Dédicace

Il m'est agréable de dédier ce modeste travail à :
Mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi,
sans leur amour et leur confiance,
je ne serais jamais arrivée là.
Mes trés chers fréres qui m'ont toujours soutenue
avec beaucoup d'amour et de compréhension.
Toute la famille Rabhi.
Mon chère amie S.Bakrou, qui m'a supporter durant ce dernière année.
et chez qui j'ai trouvé l'entente dont j'avais besoin.
Mes amies avec qui j'ai passé des moments
mémorables.
Tous mes enseignants.

Remerciements

Si nous sommes arrivés jusqu'a la, c'est grâce à mon Dieu le tout clément qui ma donnée la force et la patience afin de suivire mes études et de pouvoire achever ce modeste travail.

Ce travail n'a pas pu être concrétisé sans l'aide genéreuse de mon encadreur Dr. S.OUAKKAS, Donc je le remercie beaucoup et je le doit exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour leur aides appréciables et leur sacrifice de son temps, ainsi pour ses précieux conseils et sa grande patience.

Je remercie les membres de jury pour leur amabilité de juger mon travail.

Je remercie tous les proffesseurs du départements de mathématique, et en particulier ceux qui m'ont suivi durant mon cursus.

Enfin, Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin, et contribuer à la réalisation de ce travail.

Merci à tous

Table des matières

Introduction générale

Ce mémoire rentre dans le cadre de l'étude des fonctions biharmoniques sur une variété riemannienne (M, g), ce sont les fonctions $f : M \longrightarrow R$ de classe C^4 qui sont solutions de l'équation $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = 0$. Ce type de fonctions généralise d'une manière naturelle la notion des fonctions harmoniques. Notons que les fonctions biharmoniques sont solutions d'un système linéaire elliptique d'ordre quatre difficile à résoudre en général.

Ce mémoire se divise en trois chapitre. Dans le premier chapitre, on rappelle quelques opérateurs sur les variétés riemanniennes, en particulier le gradient d'une fonction, la divergence d'un champ de vecteurs et le Laplacien en donnant les différentes écritures en coordonnées locales. On présente quelques règles de calcul pour l'opérateur Laplacien et on définit les fonctions harmoniques qui sont les fonctions qui annulent le Laplacien, on termine ce chapitre par la définition d'une fonction biharmonique sur une variété riemannienne en citant ses propriétés.

Le deuxième chapitre est consacré à la construction des fonctions biharmoniques dans certains cas, on commence par la caractérisation de la biharmonicité des fonctions radiales à l'aide de la résolution d'une équation différentielle. La deuxième idée de construction est basée sur la déformation conforme de la métrique, c'est à dire multiplier la métrique initiale par une fonction strictement positive, on a réussi à donner l'expression de l'opérateur Bilaplacien après ce changement conforme, ce résultat nous a permis de construire quelques exemples. A la fin de ce chapitre, on étudie les fonctions biharmoniques sur les variétés produit tordu en présentant les différentes expressions liées à ce type de variétés et en traitant certains cas particuliers.

Dans le troisième, on s'intéresse dans une première partie aux quelques théorèmes de type Liouville pour les fonctions biharmoniques en se basant sur quelques hypothèses géométriques et topologiques. Enfin, on étudie le problème de Dirichlet pour ce type de fonctions lorsque la donnée au bord est constante, les résultats de ce chapitre généralisent des résultats connus pour les fonctions harmoniques.

Chapitre 1

Généralités

Dans ce chapitre, on s'intéresse dans un premier lieu à la définition de quelques opérateurs différentiels sur une variété riemannienne (gradient d'une fonction et divergence d'un champ de vecteur) à partir des isomorphismes musicaux, les opérateurs gradient et divergence nous permettent de définir l'opérateur de Laplace appelé aussi le Laplacien et on donne quelques règles de calcul, on définit ainsi les fonctions harmoniques comme solution de l'équation de Laplace, et on caractérise touts les fonctios radiales qui sont harmoniques, ces opérateurs vont nous permettre de définir le Bilaplacien et par suite les fonctions biharmoniques dont on donne explicitement quelques régles de calculs.

1.1 Les isomorphismes musicaux

Soit (M^m, g) une variété riemannienne, g_x est un produit scalaire sur $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$, on peut identifier T_xM à T_x^*M à l'aide de l'isomorphisme noté $\sharp_x$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \sharp_x : T_x^*M & \longrightarrow & T_xM \\ \omega_x & \longmapsto & \sharp_x(\omega_x) \end{array}$$

tel que : on a pour tout $X_x \in T_xM$

$$g_x(\sharp_x(\omega_x), X_x) = \omega_x(X_x).$$

$\sharp_x$ est un isomorphisme, on note b_x son inverse qui est défini par :

$$\begin{array}{rccl} b_x : & T_xM & \longrightarrow & T_x^*M \\ & X_x & \longmapsto & b_x(X_x) \end{array}$$

tel que : pour tout $Y_x \in T_xM$,

$$b_x(X_x)(Y_x) = g_x(X_x, Y_x).$$

On peut définir les opérateurs $\sharp$ et b appelés opérateurs musicaux de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \sharp : & \Gamma^*(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & \omega & \longmapsto & \sharp(\omega) \end{array}$$

tel que pour tout $x \in M$, on a

$$(\sharp(\omega))_x = \sharp_x(\omega_x)$$

et

$$\begin{array}{rccl} b : & \Gamma(TM) & \longmapsto & \Gamma^*(TM) \\ & X & \longmapsto & b(X) \end{array}$$

tel que : pour tout $x \in M$,

$$(b(X))_x = b_x(X_x).$$

Pour plus de détails, voir ([1])

Proposition 1.1.1. *Les opérateurs $\sharp$ et b sont des isomorphismes inverse l'un de l'autre et sont également définis par :*

$$\begin{cases} \sharp(\omega) \text{ est tel que } g(\sharp(\omega), X) = \omega(X) \\ b(X) \text{ est tel que } b(X)(y) = g(X, Y) \end{cases} \tag{1.1}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$.

Preuve :

La linéarité est une conséquence de la linéarité des $\sharp_x$ et b_x, pour tout $x \in M$. Il suffit de montrer que les opérateurs $\sharp$ et b sont inverse l'un de l'autre.

Soient $x \in M, X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma^*(TM)$.
D'une part, on a

$$g_x(\sharp_x(b_x(X_x)), Y_x) = (b_x(X_x))(Y_x) = g_x(X_x, Y_x).$$

Comme g_x est non dégénérée, alors

$$\sharp_x(b_x(X_x)) = X_x$$

pour tout $x \in M$, d'où

$$\sharp \circ b = \mathrm{Id}_{\Gamma(TM)}.$$

D'une part, on a

$$((b \circ \sharp)(\omega))_x(X_x) = (b_x(\sharp_x(\omega_x)))(X_x) = g_x(\sharp_x(\omega_x), X_x) = \omega_x(X_x)$$

alors, pour tout $x \in M$

$$((b \circ \sharp)(\omega))_x = \omega_x.$$

d'où

$$b \circ \sharp = \mathrm{Id}_{\Gamma^*(\mathrm{TM})}$$

En utilisant le fait que

$$(\omega(X))_x = \omega_x(X_x)$$

et

$$(g(X, Y))_x = g_x(X_x, Y_x),$$

on aura à partir des définitions de $\sharp_x$ et b_x les relations suivantes :

$$\begin{cases} g_x((\sharp(\omega))_x, X_x) = \omega_x(X_x). \\ (b(X))_x(Y_x) = g_x(X_x, Y_x). \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{cases} (g(\sharp(\omega), X)_x = (\omega(X))_x \\ ((b(X))(Y))_x = (g(X, Y))_x \end{cases}$$

d'où les relations voulues.

