Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Moulay Tahar de Sïda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Discipline : Mathématiques

Spécialité : Analyse Stochastique Statistique des Processus et Applications

Présenté par : **Otmane Zahra**

Sur l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle par la méthode locale linéaire

---

Soutenu le : 01 Juin 2016. **Devant le jury composé de** :

Président :	M. Laouni	Maître Assistant A. Université de Saïda.
Examinateurs :	R. Rouane	Maître de Conférences B. Université de Saïda.
	M. Kadi	Maître Assistant A. Université de Saïda.
Encadreur :	S. Rahmani	Maître de Conférences B. Université de Saïda.

Dédicace

- ⋆ *Je dédie ce mémoire, à mes parents :*
- ○ *Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, qu'elle reçoit à travers ce travail aussi modeste l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.*
- ○ *Mon père qui peut être fier de trouver ici le résultat de longue année de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie.*

- ⋆ *Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de mes très chères sœurs Soumia, Fatiha, Aouali et Bouthayna et mon frère Mohamed. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.*

- ⋆ *A tous mes amis : Aicha, D.Khadidja, Saâdia, Fatiha, H.Khdidja, M.Fatiha, Ikram, Imene et Kawtar.*

Remerciements

- ⋆ Avant tous, nous remercions Allah le tout puissant qui nous a guidé tout au long de nos vie, qui nous a permis de nous instruire et d'arriver aussi loin dans les études, qui nous a donné courage et patience pour traverser tous les moments difficiles, et qui nous a permis d'achever ce travail.
- ⋆ J'exprime ma reconnaissance et toute ma sympathie à Mlle *Rahmani Saâdia* pour son encadrement, sa confiance et sa gentillesse. Je remercie également tous les autres membres de jury qui ont accepté de s'intéresser à mon travail et j'ai apporté leur jugement d'experts.
- ⋆ Un grand merci à tous ceux qui m'ont aidé à élaborer cette recherche.
- ⋆ A tous mes collègues et amies pour leur encouragement et leur aide.

Table des matières

Chapitre 1

Intruduction

1.1 La statistique fonctionnelle

La statistique fonctionnelle constitue une branche de la statistique dont le progrès s'est fortement intensifié ces dernières années. Depuis que les appareils d'enregistrement modernes collectent des ensembles de données volumineux observés de manière permanente, la modernisation de la méthodologie statistique, permettant de traiter ces données qui se présentent sous formes de courbes ou de surfaces, est devenue nécessaire. Un tel type des données est fréquemment rencontré dans de nombreux domaines. De plus, ces données se sont modélisées comme étant des réalisations d'une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un espace de dimension infinie.

Historiquement, l'analyse statistique des données fonctionnelles remonte aux années soixante quand plusieurs études, dans différentes disciplines scientifiques, s'intéressaient aux données sous forme de courbes. Il faut dire que les premiers travaux peuvent être conférés à des météorologues et des chimistes (cf. Holmström [21] en climatologie, Deville [9] en économétrie et Kirkpatrick et Heckman [22] en génétique.)

Par ailleurs, en statistique fonctionnelle, les premiers résultats sur l'analyse statistique des données fonctionnelles reviennent à la contribution de Ramsay et Silverman [29]. Cette monographie a permi, aux statisticiens, d'avoir une vision globale du traitement des données fonctionnelles en termes des techniques de régression, de discrimination statistique ainsi que d'analyse factorielle. Plus généralement, il faut noter que la contribution de Ferraty et Vieu [16] peut être considérée comme déterminante dans le cadre non-paramétrique fonctionnel. Ces auteurs ont étudié les propriétés asymptotiques de plusieurs modèles non-paramétriques tels que l'opérateur de régression, la fonction de répartition conditionnelle, la densité conditionnelle, etc.

1.2 La méthode des polynômes locaux dans le cas vectoriel

L'ajustement par polynômes locaux de la régression dans le cas multivarié a été largement développé. Lejeune [25] et Müller [27] ont discuté l'efficacité de l'estimation par la méthode des polynômes locaux. Tsybakov [31], quant à lui, il a étudié l'optimisation de la vitesse de convergence de la méthode des polynômes locaux dans le cas de l'estimation robuste.
Un autre point de vue plus récent en estimation par polynômes locaux a été prouvé par Fan [11] en étudiant l'estimateur local linéaire de la régression et en établissant la vitesse de convergence de l'erreur quadratique moyenne conditionnelle et celle de l'erreur quadratique moyenne conditionnelle intégrée. Dans [12], le même auteur a abordé le problème du risque minimax. Ensuite, Fan et Gijbels [13] ont abordé le problème de choix du paramètre de lissage dans l'estimation locale linéaire de la fonction de régression, et ils ont traité le même problème pour des degrés supérieurs, en estimant la régression et ses dérivées dans [14]. Nous renvoyons à Fan et Gijbels [15] pour une exposition compléte des propriétés des estimateurs localement polynomails avec de nombreuses applications statistiques.

1.3 La méthode des polynômes locaux dans le cas fonctionnel

Contrairement au cas multivarié, la littérature sur la méthode d'estimation par polynômes locaux dans le cadre fonctionnel est très restreinte. En effet, Barrientos et *al.* [2] ont utilisé une modélisation locale linéaire fonctionnelle rapide pour étudier l'opérateur de régression. Nous nous référons à El Methni et Rachdi [10] pour les degrés supérieurs. La performance de la méthode locale linéaire, en faisant une comparaison avec l'estimateur de Nadaraya-Watson via la méthode de Monte-Carlo dans le cas fonctionnel, a été établie par Baíllo et Grané [1]. Un procédé alternatif pour l'estimation locale linéaire fonctionnelle a été réalisé par Boj et *al.* [4]. On peut citer aussi le travail de Berlinet et *al.* [3] qui ont donné une majoration de l'erreur quadratique moyenne où ils ont posé des hypothèses de type Gamma-variation.

Notons enfin que la généralisation des résultats de Barrientos et *al.* [2] aux données spatialement dépendantes a été établie par Chouaf et Laksaci [5].

1.4 L'estimation de la fonction de répartition conditionnelle

L'étude statistique du lien entre deux variables aléatoires est un problème très important. Un des modèles le plus fréquemment rencontré en statistique non-paramétrique est la fonction de répartition conditionnelle. L'importance de cette fonction provient du fait que la plupart des quantités statistiques utilisées, dans la pratique, permettant de comprendre la relation liant une variable explicative X et une variable réponse Y sont fonction de celle-ci.

L'estimation non-paramétrique de la fonction de répartition conditionnelle lorsque la variable explicative est à valeurs dans un espace de dimension infini, a été introduite par Ferraty et *al.* [18]. Ces auteurs ont construit un estimateur à double noyaux pour la fonction de répartition conditionnelle et ils ont précisé la vitesse de convergence presque-complète de cet estimateur lorsque les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Le cas où les observations sont fonctionnelles et α-mélangeantes a été étudié par Ferraty et *al.* [17].

D'autre part, plusieurs auteurs ont étudié l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle comme une étude préliminaire de l'estimation des quantiles conditionnels. Laksaci et *al.* [23] par exemple, ont proposé une méthode d'estimation des quantiles conditionnels et ils ont réussi à établir la convergence presque-complète et la normalité asymptotique de leur estimateur quand les observations sont fonctionnelles.

1.5 Plan du mémoire

Ce mémoire est présenté en quatre chapitres. Nous avons préféré commencer par ce chapitre introductif qui contient un bref historique sur la modélisation non-paramétrique des données fonctionnelles, la fonction de répartition conditionnelle et la méthode des polynômes locaux. Nous y offrons de nombreuses références bibliographiques sur les sujets. La première partie du deuxième chapitre est consacrée à des généralisations sur la méthode des polynômes locaux, tandis que l'idée de base du Chapitre 2 se situe principalement dans la construction d'un estimateur local linéaire pour la fonction de répartition conditionnelle. L'établissement de sa vitesse de convergence presque-complète ponctuelle sera détaillé dans le chapitre 3. Tandis que la convergence en moyenne quadratique est explicitement donnée dans le chapitre 4. Nous terminons ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 2

Généralités sur la méthode des polynomes locaux

Avant de passer à notre objectif, qui est l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle par la méthode locale linéaire, il nous a paru logique de donner l'idée générale de la méthode des polynômes locaux. Ce chapitre est divisé en deux sections ; nous traitons le cas réel dans la première section en considérant comme modèle l'opérateur de régression, car notre étude s'est basée sur le fait que la fonction de réprtition conditionnelle peut-être considérée comme une fonction de régression [1]. Le traitement du cas fonctionnel en étudiant cette fois-ci la fonction de répartition conditionnelle sera explicitement donnée dans la deuxième section.

