipschitzienne une somme finie de fonctions continues. De plus, si $\phi_x(t) > 0$, pour $t \in U_c^{'} \subset U_x$ alors $y_x \in V(F(x), \varepsilon)$ implique que $f_\varepsilon(t) \in V(F(t), \varepsilon)$.

Théorème 1.5.6. *(Théoréme de sélection de Michael) Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_{f,cv}(Y)$. Alors il existe $f : X \to Y$ sélection continue de F.*

1.5.7 Sélection décomposable

Rappellons tout d'abord la définition d'une σ-algèbre. Soit E un e.v.t. et A une famille de sous-ensemble de E.

Définition 1.5.11. *A est dite σ-algèbre si elle vérifie les propriétés suivantes :*

(a) $\emptyset \in A$.

(b) $\mathcal{O} \in A \Rightarrow E \backslash \mathcal{O} \in A$.

(c) $\mathcal{O}_n \in A, n = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}_n \in A$.

Soit E un espace de Banach et A un sous-ensemble $J \times E$.

Définition 1.5.12. *On dit que A est $\mathcal{L} \otimes \mathcal{B}$ mesurable si A appartient à la σ-algèbre générée par tout les ensembles de la forme $I \times D$ où I est Lebesgue mesurable dans J et D est Borel mesurable dans E.*

Définition 1.5.13. *Un sous-ensemble $A \subset L^1(J, E)$ est décomposable si pour tout $u, v \in A$ et pour tout sous-ensemble Lebesgue mesurable $I \subset J$, on a*

$$u_{\chi_I} + u_{\chi_{J \backslash I}} \in A,$$

où χ la fonction caractéristique.

Soit $F : J \times E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ une multi-application à valeurs fermées nom vide. On associe l'opérateur multivoque $\mathcal{F} : \mathrm{C}(J, E) \longrightarrow \mathcal{P}(L^1(J, E))$ défini $F(y) = S_{F,y}$ et posons $\mathcal{F}(t, y) = S_{F,y}(t), \quad t \in J$. L'opérateur $\mathcal{F}$ est appelé opérateur de Nemyts'kii associé à F.

Définition 1.5.14. *Soit $\mathrm{F} : \mathrm{J} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{E})$ une application à valeurs compactes non vides. On dit F est de type s.c.i. (t.s.c.i.) si l'opérateur de Nemyts'kii associe $\mathcal{F}$ est s.c.i. et est à valeurs nom vides et décomposables.*

Une condition suffisante d'existence de fonction de type s.c.i. est assuré par le résultat suivant :

Lemme 1.5.7. *Soit $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ une multi-fonction intégrablement bornée vérifiant la condition suivante :*

$$\begin{cases} (a) \quad (t,x) \longmapsto \mathrm{F}(t,x) \quad \textit{est} \quad \mathcal{L}\otimes\mathcal{B} \quad \textit{mesurable.} \\ (b) \quad x \longmapsto \mathrm{F}(t,x) \qquad\quad \textit{est} \quad \textit{s.c.i.} \quad \textit{p.p.} \quad t \in \mathrm{J}. \end{cases}$$

Alors F est de type s.c.i.

Pour l'existence de sélection mesurable, le fameux théorème de sélection de Bressan and Colombo (aussi appelé théorème de sélection de Fryszkowski) s'enonce comme suit.

Lemme 1.5.8. *Soit X un espace métrique séparable et E un espace de Banach. Alors tout opérateur s.c.i. $\mathbf{N} : X \to \mathcal{P}_{cl}(L^1(J,E))$ à valeurs décomposables fermées possède une selection continue, i.e. il existe une fonction univoque continue $f : X \to L^1(J,E)$ telle que $f(x) \in \mathbf{N}(x)$ pour tout $x \in X$.*

1.5.8 Ensemble de sélections

Soit F une application multivoque ; définissons l'ensemble

$$S_{F,x} = \{v \in L^1(J,\mathbb{R}^+) : v(t) \in F(t,x(t)), p.p. \quad t \in J\}$$

Cet ensemble $S_{F,x}$ s'appelle ensemble des selections ; il est fermé. Il est convexe si et seulement si $F(t,x(t))$ est convexe pour p.p.$t \in$ J.

Lorsque F est une multi-application L^1-carathéodory, on sait en vertu d'un résultat de Losota et Opial que pour chaque $x \in C(J,\mathbb{R})$, l'ensemble $S_{F,x}$ est non vide, ceci nous permet de définir le multi-opérateur

$$S_F : C(J,\mathbb{R}^+) \to \mathcal{P}(C(J,\mathbb{R}^+))$$

$$x \longmapsto S_F(x) = \mathrm{S}_{F,x}.$$

1.6 Èlements de théorie du point fixe

1.6.1 Introduction

Un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction F posséde au moins un point fixe moyennant quelques conditions sur F. Les résultats de ce type sont parmi les plus utiles en mathématiques. Le théorème du point fixe de Banach fournit un critére garantissant une procédure d'itération d'une fonction amenant à un point fixe. Le théorème du point fixe de Brouwer, quant à lui, est un résultat non constructif ; il affirme qu'une fonction continue de la boule unité fermée dans l'espace euclidien de dimension vers elle-même doit avoir un point fixe mais ne montre pas comment trouver ce point fixe. Nous présentons ici d'autres théorèmes du point fixe, notamment ceux de Schauder et de Kakutani, généralisations du théorème de Brouwer, suivis d'une brève description du travail de John Nash, Prix Nobel d'économie en 1994. La théorie du point fixe est assez bien développée dans des références standards.

1.6.2 Cas des fonctions univoques

Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.6.1. *Un point fixe de $N : X \to X$ est un point $x \in X$ qui est appliqué sur lui même, i.e.$Nx = x$.*

Définition 1.6.2. *Soit (X, d) un espace métrique . Une application $N : X \to X$ est appelée contraction sur X s'il existe un nombre réel positif* $0 < M < 1$ *tel que pour tout $x, y \in X$*

$$d(Nx, Ny) \leq Md(x, y).$$

Théorème 1.6.1. *Considèrons un espace métrique (X, d).Supposons que X soit complet et que $N : X \to X$ soit une contraction sur X. Alors N posséde un unique point fixe.*

Démonstration.

– L'unicité : Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$.

$$d(x, y) = d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y).$$

Comme $K \in]0, 1[$,alors $d(x, y) = 0$ ce qui entraîne que $x = y$.

– L'existence : Soit $x_0 \in X$ un point arbitraire de X.Posons

$$x_1 = N(x_0), x_2 = N(x_1), ..., x_n = N(x_{n-1}), ...$$

$$d(x_0, x_1) = d(x_0, N(x_0))$$

$$d(x_1, x_2) = d(N(x_0), N(x_1)) \leq Md(x_0, N(x_0))$$

$$\vdots$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq M^{n+1} d(x_0, N(x_0)).$$

Considérons la suite définie par $\{x_n = N(x_{n-1})\}_{n\in\mathbb{N}}$ et montrons qu'elle est de Cauchy dans X.

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=0}^{k=p} d(N(x_{n+1}, N(x_{n+k+1}))$$

$$\leq \sum_{k=0}^{k=p} M^{n+k} d(x_0, N(x_0))$$

$$\frac{M^{n+k}}{1-M} d(x_0, N(x_0)) \to 0, \quad lorsque \quad n \to +\infty.$$

Ceci exprime le fait que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X. IL existe donc $x_* = \lim_{n\to+\infty} x_n$.Montrons que $x_* = N(x_*)$. on a $x_n = N(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$.Par passage à la limite, on obtient $x_* = N(x_*)$ car N est continue.

La proposition suivante, qui généralise le théorème (1.6.1), sera utile pour la suite.

Proposition 1.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et une application $N : X \to X$.Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $M \in]0, 1[$ tels que*

$$d(N^{n_0}(x), N^{n_0}(y)) \leq Md(x, y), \forall x, y \in X$$

avec $N^{n_0} = N \circ N \circ ..... \circ N, n_0$ fois. Alors N admet une point fixe unique.

Démonstration. Montrons que N admet un point fixe unique.

-Supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et $y = N(y)$.

$$x = N(x) \Rightarrow N^{n_0}(x) = N^{n_0+1}(x) = N^{n_0}(N(x)) = ... = x$$

$$y = N(y) \Rightarrow N^{n_0}(y) = N^{n_0+1}(y) = N^{n_0}(N(y)) = ... = y$$

$$d(x, y) = d(N^{n_0}(x), N^{n_0}(y)) \leq Md(x, y).$$

Or $K \in]0, 1[$. Donc $d(x, y) = 0$ et donc $x = y$. Comme N^{n_0} est contractante, alors en vertu du théorème 1.6.1, il existe $x \in X$ tel que $N^{n_0}(x) = x$. Finalement montrons que $N(x) = x$.

$$x_* = N^{n_0}(x_*) \Rightarrow N(x_*) = N^{n_0+1}(x_*) = N^{n_0}(N(x_*))$$

$$d(x_*, N(x_*)) = d(N^{n_0}(x_*), N^{n_0}(x_*)) \leq Md(x_*, N(x_*)).$$

Or $M \in]0, 1[$; donc $x_* = N(x_*)$.