1.1.1 Les isomorphismes musicaux en coordonnées locales

Soit (U,φ) une carte locale sur M^m, $\{U,(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1,\dots,m}\}$ et $\{U,(dx^i)_{i=1,\dots,m}\}$ sont respectivement le repére et le corepére locale associés à la carte donnée (U,φ).
En utilisant la convention d'Einstein pour les indices, on a pour $\omega\in\Gamma^*(TM)$

$$\omega=\omega_i dx^i.$$

pour $X,Y\in\Gamma(TM)$, on a

$$X=X^j\frac{\partial}{\partial x_j},\ Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La métrique g s'écrit sous la forme :

$$g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

où

$$g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Comme

$$g(\sharp(\omega),X)=\omega(X),$$

alors

$$g_{ij}(\sharp(\omega))^i X^j=\omega_j X^j,$$

pour tout $X\in\Gamma(TM)$. En particulier pour $X=\frac{\partial}{\partial x_j}$, alors

$$g_{ij}(\sharp(\omega))^i=\omega_j,$$

d'où

$$(\sharp(\omega))^i=g^{ij}\omega_j,$$

où (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).
Enfin nous obtenons la formule suivante :

$$\sharp(\omega)=g^{ij}\omega_j\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.2}$$

De même, pour l'opérateur b nous avons d'une part

$$(b(X))(Y)=(b(X))_j Y^j,$$

et d'autre part

$$(b(X))(Y) = g_{ij}X^iY^j,$$

pour tout $Y \in \Gamma(TM)$, en particulier pour $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, il vient que

$$(b(X))_j = g_{ij}X^i,$$

d'où

$$b(X) = g_{ij}X^i dx^j. \tag{1.3}$$

1.2 Les opérateurs sur une variété riemannienne

1.2.1 L'opérateur gradient sur une variété riemannienne

Définition 1.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur gradient (noté grad) par :*

$$\begin{array}{rccc} grad: & \mathrm{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & f & \longmapsto & grad(f) = \sharp(df) \end{array}$$

où df est la différentielle de f, tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a

$$g(grad(f), X) = df(X) = X(f).$$

Proposition 1.2.1. ***(Expression du gradient en coordonnées locales)***

Soit (M^m, g) une variété riemannienne de dimension m, (U, φ) une carte sur M avec les champs de base associée $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$, alors pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :

$$(grad)|_U = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.4}$$

Preuve.

Il suffit d'appliquer directement la définition de l'application $\sharp$ et la définition de la différentielle la fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ relativement à la carte (U, φ) sur M, on a

$$df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\begin{aligned}
\sharp(df) &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(df)^i \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}
\end{aligned}$$

où $dx^1, ..., dx^m$ est la base duale. ∎

Propriété 1.2.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, pour toutes $f, h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ on a*

1. *$grad(f+h) = grad(f) + grad(h)$*
2. *$grad(fh) = hgrad(f) + fgrad(h)$*
3. *$(grad(f))(h) = (grad(h))(f)$*

Preuve. Soit $f, h \in \mathrm{C}^\infty(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

1.

$$\begin{aligned}
g(grad(f+h), X) &= X(f+h) \\
&= X(f) + X(h) \\
&= g(grad(f), X) + g(grad(h), X) \\
&= g(grad(f) + grad(h), X)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
g(grad(fh), X) &= X(fh) \\
&= hX(f) + fX(h) \\
&= hg(grad(f), X) + fg(grad(h), X) \\
&= g(hgrad(f) + fgrad(h), X)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
(grad(f))(h) &= g(grad(h), grad(f)) \\
&= g(grad(f), grad(h)) \\
&= (grad(h))(f)
\end{aligned}$$

∎

1.2.2 L'opérateur divergence sur une variété riemannienne

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété riemannienne (M, g), l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} \nabla X: & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & Z & \longmapsto & \nabla_Z X \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$ linéaire (∇X est un tenseur de type (1,1)).
Si $x \in M$, alors

$$\begin{array}{rccc} (\nabla X)_x: & T_xM & \longrightarrow & T_xM \\ & v & \longmapsto & (\nabla_v X)_x \end{array}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 1.2.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $divX$ est une fonction sur M définie par :*

$$\begin{array}{rccc} div: & \Gamma(TM) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & divX \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcll} divX & = & tr_g(\nabla X) & \\ (divX)_x & = & tr_g((\nabla X)_x) & \qquad x \in M \end{array}$$

En coordonnées locales, on a

$$\begin{array}{rcl} divX & = & dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ & = & g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X, \frac{\partial}{\partial x^j}) \end{array}$$

Si (e_i) est une base orthonormée locale sur M, on a

$$divX = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

De même, la divergence d'une 1-forme ω sur M est définie par

$$\begin{array}{rcl} div\omega & = & tr_g(Z \longrightarrow \nabla_Z \omega) \\ & = & \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ & = & \sum_{i=1}^m g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\omega)(\frac{\partial}{\partial x^j}) \end{array}$$

Proposition 1.2.2. ***Première expression de la divergence en coordonnées locales.***

Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension m, $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ on a :

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j\Gamma^i_{ij})$$

où les fonctions Γ^k_{ij} sont les symboles de christoffel donnée par la relation

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Preuve.

Sur une carte locale de M nous avons,

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

et

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

alors

$$\begin{aligned} divX &= \textstyle\sum_{i=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X^j\frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}), \end{aligned}$$

d'où finalement

$$divX = \sum_{i,j=1}^{m}(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j\Gamma^i_{ij})$$

■

Propriété 1.2.2. *Soit* (M,g) *une variété riemannienne, pour tous $X,Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in \mathrm{C}^\infty(M,\mathbb{R})$, on a*

1. $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$
2. $div(fX) = fdiv(X) + X(f)$

Preuve.

Pour démontrer la propriété (1), on applique directement la définition de la divergence, soit (e_i) une base orthonormée locale sur M on a

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= g(\nabla_{e_i}(X+Y), e_i) \\ &= g(\nabla_{e_i}(X), e_i) + g(\nabla_{e_i}(Y), e_i) \\ &= divX + divY \end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété, on a

$$div(fX) = g(\nabla_{e_i} fX, e_i)$$

Or

$$\nabla_{e_i} fX = e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X,$$

Il suit que

$$div(fX) = g(e_i(f)X, e_i) + fg(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

On sait que

$$divX = g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

et

$$g(e_i(f)X, e_i) = g(X, grad(f)) = X(f),$$

d'où

$$div(fX) = X(f) + fdivX$$

■

Lemme 1.2.1. *([2]) Sur une variété riemannienne (M, g) on a*

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})}) = \sqrt{det(g_{ij})} \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{lk}^{l},$$

En utilisant ce lemme, nous allons donner la deuxiéme expression de la divergence.