2.1 L'estimation par la méthode des polynômes locaux dans le cas réel

2.1.1 Le principe de la méthode

L'estimation de la fonction de régression par la méthode des polynômes locaux est fondée sur une simple généralisation de l'estimateur de *Nadarya-Watson* appelé à noyaux. L'idée principale de cette approche est de considérer le problème de la régression sous l'angle des moindres carrés en considérant la

1. Cette idée sera explicitement donnée dans la fin de ce chapitre.

fonction de régression $r(.)$ comme solution d'un problème de moindres carrés. Par convenance, nous rappellons la définition de l'estimateur à noyau : lorsque $K \geq 0$,

$$\widehat{r}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)} = \frac{\widehat{g}_n(x,y)}{\widehat{f}_n(x)}.$$

où K est un noyau et $h = h_n$ est le paramètre de lissage. Nous avous, lorsque $K \geq 0$,

$$\{\widehat{g}_n(x,y) - \widehat{r}_n(x)\widehat{f}_n(x)\} = 0.$$

L'estimateur de la régression $\widehat{r}_n(x)$ peut donc être regardé comme la solution du problème de moindres carrés pondérés suivant :

$$\min_{a_0 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - a_0)^2 K(\frac{X_i - x}{h}). \tag{2.1}$$

En d'autres termes, l'estimateur $\widehat{r}_n(x)$ est obtenu par une approximation des moindres carrés localement constante des valeurs Y_i.
Plus généralement, définissons l'approximation des moindres carrés localement polynomiale de la façon suivante :
l'estimation localement polynomiale consiste en l'ajustement local d'un ploynôme de degré p aux données $\{(X_i, Y_i) : 1 \leq i \leq n\}$.
En effet, soit p un entier naturel fixé. Nous cherchons à ajuster le polynôme

$$a_0 + a_1(\cdot - x) + a_2(\cdot - x)^2 + \ldots + a_p(\cdot - x)^p$$

aux données (X_i, Y_i), via la méthode des moindres carrés pondérés.
Premièrement, on suppose l'existence de la $(p+1)$-iéme dérivée de la fonction de régression $r(.)$ au point x. Nous pouvons alors approximer localement la fonction de régression $r(x)$ par un ploynôme d'ordre p.
Il s'ensuit, via le développement de Taylor autour du point x,

$$\begin{aligned} r(z) &\approx r(x) + r'(x)(z-x) + \frac{r''(x)}{2}(z-x)^2 + \ldots + \frac{r^{(p)}(x)}{p!}(z-x)^p \\ &\approx \sum_{j=0}^{p} \frac{r^{(j)}(x)}{j!}(z-x)^j =: \sum_{j=0}^{p} a_j (z-x)^j. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lorsque z est situé dans un voisinage du point x.
A présent, nous ajustons localement le polynôme (2.2) aux données $\{(X_i, Y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ par la méthode des moindres carrés pondérés avec comme fonction de poids $K\left(\dfrac{X_i - x}{h}\right)$.
Il faut minimiser par rapport au vecteur $a = (a_0, \ldots, a_p)^T \in \mathbb{R}^{p+1}$ la quantité suivante :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - r(z))^2 K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \tag{2.3}$$

On remplace $r(X_i)$ par son dévloppement de Taylor :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \sum_{j=0}^{p} a_j (X_i - x)^j)^2 K\left(\frac{X_i - x}{h}\right). \tag{2.4}$$

La solution de ce problème de minimisation peut-être donnée en utilisant les notations matricielles, le problème (2.4) peut se résumer ainsi

$$\min(Y - Qa)^t K(Y - Qa). \tag{2.5}$$

où Q la matrice définie par :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & (X_1 - x) & (X_1 - x)^2 & \cdots & (X_1 - x)^p \\ 1 & (X_2 - x) & (X_2 - x)^2 & \cdots & (X_2 - x)^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (X_n - x) & (X_n - x)^2 & \cdots & (X_n - x)^p \end{pmatrix}$$

et

$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t \quad et \quad a = (a_0, \ldots, a_p)^t$$

On désigne par K la matrice diagonale de poids :

$$K = \begin{pmatrix} K\left(\frac{X_1 - x}{h_n}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K\left(\frac{X_2 - x}{h_n}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & K\left(\frac{X_n - x}{h_n}\right) \end{pmatrix}$$

En suppsant l'inversibilité de Q^tKQ, et d'après la théorie des moindres carrés, le vecteur de solution est donné par

$$\widehat{a} = (Q^tKQ)^{-1}Q^tKY$$

où $\widehat{a} = (\widehat{a}_0, \ldots, \widehat{a}_p)^T \in \mathbb{R}^{p+1}$, le vecteur qui minimise l'expression (2.5).
D'après (2.2), la dérivée k-ième $r^{(k)}(x)$ peut-être donc estimer par $\widehat{a}_k \times k!$ pour $k = 0, 1, \ldots, p$. Il s'ensuit la définition suivante :

Definition 2.1.1.1. *La statistique*

$$r_n^{(k)}(x) = \widehat{a}_k \times k!, \quad 0 \leq k \leq p, \tag{2.6}$$

est l'estimateur localement polynomail d'ordre p de la dérivée k-ième de la régression $r^k(x)$.

Remarque 2.1.1. *Lorsque $k = p = 0$, on retrouve bien l'estimateur à noyau $\widehat{r}_n(x)$.*

2.1.2 La méthode locale linéaire

Un exemple praticulièrement intéressant est le cas $p = 1$ et $k = 0$. L'estimateur $\widehat{r}_n^{LL}(x)$ de la fonction de régression est appelé l'estimateur localement linéaire.
D'après (2.4) et (2.6) , il est égale à $\widehat{a_0}$ lorsque $\widehat{a} = (\widehat{a_0}, \widehat{a_1})$ désigne le vecteur solution de l'équation des moindres carrés suivant :

$$\min_{a_0, a_1 \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \{Y_i - a_0 - a_1(X_i - x)\}^2 K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right).$$

Plus explicitement, l'estimateur localement linéaire est défini par :

$$\widehat{r}_n^{LL}(x) =: \frac{\widehat{g}_{n,0}(x)\widehat{f}_{n,2}(x) - \widehat{g}_{n,1}(x)\widehat{f}_{n,1}(x)}{\widehat{f}_{n,0}(x)\widehat{f}_{n,2}(x) - \widehat{f}_{n,1}^2(x)}, \tag{2.7}$$

où

$$\widehat{f}_{n,j}(x) =: \frac{1}{h_n} \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{X_i - x}{h_n}\right\}^j K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right), \qquad j = 0, 1, 2,$$

$$\widehat{g}_{n,j}(x) =: \frac{1}{h_n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{X_i - x}{h_n}\right\}^j K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right), \qquad j = 0, 1.$$

Nous constaterons, par la suite de ce mémoire, que les estimateurs localement polynomiaux sont supérieurs aux estimateurs à noyaux dans le cadre du dispositif expérimental aléatoire, car la variance de cette méthode et celle de la méthode du noyau sont les mêmes, alors que d'aprés Fan [11], l'estimateur localement linéaire ou localement polynomail a un meilleur biais que l'estimateur à noyau. Il est d'ordre $O(h^{p+1})$, alors qu'il était d'ordre $O(h)$ pour la méthode du noyau.

2.2 La méthode locale linéaire dans le cas fonctionnel

Pour le même objectif, nous présenterons, en détails dans cette partie, les résultats obtenus en statistique non-paramétrique quand les données sont fonctionnelles, notamment par la méthode locale linéaire. Nous nous concenterons sur l'estimation de la fonction de répartition conditionnelle d'une variable aléatoire réelle Y conditionnée par une variable fonctionnelle X (à valeurs dans un espace de dimension infinie).

2.2.1 Le modéle et son estimateur

Notre but est d'étudier l'estimation locale linéaire de la fonction de répartition conditionnelle de Y sachant $X = x$, noteé $F^x(y)$, définie par :

$$F^x(y) = \mathbb{P}(Y \leq y/X = x)$$

Etant donné l'échantillon (X_i, Y_i) pour $i = 1, \ldots, n$ de couples ayant la même loi que (X, Y) à valeurs dans $\mathfrak{F} \times \mathbb{R}$, où $\mathfrak{F}$ est un espace semi-métrique équipé d'une semi-métrique d . Pour $x \in \mathfrak{F}$, nous suppossons qu'il existe une version réguliére de la probabilité conditionnelle de Y sachant $X = x$, qui est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Rappelons que, comme indiqué dans Fan et Gijbels [15], et Ferraty et vieu [19], la fonction $F^x(y)$ peut-être considérée comme un modèle de régression

de variable réponse $H(h_H^{-1}(y - Y_i))$, où H est une fonction de répartition et $(h_H = h_{H,n})$ est une suite des nombres réels positifs. Cette considération est motivée par le fait que :

$$\mathbb{E}[H(h_H^{-1}(y - Y_i))\backslash X_i = x] \to F^x(y) \quad quand \quad h_H \to 0.$$