Corollaire 1.6.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et*

$$B(y_0, r) = \{y \in X : d(y, y_0) < r\}$$

et une application $N : B(y_0, r) \to X$*. Supposons qu'il existe* $M \in]0, 1[$ *tels que*

$$d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y), \forall x, y \in B(y_0, R).$$

si $d(y_0, N(y_0)) < (1 - M)r$*,alors* N *admet un point fixe unique.*

Démonstration. Comme $d(y_0, N(y_0)) < (1 - M)r$, alors on peut choisir $0 < \varepsilon < r$ tel que

$$d(y_0, N(y_0)) \leq (1 - M)\varepsilon < (1 - M)r.$$

Posons

$$D = \{y \in X : d(y, y_0) \leq \varepsilon\}.$$

Montrons $N(D) \subset D$. soit $y \in D$.Alors

$$d(N(y), y_0) \leq d(N(y), N(y_0)) + d(N(y_0), y_0)$$

$$\leq Md(y, y_0) + (1 - M)\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Donc $N : D \to D$ est un application contractante sur D et puisque X est un espace complet, alors d'après le théorème (1.6.1) N admet une point fixe unique.

Corollaire 1.6.2. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach,*

$$\overline{B}_r = \{y \in E : \|y\| \leq r\}$$

et une application $N : \overline{B}_R \to X$*.Supposons qu'il exitste* $M \in]0, 1[$ *tel que*

$$\|N(x) - N(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \overline{B}_r \quad et \quad N(\partial\overline{B}_r) \subset \overline{B}_r.$$

Alors N *admet un point fixe unique.*

Démonstration. Considérons l'application $F(x) = \frac{x+N(x)}{2}$. Montrons que $F(\overline{B}_r) \subset \overline{B}_r$.soit $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$. Posons $x_* = r\frac{x}{\|x\|}$

$$\|N(x) - N(x_*)\| \leq M\|x - x_*\|$$

$$\leq M(r - \|x\|),$$

et

$$\|N(x)\| \leq \|N(x_*)\| + \|N(x) - N(x_*)\|$$
$$\leq r + M(r - \|x\|)$$
$$2r - \|x\|$$

Donc pour tout $x \in \overline{B}_r$ et $x \neq 0$, on a

$$\|F(x)\| = \|\frac{x + N(x)}{2}\| \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{\|N(x)\|}{2} \leq \frac{\|x\|}{2} + \frac{2r - \|x\|}{2} \leq r.$$

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B}_r, x_n \neq 0$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.D'après les inégalités précédantes et la continuité de F, on obtient

$$\|F(x_n)\| \leq r \Rightarrow \|F(0)\| \leq r.$$

Par conséquent $F : \overline{B}_r \to \overline{B}_r$. De plus F est contractante .Soit $x, y \in \overline{B}_r$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1 + M}{2}\|x - y\|, \forall x, y \in \overline{B}_r.$$

D'après le théorème (1.6.1),F admet un point fixe unique i.e.il existe $x_0 \in \overline{B}_r$ tel que $x_0 = F(x_0) = N(x_0)$.

Théorème 1.6.2. *(Edelstein) Soit(X, d) un espace métrique compact et une application $F : X \to X$.Supposons que*

$$d(N(x), N(y)) < d(x, y), \forall x, x \in X, x \neq y.$$

Alors N admet une point fixe unique.

Démonstration.

– Unicité :

Soit $x, y \in X$ tels que $x = N(x)$ et y=N(y)

$$d(x, y) = d(N(x), N(x)) < d(x, y) \Rightarrow x = y.$$

– Existence :

Considérons l'application $F : X \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$x \to F(x) = d(x, N(x)).$$

Puisque X est compact , alors il existe $x_0 \in X$ tel que

$$F(x_0) = d(x_0, N - x_0)) = \min_{x \in X} d(x, N(x)).$$

Montrons que $x_0 = N(x_0)$.

$$d(x_0, N(x_0)) \leq d(N(N(x_0)), N(x_0))$$

$$\leq d(x_0, N(x_0))$$

ce qui implique $d(x_0, N(x_0)) = 0$ puis $x_0 = N(x_0)$.

Remarque 1.6.1. *Soit C un convexe fermé borné de E et $F : C \to C$ une 1-contraction, c'est à dire que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in C.$$

Alors F admet-il un point fixe ?
La réponse est en général négative comme le montre l'exemple suivant.Soit $E = c_0$ l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ qui tendent vers 0, muni de la norme

$$\|x\| = \sup_{i \in \not{N}^*} |x_i|.$$

Sur l'ensemble $C = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$,l'application F définie par

$$F(x) = \{1, x_1, x_2, ..., x_n, ..\}$$

est une 1-contraction de C dans C et n'admet pas de point fixe dans C. La réponse est néanmoins affirmative lorsque $F(C)$ est compact.

Théorème 1.6.3. *(Théorème de contraction de type Schauder) Soit E un espace de Banach sur le corps $K = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}, C \subset E$ un ensemble convexe fermé et soit $F : C \to C$ une 1-contraction.Supposons que $F(C)$ est compact.Alors F admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit $x_0 \in C$ et $F_n : C \to E$ une application définie par

$$F_n = (1 - \frac{1}{n)}F + \frac{1}{n}x_0, n = 2, 3, ...$$

Montrons que $F_n(C) \subset C$ est une contraction . soit$y \in F_n(C)$; alors il existe $x_1 \in C$ tel que

$$y = (1 - \frac{1}{n})F(x_1) + \frac{1}{n}x_0 \in C \quad carC$$

;est convexe. Soit $x, y \in C$.

$$\|F_n(x) - F_n(y)\| \leq \frac{1}{n}\|x - y\|.$$

Alors d'après le théorème (1.6.1), F_n posséde un point fixe unique $x_n \in C$, soit

$$x_n = F_n(x_n) \subset C, n = 2, 3, ...$$

Il existe donc $y_n \in C$ telle que

$$x_n = (1 - \frac{1}{n})F(y_n) + \frac{1}{n}x_0, n = 2, 3, ...$$

Puisque $F(C)$ est compact, alors il existe une sous-suite $\{F(y_{n_k} : k = 2, 3, ...\}$ converge vers $u \in C.x_{n_k} = (1-\frac{1}{n_k})F(y_{n_k})+\frac{1}{n_k}x_0$ converge vers u. Comme F est continue,alors $F(x_{n_k})$ converge vers $F(u)$. Montrons que $u = F(u)$.

$$\|u - F(u)\| \leq \|u - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - F(u)\|$$

$$\leq \|u - x_{n_k}\| + (1 - \frac{1}{n_k}\|F(y_{n_k} - f(u)\| + \frac{1}{n_k}\|F(u)\| + \frac{1}{n_k}\|x_0\| \to 0 \quad alorsque \quad n \to +\infty.$$

Ce qui montre que $u = F(u)$.

Remarque 1.6.2. *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ l'application identité*

$$f(x) = x$$

En vertu du théorème (1.6.4),f admet au moins un point fixe ;mais on n'a pas de résultat d'unicité.

Théorème de Banach généralisé

Théorème 1.6.4. *Soit*(X,d) *un espace métrique complet et* $N : X \to X$ *une application vérifiant la condition suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : (d(c, N(x)) < \delta) \Rightarrow (N(B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon)).$$

Si $\lim_{n\to+\infty} d(N^n(u), N^{n+1}(u)) = 0$ *pour certain* $u \in X$*, alors la suite* $\{N^n(u)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un point fixe de* N*.*

Théorème 1.6.5. *Soit* (X,d) *un espace métrique complet et* $N : X \to X$ *une application. Supposons que*

$$d(N(x), N(y)) \leq \phi(d(x,y)), \forall x, y \in X$$

où $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est une fonction monotone vérifiant* $\lim_{n\to+\infty} \phi^n(t) = 0, t \in]0,+\infty[$*. Alors* N *admet un point fixe unique* $u \in X$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} N^n(x) = u, \forall x \in X.$$

Alternative non linéaire pour les applications contractantes

Dans cette section, nous donne une généralisation de l'alternative non linéaire pour les applications contractantes.

Théorème 1.6.6. *Soit* E *un espace de Banach et* $T : B(0,r) \to E$ *une application contractance sur* $B(0,r)$*. Alors il existe* $\lambda_* \in]0,1[$ *et une courbe lipschitzienne* $\lambda \to x_\lambda$ *définie de* $[0,\lambda_*]$ *dans* $\overline{B}(0,r)$ *etls que* $x_\lambda = \lambda T x_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in [0,\lambda_*]$ *et* $(\lambda_*, x_{\lambda_*})$ *est sur la frontiére de* $[0,1]\times\overline{B}(0,r)$*.*

Théorème 1.6.7. *(Alternative non linéaire). Soit* E *un espace de Banach et* $T : \overline{B}(0,r) \to E$ *une application contractante. Alors au moins l'un des énoncés suivants est vérifié :*

i *Il existe* $x_0 \in \overline{B}(0,r)$ *tel que* $x_0 = T(x_0)$*.*

ii *Il existe* $x_0 \in \partial\overline{B}(0,r)$ *et* $\lambda \in]0,1[$ *tel que* $x_0 = \lambda T(x_0)$*.*

Théorème 1.6.8. *Soit* $T : \overline{B}(0,r) \to E$ *une application contractante telle que sur la frontière* $\partial B(0,1)$ *de* $\overline{B}(0,r)$*, une des conditions suivantes est satisfaite :*

(a) $\|T(x)\| \leq \|x\|$ *.(condition de E.Rothe)*

(b) $\|T(x)\| \leq \|x - T(x)\|$.