Proposition 1.2.3. ***(Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales.)***

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a :

$$divX = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{det(g_{ij})} X^k)$$

Preuve.

Grâce à la première expression de la divergence en coordonnées locales, nous avons

$$\begin{array}{rcl} divX & = & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} X^j \Gamma_{ij}^i \\ & = & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij}^i \end{array}$$

en utilisant le lemme 1.2.1, avec

$$|g| = det(g_{ij}),$$

alors un calcul direct nous donne :

$$\begin{array}{rcl} divX & = & \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \sqrt{|g|} \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij}^i) \\ & = & \frac{1}{\sqrt{|g|}}(\sqrt{|g|} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{|g|})) \\ & = & \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{|g|} X^i) \end{array}$$

en utilisant la convention d'Einstein, on a

$$div(X) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{|g|} X^i)$$

■

1.3 L'opérateur Laplacien sur une variété riemannienne

1.3.1 Définitions et Propriétés

Définition 1.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté Δ sur M par :*

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & \Delta(f) = div(gradf) \end{array}$$

Propriété 1.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, pour toutes $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :*

1. $\Delta(f + h) = \Delta(f) + \Delta(h)$

2. $\Delta(fh) = h\Delta(f) + h\Delta(f) + 2g(grad(f), grad(h))$

Preuve.

Soit $f, h \in \mathrm{C}^{\infty}(M, \mathbb{R})$, en utilisant les propriétés des grad et div et le fait que

$$X(f) = g(grad\ f, X),$$

on obtient

1.

$$\begin{aligned} \Delta(f+h) &= div(grad(f+h)) \\ &= div(grad\ f + grad\ h) \\ &= div(grad\ f) + div(grad\ h) \\ &= \Delta(f) + \Delta(h) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta(fh) &= div(grad(fh)) \\ &= div(hgrad\ f + fgrad\ h) \\ &= hdiv(grad\ f) + (grad\ f)(h) + fdiv(grad\ h) + (grad\ h)(f) \\ &= h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(grad\ f, grad\ h). \end{aligned}$$

■

Définition 1.3.2. *Soit (M, g) une variété riemannienne, et soit $f \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$, on dit que f est harmonique si :*

$$\Delta(f) = 0.$$

L'équation $\Delta(f) = 0$ est appelée l'équation de Laplace.

Proposition 1.3.1. ***Expression de l'opérateur Laplacien en coordonnées locales***

Soit (M, g) une variété riemannienne, et pour tout $f \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$, on a

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \tag{1.5}$$

Preuve.
Soit $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} \Delta f &= div(grad\ f) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\ f, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} grad\ f, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) &= \tfrac{\partial}{\partial x^i}(g(grad\ f, \tfrac{\partial}{\partial x^j}) - g(grad\ f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j})) \\ &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial f}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta f = g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k})$$

■

Remarque 1.3.1. ***(Deuxième expression de l'opérateur Laplacien)***

Grâce à la deuxième expression de l'opérateur divergence, il existe une deuxième écriture pour le Laplacien donnée par l'équation suivante :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \sqrt{det(g_{ij})}).$$

Exemple 1.3.1. *Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard g_0, $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$, alors pour toute fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $X = (X^1, ..., X^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on a*

1.

$$\begin{aligned} grad\ f &= \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= (\tfrac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \tfrac{\partial f}{\partial x^m}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} divX &= \textstyle\sum_{i=1}^m \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\ &= \tfrac{\partial X^1}{\partial x^1} + ... + \tfrac{\partial X^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3.

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Exemple 1.3.2. ***(Laplacien sur la sphère*** S^2***)***

Soit S^2 *la sphère de dimension 2, sa métrique est donnée par*

$$g_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

et $f : S^2 \backslash \{(\pm 1, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$*, on a*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Par exemple $f(\theta,\varphi) = \ln(\tan\frac{\theta}{2})$ *est harmonique. Car :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\ln(\tan\tfrac{\theta}{2}) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(\tan\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})}{\tan\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{1}{2}\frac{(1+\tan^2\frac{\theta}{2})\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{\theta}{2})^2}{\tan^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{4}(\tan^2\tfrac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}). \end{aligned}$$

On déduit :

$$\Delta f = \frac{1}{4}(\tan^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{\theta}{2}}) + \frac{1}{4}(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} - \tan\frac{\theta}{2})(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} + \tan\frac{\theta}{2}) = 0$$

Donc f *est fonction harmonique.*

1.3.2 Quelques régles de calcul pour le Laplacien

Proposition 1.3.2. *Soit* $(\mathbb{R}^2, g)$ *une variété riemannienne,* $\forall x, y \in \mathbb{R}$*, en coordonnées cartésiennes* (x, y) *est repère en coordonnées polaires* (r, θ) *avec*

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

et on a :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \tag{1.6}$$

Proposition 1.3.3. *Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive de classe* C^2. *Alors*

$$\Delta(f^p) = pf^{p-2}(f\Delta f + (p-1)|grad\ f|^2). \tag{1.7}$$

Preuve.

D'aprés la définition on a

$$\Delta(f^p) = e_i(e_i(f^p)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f^p) \tag{1.8}$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur $\mathbb{R}^m$.

On a pour $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$,

$$X(f^p) = pf^{p-1}X(f).$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} X(X(f^p)) &= pX(f^{p-1}X(f)) \\ &= p(f^{p-1}X(X(f)) + X(f)X(f^{p-1})) \\ &= p(f^{p-1}X(X(f)) + (p-1)f^{p-2}X(f)X(f)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} e_i(e_i(f^p)) &= p(f^{p-1}e_i(e_i(f)) + (p-1)f^{p-2}e_i(f)e_i(f)) \\ &= pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)|grad\ f|^2) \end{aligned}$$

donc

$$e_i(e_i(f^p) = pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)|grad\ f|^2) \tag{1.9}$$

et

$$(\nabla_{e_i}e_i)(f^p) = pf^{p-1}(\nabla_{e_i}e_i)(f). \tag{1.10}$$

En remplaçant (1.9) et (1.10) dans (1.8), on obtient

$$\Delta f^p = pf^{p-2}(fe_i(e_i(f)) + (p-1)|grad\ f|^2 - f(\nabla_{e_i}e_i)(f)).$$

Or

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}e_i)(f),$$

il suit que

$$\Delta(f^p) = pf^{p-2}(f\Delta f + (p-1)|grad\ f|^2).$$

■

Comme cas particulier de la proposition 1.3.3, on obtient le résultat suivant

Corollaire 1.3.1. *Soit (M,g) une variété riemannienne,$\forall x \in \mathbb{R}^m$ on a*

$$\Delta(|x|^p) = p(p+m-2)|x|^{p-2}. \tag{1.11}$$

Preuve.