Dans notre contexte fonctionnel, nous combinons cette idée avec la modélisation fonctionnelle rapide locale qui a été utilisée pour l'estimation de l'opérateur de régression dans le travail de Barrientos-Marin et *al.* [2] pour construire un estimateur locale linéaire fonctionnelle de la fonction de répartition conditionnelle, basé sur la minimisation par rapport à (a_0, a_1), du critère suivant :

$$\sum_{i=1}^{n}\{H(h_H^{-1}(y - Y_i)) - a_0 - a_1\beta(X_i, x)\}^2 K(h_H^{-1}\delta(x, X_i)). \tag{2.8}$$

où $\beta(.,.)$ et $\delta(.,.)$ sont des fonctions réelles connues, définies sur $\mathfrak{F}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $z \in \mathfrak{F}$, $\beta(z, z) = 0$, et $|\delta(.,.)| = d(.,.), K$ et H sont des noyaux, $h_K = h_{K,n}$ (resp. $h_H = h_{H,n}$) est une suite de nombres réels positifs. Nous construisons un estimateur de la fonction de répartition conditionnelle notée $\widehat{F^x} = \widehat{a_0}$ solution du problème de minimisation (2.8). Cet estimateur est explicitement défini par :

$$\widehat{F^x}(y) = \frac{\sum_{i,j=1}^n W_{ij} H(h_H^{-1}(y - Y_i))}{\sum_{i,j=1}^n W_{ij}}.$$

Où

$$W_{ij} = \beta(X_i, x)(\beta(X_i, x) - \beta(X_j, x))K(h_K^{-1}(\delta(x, X_i))K(h_K^{-1}(\delta(x, X_j))),$$

avec la convention $0/0 = 0$.
Dans le chapitre suivant, nous établissons sa vitesse de convergence ponctuelle presque-complète, tandis que l'erreur quadratique de cet estimateur sera présenté dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Chapitre 3

La convergence presque-complète

Dans ce chapitre, nous établissons la première propriété asymptotique qui et la convergence ponctuelle presque-complète de notre estimateur dans le cas où les observations sont indépendantes et identiquement distribuées. Pour ce but, ce chapitre est divisé en trois sections. Pour une meilleure lisibilité, nous regroupons dans la première section l'ensemble des hypothèses utilisées pour établir cette convergence. La deuxième section est consacrée au résultat principal de ce chapitre. La démonstration détaillée de ce résultat est donnée dans la dernière section.

3.1 Notation générales et hypothèses :

Dans ce qui suit, nous fixons x (resp. y) dans $\mathfrak{F}$ (resp. $\mathbb{R}$), et nous désignons par $\mathcal{V}_x$ (resp. $\mathcal{V}_y$) un voisinage de x (resp. y). En suite, nous supposons que notre modèle non-paramétrique satisfait les conditions suivantes :

(H1) Pour tout $r > 0$, $\phi_x(r) := \phi_x(-r, r) > 0$, et $\phi_x(r_1, r_2) = \mathbb{P}(r_2 \leq \delta(x, X) \leq r_1)$.

(H2) La fonction de répartition conditionnelle F^x est telle que : il existe $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathcal{V}_y \times \mathcal{V}_y$ et $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{V}_x \times \mathcal{V}_x$

$$|F^{x_1}(y_1) - F^{x_2}(y_2)| \leq C \left(|\delta(x_1, x_2)|^{b_1} + |y_1 - y_2|^{b_2} \right)$$

où C est une constante positive dépendante de x.

(H3) Les fonctions $\delta(.,.)$ et $\beta(.,.)$ sont telles que :

$$\forall z \in \mathfrak{F},\ C_1 \left|\delta(x,z)\right| \leq \left|\beta(x,z)\right| \leq C_2 \left|\delta(x,z)\right|$$

où $C_1 > 0$, $C_2 > 0$.

(H4) Le noyau K est une fonction positive, différentiable de support $[-1,1]$.

(H5) Le noyau H est une fonction différentiable, telle que :

$$\int |t|^{b_2} H'(t)dt < \infty.$$

(H6) Les paramètres de lissage satisfaites : il existe un entier positif n_0, tel que, $\forall n > n_0$:

$$-\frac{1}{\phi_x(h_K)} \int_{-1}^{1} \phi_x(zh_K, h_K) \frac{d}{dz} \left(z^2 K(z)\right) dz > C_3 > 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} h_K = 0, \quad \lim_{n\to\infty} h_K = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n\phi_x(h_K)} = 0,$$

et

$$h_K \int_{B(x,h_K)} \beta(u,x) dP(u) = o\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x)\, dP(u)\right)$$

où $B(x,r) = \{z \in \mathfrak{F} / |\delta(z,x)| \leq r\}$ et $dP(x)$ est la distribution cumulative de X.

Remarque 3.1.1. *Notons que, ces conditions sont généralement supposées dans ce contexte. Précisément, les conditions* (H1), (H3) *et* (H6) *sont les mêmes que ceux utilisés dans Barrientos-Marin [2] et Demongeot [8]. Bien que l'hypothèse* (H2) *est une condition de régularité qui caractérise l'espace fonctionnel de notre modèle elle est nécessaire pour évaluer le terme de biais dans les résultats asymptotiques de ce mémoire. Rappelons que cette hypothèse est semblable à l'hypothèse* (H2) *dans Ferraty [18] .*

Le théorème suivant donne la convergence presque-complète de l'estimateur $\widehat{F}^x$.

3.2 Propriété asymptotique

Théorème 3.2.1. *Sous les conditions (H1)-(H6), nous avons :*

$$|\widehat{F}^x(y) - F^x(y)| = O\left(h_K^{b_1} + h_H^{b_2}\right) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad p.co.$$

Où $\phi_x(h_K)$ est la concentration de la mesure de probabilité de la variable fonctionnelle X dans la boule de centre x et de rayon h_K

Avant de démontrer ce résultat, il est nécessaire de présenter le lemme suivant, ce lemme joue un rôle crucial dans la preuve du Théorème 3.2.1.

3.2.1 Lemme technique préliminaire :

Lemme 3.2.1. *Sous les hypothèses (H1), (H3)-(H6), on a :*

i) $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[K_1^k\, |\beta_1|^l] \leq C h_K^l \phi_x(h_K).$

ii) $\mathbb{E}[K_1\, \beta_1^2] \leq C h_K^2 \phi_x(h_K).$

Preuve du Lemme 3.2.1 :

Remarque 3.2.1. *La démonstration se fait sur le support* $[0,1]$*, par symétrie et d'une manière analogue on peut montrer ce résultat sur le support* $[-1,0]$

preuve de (i) : En utilisant l'hypothèse (H3), on a

$$K_1^k\, |\beta_1|^l\, h_K^{-l} \leq C K_1^k |\delta(x, X_1)|^l h_K^{-l},$$

et le fait que le noyau K est borné sur $[0,1]$, on a

$$K_1^k\, |\beta_1|^l\, h_K^{-l} \leq C|\delta(x, X_1)|^l h_K^{-l} 1_{[0,1]}(h_K^{-l}|\delta(x, X_1)|),$$

et par conséquent, on a

$$\mathbb{E}[K_1^k\, |\beta_1|^l\, h_K^{-l}] \leq C\phi_x(h_K)$$

Alors :

$$\mathbb{E}[K_1^k\, |\beta_1|^l] \leq C h_K^l \phi_x(h_K)$$

■

preuve de (ii) :

En utilisant l'hypothèse (H3), on obtient

$$\mathbb{E}[K_1\ |\beta_1|^2]\ >\ C\mathbb{E}[\delta(x,X_1)^2K_1]$$

De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K_1\tfrac{\delta(x,X_1)^2}{h_K^2}\right] &= \int_{\mathbb{R}} K(h_K^{-1}\delta(x,X_1))\ \frac{\delta(x,X_1)^2}{h_K^2}\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(\frac{\delta(x,X_1)}{h_K}),\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_0^1\ t^2K(t)\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t),\\
&= \int_0^1\ t^2K(t)\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t),\\
&= \int_0^1\ \left(\int_0^t\left(\frac{d}{du}(u^2K(u))\right)du\right)\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t),\\
&= \int_0^1\ \left(\int_0^1 1_{[u,1]}(t)\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t)\right)\ \frac{d}{du}(u^2K(u))du,
\end{aligned}$$

la dernière équation vient du théorème de Fubini. En outre, on peut vérifier que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1_{[u,1]}(t)\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t) &= \int_u^1\ dP^{|\delta(x,X_1)|/h_K}(t),\\
&= P(uh_K\le|\delta(x,X_1)|\le h_K),\\
&= \phi_x(uh_K,h_K),
\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[K_1\frac{\delta(x,X_1)^2}{h_K^2}\right]\ =\ \int_0^1\ \phi_x(uh_K,h_K)\ \frac{d}{du}(u^2K(u))du.$$