(c) $\|T(x)\| \leq \sqrt{\|x\|^2 + \|x - T(x)}$ *.(condition de M.Altman)*

(d) $\|T(x)\| \leq \max(\|x\|, \|x - Tx\|^2)$.

Alors T posséde un point fixe.

Théorème 1.6.9. *Soit $T : E \to E$ une application telle que la restriction de T à n'importe quelle boule $\overline{B}(0,r)$ est une contraction. Alors ,il existe $\lambda_* \in]0,1]$ et une courbe localement lipschitzienne sur $[0, \lambda_*[$ de points fixes $x_\lambda = \lambda T(x_\lambda)$ tels qu'au moins un des énoncés suivantes est vérifié :*

i *l'ensemble*

$$\varepsilon_T = \{x_\lambda \in E : \lambda \in [0, \lambda_*[\}$$

est borné ;

ii *l'application T admet un unique point fixe x_1,$\lambda_* = 1$ et $x_\lambda \to x_1$ lorsque $\lambda \to 1$.*

Théorème du point fixe de Brouwer (1910)

Théorème 1.6.10. *Soit C un sous-ensemble compact, convexe et non-vide de $\mathbb{R}^n$ et supposons que f soit une fonction continue de C dans C. Alors f admet un point fixe. En particulier , si B^n désigne la boule unité fermé de $\mathbb{R}^n$, alors toute application continue $f : B^n \to B^n$ admet au moins un point fixe.*

Lemme 1.6.1. *Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $f : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ *est continue , sans point fixe,*

(b) $\phi : \overline{B(0,1)} \to S(0,1)$ *est une rétraction continue,*

(c) $f : \overline{B(0,1} \to \overline{B(0,1)}$ *est C^1, sans point fixe,*

(d) $\phi : \overline{B(0,1)} \to \overline{S(0,1)}$ *est une rétraction C^1.*

On entend par fonction C^1 sur un fermé, toute restriction d'une fonction C^1 sur un voisinage de ce fermé.

Dans la résolution des équations différentielles ordinaires dans des espaces abstraits, des équations différentielles fonctionnelles ou des équations aux dérivées partielles, on est souvent amené à utiliser des théorèmes de point fixe pour obtenir l'existence de solutions à un problème aux limites ou à conditions intiales. Mais en régle générale, ces théorèmes s'appliquent dans des espaces de dimension infinie supposés comprendre toutes les solutions possibles. L'exemple suivant montre qu'il n'est pas toujours possibe d'appliquer le théorème du point fixe de Brouwer dans un espace de dimension infinie. A cette fin, il suffit de définir une application continue de la boule unité de l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{N})$ dans elle même qui n'a pas de point fixe.

Exemple 1.6.1. *Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'espae des suite $x = \{x_n :\in \mathbb{N}\}$ de carrées sommables muni de la norme*

$$|x| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2}.$$

Soit $\overline{B(0,1)}$ la boule unité fermée de $l^2(\mathbb{N})$, et $T : \overline{B(0,1)} \to l^2(\mathbb{N})$ une application définie par

$$Tx = (\sqrt{1-|x|^2}, x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ...).$$

On vérifie sans peine que T est continue et que $T(\overline{B(0,1)}) \subseteq \overline{B(0,1)}$. Plus précisément $|Tx| = 1$. Cependant T ne posséde aucun point fixe dans $\overline{B(0,1)}$, car si $x = Tx$, alors pour tout $n \geq 0, x_{n+1} = x_n$ et $x_0 = \sqrt{1-|x|^2}$. Or $|x| = |Tx| = 1$ et par conséquent $x_0 = 0$; d'où $x = 0$, ce qui contredit $|x| = 1$.

Donc la continuité et la borniture d'un opérateur ne suffisent pas à résoudre l'équation $Tx = x$ dans un espace de dimension infinie.
Rappelons aussi que dans un espace de dimension infinie, une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés ; mais ceci complique considérablement l'étude des équations non linéaires. Afin d'obtenir des théorèmes de point fixe analogues au théorème de Brouwer dans un espaces de dimension infinie, Il faudra rajouter une hypothèse de compacité ; plus précisément supposer que l'opérateur soit compact, ou qu'il laisse invariant un convexe compact. C'est ce que fût remarqué par Schauder dans ses travaux entre 1930 et 1934.

Théorème du point fixe de Schauder (1930)

Le théorème de Schauder, prouvé en 1930 par le mathématicien polonais Juliusz Schauder, s'avère un outil indispensable en théorie du point fixe moderne.

Théorème 1.6.11. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, compact et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T a un point fixe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $C \subset \cup_{x\in C} B(x, \varepsilon)$.D'après la compacité de C, il existe $\{x_1, ..., x_n\} \subset C$ tel que $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ une partition continue et positive de l'unité de C tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1, \forall x \in C \quad et \quad \sup(\phi_i) \subset B(x_i, \varepsilon), \quad pourtout \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considérons alors l'application $T_\varepsilon : C \to C$ définie par

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))x_i, \forall x \in C.$$

D'après la continuité des fonctions ϕ_i, T et la convexité de C, T_* est continue et $T_\varepsilon(C) \subset C$. De plus

$$T_\varepsilon : C \to C_\varepsilon = conv\{x_1, ..., x_n\} \subset C.$$

Maintenant, soit $x \in C$; alors $T(x) \in C$ et donc

$$\begin{aligned} |T(x) - T_\varepsilon(x)| &= |\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))(x_i - T(x))| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))|x_i - T(x)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci entraine que

$$\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(x)| : x \in C\} \leq \varepsilon.$$

Introduisons l'application continue

$$T|_{C_\varepsilon} : C_\varepsilon \to C_\varepsilon.$$

Soit F_ε un espace vectoriel engendré par $\{x_i, ..., x_n\}$; alors $dimF_\varepsilon = n$ et comme $C_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ est un ensemble convexe fermé et borné, alors d'après le théorème de Brouwer,il existe $x_\varepsilon = T_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Posons $\{\varepsilon_n = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Puisque $x_{\varepsilon_{n_m}} = T(x_{\varepsilon_{n_m}})$. D'après la compacité de C, on en déduit que

$$\{x_{\varepsilon_{n_m}} : m \in \mathbb{N}\} \subset C.$$

Il existe donc une sous-suite $\{x_{\varepsilon_{n_m}} : m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $x_* \in C$. Montrons que $x_* = T(x_*)$. La ontinuité de T entraine que la suite image $T(x_{\varepsilon_{n_m}})$ converge vers $T(x_*)$.

$$T(x_{\varepsilon_{n_m}}) = T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_{\varepsilon_{n_m}} + x_{\varepsilon_{n_m}}$$

$$= T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}}) + x_{\varepsilon_{n_m}}.$$

Donc

$$\|T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_*\| \leq \|T(x_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}})\| + \|T_{\varepsilon_{n_m}}(x_{\varepsilon_{n_m}}) - x_*\|$$

$$\leq \varepsilon_{n_m} + \|x_{\varepsilon_{n_m}} - x_*\| \to 0 \quad Lorsque \quad n \to +\infty.$$

Ceci exprime que $T(x_*) = x_*$.

Théorème 1.6.12. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, C une partie non vide de E, fermée et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compacte , alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{T(C)} \subset \cup_{y \in T(C)} B(y, \varepsilon)$, alors il existe $\{y_1, ..., y_n\} \subset T(C)$ tel que $\overline{T(C)} \subseteq \cup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ une partition continue, positive de l'unité de $\overline{T(C)}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(y) = 1, \forall y \in \overline{T(C)} \quad et \quad \sup(\phi_i) \subset B(y_i, \varepsilon) \quad pourtout \quad 1 \leq i \leq n.$$

Considérons alors l'application $T_\varepsilon : \overline{T(C)} \to \overline{T(C)}$ définie par

$$T_\varepsilon(y) =_{i=1}^{n} \phi_i(y) y_i \forall y \in \overline{T(C)}.$$

D'après la ontinuité des fonction $_i$ et la convexité de C, T_ε est continue et $T_\varepsilon(\overline{T(C)}) \subset C$. De plus $T_\varepsilon : T(C) \to C_\varepsilon = conv\{y_1, ..., y_n\}$.

$$|T(x) - T_\varepsilon(T(x))| = |\sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x)(y_i - T(x)))|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))|y_i - T(x)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(T(x))\varepsilon$$

$$= \varepsilon.$$

Ceci entraine que

$$\sup\{|T(x) - T_\varepsilon(T(x))| : x \in C\} \leq \varepsilon.$$

Considérons l'application $T_\varepsilon|_{C_\varepsilon} : C_\varepsilon \to C_\varepsilon$.Par le même raisonnement du théorème (1.6.11),on peut montrer qu'il existe $y_\varepsilon \in T(C)$ tel que $T_\varepsilon(y_\varepsilon) = y_\varepsilon$. Posons $\{\varepsilon = \frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ tel que $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$. Puisque $y_{\varepsilon_n} = T_{\varepsilon_n}(y_{\varepsilon_n})$, alors

$$\{y_{\varepsilon_n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{T(C)}$$