Posons $f(x) = |x|$ dans l'équation (1.7) , on obtient

$$\Delta(|x|^p) = p|x|^{p-2}(|x|\Delta|x| + (p-1)|grad\ |x||^2),$$

où

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2},$$

et

$$\begin{aligned} grad|x| &= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}\tfrac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \tfrac{x_i}{|x|}\tfrac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

De même

$$|grad|x||^2 = g(\frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}) = 1$$

et

$$\Delta|x| = \Sigma_{i=1}^m \frac{\partial^2|x|}{\partial x_i^2}.$$

Or

$$\frac{\partial}{x_i}(|x|) = \frac{x_i}{|x|},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta|x| &= \tfrac{\partial^2|x|}{\partial x_i^2} = \tfrac{\partial}{x_i}(\tfrac{x_i}{|x|}) \\ &= \tfrac{1}{|x|^2}(m|x| - |x|) = \tfrac{(m-1)}{|x|}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta(|x|^p) = p|x|^{p-2}((m-1) + p - 1).$$

Finalement, on déduit que

$$\Delta(|x|^p) = p(m+p-2)|x|^{p-2}.$$

■

Proposition 1.3.4. *Soient $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe* C^∞*, alors*

$$\Delta(g \circ f) = (g' \circ f)\Delta f + (g'' \circ f)|grad\ f|^2. \tag{1.12}$$

Preuve.

Soit

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & (g \circ f)(x) \end{array}$$

Par déffinition du Laplacien, on a

$$\Delta(g \circ f) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x)).$$

Un simple calcul nous donne

$$\frac{\partial}{\partial x_i}((g \circ f)(x)) = g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

il suit que

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}((g \circ f)(x)) & = & \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_i}((g \circ f)(x))) \\ & = & \frac{\partial}{\partial x_i}(g'(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}). \end{array}$$

On obtient donc

$$\Delta(g \circ f)(x) = g'(f(x))\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + g''(f(x))\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Comme $(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = |grad\ f|^2$, il résulte que

$$\Delta(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x)\Delta f + (g'' \circ f)(x)|grad\ f|^2.$$

■

Proposition 1.3.5. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m. Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, on a*

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + |grad\ f|^2). \tag{1.13}$$

Preuve.

Par définition, on a

$$\Delta e^f = e_i(e_i(e^f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(e^f).$$

Or

$$e_i(e^f) = e^f.e_i(f),$$

d'où

$$\begin{aligned} e_i(e_i(e^f)) &= e_i(e^f e_i(f)) \\ &= e^f e_i(e_i(f)) + e^f e_i(f) e_i(f) \\ &= e^f(e_i(e_i(f)) + |grad\ f|^2) \end{aligned}$$

et

$$(\nabla_{e_i} e_i)(e^f) = e^f(\nabla_{e_i} e_i)(f),$$

donc

$$\Delta e^f = e^f(\Delta f + |grad\ f|^2)$$

■

Définition 1.3.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension m.On appelle forme volume sur (M, g), notée υ^M ou υ^g, la forme définie localement dans un repère par*

$$\upsilon^M = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge, ..., \wedge dx^m.$$

Exemples 1.3.1. *On considère la variéte $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a*

$$g_0 = dx^2 + dy^2,$$

et

$$\upsilon^{g_0} = \sqrt{det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy.$$

On consédère la shpère S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2,$$

alors, la forme volume est donnée par

$$\upsilon^g = \sqrt{det(g_{ij})} d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta| d\theta \wedge d\varphi.$$

Proposition 1.3.6. ***(Théorème de divergence [4])***

Soit D un domaine compact à bord dans une variété riemannienne (M, g). Soit ω une 1-forme et X un champ de vecteur, définis sur un voisinage inclue dans D. Alors

$$\int_D (div\omega)v^M = \int_{\partial D} \omega(\mathbf{n})v^{\partial D} \ et \ \int_D (divX)v^M = \int_{\partial D} g(X, \mathbf{n})v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D *et $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal à ∂D.*

Corollaire 1.3.2. *Pour tout ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à support compact dans le domaine D, alors*

$$\int_D (div\omega)v^M = 0 \ et \ \int_D (divX)v^M = 0.$$

1.4 L'harmonicité des fonctions radiales

Dans le cas où la fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est radiale, c'est à dire elle dépend seulement de $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$, nous allons caractériser touts les fonctions radiales qui sont harmoniques.

Proposition 1.4.1. *Soit f une fonction de classe* C^2 *définie par :*

$$\begin{array}{rcccc} f : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} & m \geq 2 \\ & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & f(x) = F(r) & \end{array}$$

Alors f est harmonique si et seulement si s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rclll} f(x) & = & A \ln r + B & si & m = 2 \\ f(x) & = & \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B & si & m \neq 2 \end{array}$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$ et A, B sont des constantes.

Preuve.

On a $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$, il suffit de remplaçer dans l'équation (1.12) pour $h(x) = r = |x|$ on obtient

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta F(r) \\ &= \Delta(F \circ h) \\ &= (F' \circ h)\Delta h + (F'' \circ h)|grad\ h|^2 \\ &= F'(r)\Delta|x| + F''(r)|grad|x||^2 \end{aligned}$$

en utilisant l'équation (1.11) pour $p = 1$, on a

$$\begin{array}{rcl}\Delta|x| & = & 1(1+m-2)|x|^{1-2} \\ & = & (m-1)\frac{1}{|x|} \\ & = & (m-1)\frac{1}{r}\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}grad|x| & = & \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2+...+x_m^2}\frac{\partial}{\partial x_i} \\ & = & \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}.\end{array}$$

De même

$$|grad|x||^2 = g(\frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{x_i}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_i}) = 1.$$

Ce qui donne finalement

$$\Delta f = F''(r) + \frac{(m-1)}{r}F'(r) \tag{1.14}$$

Grâce a l'équation (1.14), on déduit que f est harmonique si seulement si F vérifie l'équation suivante :

$$F''(r) + \frac{(m-1)}{r}F'(r) = 0 \tag{1.15}$$

Ce qui donne

$$\frac{F''(r)}{F'(r)} = -(m-1)\frac{1}{r}.$$

En intégrant par rapport à r, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\ln F'(r) & = & -(m-1)\ln r + c \\ \ln F'(r) & = & \ln \frac{A}{r^{m-1}}.\end{array}$$

avec $c = \ln A$

Enfin l'harmonicité de f se traduit par l'équation

$$F'(r) = \frac{A}{r^{m-1}} \tag{1.16}$$

Pour résoudre l'équation (1.16), nous allons distinguer deux cas :

1^{er} **cas** : Pour $m = 2$, on obtient

$$F'(r) = \frac{A}{r} \Rightarrow F(r) = A\ln r + B$$

donc

$$f(x) = A \ln r + B.$$

2^{eme} **cas** : Pour $m \neq 2$, l'équation (1.16) s'écrit sous la forme

$$F'(r) = Ar^{1-m}.$$

Par intégrationt, on obtient :

$$F(r) = \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B,$$

d'où

$$f(x) = \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B.$$

■

1.5 L'opérateur bilaplacien sur une variété riemannienne

1.5.1 Définitions et Propriétés

Définition 1.5.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, on définit l'opérateur bilaplacien noté Δ^2 sur M par :*

$$\begin{array}{rccc} \Delta^2 : & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & \Delta^2 f = \Delta(\Delta f) \end{array}$$

Propriété 1.5.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne, pour deux fonctions $f, h \in$ $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ on a :*

1. $\Delta^2(f + h) = \Delta^2(f) + \Delta^2(h)$
2. $\Delta^2(fh) = h\Delta^2(f) + f\Delta^2(h) + 2\Delta(f)\Delta(h) + 2grad\ f(\Delta h) + 2grad\ h(\Delta f) + 2\Delta df(grad\ h))$

Preuve.