Alors :

$$\mathbb{E}[K_1\ \beta_1^2]\le Ch_K^2\phi_x(h_K).$$

∎

3.3 Preuve du Théorème 3.2.1

La démonstration de ce théorème est basée sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{F}^x(y) - F^x(y) &= \frac{1}{\widehat{F}_D^x}\left\{\left(\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right) - \left(F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]\right)\right\} \\ &+ \frac{F^x(y)}{\widehat{F}_D^x}\left(1 - \widehat{F}_D^x\right),\end{aligned}$$

où

$$\widehat{F}_N^x(y) = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}]}\sum_{i\neq j} W_{ij} H(h_H^{-1}(y - Y_j)),$$

et

$$\widehat{F}_D^x = \frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}]}\sum_{i\neq j} W_{ij}.$$

Ainsi, ce théorème est une conséquence directe des lemmes suivants :

Lemme 3.3.1. *Sous les hypothèses (H1), (H2), (H4) et (H5), on a :*

$$|F^x(y) \ - \ \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(h_K^{b1} + h_H^{b2}\right)$$

Lemme 3.3.2. *Sous les hypothèses (H1)-(H6), on a :*

$$|\widehat{F}_N^x(y) \ - \ \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad p.co.$$

Lemme 3.3.3. *Sous les hypothèses (H1), (H3), (H4) et (H6), on a :*

i) $1 - \widehat{F}_D^x = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad p.co.$

ii) $\exists\,\delta > 0$ *tel que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\widehat{F}_D^x < \delta\right) < \infty.$

Preuve du Lemme 3.3.1

Soit les couples (X_i, Y_i) identiquement distribuées alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}]}\sum_{j\neq i}^{n} W_{ij}H_j\right], \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\mathbb{E}[W_{12}\mathbb{E}[H_2/X_2]].\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_2/X_2] &= \int_R H(h_H^{-1}(y-z))f^x(z)dz,\\ &= h_H^{-1}\int_R H'(h_H^{-1}(y-z))F^x(z)dz.\end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \dfrac{y-z}{h_H}$, permet d'écrire

$$\mathbb{E}[H_2/X_2] = \int_R H'(t)F^x(y-h_H t)dt.$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[H_2/X_2] - F^x(y)| &= |\int_R H'(t)F^x(y-h_H t)dt - F^x(y)|,\\ &\leq \int_R H'(t)|F^x(y-h_H t) - F^x(y)|dt.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les hypothèses $(H2)$ et $(H4)$, on obtient :

$$\mathbb{I}_{B(x,h_K)}(x)|\mathbb{E}[H_2/X_2] - F^x(y)| \leq \int_R H'(t)\ \left(h_K^{b_1}\ +\ |t|^{b_2}\ h_H^{b_2}\right)\ dt.$$

Alors

$$|F^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(h_K^{b1} + h_H^{b2}\right)$$

■

Preuve du Lemme 3.3.2

On pose

$$\widehat{F}_N^x(y) = S_1(S_2S_3 - S_4S_5). \tag{3.1}$$

Où

$$S_1 = \frac{n^2h_K^2\phi_x(h_K)^2}{n(n-1)\mathbb{E}(w_{12})},\qquad S_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_jH_j}{\phi_x(h_K)},\qquad S_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i\beta_i^2}{h_K^2\phi_x(h_K)},$$

$$S_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \frac{K_j\beta_jH_j}{h_K\phi_x(h_K)}\qquad \text{et}\qquad S_5 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{K_i\beta_i}{h_K\phi_x(h_K)}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] &= S_1[(S_2S_3 - S_4S_5) - \mathbb{E}[S_2S_3 - S_4S_5]],\\ &= S_1[(S_2S_3 - \mathbb{E}[S_2S_3]) - (S_4S_5 - \mathbb{E}[S_4S_5])].\end{aligned}$$

De plus, on remarque que :

$$\begin{aligned}S_2S_3 - \mathbb{E}[S_2S_3] &= (S_2 - \mathbb{E}[S_2])(S_3 - \mathbb{E}[S_3]) + (S_3 - \mathbb{E}[S_3])\mathbb{E}[S_2]\\ &+(S_2 - \mathbb{E}[S_2])\mathbb{E}[S_3] + \mathbb{E}[S_2]\mathbb{E}[S_3] - \mathbb{E}[S_2S_3].\end{aligned}$$

Et de même :

$$\begin{aligned}S_4S_5 - \mathbb{E}[S_4S_5] &= (S_4 - \mathbb{E}[S_4])(S_5 - \mathbb{E}[S_5]) + (S_5 - \mathbb{E}[S_5])\mathbb{E}[S_4]\\ &+ (S_4 - \mathbb{E}[S_4])\mathbb{E}[S_5] + \mathbb{E}[S_4]\mathbb{E}[S_5] - \mathbb{E}[S_4S_5].\end{aligned}$$

Ainsi, le Lemme 3.3.2 est une conséquence directe des assertions suivantes :

$$S_i - \mathbb{E}[S_i] = O_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad pour \quad i = 2, 3, 4, 5, \tag{3.2}$$

$$S_1 = O(1), \quad \mathbb{E}[S_l] = O(1) \quad \text{pour} \quad l = 2, 3, 4, 5, \tag{3.3}$$

$$Cov(S_2, S_3) = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \tag{3.4}$$

et

$$Cov(S_4, S_5) = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right). \tag{3.5}$$

- **Preuve du resultat (3.2) :**

◦ On doit montrer que $S_1 = O(1)$, d'une part

$$h_K|\mathbb{E}[\beta_1 K_1]| \leq Ch_K|\int_{B(x,h_K)} \beta(u,x)\, dP(u)|,$$

et d'aprés l'hypothèse (H6)

$$h_K|\mathbb{E}[\beta_1 K_1]| \ = \ O\left(\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x)\, dP(u)\right).$$

En appliquant le Lemme 3.2.1 la partie i), avec $K = 1_{]-1,1[}, k = 1, l = 2,$ on a

$$\int_{B(x,h_K)} \beta^2(u,x)\, dP(u) \ \leq \ Ch_K^2\phi_x(h_K)$$

ce qui implique :

$$\mathbb{E}[\beta_1 K_1] \;=\; O(h_K \phi_x(h_K)).$$

Maintenant, d'après le Lemme 3.2.1 la partie ii) on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_{12}] &= \mathbb{E}[\beta_1^2 K_1]\mathbb{E}[K_1] \;-\; (\mathbb{E}[\beta_1 K_1])^2,\\ &> C h_K^2(\phi_x^2(h_K)).\end{aligned}$$

On en déduit $S_1 = O(1)$.

◦ On doit montrer que $\mathbb{E}[S_l] = O(1)$ pour $l = 2, 3, 4, 5$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_l] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{K_j H_j}{\phi_x(h_K)}\right].\\ &= \phi_x^{-1}(h_K)\mathbb{E}[K_1 H_1],\\ &= \phi_x^{-1}(h_K)\mathbb{E}[K_1].\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.2.1, on a $\mathbb{E}[K_1] \leq C\phi_x(h_K)$. Ce qui montre que $\mathbb{E}[S_2] = O(1)$.
En suivant le même raisonnement, on arrive à montrer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_3] &= h_K^{-2}\phi_x^{-1}(h_K)\mathbb{E}[\beta_1^2 K_1] &&= O(1),\\ \mathbb{E}[S_4] &= h_K^{-1}\phi_x^{-1}(h_K)\mathbb{E}[\beta_1 K_1 H_1] &&= O(1),\\ \mathbb{E}[S_5] &= h_K^{-1}\phi_x^{-1}(h_K)\mathbb{E}[\beta_1 K_1] &&= O(1).\end{aligned}$$

• **Preuve du résultat (3.3) :**

$$S_{l,k} - \mathbb{E}[S_{l,k}] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i^{l,k} \quad \text{pour} \quad l = 0, 1, 2 \quad \text{et} \quad k = 0, 1,$$

avec $$Z_i^{l,k} = \frac{1}{h_K^l \phi_x(h_K)}\left(K_i H_i^k \beta_i^l - \mathbb{E}[K_i H_i^k \beta_i^l]\right).$$

D'après le développement du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Z_i^{l,k}|^m] &= \mathbb{E}\left|h_K^{-lm}\phi_x(h_K)^{-m}\left(K_iH_i^k\beta_i^l - \mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l]\right)^m\right|, \\
&= h_K^{-lm}\phi_x(h_K)^{-m}\mathbb{E}\left|\sum_{d=0}^{m} C_m^d \left(K_iH_i^k\beta_i^l\right)^d \left(\mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l]\right)^{m-d}(-1)^{m-d}\right|, \\
&\leq h_K^{-lm}\phi_x(h_K)^{-m}\sum_{d=0}^{m} C_m^d\mathbb{E}\left|K_iH_i^k\beta_i^l\right|^d \left|\mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l]\right|^{m-d}, \\
&\leq h_K^{-lm}\phi_x(h_K)^{-m}\sum_{d=0}^{m} C_m^d\mathbb{E}\left|K_1^d\beta_i^{ld}\,\mathbb{E}[H_1^{dk}/X_1]\right| \left|\mathbb{E}[K_1\beta_1^l\mathbb{E}[H_1^k/X_1]]\right|^{m-d},
\end{aligned}$$

avec $C_m^d = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$.