Car $\overline{T(C)}$ est compact ; alors il existe une sous-suite $\{y_{\varepsilon_{n_m}} : m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $y_* \in \overline{T(C)} \subset C$. Montrons que $y_* = T(y_*)$.La continuité de T entraine que $T(y_{\varepsilon_{n_m}})$ converge vers $T(y_*)$.

$$\begin{aligned} T(y_{\varepsilon_{n_m}}) &= T(y_{\varepsilon_{n_m}}) - y_{\varepsilon_{n_m}} + y_{\varepsilon_{n_m}} \\ &= T(y_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(y_{\varepsilon_{n_m}}) + y_{\varepsilon_{n_m}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|T(y_{\varepsilon_{n_m}}) - y_*\| &\leq \|T(y_{\varepsilon_{n_m}}) - T_{\varepsilon_{n_m}}(y_{\varepsilon_{n_m}})\| + \|T_{\varepsilon_{n_m}}(y_{\varepsilon_{n_m}}) - y_*\| \\ &\leq \varepsilon_{n_m} + \|y_{\varepsilon_{n_m}} - y_*\| \to 0 \quad Lorsque \quad n \to +\infty. \end{aligned}$$

Ceci exprime le fait que $T(_*) = y_*$.
Enfin, on termine cette section par l'alternative non linéaire de Leray et Schauder.

Théorème 1.6.13. *Soit E un e.v.n. et $B := \overline{B}(0, R)$ une boule fermée. Supposons $f : B \to E$ continue, compacte. Alors*

(a) *Ou bien f posséde un point fixe dans B.*

(b) *Ou bien il existe $x \in \partial B$ et $\lambda \in (0, 1)$ tel que $x = \lambda f(x)$.*

Démonstration. Soit $r : E \to B$ une rétraction. Par le théorème de Schauder, la composition compate $r \circ f : B \to B$ posséde un point fixe $x = r(f(x))$. Si $f(x) \in B$, alors $x = f(x)$ et donc f possède un point fixe ; autrement, par définition de la retraction r, $x = r(f(x)) = R\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$; alors $x \in \partial B$, et prenant $\lambda = \frac{R}{\|f(x)\|}$, le résultat en découle.
Comme consequence, on a

Théorème 1.6.14. *(Théorème de Schaefer,1955) Soit $f : E \to E$ une application compacte, continue. Alors*

(a) *Ou f posséde un point fixe dans E.*

(b) *Ou bien pour tout $\lambda \in (0, 1)$, l'ensemble $\{x \in E; x = \lambda f(x)\}$ est non borné.*

1.6.3 Cas des fonctions multivoques

Définition 1.6.3. *Soit* (X, τ_1) *et* (Y, τ_2) *deux espaces topologiques et*

$$F : X \to \mathcal{P}(Y)$$

une application multivoque. On dit que $x \in X$ *est un point fixe de* F *si* $x \in F(x)$.

Définition 1.6.4. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Un opérateur multivoque*

$$F : X \to \mathcal{P}_{f,b}(X)$$

est appelée contration sur X *s'il existe un nombre réel positif* $0 < M < 1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$

$$H_d(F(x), F(y)) \leq Md(x, y).$$

Théorème du point fixe de Covitz et Nadler Jr

Théorème 1.6.15. *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $F : X \to \mathcal{P}(x)$ *une contraction. Alors* F *admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall z \in F(x), y \in X$$

et donc

$$d(x, y) \leq d(x, F(x)), y \in F(x).$$

Considérons l'ensemble

$$D(x, d(x, F(x))) = \{y \in X : d(x, y) \leq d(x, F(x))\} \Rightarrow D(x, F(x)) \cap F(x) \neq \emptyset.$$

Si $x_1 \in D(x, F(x)) \cap F(x)$, Alors $d(x, x_1) \leq d(x, F(x))$.Pour $x_2 \in F(x_1)$, on a

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, F(x)) + d(F(x), x_2)$$

$$\leq H_d(F(x), F(x_1))$$

$$\leq Md(x, x_1) \leq Md(x, F(x)).$$

$x_2 \in F(x_1)$. Il existe $x_3 \in F(x_2)$ tel que

$$d(x_2, x_3) \leq d(x_2, F(x_2)) + d(F(x_1), x_3)$$
$$\leq H_d(F(x_1), F(x_2))$$
$$\leq Md(x_1, x_2) \leq M^2 d(x, F(x)).$$

Par récurrence

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq M^{n-1} d(x, F(x)), n \in \mathbb{N}.$$

Puisque $M \in]0,1[$, alors $\{x_n\}_{x \in \not{\mathbb{N}}^*}$ est une suite de Cauchy dans X. Il existe donc $x_* \in X$ tel que $x_* = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Montrons que $x_* \in F(x_*)$. Il clair que F est H_d-u.s.c et donc F est îà graqhe fermé. La suite $x_n \in F(x_{n-1})$,X_n converge vers x_* et x_{n-1} aussi converge vers la même limite de x_n ; alors $x_* \in F(x_*)$.

Théorème de point fixe de Bohnenblust et Karlin

Théorème 1.6.16. *Soit $(X\|.\|)$ un espace normé, $C \in \mathcal{P}_{cp,cv}(X)$ et $F : C \to \mathcal{P}_{f,cv}(C)$ est un opérateur multivoque semi-continue supérieurement . Alors F admet au moins une point fixe .*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $C \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$. D'après la compacité de C, il existe $\{x_1, ..., x_n\} \subset C$ tel que $C \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Soit $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ une partition continue, positive de l'unité de C telle que

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1 \forall x \in C \quad et \quad \sup(\phi_i) \subset B(x_i, \varepsilon) \quad pourtout \quad 1 \leq i \leq n.$$

Pour tout x_i, on choisit $y_i \in F(x_i), i = 1, ...n$. Considérons l'opérateur

$$T_\varepsilon : C \to C$$

défini par

$$T_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_i, \forall x \in C.$$

D'après la continuité des fonctions ϕ_i et la convexité de C, l'opérateur T_ε est continue et $T_\varepsilon(C) \subset C$. D'après le théorème (1.6.12) , il existe $x_\varepsilon \in C$ tel que $x_\varepsilon = T_{\varepsilon(x_\varepsilon)}$. Pour $\{\varepsilon_n = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, on a $\{x_{\varepsilon_n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$. Puisque C est compact ,il existe une sous-suite $\{x_{\varepsilon_{n_m}} : m \in \mathbb{N}\}$ convergente vers $x_* \in C$. Montrons que $x_* \in F(x_*)$. Supposons que $x_* \notin F(x_*)$; alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_* \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)) = \{x \in X : \|x - F(x_*)\| < \frac{\eta}{2}\} \in \mathcal{V}(F(x_*)).$$

Comme F est s.c.s., il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in U_\delta(x_*) = \{z \in X : \|z - x_*\| < \delta\} \in \mathcal{V}(x_*) \Rightarrow F(z) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

Posons

$$U_r(x_*) = \{z \in X : \|z - x_*\| < r = \min(\frac{\eta}{2}, \delta)\}.$$

Il clair que pour tout $z \in U_r(x_*) \cap C, F(z) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$. Comme $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, alors pour tout $r > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et donc $\frac{1}{n} < r$. Par suite

$$U_{r-\varepsilon_n}(x_*) \cap C \subset U_r(x_*) \cap C, \forall n \geq N.$$

Si $z \in U_{r-\varepsilon_n} \cap C$, alors il existe $x_i \in \{x_1, ..., x_n\}$ tel que $\|z - x_i\| < \frac{1}{n}$ et

$$\|x_* - x_i\| \leq \|x_* - z\| + \|z - x_i\| < r < \delta \quad et \quad Ax_i \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

En utilisant la convexité de $U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$,on obtient

$$T_{\varepsilon_n}(z) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(z) y_i \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)).$$

Pour $\frac{r}{2} > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \leq N, \frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, on a que $\varepsilon_n < r - \varepsilon_n$. Donc pour tout $x_{\varepsilon_n} \in U_{r-\varepsilon_n}(x_*) \cap C$, on a $T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$.Finalement

$$\begin{aligned} \|x_* - F(x_*)\| &\leq \|x_* - x_{\varepsilon_n}\| + \|x_{\varepsilon_n} - T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n})\| + \|T_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}) - F(x_*)\| \\ &< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \Rightarrow x_* \in U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*)). \end{aligned}$$

Ce qui conduit à une contradiction avec $x_* \notin U_{\frac{\eta}{2}}(F(x_*))$.