Soit $f, h \in \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, en utilisant les propriétés de Δ,on obtient :

1.

$$\begin{aligned}\Delta^2(f+h) &= \Delta(\Delta(f+h))\\ &= \Delta(\Delta(f)+\Delta(h))\\ &= \Delta(\Delta(f))+\Delta(\Delta(h))\\ &= \Delta^2(f)+\Delta^2(h)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Delta^2(fh) &= \Delta(\Delta(fh))\\ &= \Delta(h\Delta(f)+f\Delta(h)+2g(grad\ f, grad\ h))\\ &= \Delta(h\Delta(f))+\Delta(f\Delta(h))+\Delta(2g(grad\ f, grad\ h)).\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}\Delta(h\Delta(f)) &= h\Delta(\Delta f)+\Delta(f)\Delta(h)+2grad\ h(\Delta f)\\ &= h\Delta^2 f+\Delta(f)\Delta(h)+2grad\ h(\Delta f)\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\Delta(f\Delta(h)) = f\Delta^2 h+\Delta(h)\Delta(f)+2grad\ f(\Delta h)$$

et

$$\begin{aligned}\Delta(2g(grad\ f, grad\ h)) &= \Delta(g(grad\ f, grad\ h)+g(grad\ f, grad\ h))\\ &= \Delta(g(grad\ f, grad\ h))+\Delta(g(grad\ f, grad\ h))\\ &= 2\Delta(g(grad\ f, grad\ h))\\ &= 2\Delta df(grad\ h).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Delta^2(fh) &= h\Delta^2 f+\Delta(f)\Delta(h)+2grad\ h(\Delta f)+f\Delta^2 h+\Delta(h)\Delta(f)+\\ &\quad 2grad\ f(\Delta h)+2\Delta(g(grad\ f, grad\ h))\\ &= h\Delta^2(f)+f\Delta^2(h)+2\Delta(f)\Delta(h)+2(grad\ f(\Delta h)+2grad\ h(\Delta f)+\\ &\quad 2\Delta df(grad\ h))\end{aligned}$$

■

Exemple 1.5.1. *Soit $(\mathbb{R}^m, g_0)$ une variété riemannienne tel que $(g_0)_{ij} = \delta_{ij}$, et soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ alors :*

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}$$

Définition 1.5.2. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, et soit* $f \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$*, on dit que* f *est biharmonique si :*

$$\Delta^2 f = 0.$$

Exemple 1.5.2. *Tout fonction harmonique* $f \in \mathrm{C}^{\infty}(M)$ *est biharmonique.*

Exemple 1.5.3. *Le simple exemple d'une fonction biharmonique, les polynômes de degrés* 3 *et* 2 *sur* $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Quelques constructions des fonctions biharmonique

Dans ce chapitre, comme premier résultat de ce travail, on caractérise touts les fonctions radiales qui sont biharmonique, ensuite on s'intéresse à la déformation conforme de la métrique où on donne l'effet d'une telle déformation sur les connexions, sur la courbure et sur bilaplacien, on termine ce chapitre par l'étude du bilaplacien et des fonctions biharmoniques sur les variétés produit tordu où on traite certains cas particuliers.

2.1 La biharmonicité des fonctions radiales

Dans le cas où la fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ est radiale, c'est à dire elle dépend seulement de $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2}$, nous allons caractériser quelques fonctions radiales qui sont biharmonique, par exemple toute fonction radiale harmonique est biharmonique, c'est à dire toutes les fonctions qui vérifier l'équation (1.15) sont biharmonique.

Proposition 2.1.1. *Soit f une fonction de classe C^4 définie par :*

$$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, ..., x_2) & \longmapsto & f(x) = F(r) \end{array}$$

Alors f est biharmonique si et seulement si F est vérifier l'équation suivante :

$$F^{(4)}(r)+2\frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r)+\frac{(m-1)(m-3)}{r^2}F''(r)-\frac{(m-1)(m-3)}{r^3}F'(r)=0.$$

Preuve.

Par définition de bilaplacien, on a

$$\begin{aligned}\Delta^2 f &= \Delta^2 F(r)\\ &= \Delta(\Delta F(r)).\end{aligned}$$

En utilisant l'équation (1.14), on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta^2 F(r) &= \Delta(F''(r)+\tfrac{(m-1)}{r}F'(r))\\ &= \Delta(F''(r))+\Delta(\tfrac{(m-1)}{r}F'(r)).\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta^2 F(r)=\Delta(F''(r))+(m-1)\Delta(\frac{1}{r}F'(r)). \tag{2.1}$$

De même, on a

$$\Delta(F''(r))=F^{(4)}+\frac{(m-1)}{r}F^{(3)}. \tag{2.2}$$

D'aprés les propriétés de Δ, on a

$$\Delta(r^{-1}F'(r))=F'(r)\Delta(r^{-1})+r^{-1}\Delta F'(r)+2g(grad\ F'(r),grad\ (r^{-1})). \tag{2.3}$$

Comme $r=|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_m^2}$ en utilisant l'équation (1.11) pour $p=-1$ on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta(r^{-1}) &= \Delta|x|^{-1}\\ &= -1(-1+m-2)|x|^{(-1-2)}\\ &= -\tfrac{(m-3)}{r^3}\end{aligned}$$

d'où

$$\Delta(r^{-1})=-\frac{(m-3)}{r^3} \tag{2.4}$$

et

$$\Delta F'(r)=F^{(3)}(r)+\frac{(m-1)}{r}F''(r). \tag{2.5}$$

On sait que

$$g(grad\ F'(r),grad\ (r^{-1}))=\frac{\partial F'(r)}{\partial x_i},\frac{\partial(r^{-1})}{\partial x_i}$$

comme

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial F'(r)}{\partial x_i} & = & \frac{\partial r}{x_i} F''(r) \\ & = & \frac{x_i}{r} F''(r) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial (r^{-1})}{\partial x_i} & = & (-1)\frac{x_i}{r}\frac{1}{r^2} \\ & = & -\frac{x_i}{r^3}, \end{array}$$

il suit que

$$\begin{array}{rcl} g(grad\ F'(r), grad\ (r^{-1})) & = & -\frac{x_i}{r^3}\frac{x_i}{r} F''(r) \\ & = & -\frac{F''(r)}{r^4} r^2 \\ & = & -\frac{F''(r)}{r^2}, \end{array}$$

d'où

$$g(grad\ F'(r), grad\ (r^{-1})) = -\frac{F''(r)}{r^2} \tag{2.6}$$

En remplaçant l'équation (2.4),(2.5) et (2.6) dans l'équation (2.3) on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(r^{-1}F'(r)) & = & F'(r)(-\frac{(m-3)}{r^3}) + r^{-1}(F^{(3)}(r) + \frac{(m-1)}{r}F''(r)) + 2(-\frac{F''(r)}{r^2}) \\ & = & \frac{1}{r}F^3(r) + \frac{(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-3)}{r^3}F'(r), \end{array}$$

on déduit que

$$\Delta(r^{-1}F'(r)) = \frac{1}{r}F^3(r) + \frac{(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-3)}{r^3}F'(r). \tag{2.7}$$