En utilisant la démonstration du Lemme 3.3.1, et en remplaçant H par H^d, $\forall d \leq m$:

$$\mathbb{E}[H_1^k/X_1] = \int_R (H^k(t))' F^x(y - h_H t)dt.$$

Ainsi, d'après les hypothèses $(H2)$ et $(H4)$, on obtient :

$$\mathbb{E}[H_1^{dk}/X_1] = O(1), \quad \forall d \leq m \text{ et } k = 0, 1.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|Z_i^{l,k}|^m] &= O\left(h_K^{-lm}\phi_x(h_K)^{-m}\sum_{d=0}^{m}\mathbb{E}\left[K_1^d\beta_1^{ld}\right]\left(\mathbb{E}[K_1\beta_1^l]\right)^{m-d}\right). \\
&= O\left(\max_{k\in\{0,\dots,m\}}\phi_x(h_K)^{-k+1}\right). \\
&= O\left(\phi_x(h_K)^{-m+1}\right).
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse $(H3)$, on a $\dfrac{1}{h_K^l}(K_i\beta_i^l) < C$ et $H < 1$, alors :

$$|Z_i^{l,k}| \leq \frac{C}{\phi_x(h_K)} \quad et \quad \mathbb{E}[Z_i^{l,k^2}] \leq \frac{C'}{\phi_x(h_K)}.$$

D'autre part, l'application de l'inégalité exponentielle de Bernstein [19], donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|S_{l,k} - \mathbb{E}[S_{l,k}]| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n} Z_i^{l,k}\right| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \\
&\leq 2\exp\left(-Cn\frac{\eta^2\log n}{n\phi_x(h_K)}\phi_x(h_K)\right) \\
&\leq C'n^{-C\eta^2}.
\end{aligned}$$

En choisissant η tel que $C\eta^2 = 1+\alpha$, nous obtenons :

$$\mathbb{P}\left(|S_{l,k} - \mathbb{E}[S_{l,k}]| > \eta\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \leq C'n^{-1-\alpha} \quad \text{pour } l=0,1,2 \quad \text{et} \quad k=0,1.$$

Et cela montre que :

$$S_i - \mathbb{E}[S_i] = O_{p.co.}\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad \text{pour} \quad i=2,3,4,5.$$

- **Preuve du résultat (3.4) et (3.5)** :

Soit les couples $(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$ indépendants et identiquement distribués, on a :

$$\begin{cases} Cov(S_2, S_3) & = & \dfrac{1}{nh_K^2\phi_x^2(h_K)}\left[\mathbb{E}[K_1^2H_1\beta_1^2] - \mathbb{E}[K_1H_1]\mathbb{E}[K_1\beta_1^2]\right] \\ \text{et} & & \\ Cov(S_4, S_5) & = & \dfrac{1}{nh_K^2\phi_x^2(h_K)}\left[\mathbb{E}[K_1^2H_1\beta_1^2] - \mathbb{E}[K_1H_1\beta_1]\mathbb{E}[K_1\beta_1]\right] \end{cases}$$

Donc, pour les deux resultats, on doit évaluer

$$\mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l] \quad \text{pour } l=0,1,2 \text{ et } \ k=0,1.$$

Encore, soit $H<1$, alors $\forall\, l=0,1,2$ et $k=0,1$, on obtient :

$$\mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l] = O(\mathbb{E}[K_i\beta_i^l]),$$

et d'après le Lemme 3.2.1, on a :

$$\mathbb{E}[K_iH_i^k\beta_i^l] = O(h_K^l\phi_x(h_K)),$$

ce qui implique que :

$$\begin{cases} Cov(S_2, S_3) & = & O\left(\sqrt{\dfrac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \\ \text{et} & & \\ Cov(S_4, S_5) & = & O\left(\sqrt{\dfrac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right) \end{cases}$$

Alors :

$$|\widehat{F}_N^x(y) - \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{n\phi_x(h_K)}}\right), \quad p.co.$$

■

Preuve du Lemme 3.3.3

Preuve de i)

Le resultat de cette partie est établie en suivant la structure générale de la démonstration du Lemme 3.3.2.

Preuve de ii)

on a,

$$\left\{ \widehat{F}_D^x \leq \frac{1}{2} \right\} \quad \Longrightarrow \quad |1 \; - \; \widehat{F}_D^x| \; \geq \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\mathbb{P} \left\{ \widehat{F}_D^x \leq \frac{1}{2} \right\} \quad \leq \quad \mathbb{P} \left\{ |1 - \widehat{F}_D^x| \; \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ |\widehat{F}_D^x| \leq \frac{1}{2} \right\} \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ |1 \; - \; \widehat{F}_D^x| \; \geq \frac{1}{2} \right\} \leq \infty.$$

Il suffit maintenant de prendre $\delta = \frac{1}{2}$ pour achever la démonstration de ce lemme. ∎

Chapitre 4

La convergence en moyenne quadratique

Dans ce chapitre, nous étudions La convergence en moyenne quadratique de l'estimateur local linéaire de la fonction de répartition conditionnelle, en précisant l'expression explicite des termes asymptotiquement dominants du biais et de la variance. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section nous regroupons l'ensemble des hypothèses utilisées pour établir notre résultat asymptotique. Dans la deuxième sections, nous énonçons le théorème. La démonstration détaillée de ce dernier sera donnée dans la dernière section.

4.1 Notations générales et hypothèses :

on note, pour tout $l \in \{0, 2\}$, par : $\psi_l(x, y) = \dfrac{\partial^l F^x(y)}{\partial y^l}$
et $\Psi_l(s) = \mathbb{E}[\psi_l(X, y) - \psi_l(x, y)/\beta(X, x) = s]$, et nous introduisons les conditions suivantes :

(M1) L'hypothèse (H1) est vérifiée et il existe une fonction $\chi_x(\cdot)$ telle que :

$$\forall t \in [-1, 1], \ \lim_{h_K \to 0} \frac{\phi_x(th_K, h_K)}{\phi_x(h_K)} = \chi_x(t).$$

(M2) Pour tout $l \in \{0, 2\}$, la quantité $\Psi_l^{(2)}(0)$ existe, où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.

(M3) L'hypothèse (H3) est satisfaite, et :

$$\sup_{u\in B(x,r)} |\beta(u,x) - \delta(x,u)| = o(r)$$

(M4) Le noyau K satisfait l'hypothèse (H4) et sa dérivée K' satisfait :

$$K^2(1) - \int_{-1}^{1} (K^2(u))'\chi_x(u)du > 0.$$

(M5) Le noyau H satisfait (H5) et sa dérivée H' est symétrique et est telle que :

$$\int t^2 H'(t)dt < \infty.$$

Remarque 4.1.1. *Notons que, les hypothèses (M1) et (M2) sont de simples adaptations des conditions (H1) et (H3) dans Ferraty [20], sur l'estimation de l'opérateur de régression quand on remplace la semi-métrique d par la fonction réelle δ. La deuxième partie de la condition (M3) n'est pas restrictive et est vérifiée, par exemple, si $\delta(\cdot,\cdot) = \beta(\cdot,\cdot)$, ou si :*

$$\lim_{\delta(x,u)\longrightarrow 0} \left| \frac{\beta(u,x)}{\delta(x,u)} - 1 \right| \;=\; 0.$$

D'autre part, les conditions (M4) et (M5) sont des hypothèses classiques dans le contexte de la convergence en moyenne quadratique lorsque les données sont de type fonctionnel.