Théorème 1.6.17. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé , $B \in \mathcal{P}_{f,cv,b}(X)$ et $F : B \to \mathcal{P}_{f,cv}(B)$ un opérateur multivoque semi-continue supérieurement et compact . Alors F admet au moins un point fixe.*

Alternative Nonlinéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.6.18. *Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé et $F : X \to \mathcal{P}_{f,cv}(X)$ un opérateur multivoque, semi-continue supérieurement et compact. Alors au moins l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

(i) *F admet au moins un point fixe,*

(ii) *L'ensemble*

$$\mathcal{M} = \{x \in X, x \in \lambda F(x), \lambda \in]0,1[\}$$

est non borné.

Démonstration. Supposons que l'ensemble $\mathcal{M}$ soit borné , alors $F(\mathcal{M}$ est relativement compact et donc il existe $r > 0$ tel que

$$F(\mathcal{M} \subset B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}.$$

Considérons l'ensemble

$$B = B_{2r}, K = \sup\{\|y\| : y \in F(B_{2r})\}, k = \max(K, 2r+2)$$

et introduisons l'opérateur multivoque $G : B \to \mathcal{P}(X)$ défini par

$$G(x) = \begin{cases} F(x) \cap B, & \text{si } F(x) \cap B \neq \emptyset\,; \\ \frac{2r}{k} F(x), & \text{si } F(x) \cap B = \emptyset. \end{cases}$$

Montrons que G satisfait les conditions du théorème

(a) $G(B) \subseteq B$. Soit $y \in G(B)$; alors il existe $x \in B$ tel que $y \in B$ et $y \in G(x)$ donc $y \in F(x) \cap B$ or $y \in \frac{2r}{k} F(x)$. Dans le premier cas $y \in B$.Si $y \in \frac{2r}{k} F(x)$, alors il existe $z \in F(x)$ tel que $y = \frac{2r}{k} z$

$$\|y\| = \frac{2r}{k}\|z\| \leq \frac{2r}{k} \sup\{\|z\| : z \in F(x)\} \leq \frac{2r}{k} \leq r.$$

(b) $G \in \mathcal{P}_{cv}(B)$.Soit $y_1, y_2 \in G(x)$ au $x_i n B$.Montrons que

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in G(x), \alpha \in [0,1].$$

Puisque $F(x)$ est convexe , alors

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in G(x).$$

(c) G est s.c.s. Comme G est compact, il suffit de montrer que G est Ã graphe fermé. Soit $\{x_n\} \subset B, x_n \to x$ et $y_n \in G(x_n)$ tel que $y_n \to y$. Montrons que $y \in G(x)$. Considérons le cas

$$\{y_n\} \subset B,$$

il existe une sous suite de

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} telque \|y_{n_p}\| \leq 2r \tag{1.1}$$

et il existe une sous suite de

$$\{y_n : n \in \mathbb{N}\} telque \|y_{n_p}\| > 2r. \tag{1.2}$$

Deux situations se présentent :

- (1.1) on a $y_{n_p} \in G(x_{n_p}) = F(x_{n_p}) \cap B$.Puisque F est Ã graphe fermé et B est un ensemble fermé, alors $y \in G(x) = F(x) \cap B$.
- Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1.2), alors

$$y_{n_p} \in \frac{2r}{k} F(x)_{n_p} \Rightarrow \frac{k}{2r} y_{n_p} \in F(x_{n_p}).$$

  Donc $y \in \frac{2r}{k} F(x)$; ce qui montre que G est s.c.s.

(d) $G \in \mathcal{P}_f(B)$. Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G(x)$ tel que $y_n \to y$. Montrons que $y \in G(x)$. D'après la définition de G on a que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(x) \cap B$ or $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in G(x) = \frac{2r}{k} F(x)$. Comme F est Ã valeurs fermées et B est fermée, alors $y \in G(x)$.

(e) $G(B)$ est relativement compact. Soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G(B)$ une suite ; donc il existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in B$ telle que

$$y_n \in G(x_n), n \in \mathbb{N} \Rightarrow y_n \in F(x_n) \cap B \quad ou \quad y_n \in \frac{2r}{k} F(x_n), n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(B) \quad ou \quad \{\frac{k}{2r} y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F(B).$$

D'après la compacité de F, on peut extraire de $y_n$une suite y_m telle que

$$y_m \in F(x_m) \cap B \quad et \quad y_m \to y \in \overline{F(B)}$$

où

$$y_n \in \frac{2r}{k} F(x_m) \quad et \quad y \in \frac{2r}{k} \overline{F(B)}.$$

Ceci montre que $G(B)$ est relativement compact. Utilisant le théorème 1.6.17, on obtient l'existence de $x \in B$ tel que $x \in G(x)$. Montrons que $x \in F(x)$. Deux cas peuvent avoir lieu :soit $F(x) \cap B \neq \emptyset$ alors $x \in F(x)$, soit

$$F(x) \cap B = \emptyset \quad et \quad x \in G(x) \Rightarrow \exists y \in F(x), \|y\| > 2r : x = \frac{2r}{k} y.$$

Comme

$$x = \frac{2r}{k} y \Rightarrow y = \frac{k}{2r} x \Rightarrow 2r < \|y\| \leq k \Rightarrow \frac{2r}{k} < 1$$

alors

$$x \in \mathcal{M} \Rightarrow y \in F(\mathcal{M}) \Rightarrow \|y\| \leq r \Rightarrow 2r < r.$$

C'est donc que $F(x) \cap B = \emptyset$ est impossible.

Alternative nonlinéaire de Martelli

Théorème 1.6.19. *Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathcal{P}_{cp,cv}$ une application multivoque s.c.s. et condensante. Alors :*

(a) *Ou bien f posséde un point fixe dans E.*

(b) *Ou bien l'ensemble*

$$\{x \in E : \lambda x \in G(x), pour \lambda > 1\}$$

est non borné.

Alternative Nonlinéaire de Bader

Théorème 1.6.20. *Soit X, Y deux espaces de Banach avec Y réflexif. Considérons les applications $F : X \to \mathcal{P}_{cp,cv}(Y)$ s.c.s. et $K : Y \to X$ continues. Si $N = K \circ F$ est complétement continue, alors l'une des assertions suivantes a lieu :*

(a) *Ou bien l'ensemble $\{u \in X : u \in \lambda N(u), pour \quad 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.*

(b) *Ou bien N posséde un point fixe,i.e. il existe $u \in X$ tel que $u \in N(u)$.*

Alternative Nonlinéaire de Dhage

Théorème 1.6.21. *Soit $B(0,r)$ et $B[0,r]$ respectivement les ouverte et fermée dans un espace de Banach E centrée à l'origine et de rayon r et soit $\mathcal{A} : B[0,r] \to \mathcal{P}_{l,c,b}(E)$ et $\mathcal{B} : B[0,r] \to \mathcal{P}_{cp,c}(E)$ deux opérateurs multivoques vérifiant*

(i) *$\mathcal{A}$ est une contraction multivoque.*

(ii) *$\mathcal{B}$ est compact s.c.s.*

Alors ou

(a) *L'opérateur d'inlusion $x \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ posséde une solution dans $B[0,1]$, ou*

(b) *Il existe* $x_0 \in E$ *avec* $\|x_0\| = r$ *tel que* $\lambda x_0 \in \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}x_0$ *pour* $\lambda > 1$.

Chapitre 2

Quelques problèmes d'inclusions différentielles

2.1 solution positive multiples à un problème aux limites

2.1.1 Introduction

Considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} Lu \in \lambda F(t,u), & \text{0<t<1,} \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, & \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, & \end{cases} \tag{2.1}$$

où $Lu = -(ru')' + qu$, avec r une fonction strictement positive de classe C^1 sur $[0,1]$, et q une fonction continue positive sur$[0,1]$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ tel que $\alpha\delta + \alpha\gamma + \beta\gamma > 0$ et $F : [0,1] \times [0,+\infty) \to P([0,+\infty))$,$\lambda$ est un paramètre positif.

2.1.2 Existence de solutions positives

On sait que la fonction de Green associée à l'opérateur L avec les conditions aux limites données dans 2.1 est définie par $G(\cdot,\cdot) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, tel que pour tout (t,s)

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c}\phi(t)\psi(s), & \text{si} t \geq s \\ c\frac{1}{c}\phi(s)\psi(t), & \text{si} s \geq t. \end{cases} \tag{2.2}$$

où ϕ et ψ vérifient $\begin{cases} L\phi = 0, & \phi(0) = \beta, \quad \phi'(0) = \alpha\,; \\ L\psi = 0, & \psi(1) = \delta, \quad \psi'(1) = -\gamma \end{cases}$ et $c = r(t)(\phi'(t)\psi(t) - \psi'(t)\phi(t)) > 0$.
Posons $G = \max\{G(t,s) : 0 \leq t, s \leq 1\}$.

Définition 2.1.1. *On appelle solution de2.1 toute fonction $u \in C^2[0,1]$ vérifiant les équations du problème 2.1.*

Lemme 2.1.1. $u \in C^2[0,1]$ *est solution de (2.1) si et seulement si*

$$u(t) \in \lambda \int_0^1 G(t,s)F(s,u(s))ds.$$

ou $G(t,s)$ est la fonction de Green définie dans 2.2.

considèrons Les hypothèses suivantes :

(H1) $F(x,.) : [0,1] \to \mathcal{P}_{cv,cp}([0,+\infty))$ posssède une selection mesurable $f(t) \in F(t,x)$ p.p $t \in [0,1]$ et $x \in [0,+\infty)$.