En remplaçant (2.2) et (2.7) dans l'équation (2.1), on arrive au résultat suivant :

$$\begin{array}{rcl} \Delta^2 f & = & \Delta(F''(r)) + \Delta(\frac{(m-1)}{r}F'(r)) \\ & = & F^{(4)}(r) + \frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r) + (m-1)(\frac{1}{r}F^3(r) + \frac{(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-3)}{r^3}F'(r)) \\ & = & F^{(4)}(r) + \frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r) + \frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r) + \frac{(m-1)(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-1)(m-3)}{r^3}F'(r) \\ & = & F^{(4)}(r) + 2\frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r) + \frac{(m-1)(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-1)(m-3)}{r^3}F'(r). \end{array}$$

Donc f est biharmonique si et seulement si

$$F^{(4)}(r) + 2\frac{(m-1)}{r}F^{(3)}(r) + \frac{(m-1)(m-3)}{r^2}F''(r) - \frac{(m-1)(m-3)}{r^3}F'(r) = 0.$$

■

Proposition 2.1.2. *Soit f une fonction de classe C^4 définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x=(x_1,...,x_2) & \longmapsto & f(x)=F(r) \end{array}$$

Alors f est biharmonique si et selement si f s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{rcllll} f(x) & = & \frac{r^2}{4}(A\ln r + B - \frac{3A}{2}) + C\ln r + K & si & m=2 \\ f(x) & = & -\frac{A}{4}\ln r + \frac{B}{8}r^2 - \frac{C}{2r^2} + k & si & m=4 \\ f(x) & = & \frac{A}{2(2-m)(4-m)r^{m-4}} + \frac{B}{2m}r^2 + \frac{C}{(2-m)r^{m-2}} + k & si & m\neq 2 \ et \ m\neq 4. \end{array}$$

avec $r=\sqrt{x_1^2+...+x_m^2}$ et A, B, C et k sont des constantes réelles.

Preuve.
Par féfinition de l'opérateur bilablacien, on a

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = 0$$

avec

$$\Delta f = F''(r) + \frac{(m-1)}{r}F'(r).$$

On pose

$$G(r) = F''(r) + \frac{(m-1)}{r}F'(r).$$

Donc

$$\Delta G(r) = G''(r) + \frac{(m-1)}{r}G'(r)$$

D'où

$$\Delta G(r) = 0 \ \Rightarrow \ G''(r) + \frac{(m-1)}{r}G'(r) = 0.$$

On utilisant la proposition 1.4.1, on trouve :

$$\begin{array}{rclll} G(r) & = & A\ln r + B & si & m=2 \\ G(r) & = & \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B & si & m>2 \end{array}$$

Donc pour $m=2$, on a

$$F''(r) + \frac{F'(r)}{r} = A\ln r + B$$

on multipliant par r, on obtient :

$$rF''(r) + F'(r) = r(A\ln r + B).$$

Or

$$d(rF'(r)) = (rF''(r) + F'(r))dr$$

il suit que

$$d(rF'(r)) = r(A\ln r + B)dr.$$

Par une intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned} rF'(r) &= \int r(A\ln r + B)dr + C \\ &= [\tfrac{1}{2}r^2(A\ln r + B)] - \int \tfrac{1}{2}r^2\tfrac{A}{r}dr + C \\ &= \tfrac{1}{2}r^2(A\ln r + B) - \tfrac{A}{2}\int r dr + C \\ &= \tfrac{1}{2}r^2(A\ln r + B) - \tfrac{A}{4}r^2 + C \\ &= \tfrac{1}{2}r^2(A\ln r + B - \tfrac{A}{2}) + C. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$F'(r) = \frac{1}{2}r(A\ln r + B - \frac{A}{2}) + \frac{C}{r}.$$

En intégrant cette équation, on a

$$\begin{aligned} F(r) &= \int (\tfrac{1}{2}r(A\ln r + B - \tfrac{A}{2}) + \tfrac{C}{r})dr + K \\ &= \tfrac{1}{2}\int r(A\ln r + B - \tfrac{A}{2})dr + C\int r^{-1}dr + K \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}r^2(A\ln r + B - \tfrac{A}{2}) - \tfrac{A}{4}r^2] + C\ln r + K \\ &= \tfrac{1}{4}r^2(A\ln r + B - \tfrac{A}{2} - A) + C\ln r + K \\ &= \tfrac{1}{4}r^2(A\ln r + B - \tfrac{3A}{2}) + C\ln r + K, \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{4}r^2(A\ln r + B - \frac{3A}{2}) + C\ln r + K \qquad\qquad si\ m = 2.$$

Pour $m \neq 2$, on a

$$G(r) = \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B.$$

Ce qui implique que

$$F''(r) + \frac{(m-1)}{r}F'(r) = \frac{A}{(2-m)r^{m-2}} + B.$$

En multipliant par r^{m-1}, on trouve :

$$r^{m-1}F''(r) + (m-1)r^{m-2}F'(r) = \frac{Ar}{(2-m)} + Br^{m-1}.$$

Or
$$d(r^{m-1}F'(r)) = (r^{m-1}F''(r) + (m-1)r^{m-2}F'(r))dr,$$
d'où
$$d(r^{m-1}F'(r)) = (\frac{Ar}{(2-m)} + Br^{m-1})dr.$$
En intégrant cette dernière équation, on trouve
$$\begin{aligned} r^{m-1}F'(r) &= \int (\tfrac{Ar}{(2-m)} + Br^{m-1})dr + C \\ &= \tfrac{A}{(2-m)} \int r dr + B \int r^{m-1} dr + C \\ &= \tfrac{A}{2(2-m)} r^2 + \tfrac{B}{m} r^m + C. \end{aligned}$$
En divisant par r^{m-1}, on conclut que
$$F'(r) = \frac{A}{2(2-m)r^{m-3}} + \frac{B}{m}r + \frac{C}{r^{m-1}}. \tag{2.8}$$
Pour resoudre l'équation (2.8), nous allons distinguer deux cas :

1^{er} **cas** : Pour $m = 4$, on obtient
$$F'(r) = -\frac{A}{4r} + \frac{B}{4}r + \frac{C}{r^3},$$
d'où
$$F(r) = -\frac{A}{4}\ln r + \frac{B}{8}r^2 - \frac{C}{2r^2} + k$$
2^{eme} **cas** : Pour $m \neq 2$ et $m \neq 4$, on a
$$F'(r) = \frac{A}{2(2-m)r^{m-3}} + \frac{B}{m}r + \frac{C}{r^{m-1}},$$
d'où
$$F(r) = \frac{A}{2(2-m)(4-m)r^{m-4}} + \frac{B}{2m}r^2 + \frac{C}{(2-m)r^{m-2}} + k.$$
■

2.2 Etude de la biharmonicité aprés déformation conforme

Dans cette partie, nous allons étudier la biharmonicité d'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M, g)$ en déformation conformément la métrique g en $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ où $\gamma \in \mathrm{C}^\infty(M, g)$.