4.2 Propriété asymptotique :

Théorème 4.2.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5) et (H6), nous avons :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{F}^x(y) - F^x(y)\right]^2 &= B_H^2(x,y)h_H^4 + B_K^2(x,y)h_K^4 + \frac{V_{HK}(x,y)}{n\phi_x(h_K)} \\ &\quad + o(h_H^4) + o(h_K^4) + o\left(\frac{1}{n\;\phi_x(h_K)}\right),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
B_H(x,y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2 H'(t)dt, \\
B_K(x,y) &= \frac{1}{2}\Psi_0^{(2)}(0)\frac{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}K'(u)\chi_x(u)du\right)},
\end{aligned}$$

et

$$V_{HK}(x,y) = F^x(y)(1-F^x(y))\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi(u)du\right)^2}\right].$$

4.3 Preuve du Théorème 4.2.1

Pour la partie déterministe, on utilise la décomposition suivante :

$$\mathbb{E}[\widehat{F}^x(y)] = \frac{\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)]}{\mathbb{E}[\widehat{F}_D^x]} + \frac{A_1}{(\mathbb{E}[\widehat{F}_D^x])^2} + \frac{A_2}{(\mathbb{E}[\widehat{F}_D^x])^2}$$

avec

$$A_1 = \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)(\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}[\widehat{F}_D^x])]$$

et

$$A_2 = \mathbb{E}[(\widehat{F}_D^x - \mathbb{E}[\widehat{F}_D^x])^2\widehat{F}^x(y)]$$

La preuve de la partie stochastique repose sur la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{F}^x(y)\right) &= Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right) - 4\left(\mathbb{E}\left[\widehat{F}_N^x(y)\right]\right) Cov\left(\widehat{F}_N^x(y), \widehat{F}_D^x\right) \\
&+ 3\left(\mathbb{E}\left[\widehat{F}_N^x(y)\right]\right)^2 Var\left(\widehat{F}_D^x\right) + o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Ainsi, le Théorème 4.2.1 est une conséquence directe des lemmes suivants :

Lemme 4.3.1. *Sous les hypothèses (M1)-(M5) et (H6), nous avons :*

$$\mathbb{E}\left[\widehat{F}_N^x(y)\right] \;-\; F^x(y) \;=\; B_H(x,y)h_H^2 + B_K(x,y)h_K^2 + o(h_H^2) + o(h_K^2).$$

Lemme 4.3.2. *Sous les hypothèses (M1)-(M5) et (H6), nous avons :*

$$Var\left(\widehat{F}^x(y)\right) = \frac{V_{HK}(x,y)}{n\phi_x(h_K)} + o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

4.3.1 Démonstration des lemmes thechniques

Preuve du Lemme 4.3.1
on commence par écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n(n-1)\,\mathbb{E}[W_{12}]}\sum_{j\neq i,1}^{n} W_{ij}H_j\right]. \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\,\mathbb{E}\left[W_{12}\,\mathbb{E}[H_2/X_2]\right]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec

$$\mathbb{E}[H_2/X_2] \;=\; \int_{\mathbb{R}} H'(t)\; F^{X_2}(y-h_Ht)\; dt.$$

D'après l'hypothèse (M2), on utilise le développement de Taylor d'ordre deux comme suit :

$$F^{X_2}(y-h_Ht) \;=\; F^{X_2}(y) \;-\; h_Ht\frac{\partial F^{X_2}(y)}{\partial y} \;+\; \frac{h_H^2t^2}{2}\frac{\partial^2 F^{X_2}(y)}{\partial y^2} + o(h_H^2)$$

En outre, sous (M5), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H_2/X_2] &= \int H'(t)\left[F^{X_2}(y) \;-\; h_Ht\frac{\partial F^{X_2}(y)}{\partial y} \;+\; \frac{h_H^2t^2}{2}\frac{\partial^2 F^{X_2}(y)}{\partial y^2} + o(h_H^2)\right]dt, \\ &= F^{X_2}(y) \;-\; h_H\frac{\partial F^{X_2}(y)}{\partial y}\int tH'(t)dt \;+\; \frac{h_H^2}{2}\frac{\partial^2 F^{X_2}(y)}{\partial y^2}\int t^2H'(t)dt \;+\; o(h_H^2), \\ &= F^{X_2}(y) \;+\; \frac{h_H^2}{2}\frac{\partial^2 F^{X_2}(y)}{\partial y^2}\int t^2H'(t)dt \;+\; o(h_H^2). \end{aligned}$$

qu'on peut l'écrire

$$\mathbb{E}[H_2/X_2] \;=\; \psi_0(X_2,y) \;+\; \frac{h_H^2}{2}\left(\int t^2H'(t)dt\right)\psi_2(X_2,y) \;+\; o(h_H^2),$$

Il en résulte que d'après (4.2), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] &= \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\,\mathbb{E}[W_{12}\left(\psi_0(X_2,y) \;+\; \frac{h_H^2}{2}\left(\int t^2H'(t)dt\right)\psi_2(X_2,y) \;+\; o(h_H^2)\right)], \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[W_{12}]}\left[\mathbb{E}[W_{12}\psi_0(X_2,y)] \;+\; \frac{h_H^2}{2}\left(\int t^2H'(t)dt\right)\mathbb{E}[W_{12}\psi_2(X_2,y)] \;+\; o(h_H^2)\right].
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait que $\Psi_l(0) = 0$ pour $l \in \{0.2\}$, et $\mathbb{E}[\beta_2 W_{12}]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{12}\psi_l(X_2,y)] &= \psi_l(X_2,y)\mathbb{E}[W_{12}] \;+\; \mathbb{E}[W_{12}\psi_l(x,y)] \;-\; \mathbb{E}[W_{12}\psi_l(x,y)], \\
&= \psi_l(x,y)\mathbb{E}[W_{12}] \;+\; \mathbb{E}[W_{12}(\psi_l(X_2,y)-\psi_l(x,y))], \\
&= \psi_l(x,y)\mathbb{E}[W_{12}] \;+\; \mathbb{E}[W_{12}\mathbb{E}[\psi_l(X_2,y)-\psi_l(x,y)]/\beta(X_2,x)], \\
&= \psi_l(x,y)\mathbb{E}[W_{12}] \;+\; \mathbb{E}[W_{12}\Psi(\beta(X_2,x))] \\
&= \psi_l(x,y)\mathbb{E}[W_{12}] \;+\; \tfrac{1}{2}\Psi_l^{(2)}(0)\,\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}] \;+\; o(\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}]).
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] \;=\; F^x(y) + \frac{h_H^2}{2}\,\frac{\partial^2 F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2H'(t)dt + o\left(h_H^2\,\frac{\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}]}{\mathbb{E}[W_{12}]}\right)$$

$$+\,\frac{1}{2}\Psi_l^{(2)}(0)\,\frac{\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}]}{\mathbb{E}[W_{12}]} \;+\; o\left(\frac{\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}]}{\mathbb{E}[W_{12}]}\right).$$

Et d'après les hypothèses (M3) et (M5), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}] &= \mathbb{E}[\delta^2(x,X_1)W_{12}] \\
&= \mathbb{E}[K_1\beta_1^2\delta_1^2]\mathbb{E}[K_1] \;-\; \mathbb{E}[K_1\beta_1]\mathbb{E}[K_1\delta_1^2\beta_1] \\
&= \mathbb{E}[K_1\beta_1^2]\mathbb{E}[K_1] \;-\; (\mathbb{E}[K_1\beta_1])^2.
\end{aligned}$$

On remarque que, sous l'hypothése (H3), pour tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{E}[K_1^a \beta_1] \leq C \int_{B(x,h_k)} \beta(u,x)\, dP(u).$$

En utilisant, la dernière partie de l'hybothèse (H6) on obtient :

$$h_K\ \mathbb{E}[K_1^a \beta_1] \ =\ o\left(\int_{B(x,h_k)} \beta^2(u,x)\, dP(u) \right) \ =\ o(h_K^2 \phi_x(h_K)).$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\mathbb{E}[K_1^a \beta_1] \ =\ o(h_K \phi_x(h_K)).$$

D'autre part, pour tout $b > 1$, on peut écrire :

$$\mathbb{E}[K_1^a \beta_1^b] \ =\ \mathbb{E}[K_1^a \delta^b(x,X)] \ +\ \mathbb{E}\left[K_1^a(\beta^b(X,x) \ -\ \delta^b(x,X))\right] \tag{4.3}$$

Pour le deuxième terme de (4.3), on utilise la deuxième partie de l'hypothèse (M3) pour avoir :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[K_1^a(\beta^b(X,x) - \delta^b(x,X))\right] \\
=&\ \ \mathbb{E}\left[K_1^a 1_{B(x,h_K)}(\beta(X,x) - \delta(x,X)) \left(\sum_{l=1}^{b} \beta^{b-l}(X,x) - \delta^l(x,X) \right) \right] \\
\leq&\ \sup_{u \in B(x,h_K)} |\beta(u,x) - \delta(x,u)| \sum_{l=1}^{b} \mathbb{E}\left[K_1^a 1_{B(x,h_K)}(|\beta|^{b-l}(X,x)|\delta|^l(x,X))\right],
\end{aligned}$$

et d'autre part, on a :

$$1_{B(x,h_K)}|\beta(X,x)| \ \leq\ 1_{B(x,h_K)}|\delta(x,X)| \ \leq\ b.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[K_1^a(\beta^b(X,x) - \delta^b(x,X))\right] \ &\leq\ b \sup_{u \in B(x,h_K)} |\beta(u,x) - \delta(x,u)|\, \mathbb{E}\left[K_1^a |\delta|^b(x,X)\right], \\
&\leq\ b \sup_{u \in B(x,h_K)} |\beta(u,x) - \delta(x,u)|\ h_K^b \mathbb{E}[K_1^a], \\
&\leq\ b \sup_{u \in B(x,h_K)} |\beta(u,x) - \delta(x,u)|\ h_K^b \phi_x(h_K),
\end{aligned}$$

alors,

$$\mathbb{E}[K_1^a\beta_1^b] \;=\; \mathbb{E}[K_1^a\delta^b(x,X)] \;+\; o(h_K^b\phi_x(h_K)) \tag{4.4}$$