(H2) $F(.,t) : [0,+\infty) \to \mathcal{P}_{cv,cp}([0,+\infty))$ est s.c.s, p.p $t \in [0,1]$.

(H3) Il existe une fonction positive $w \in L^1[0,1]$ tel que :

$$\|F(t,x)\| \leq w(s)(1+x).$$

Pour tout $x \in [0,+\infty)$, p.p $t \in [0,1]$.

(H4) $F : [0,1] \times [0,+\infty) \to \mathcal{P}_{\rfloor_{\surd}}([\prime,+\infty))$ un opérateur multivoque presque s.c.i c'est-à -dire $\exists\{I_m\}$ un suite d'ensembles compacts disjoints ,$I_m \in [0,1]$ tel que :

1. $\max([0,1] \setminus \cup_m I_m = 0$
2. la restriction de F à chaque ensemble $J_m = I_m \times [0,\infty)$ est s.c.i.

A partir de ces hypothèses, on en déduit les résultats suivants

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H3), si le problème (2.1)n'a pas de solution triviale, alors pour chaque $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 w(s)ds}$, le problème (2.1) possède une solution positive.*

Théorème 2.1.2. *Sous les hypothèses (H1)-(H4), si le problème (2.1) n'a pas de solution triviale, alors pour chaque $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 w(s)ds}$, le problème (2.1) posséde une solution positive.*

Démonstration. Pour démontrer le (2.1.1), nous devons utiliser le théorème de point fixe de Bahnenblust-Karlin. A partir des hypothèses (H1)-(H3), on déduit que l'opérateur de selection

$$S_F : C_+[0,1] \to \mathcal{P}_{pv,cv}(L^1_+[0,1])$$

définie par

$$S_F(u) = \{f \in L^1_+[0,1] : f(s) \in F(s,u(s)) \quad p.ps \in [0,1]\}$$

est continue et fermé ([4].
Soit l'opérateur complétement continu

$$Q_\lambda : L^1_+[0,1] \to C_+[0,1]), Q_\lambda(f)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

Posons

$$\Gamma_\lambda = Q_\lambda \circ S_F = \lambda \int_0^1 G(t,s)F(s,u(s))ds.$$

Est s.c.s.
Ou $Q_\lambda : L^1_+[0,1] \to C_+[0,1], \qquad Q_\lambda(f)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)f(s)ds,$
posons $T_+ = \{u \in C_+[0,1] : \|u\|_c \leq p, oup > 0\}$. Pour $u \in T_+$,on a

$$\|\Gamma_\lambda(u)\|_c = \max\{\|\lambda \int_0^1 G(t,s)f(s)ds\|_c : f \in \wp_F(u)\},$$

ou

$$\|\int_0^1 G(t,s)f(s)ds\|_c = \sup_{t\in[0,1]}\{\int_0^1 G(t,s)f(s)ds\}.$$

Et d'après les hypothèses (H1) et (H3),p.p $s \in [0,1]$, On a :

$$f(s) \leq \|F(s,u(s))\| \leq w(s)(1-u(s)) \leq w(s)(1-\|u\|_c) \leq w(s)(1-p).$$

Et de conclure

$$\|\Gamma_\lambda\|_c \leq \lambda G(1+p)\int_0^1 w(s)ds.$$

Car

$$\int_0^1 G(t,s)f(s)ds \leq G(1+p)\int_0^1 w(s)ds,$$

pour tout $f \in S_F(u)$. Choisissons $p \geq \frac{\lambda G \int_0^1 w(s)ds}{1-\lambda G \int_0^1 w(s)ds}$; alors $\|\Gamma_\lambda(u)\|_c \leq p$, l'opérateur Q_λ admet au moins un point fixe T_+,i.e.,le problème (2.1)admet une solution positive.
Et pour le théorème (2.1.1), on va utiliser le théorème de point fixe de Schauder, on déduit

$S_F : C_+[0,1] \to C(L^1_+[0,1])$ est un multi-opérateur de sélection est s.c.i à valeurs décomposables, fermées posséde une selection continue

$$l : C_+[0,1] \to L^1_+[0,1], \quad l(u) \in S_F$$

par suite l'opérateur :

$$\gamma_\lambda : C_+[0,1] \to C_+[0,1]$$

$$\gamma_\lambda(u)(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)l(u)(s)ds.$$

est une sélection complétement continue de Γ_λ, pour chaque $0 < \lambda < \frac{1}{G\int_0^1 w(s)ds}$, on peut choisir $p > 0$ tel que $\|\Gamma_\lambda\|_c \leq p$,l'opérateur γ_λ admet au moins un point fixe T_+,i.e., le problème (2.1) admet ume solution positive.

2.1.3 Existence de solutions multiples

Considérons les hypothèses suivantes :

(F1) $F : (0,1) \times [0,+\infty) \to Kv([0,+\infty))$ est s.c.i.

(F2) chaque $M > 0, \exists g_M \in [0,1]$ une fonction continue tel que :

$$\|F(t,x)\|_{\mathcal{P}(Y)} \leq G_M(t), \quad t \in (0,1), x \in [0,M]$$

et

$$\int_0^1 G(s,s)g_M(s)ds < \infty.$$

(F3) $\exists I \subset (0,1)$ un intervalle et $m \in L^1(I)$ fonction non triviale avec $m \geq 0$ tel que pour tout $b > 0, \exists r_b > 0$ on a :$\|F(t,x)\|_0 \geq bm(t)x, \quad t \in I \quad etx \in (0,r_b)$.

(F4) $\exists I_1 \subset (0,1)$ un intervalle et $m_1 \in L^1(I_1)$ fonction non triviale avec $m_1 \geq 0$ tel que pour tout $c > 0, \exists R_c > 0$ on a :$\|F(t,x)\|_0 \geq cm_1(t)x, \quad t \in I_1 \quad etx \in R_c$.

D'après les hypothèses on déduit le théorème suivant :

Théorème 2.1.3. *Admettons que les hypothèses (F1)-(F3) ont lieu. Alors il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (2.1)possède une solution positive que $0 < \lambda < \lambda_0$.Si de plus (F4) a lieu, alors le problème (2.1) a au moins deux solutions positives pour $0 < \lambda < \lambda_0$.*

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.2. *Soit X un espace métrique et Y un espace de Banach. Alors chaque multi-application s.c.i.w : $X \to Cv(Y)$ posséde une sélection continue.*

Démonstration.(du théorème 2.1.1). Soit $f : (0,1)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une sélection continue de F,i.e., $f(t,x) \in F(t,x) \quad$ pour tout$(t,x) \in (0,1) \times [0,+\infty)$. Et on a

$$\|F(t,x)\|_0 \leq f(t,x) \leq \|F(t,x)\|$$

pour tout $(t,x) \in (0,1) \times [0,+\infty)$.
Considèrons le problème

$$\begin{cases} -(ru')' + qu = F(t,u), \quad 0<\text{t}<1, \\ \alpha u(0) - \beta u'(0) = 0, \\ \gamma u(1) + \delta u'(1) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

D'après (F1)-(F4), on a :

(f1) $f : (0,1) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ est continue.

(f2) pour chaque $M > 0, \exists g_M \in (0,1)$ une fonction continue tel que $f(t,x) \leq g_M(t)$ pour $t \in (0,1), 0 \leq x \leq M$ et $\int_0^1 G(s,s)g_M(s)ds < \infty$

(f3) $\exists I \subset (0,1)$ un intervalle et $m \in L^1(I)$ une fonction non triviale avec $m \geq 0$ tel que pour chaque $b > 0$ on a :$f(t,x) \geq bm(t)x, \quad t \in I \quad etx \in (0,r_b)$. Si (F4) a lieu, on a

(f4) $\exists I_1 \subset (0,1)$ un intervalle et $m_1 \in L^1(I_1)$ fonction non triviale avec $m_1 \geq 0$ tel que pour tout $c > 0, \exists R_c > 0$ on a :$f(t,x) \geq cm_1(t)x, \quad t \in I_1 \quad etx \in R_c$.

Et donc on déduit que sous les hypothèses (f1)-(f3),il existe $\lambda_0 > 0$ tel que le problème (2.3) posséde une solution positive pour $0 < \lambda < \lambda_0$. Si,de plus (f4) est satisfaite, alors le problème (2.3)possède au moins deux solutions pour $0 < \lambda < \lambda_0$.

2.2 Problème aux limites associé à un système perturbé

2.2.1 Introduction

Considérons le problème pour un système d'inclusions différentielles du premier ordre suivant

$$\begin{cases} x'(t) \in A(t)x(t) + F(t,x(t)) + G(t,x(t)), \quad \text{p.p } t \in [0,1], \\ Mx(0) + Nx(1) = \eta, \end{cases} \tag{2.4}$$

ou $F, G : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont des multi-applications à valeurs convexes, $A(.)$ est une fonction matrice continue $(n \times n)$; M, N sont des matrices constantes $(n \times n)$ et $\eta \in \mathbb{R}^n$. Notons par $\|x\|$ la norme de $x \in \mathbb{R}^n$ et par $\|A\|$ la norme de la matrice A.