Proposition 2.2.1. *Soit (M,g) une variété riemanienne munie de sa connexion Levi-Civita ∇, et soit $\widetilde{g}=e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g.*

Nontons $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-civita associe à la métrique $\widetilde{g}$.On a pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$.

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+X(\gamma)Y+Y(\gamma)X-g(X,Y)grad\gamma. \tag{2.9}$$

Preuve.

On va donner la preuve de la proposition en utilisant les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k qui sont donnés par la formule suivante :

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i(g_{jl})+\partial_j(g_{il})-\partial_l(g_{ij})).$$

Pour $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$, on a

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\Gamma}_{ij}^k & = & \frac{1}{2}\widetilde{g}^{kl}(\partial_i(\widetilde{g}_{jl})+\partial_j(\widetilde{g}_{il})-\partial_l(\widetilde{g}_{ij}))\\ & = & \frac{1}{2}e^{-2\gamma}g^{kl}(\partial_i(e^{2\gamma}g_{jl})+\partial_j(e^{2\gamma}g_{il})-\partial_l(e^{2\gamma}g_{ij}))\\ & = & \frac{1}{2}e^{-2\gamma}g^{kl}(e^{2\gamma}\partial_i(g_{jl})+e^{2\gamma}\partial_j(g_{il})-e^{2\gamma}\partial_l(g_{ij})+2e^{2\gamma}\partial_i(\gamma)g_{jl}+2e^{2\gamma}\partial_j(\gamma)g_{il}-2e^{2\gamma}\partial_l(\gamma)g_{ij})\\ & = & \Gamma_{ij}^k+\underbrace{g^{kl}\partial_i(\gamma)g_{jl}}_{T_1}+\underbrace{g^{kl}\partial_j(\gamma)g_{il}}_{T_2}-\underbrace{g^{kl}\partial_l(\gamma)g_{ij}}_{T_3}.\end{array}$$

D'une part que $g^{kl}g^{jl}=\delta_{kj}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}T_1 & = & \delta_{kj}\partial_i(\gamma)\\ T_2 & = & \delta_{ki}\partial_j(\gamma)\end{array}$$

et

$$T_3=g^{kl}g_{ij}\partial_l(\gamma).$$

Où $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, par définition, on a

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k.$$

Calculons $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j$, on trouve :

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j & = & \widetilde{\Gamma}_{ij}^k\partial_k\\ & = & \nabla_{\partial_i}\partial_j+\delta_{kj}\partial_i(\gamma)\partial_k+\delta_{ki}\partial_j(\gamma)\partial_k+g^{kl}g_{ij}\partial_l(\gamma)\partial_k\end{array}$$

Ce qui entraine l'équation suivante :

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(\gamma)\partial_j + \partial_j(\gamma)\partial_i - g(\partial_i, \partial_j)grad\gamma.$$

On prend $X = X^i\partial_i$,$Y = Y^j\partial_j$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &= \widetilde{\nabla}_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j \\
&= X^i(\widetilde{\nabla}_{X^i\partial_i}\partial_j) \\
&= X^i(Y^j\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(Y^j)\partial_j) \\
&= X^i(Y^j(\nabla_{\partial_i}\partial_j + \partial_i(\gamma)\partial_j + \partial_j(\gamma)\partial_i - g(\partial_i, \partial_j)grad\gamma) + \partial_i(Y^j)\partial_j) \\
&= X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j + X^iY^j\partial_i(\gamma)\partial_j + X^iY^j\partial_j(\gamma)\partial_i - X^iY^jg(\partial_i, \partial_j)grad\gamma + X^i\partial_i(Y^j)\partial_j
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_{X^i\partial_i} Y^j\partial_j \\
&= X^i(\nabla_{X^i\partial_i}\partial_j) \\
&= X^iY^j\nabla_{\partial_i}\partial_j + X^i\partial_i(Y^j)\partial_j
\end{aligned}$$

D'où

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\gamma)Y + Y(\gamma)X - g(X, Y)grad\gamma.$$

■

Grace à la formule (2.9), on va calculer le bilaplacien d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, aprés déformation conforme de la métrique, plus précisement on va le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne, et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors pour tout fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2 f &= e^{-4\gamma}(\Delta^2 f - 2(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)\Delta f + (m-6)d\gamma(grad\Delta f) \\
&+ (m-2)(\Delta df(grad\gamma) + (m-6)grad\gamma(df(grad\gamma))) \\
&- 2(m-2)(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)df(grad\gamma)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. Soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g). Pour $\widetilde{g}$, la base orthonormée est donnée par $\widetilde{e}_i = e^{-\gamma}e_i$, $i = 1, ..., m$,
D'abord on va calculer le Laplacien $\widetilde{\Delta}$ associe à $(M, \widetilde{g})$.
Par définition de $\widetilde{\Delta}$, on a

$$\widetilde{\Delta} f = \widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) - (\nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i)(f) \tag{2.11}$$

Grâce à l'équation (2.9) on a :

$$\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i = \nabla_{e_i}e_i + e_i(\gamma)e_i + e_i(\gamma)e_i - g(e_i, e_i)grad\gamma.$$

or

$$grad\gamma = e_i(\gamma)e_i,$$

ce qui donne :

$$\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i = \nabla_{e_i}e_i + (2-m)grad\gamma.$$

De même, on a

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i & = & \widetilde{\nabla}_{e^{-\gamma}e_i}e^{-\gamma}e_i \\ & = & e^{-\gamma}\widetilde{\nabla}_{e_i}e^{-\gamma}e_i \\ & = & e^{-\gamma}(e^{-\gamma}\widetilde{\nabla}_{e_i}e_i - e^{-\gamma}e_i(\gamma)e_i) \\ & = & e^{-2\gamma}(\nabla_{e_i}e_i + (2-m)grad\gamma - grad\gamma),\end{array}$$

ce qui donne

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i(f) = e^{-2\gamma}(\nabla_{e_i}e_if + (1-m)grad\gamma(f)). \tag{2.12}$$

On sait que

$$\widetilde{e}_i(f) = e^{-\gamma}e_i(f),$$

il suit que

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) & = & \widetilde{e}_i(e^{-\gamma}e_i(f)) = e^{-\gamma}e_i(e^{-\gamma}e_i(f)) \\ & = & e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) + e^{-\gamma}e_i(e^{-\gamma})e_i(f) \\ & = & e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) - e^{-2\gamma}e_i(\gamma)e_i(f)\end{array}$$

Enfin, on conclut que

$$\widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(f)) = e^{-2\gamma}e_i(e_i(f)) - e^{-2\gamma}e_i(\gamma)e_i(f) \tag{2.13}$$