En ce qui concerne le premier terme de (4.3), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
h_K^{-b}\,\mathbb{E}[K_1^a\delta^b] &= \int v^b K^a(u)\,dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v),\\
&= \int_{-1}^{1}\left[K^a(1) - \int_v^1 \left((u^bK^a(u))'\right)du\right]\,dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v)\\
&= \int_{-1}^{1} K^a(1)\,dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v) - \int_{-1}^{1}\left(\int_v^1 dP^{h_K^{-1}\delta(x,X)}(v)\right)(u^bK^a(u))'du\\
&= \left(K^a(1)\phi(h_K) - \int_{-1}^{1}\phi_x(uh_K,h_K)\,(u^bK^a(u))'du\right)\\
&= \phi_x(h_K)\left(K^a(1) - \int_{-1}^{1}(u^bK^a(u))'\,\frac{\phi_x(uh_K,h_K)}{\phi_x(h_K)}du\right).
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la deuxième partie de l'hypothèse (M1), on a :

$$\mathbb{E}[K_1^a\beta^b] \;=\; h_K^b\phi_x(h_K)\left(K^a(1) - \int_{-1}^{1}(u^bK^a(u))'\,\chi_x(u)du\right) + o(h_K^b\phi_x(h_K)). \tag{4.5}$$

En combinant (4.4) et (4.5), nous obtenons :

$$\frac{\mathbb{E}[\beta^2(X_2,x)W_{12}]}{\mathbb{E}[W_{12}]} \;=\; h_K^2\,\frac{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\,\chi_x(u)du\right)}{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\,\chi_x(u)du\right)} \;+\; o(h_K^2).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\widehat{F}_N^x(y)] \;&=\; F^x(y) + \frac{h_H^2}{2}\frac{\partial^2F^x(y)}{\partial y^2}\int t^2H'(t)dt \;+\; o\left(h_H^2\right)\\
&+\; h_K^2\,\Psi_0^{(2)}(0)\,\frac{\left(K(1) - \int_{-1}^{1}(u^2K(u))'\,\chi_x(u)du\right)}{2\left(K(1) - \int_{-1}^{1}K'(u)\,\chi_x(u)du\right)} \;+\; o(h_K^2).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Preuve du Lemme 4.3.2

Pour achever la démonstration de ce lemme, il suffit de calculer :

$$Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right), Cov\left(\widehat{F}_N^x(y), \widehat{F}_D^x\right) \text{ et } Var\left(\widehat{F}_D^x\right)$$

- Pour $Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{F}_N^x(y)\right) &= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}])^2} Var\left(\sum_{i\neq j=1}^{n} W_{ij}H_j\right) \\
&= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}])^2} [n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}^2H_2^2] + n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}W_{21}H_1H_2] \\
&+ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2H_3] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2H_3] \\
&+ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{31}H_2H_1] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2^2] \\
&- n(n-1)(4n-6)\left(\mathbb{E}[W_{12}H_2]\right)^2].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Tous les termes suivants peuvent être évalués en suivant les mêmes étapes que dans la preuve du lemme 4.3.1. En particulier, les équations (4.4) et (4.5), permettent de conclure :

$$\begin{cases}
\mathbb{E}[W_{12}^2H_2^2] &= O(h_K^4\phi_x^2(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{21}H_1H_2] &= O(h_K^4\phi_x^2(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2H_3] &= (F^x(y))^2\ \mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2]\ (\mathbb{E}[K_1])^2\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2H_3] &= (F^x(y))^2\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{31}H_2H_1] &= (F^x(y))^2\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2^2] &= (F^x(y))^2\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1])^2(\mathbb{E}[K_1^2])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}H_2] &= O(h_K^2\phi_x^2(h_K)).
\end{cases}$$

– En effet, pour le premier et le deuxième terme on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{12}^2H_2^2] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2 - \beta_1\beta_2K_1K_2)^2H_2^2] \\
&\leq C\mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2]\mathbb{E}[K_1^2H_1^2] \\
&= O(h_K^4\phi_x^2(h_K)).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{12}W_{21}H_1H_2] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2 - \beta_1\beta_2K_1K_2)(\beta_2^2K_2K_1 - \beta_2\beta_1K_2K_1)H_1H_2] \\
&\leq C\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2H_1]\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2H_1] \\
&= O(h_K^4\phi_x^2(h_K))
\end{aligned}$$

– Ensuit on va évaluer le troisième terme comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2H_3] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2 - \beta_1\beta_2K_1K_2)(\beta_1^2K_1K_3 - \beta_1\beta_3K_1K_3)H_2H_3] \\
&\leq \mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2]\mathbb{E}[K_1])^2(\mathbb{E}[H_1/X])^2
\end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{E}[H_1/X] = \int_{\mathbb{R}} H'(t)\ F^X(y - h_Ht)\ dt.$$

On utilise le développement de Taylor d'ordre 1 comme suit :

$$F^X(y - h_Ht) = F^X(y) - h_Ht\frac{\partial F^X(y)}{\partial y} + o(h_H)$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathbb{E}[H_1/X] = F^X(y) + o(h_H) \tag{4.8}$$

Alors

$$\mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2H_3] = \mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2](\mathbb{E}[K_1])^2(F^X(y))^2 + O(h_K^4\phi_x^3(h_K))$$

– En suivant la même démarche, on obtient le quatrième et le cinqième terme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2H_3] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2 - \beta_1\beta_2K_1K_2)(\beta_2^2K_2K_3 - \beta_2\beta_3K_2K_3)H_2H_3] \\
&\leq \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\mathbb{E}[K_1](\mathbb{E}[H_1/X])^2
\end{aligned}$$

d'après (4.8), on obtient :

$$\mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2H_3] = (F^x(y))^2\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1]) + O(h_K^4\phi_x^3(h_K))$$

et

$$\mathbb{E}[W_{12}W_{31}H_2H_1] = (F^x(y))^2\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1]) + O(h_K^4\phi_x^3(h_K))$$

– puis, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2^2] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2-\beta_1\beta_2K_1K_2)(\beta_3^2K_3K_2-\beta_3\beta_2K_3K_2)H_2^2]\\ &\leq (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1])^2(\mathbb{E}[K_1^2])(\mathbb{E}[H_1/X])^2\end{aligned}$$

toujours d'après (4.8), on a :

$$\mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2^2] = (F^x(y))^2\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1])^2(\mathbb{E}[K_1^2])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K))$$

– Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_{12}H_2] &= \mathbb{E}[(\beta_1^2K_1K_2-\beta_1\beta_2K_1K_2)H_2]\\ &\leq C\mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\mathbb{E}[K_1H_1]\\ &= O(h_K^2\phi_x^2(h_K)).\end{aligned}$$

- En ce qui concerne le terme de covariance, en utilisant le même argument

$$\begin{aligned}Cov(\widehat{F}_N^x(y),\widehat{F}_D^x) &= \frac{1}{(n(n-1)\ \mathbb{E}[W_{12}])^2}\,Cov\left(\sum_{i\neq j=1}^{n}W_{ij}H_j,\ \sum_{i'\neq j'=1}^{n}W_{i'j'}\right),\\ &= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}])^2}\,[n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}^2H_2]+n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}W_{21}H_2]\\ &+\ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2]+n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2]\\ &+\ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{31}H_2]+n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2]\\ &-\ n(n-1)(4n-6)\,(\mathbb{E}[W_{12}H_2]\ \mathbb{E}[W_{12}])].\end{aligned} \tag{4.9}$$

Avec

$$\begin{cases}\mathbb{E}[W_{12}^2H_2] = O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}W_{21}H_2] = O(h_K^4\phi_x^2(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}W_{13}H_2] = (F^x(y))\ \mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2]\ (\mathbb{E}[K_1])^2\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}W_{23}H_2] = (F^x(y))\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}W_{31}H_2] = (F^x(y))\ \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}W_{32}H_2] = (F^x(y))\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1])^2(\mathbb{E}[K_1^2])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)),\\ \mathbb{E}[W_{12}H_2] = O(h_K^2\phi_x^2(h_K)).\end{cases}$$