2.2.2 Existence de solution

Définition 2.2.1. *On dit que $x \in AC((0,1), \mathbb{R}^n)$ est solution de (2.4), s'il existe deux fonctions $v_1, v_2 \in L^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ avec $v_1(t) \in F(t, x(t)), v_2(t) \in G(t, x(t))$ p.p $t \in [0,1]$ tel que $x'(t) = A(t)x(t) + v_1(t) + v_2(t)$, p.pt $\in [0,1]$, et la fonction x vérifie la condition $Mx(0) + Nx(1) = 0$,*

Par les arguments standard des systèmes différentielles linéaire on peut montrer le résultat suivant

Lemme 2.2.1. *Soit le problème aux limites linèaire suivant*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + h(t), & p.pt \in (0,1); \\ Mx(0) + Nx(1) = 0. \end{cases}$$

et soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale solution de $x'(t) = A(t)x(t)$ tel que $\Phi(0) = I$ la matrice identité. Alors si $det(M + N\Phi(1)) = 0$, alors le problème non homogène possède une solution unique donnée par

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s)h(s)ds$$

ou

$$K(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)J(s),, & si\ 0 \le t \le s \\ \Phi(s)\Phi(t)^{-1} + \Phi(t)J(s), & si\ s \le t \le 1. \end{cases}$$

avec $J(t) = -(M + N\Phi(1))^{-1}N\Phi(1)\Phi(t)^{-1}$.

Si la fonction x vérifie la condition $Mx(0) + Nx(1) = \eta$, donc la solution de problème (2.4) s'écrit

$$x(t) = x_h(t) + \Phi(t)(M + \Phi(1)N)^{-1}\eta.$$

Nous allons transformer le problème (2.4) en un problème de point fixe, pour cela, considérons l'opérateur suivant $\mathcal{N} : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{P}(C[0,1], \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{N}(x) = \{u \in C([0,1], \mathbb{R}^n) : u(t) = \int_0^1 K(t,s)(v_1(s) + v_2(s))ds, v_1 \in S_{F,x} \quad et \quad v_2 \in S_{G,x}\}.$$

Les hypothèses suivantes sont utiles pour la suite

(R1) La fonction $t \to F(t,y)$ est mesurable, à valeurs convexes et intégrablement bornée pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$

(R2) $H_d(F(t,y), F(t,\overline{y})) \leq l(t)\|y-\overline{y}\|$ pour p.p $t \in [0,1]$ et tout $y, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ ou $l \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $l(t) > 0$ et $H_d(0, F(t,0)) \leq l(t) \quad p.p. \quad t \in [0,1]$

(R3) L'appliquation multivoque G est Carathéodory et $G(t,y)$ est à valeurs compactes, convexes pour chaque $(t,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$.

(R4) Il existe une fonction $q \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $q(t) > 0$ pour p.p $t \in [0,1]$, et $\psi : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ une fonction continue croissante tel que

$$\|G(t,y)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{\|v\|, v \in G(t,y)\} \leq q(t)\psi(\|y\|) \quad \text{p.p } t \in [0,1] \quad \text{et} \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

(R5) $\exists r > 0$ tel que

$$r > \frac{K^*(\|l\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}\psi(r))}{1 - K^*\|l\|_{L^1}}$$

ou $K^* = \sup_{(t,s)\in[0,1]^2} |K(t,s)|$.

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothèses (R1)-(R5), si*

$$K^*\|l\|_{L^1} < 1, \tag{2.5}$$

alors le problème (2.4) admet au moins une solution.

Démostration. Pour démontrer ce théorème, on va utiliser le théorème de point fixe de Alternative Nonlinéaire de Dhage .

Soit $X = C([0,1],\mathbb{R}^n)$ et $B(0,r) \subset X$ une boule ouverte ,ou r vérifie l'inégalité dans l'hypothèses (R5), on définit deux applications multivoques sur $B[0,r]$ par

$$\mathcal{A}(x) = \{u \in X : u(t) = \int_0^1 K(t,s)v_1(s)ds, v_1 \in S_{F,x}\}.$$

et

$$\mathcal{B}(x) = \{u \in X : u(t) = \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds, v_2 \in S_{G,x}\}.$$

Nous allons vérifier que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient toutes les conditions du théorème de point fixe de Alternative Nonlinéaire de Dhage.

Etape 1 Montrons que $\mathcal{A}(x)$ est un convexe, fermé, borné dans X pour chaque $x \in B[0;r]$.

(a) La fermeture s'en déduit si on montre que les valeurs prises par l'opérateur de Niemytsky sont fermées dans $L1([0;1];\mathbb{R}^n)$. Soit (w_n) une suite d'éléments de $L1([0;1];\mathbb{R}^n)$ convergente vers une limite w. Or, comme les valeurs de $S_{F,x}$ sont fermées d'après l'hypothèse (H1)dans $L^1([0;1];\mathbb{R}^n)$. Alors, pour chaque $x \in B[0;r]$, on a que $\mathcal{A}(x)$ est un sous-ensemble fermé, non vide de X.

(b) Montrons que, pour chaque $x \in B[0;r]$, $\mathcal{A}(x)$ est un sous-ensemble convexe de X. Soient $u_1; u_2 \in \mathcal{A}(x)$, Alors il existe $v_1; v_2 \in S_{F,x}$ tel que pour tout $t \in [0;1]$; on a

$$u_i(t) = \int_0^1 K(t;s)v_i(s)ds; \qquad i = 1,2$$

Soit $0 \leq d \leq 1$. Alors, pour chaque $t \in [0;1]$ on a

$$(du_1 + (1-d)u_2)(t) = \int_0^1 K(t;s)[dv_1(s) + (1-d)v_2(s)]ds.$$

Comme l'ensemble de sélections $S_{F,x}$ est convexe (car F est à valeurs convexes), alors

$$du_1 + (1-d)u_2 \in \mathcal{A}(x).$$

Etape 2 Montrons que $\mathcal{A}$ est contraction multivoque sur $B[0;r]$.
Soit $x, \overline{x} \in B[0;r]$ et $u_1 \in \mathcal{A}(x)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t;x(t))$ tel que pour chaque $t \in [0;1]$

$$u_1(t) = \int_0^1 K(t;s)v_1(s)ds$$

L'hypothèse (H2) entraîne que

$$H_d(F(t;x(t)); F(t;x(t))) \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|$$

Donc, il existe $w \in F(t, \overline{x}(t))$ tel que

$$\|v_1(t) - w\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|; \quad t \in [0;1].$$

Considéerons la multi-application $U : [0,1] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$U(t) = \{w \in \mathbb{R}^n : \|v_1(t) - w\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|\}$$

Comme l'opérateur multivoque$V(t) = U(t) \cap F(t, \overline{x}(t))$ est mesurable (voir Propo- sition III.4, [3]), V admet une selection mesurable $v_2(t) \in F(t, \overline{x}(t))$ et pour chaque $t \in [0;1]$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| \leq l(t)\|x(t) - \overline{x}(t)\|.$$

Pour chaque $t \in [0,1]$

$$u_2(t) = \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds;$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\| &\leq \int_0^1 \|K(t,s)\|\|v_1(s) - v_2(s)\|ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t,s)\|l(s)\|x(s) - \overline{x}(s)\|ds. \end{aligned}$$

Par suite

$$\|u_1 - u_2\| \leq K^*\|l\|_{L^1}\|x - \overline{x}\|_C.$$

En interchangeant les rôles de x et $\overline{x}$, on obtient une seconde relation puis on arrive à

$$H_d(\mathcal{A}(x),^m athcal A(x)) \leq K^*\|l\|_{L^1}\|x - \overline{x}\|_C.$$

Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est, en vertu de (2.5) une contraction sur X.

Etape 3 Montrons que l'opérateur multivoque $\mathcal{B}$ est compact et s.c.s sur $B(0,r)$.

Pour montrer que $\mathcal{B}$ est compacte sur $B(0,r)$; soit $x \in B(0,r)$. Alors, pour chaque $u \in \mathcal{B}(x)$, il existe $v \in S_{G,x}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)v(s)ds$$

L'hypothèse (H4) entraîne que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \int_0^1 \|K(t,s)\|\|v(s)\|ds \\ &\leq K^* \int_0^1 \|v(s)\|ds \\ &\leq K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|x\|_C)ds \\ &\leq K^*\|q\|_{L^1}\psi(r) \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{B}$ transforme les bornés en des ensembles équicontinus de X. Soit $t, \tau \in [0,1]$ et

$x \in B(0,r)$. Pour chaque $u \in \mathcal{B}(x)$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(\tau\| &\leq \int_0^1 \|K(t,s) - K(\tau,s)\| \|v(s)\| ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t,s) - K(\tau,s)\| q(s)\psi(\|x\|_C) ds \\ &\leq \int_0^1 \|K(t,s) - K(\tau,s)\| q(s)\psi(r) ds \end{aligned}$$

Le terme de droite tend vers zéro quand $|t-\tau| \to 0$. On conclut alors Ã partir du Lemme d'Arzelà-Ascolis l'opérateur $\mathcal{B} : B(0,r) \to \mathcal{P}(X)$ est compact.

Etape 4 Montrons que $\mathcal{B}$ est à graphe fermé.

Soit $(x_n) \to x*$ et $(y_n) \in \mathcal{B}(x_n)$ tel que $(y_n) \to y*$. Montrons que $y* \in \mathcal{B}(x*)$. Comme $y_n \in \mathcal{B}(x_n)$; il existe $v_n \in S_{G,x_n}$ tel que, pour chaque $t \in [0,1]$

$$y_n(t) = \int_0^1 K(t,s) v_n(s) ds$$

On doit montrer qu'il existe $y* \in S_{G,x*}$ tel que, pour tout $t \in [0,1]$;

$$y*(t) = \int_0^1 K(t,s) v*(s) ds$$

Il est clair que

$$\|y_n - y*\|_C \to 0, \qquad \text{lorsque} n \to \infty.$$

Considérons l'opérateur linéaire continu

$$\Gamma(L^1[0,1], \mathbb{R}) \to X$$

définie par

$$v \mapsto \Gamma(v)(t) = \int_0^1 K(t,s) v(s) ds$$

On sait que l'opérateur $\Gamma \circ S_F$ est un opérateur à graphe fermé. De plus

$$y_n(t) \in \Gamma(S_{G,x_n}).$$

Comme $x_n \to x*$, alors

$$y*(t) = \int_0^1 K(t,s) v*(s) ds$$

avec $v* \in S_{G,x*}$.

Etape 5 Montrons que la seconde assertion du théorème de Dhage n'est pas satis- faite.

Soit $u \in X$ une solution possible de $\lambda u \in \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u)$ pour un réel $\lambda > 1$ avec $\|u\|_C = r$. Alors il existe $v_1 \in S_{F,u}$ et $v_2 \in S_{G,u}$ tel que pour chaque $t \in [0,1]$ on a

$$u(t) = \lambda^{-1} \int_0^1 K(t,s)v_1(s)ds + \lambda^{-1} \int_0^1 K(t,s)v_2(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq K^* \int_0^1 \|v_1(s)\|ds + K^* \int_0^1 \|v_2(s)\|ds \\
&\leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u(s)\| + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u(s)\|)ds \\
&\leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u\|_C + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u\|_C)ds.
\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieur en t, on obtient,

$$\|u\|_C \leq K^* \int_0^1 (l(s)\|u\|_C + l(s))ds + K^* \int_0^1 q(s)\psi(\|u\|_C)ds.$$

En remplaçant $\|u\|_C = r$, dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$r \leq \frac{K^*(\|l\|_{L^1} + \|q\|_{L^1}\psi(r))}{1 - K^*\|l\|_{L^1}}$$

ce qui contredit l'hypothèse (R5). Ainsi la deuxième assertion du théorème de Dhage n'a pas lieu et le problème (2.4) posséde une solution x définie sur $[0,1]$.

2.3 Problème aux limites à conditions intégrales

On se propose d'étudier le problème aux limites avec conditions intégrales

$$\begin{cases}
x''(t) \in F(t, x(t)), & \text{p.p } t \in [0,1], \\
x(0) - k_1 x'(0) = \int_0^1 h_1(x(s))ds, & \\
x(1) + k_2 x'(1) = \int_0^1 h_2(x(s))ds. &
\end{cases} \tag{2.6}$$

ou $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une multi-application à valeurs compactes, $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonction continues et K_i des constantes positives $(i = 1,2)$.

Une fonction $x \in AC^1([0,1],\mathbb{R})$ est solution de (2.6), s'il existe une fonction $v \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ *avec* $v(t) \in F(t,x(t))$ $p.p.t \in [0,1]$ tel que $x''(t) = v(t)$ p.p $t \in [0,1]$ et x satisfait les conditions du pb (2.6) . Si $\sigma(t), \rho_1(t), \rho_2(t) \in C[0,1]$, avec $\sigma(t) \subset v(t), \rho_1(t) \subset h_1(t), \rho_2(t) \subset h_2(t)$,donc le problème linéaire

$$\begin{cases} x''(t) = \sigma(t), & \text{p.p } t \in [0,1], \\ x(0) - k_1 x'(0) = \int_0^1 \rho_1(x(s))ds, & \\ x(1) + k_2 x'(1) = \int_0^1 \rho_2(x(s))ds. & \end{cases}$$

admet une unique solution donnée par

$$x(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)\sigma(s)ds,$$

ou

$$P(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1-t+k_2\int_0^1 \rho_1(s)ds + (k_1+1)\int_0^1 \rho_2(s)ds\}$$

est l'unique solution du

$$x''(t) = 0, \quad p.p.t \in [0,1]$$

et

$$G(t,s) = \frac{-1}{k_1+k_2+1}\begin{cases} (k_1+t)(1-s+k_2), & \text{si } 0 \le t < s \le 1\,; \\ (k_1+s)(1-t+k_2), & \text{si } 0 \le s < t \le 1. \end{cases}$$

est la fonction de Green. Notons que $G(t,s) < 0$ sur $(0,1) \times (0,1)$

2.3.1 Le cas convexe

Soient les hypothèses suivantes

(D1) $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp,c}(\mathbb{R})$ est L^1-Carathéodory ;

(D2) $\exists c_1, c_2$ deux constantes positives tel que

$$|h_1(x)| \le c_1 \quad et \quad |h_2(x)| \le \overline{c_2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(D3) Il existe une fonction $\psi : [0,\infty) \to (0,\infty)$ positive croissante et une fonction $p \in L^1([0,1]\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,s)\| \le p(t)\psi(|x|) \quad pourchaque \quad (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$

(D4) Il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\frac{M}{\frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1+k_2)c_1 + (k_1+1)c_2\} + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\psi(M)\int_0^1 p(s)ds} > 1.$$

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (D1)-(D4), le problème (2.6) admet au moins une solution.*

On va utiliser le théorème de point fixe (alternative non linéaire de leray-schauder), donc on va prendre un opérateur définie par $N : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}))$, avec

$$N(x) = \{h \in C([0,1],\mathbb{R}) : h(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, v \in S_{F,x}\},$$

ou

$$P(t) = \frac{1}{1+k_1+k_2}\{(1-t+k_2)\int_0^1 h_1(x(s))ds + (k_1+t)\int_0^1 h_2(x(s))ds\}$$

et on va montrer que cet opérateur est convexe pour chaque $x \in C([0,1],\mathbb{R})$. Et transforme les bornés en des bornés et en des ensembles équicontinus de $C([0,1],\mathbb{R})$, et il est à graphe fermé. Finalement on va travailler à une estimation qui à priori montre que L'alternative non linéaire de Leray-Schauder nous donne l'existence d'un point fixe pour N solution du problème (1.6.7).

2.3.2 Le cas non convexe

On admet les hypothèses suivantes

(D5) $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est tel que $F(.,x) : [0,1] \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$;

(D6) $H_b(F(t,x), F(t,\overline{x})) \leq l(x)|x-\overline{x}|$ p.p.$t \in [0,1]$ et $x,\overline{x} \in \mathbb{R}$ ou $l \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ et $d(0, F(t,0)) \leq l(x)$ p.p.$t \in [0,1]$;

(D7) Il existe deux constantes positives d_1 et d_2 tel que $|h_1(x) - h_1(\overline{x})| \leq d_1|x-\overline{x}|$ et $|h_2(x) - h_2(\overline{x})| \leq d_2|x-\overline{x}|$ pour tout $x,\overline{x} \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.3.2. *Sous les hypothèses (D5)-(D7), si de plus*

$$\frac{1}{1+k_1+k_2}[(1+k_1)d_1 + (1+k_2)d_2] + \sup_{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]} |G(t,s)|\|l\|_{L^1} < 1,$$

alors le problème (2.6) admet au moins une solution.

Pour montrer ce théorème,, on va utiliser l'opérateur $N : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(C([0,1],\mathbb{R}))$,

$$N(x) = \{h \in C([0,1],\mathbb{R}) : h(t) = P(t) + \int_0^1 G(t,s)v(s)ds, v \in S_{F,x}\},$$

on doit montrer que $N(t) \in \mathcal{P}_{cl}(C[0,1],\mathbb{R})$ pour chaque $x \in C([0,1],\mathbb{R})$, et Il existe $\gamma < 1$ tel que $H_d(N(x), N(\overline{x})) \leq \gamma\|x-\overline{x}\|_\infty$ pour chaque $x,\overline{x} \in C([0,1],\mathbb{R})$. Finalement on déduit que N est une contraction et admet donc un point fixe x solution du problème (2.6).

Bibliographie

[1] L. Górniewicz, *Topological fixed point theory of multivalued mappings*, Mathematics and its Applications, 495, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[2] Sh. Hu and N. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*, Volume I : Theory, Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1997.

[3] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable multi- fonctions, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 580, (1977).

[4] Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis and V. V. Obu- khovskii, Introduction to the Theory of Multimap and Differential Inclusions, Moscow : KomKnhiga, 2005, 216 pp. (Russian)