• Quant à $Var\left(\widehat{F}_D^x\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}
Var\left(\widehat{F}_D^x\right) &= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}])^2} Var\left(\sum_{i\neq j=1}^{n} W_{ij}\right) \\
&= \frac{1}{(n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}])^2} [n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}^2] + n(n-1)\mathbb{E}[W_{12}W_{21}] \\
&+ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{13}] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{23}] \\
&+ n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{31}] + n(n-1)(n-2)\mathbb{E}[W_{12}W_{32}] \\
&- n(n-1)(4n-6)\left(\mathbb{E}[W_{12}]\right)^2].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Et de façon similaire aux cas précédents

$$\begin{cases}
\mathbb{E}[W_{12}^2] &= O(h_K^4\phi_x^2(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{21}] &= O(h_K^4\phi_x^2(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{13}] &= \mathbb{E}[\beta_1^4K_1^2]\ (\mathbb{E}[K_1])^2\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{23}] &= \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{31}] &= \mathbb{E}[\beta_1^2K_1]\ (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1^2]\ \mathbb{E}[K_1])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}W_{32}] &= (\mathbb{E}[\beta_1^2K_1])^2(\mathbb{E}[K_1^2])\ +\ O(h_K^4\phi_x^3(h_K)), \\
\mathbb{E}[W_{12}] &= O(h_K^2\phi_x^2(h_K)).
\end{cases}$$

Ainsi, d'après l'évaluation de (4.7), (4.9) et (4.10) et en les remplaçant dans la décomposition (4.1) et en combinant avec le Lemme (4.3.1), on obtient

$$Var\left(\widehat{F}^x(y)\right) = \frac{(F^x(y))(1-F^x(y))}{(\mathbb{E}[K_1])^2}(\mathbb{E}[K_1^2]) + o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right)$$

Finalement

$$Var\left(\widehat{F}^x(y)\right) = \frac{F^x(y)(1-F^x(y))}{n\phi_x(h_K)}\left[\frac{\left(K^2(1)-\int_{-1}^{1}(K^2(u))'\chi(u)du\right)}{\left(K(1)-\int_{-1}^{1}(K(u))'\chi(u)du\right)^2}\right]+o\left(\frac{1}{n\phi_x(h_K)}\right).$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'estimation non-paramétrique, par la méthode locale linéaire, et nous avons fixé comme objectif la fonction de répartition conditionnelle, lorsque la variable explicative est fonctionnelle et la réponse est réelle.
Les principaux résultats que nous avons obtenus sont les suivants : Dans un premier temps, nous avons construit un estimateur local linéaire de la fonction de répartition conditionnelle, et nous avons établi sa convergence presque-complète en précisant sa vitesse de convergence, lorsque les observations sont indépendantes identiquement distribuées. Ensuite, nous avons établi sa convergence en moyenne quadratique en donnant une expression explicite des termes de biais et de la variance de l'estimateur construit.

L'avantage de cette approche est qu'elle est une généralisation, au cas fonctionnel, de la méthode locale linéaire du cas vectoriel et que la méthode à noyau classique se résume à un cas particulier de cette méthode. De plus, la supériorité de la méthode locale linéaire sur la méthode à noyau, dans la partie biais, est toujours conservée même en statistique fonctionnelle.

nous présentons ci-dessous quelques perspectives de recherche qui se situent dans la continuité des études effectuées dans ce mémoire :
La première question qui nous semble naturelle est l'estimation par la méthode des polynômes locaux avec des degrés supérieurs a un. Il est clair que plus le degré est élevé plus le gain sur la partie biais est important.

La généralisation des résultats de ce mémoire au cas dépendant nous semble être une autre perspective de recherche.

Par ailleurs, le paramètre de lissage est un paramètre crucial en estimation non-paramétrique car ce paramètre intervient dans les deux propriétés asymptotiques qu'on a étudié. La sélection des paramètres de lissage est un autre sujet de recherche. Nos résultats asymptotiques constituent une étape préliminaire indispensable permettant d'envisager cette perspective de recherche.

Une autre perspective à traiter à cours terme est la question liée à la normalité asymptotique de notre estimateur.

Bibliographie

[1] Baìllo, A. and Grané, A. (2009). Local linear regression for functional predictor and scalar response, *J. of Multivariate Anal.*, **100**, 102-111.

[2] Barrientos-Marin, J., Ferraty, F. and Vieu, P. (2010). Locally Modelled Regression and Functional Data. *J. of Nonparametric Stat.*, **22**, 617-632.

[3] Berlinet, A., Elamine, A. and Mas, A. (2011). Local linear regression for functional data. *Inst. Statist. Math.*, **63**, 1047-1075.

[4] Boj, E., Delicado, P. and Fortiana, J. (2010). Distance-based local linear regression for functional predictors. *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 429-437.

[5] Chouaf, A. and Laksaci, A. (2011). On the functional local linear estimate for spatial regression. *Statistics and Risk Modeling*, **29**, 189-214.

[6] Collomb, G. (1976). Estimation non paramétrique de la régression par la méthode du noyau. *Thèse de l'Univ. P. Sabatier*, Toulouse, France.

[7] Dabo-Niang, S. and Rhomari, N. (2003). Estimation non paramétrique de la régression avec variable explicative dans un espace métrique. *C. R. Acad. Sci.* Paris, **336**, 75-80.

[8] Demongeot, J., Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Functional data : local linear estimation of the conditional density and its application.

[9] Deville, J.C.(1974). Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. *Ann. Insee*, **15**, 3-101.

[10] El Methni, M. and Rachdi, M. (2010) Local weighted average estimation of the regression operator for functional data, *Commun. in Statist.-Theory and Meth.*, **40**. 3141-3153.

[11] Fan, J. (1992). Design-adaptive nonparametric regression. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **87**, 998-1004.

[12] Fan, J. (1993). Local linear regression smoothers and their minimax efficiency. *Ann. of Statist.*, **20**, 196-216.

[13] Fan, J. and Gijbels, I. (1992). Variable bandwidth and local linear regression smoothers. *Ann. of Statist.*, **20**, 2008-2036.

[14] Fan, J. and Gijbels, I. (1995a). Data-driven bandwidth selection in local polynomial fitting : variable bandwidth and spatial adaptation. *J. Royal Statist. Soc. B.*, **57**, 371-394.

[15] Fan, J., Gijbels, I.(1996). *Local Polynomial Modelling and its Applications.* London, Chapman and Hall.

[16] Ferraty, F. and Vieu, P. (2002). The functional nonparametric model and application to spectrometric data. *Computational Statistics and Data Analysis*, **17**, 545-564.

[17] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P.(2005). Functional time series prediction via conditional mode estimation. *C. R. Math. Acad. Sci.* Paris, **340**, 389-392.

[18] Ferraty, F., Laksaci, A. and Vieu, P. (2006). Estimation of some characteristics of the conditional distribution in nonparametric functional models. *Stat. Inference Stoch. Process.*, **9**, 47-76.

[19] Ferraty, F. and Vieu, P. (2006). Nonparametric functional data analysis theory and practice. Springer-Verlag.

[20] Ferraty, F., MAS, A. and Vieu, P. (2007). Nonparametric regression on functional data : inference and practical aspects. *Aust. N. Z. J. Stat.*, **49**, 267-826.

[21] Holmström. (1963). On a method for parametric representation of the state of the atmosphere. *Tellus*, **15**, 127-149.

[22] Krikpatrick, M. and Heckman, N. (1989). A quatitative genetic model for growth, shape, reaction norms, and other infinite-dimensional characters. *J. Math. Biol.*, **27**, 429-450.

[23] Laksaci, A., Lemdani, M. and Ould-Saïd, E. (2008). A generalized L^1-approach for a kernel estimator of conditional quantile with functional

regressors : consistency and asymptotic normality. *Stat. Probab. Lett.*, **79**, 1065-1073.

[24] Laksaci, A., Madani, F. and Rachdi, M. (2013). Kernel conditional density estimation when the regressor is valued in a semi metric space. *Commun. in Statit.-Theory and Meth.*, **42**(19), 3544-3570.

[25] Lejeune, M. (1985). Estimation non-parametrique par noyaux : regression polynomiale mobile. *Revue de Statist. Appliq.*, **33**, 43-68.

[26] Loannides, D. and Matzner-Løber, E. (2004). A note on asymptotic normality of convergent estimates of the conditional mode with errors-in-variables. *J. of Nonparametric Stat.*, **16**, 515-524.

[27] Müller, H.G. (1987). Weighted local regression and kernel methods for nonparametric curve fitting. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 231-238.

[28] Obhukov, A. (1960). The Statistically Orthogonal Expansion of Empirical Functions. *Bull. Acad. Sci. USSR, Geophys. Ser.*, **3**, 288-291.

[29] Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (1997). Functional Data Analysis, *Springer Series in Statistics.* New-York.

[30] Ramsay, J.O. and Silverman, B.W. (2005). Functional data analysis, Second Ed. *Springer*, New-York.

Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[31] Tsybakov, A.B. (1986). Robust reconstruction of functions by the local approximation method. *Problems of Information Transmission*, **22**, 133-146.

[32] Wand, M., and Jones, C. (1995). *Kernel Smoothing, Monographs on Statistics and Applied Probability* , (Vol. **60**) London : Chapman & Hall.

[33] Watson, G.S. (1964). Smooth regression analysis. *Sankhya* A, **26**, 359-372.

[34] Youndjé, E. (1993). Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau. *Thèse de Doctarat*, Université de Rouen (France).