En remplaçant (2.12) et (2.13) dans (2.11), on trouve

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{\Delta}f & = & e^{-2\gamma}(e_i(e_i(f)) - e_i(\gamma)e_i(f) - (\nabla_{e_i}e_i)(f) - (1-m)grad\gamma(f)) \\ & = & e^{-2\gamma}(\Delta f + (m-2)grad\gamma(f)),\end{array}$$

d'où

$$\widetilde{\Delta}f = e^{-2\gamma}(\Delta f + (m-2)grad\gamma(f)). \tag{2.14}$$

Grace à l'équation (2.14) on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^2 f &= \widetilde{\Delta}(\widetilde{\Delta} f) \\
&= \widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}(\Delta f + (m-2) grad\gamma(f))) \\
&= \widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}\Delta f) + \widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}(m-2) grad\gamma(f)).
\end{aligned}$$

Comme

$$\widetilde{\Delta}^2 f = \underbrace{\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}\Delta f)}_{H_1} + \underbrace{\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}(m-2) grad\gamma(f))}_{H_2} \tag{2.15}$$

Pour le terme H_1, on a

$$\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}\Delta f) = e^{-2\gamma}(\underbrace{\Delta(e^{-2\gamma}\Delta f)}_{T_1} + (m-2)\underbrace{grad\gamma(e^{-2\gamma}\Delta f)}_{T_2}). \tag{2.16}$$

En utilisant les propriétés du Laplacien et du gradient sur T_1 e T_2, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Delta(e^{-2\gamma}\Delta f) &= e^{-2\gamma}\Delta(\Delta f) + \Delta f \Delta e^{-2\gamma} + 2grad\ e^{-2\gamma}(\Delta f) \\
&= e^{-2\gamma}\Delta^2 f + \Delta f e^{-2\gamma}(\Delta(-2\gamma) + |grad(-2\gamma)|^2) - 4e^{-2\gamma} grad\gamma(\Delta f) \\
&= e^{-2\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f \Delta\gamma + 4\Delta f |grad\gamma|^2 - 4grad\gamma(\Delta f))
\end{aligned}$$

d'où

$$T_1 = e^{-2\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f \Delta\gamma + 4\Delta f |grad\gamma|^2 - 4grad\gamma(\Delta f)) \tag{2.17}$$

et

$$\begin{aligned}
grad\gamma(e^{-2\gamma}\Delta f) &= e^{-2\gamma} grad\gamma(\Delta f) + \Delta f grad\gamma(e^{-2\gamma}) \\
&= e^{-2\gamma} grad\gamma(\Delta f) - 2e^{-2\gamma}\Delta f grad\gamma(\gamma) \\
&= e^{-2\gamma}(grad\gamma(\Delta f) - 2\Delta f grad\gamma(\gamma))
\end{aligned}$$

Donc

$$grad\gamma(e^{-2\gamma}\Delta f) = e^{-2\gamma}(grad\gamma(\Delta f) - 2\Delta f grad\gamma(\gamma)) \tag{2.18}$$

En remplaçant (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}\Delta f) &= e^{-2\gamma}(e^{-2\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f \Delta\gamma + 4\Delta f |grad\gamma|^2 - 4grad\gamma(\Delta f)) + \\
&\quad (m-2)e^{-2\gamma}(grad\gamma(\Delta f) - 2\Delta f grad\gamma(\gamma))) \\
&= e^{-4\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f \Delta\gamma - 2(m-4)\Delta f grad\gamma(\gamma) + (m-6) grad\gamma(\Delta f)),
\end{aligned}$$

il suit que

$$\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}\Delta f) = e^{-4\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f \Delta\gamma - 2(m-4)\Delta f grad\gamma(\gamma) + (m-6) grad\gamma(\Delta f)). \tag{2.19}$$

Enfin pour le terme H_2, on a

$$\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}(m-2)grad\gamma(f)) = (m-2)\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}grad\gamma(f)).$$

En remplaçant Δf par $grad\gamma(f)$ dans l'équation (2.19), on trouve :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}grad\gamma(f)) &= e^{-4\gamma}(\Delta(grad\gamma(f)) - 2grad\gamma(f)\Delta\gamma - 2(m-4)grad\gamma(f)grad\gamma(\gamma)\\ &+ (m-6)grad\gamma(grad\gamma(f))).\end{aligned}$$

Il suit que :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(e^{-2\gamma}(m-2)grad\gamma(f)) &= (m-2)e^{-4\gamma}(\Delta(grad\gamma(f)) - 2grad\gamma(f)\Delta\gamma\\ &- 2(m-4)grad\gamma(f)grad\gamma(\gamma) + (m-6)grad\gamma(grad\gamma(f))).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Finalement, en substituant (2.19) et (2.20) dans (2.15) on déduit que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^2 f &= e^{-4\gamma}(\Delta^2 f - 2\Delta f\Delta\gamma - 2(m-4)\Delta f grad\gamma(\gamma) + (m-6)grad\gamma(\Delta f))\\ &+ (m-2)e^{-4\gamma}(\Delta(grad\gamma(f)) - 2grad\gamma(f)\Delta\gamma\\ &- 2(m-4)grad\gamma(f)grad\gamma(\gamma) + (m-6)grad\gamma(grad\gamma(f))).\\ &= e^{-4\gamma}(\Delta^2 f - 2(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)\Delta f + (m-6)d\gamma(grad\Delta f)\\ &+ (m-2)(\Delta df(grad\gamma) + (m-6)grad\gamma(df(grad\gamma)))\\ &- 2(m-2)(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)df(grad\gamma)\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne, et soit $\widetilde{g} = e^{2\gamma}g$ une déformation conforme de la métrique g. Alors $f \in C^\infty(M, \widetilde{g})$ est biharmonique si et seulement si :*

$$\begin{gathered}\Delta^2 f - 2(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)\Delta f + (m-6)d\gamma(grad\Delta f)\\ +(m-2)(\Delta df(grad\gamma) + (m-6)grad\gamma(df(grad\gamma)))\\ -2(m-2)(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)df(grad\gamma) = 0\end{gathered} \tag{2.21}$$

Comme cas particulier, on a les resultats suivants :

Corollaire 2.2.1. *Soient* $f : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $m \neq 2$ *une fonction harmonique et soit* $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ *une métrique conformément équivalente à* g*.Alors* $f : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est biharmonique si et seulement si :*

$$\Delta df(grad\gamma) + (m-6)grad\gamma(df(grad\gamma))) - 2(\Delta\gamma + (m-4)|grad\gamma|^2)df(grad\gamma) = 0$$

Corollaire 2.2.2. *Soient* $f : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $m = 2$ *une fonction non harmonique et soit* $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ *une métrique conformément équivalente à* g*.Alors* $f : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est biharmonique si et seulement si :*

$$\Delta^2 f - 2(\Delta\gamma - 2|grad\gamma|^2)\Delta f - 4d\gamma(grad\Delta f) = 0$$

Exemple 2.2.1. *Soit*

$$\begin{array}{llcll} f: & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R} & m > 1,\ m \neq 3 \\ & x = (x_1, ..., x_m) & \longmapsto & r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_m^2} & \end{array}$$

et

$$g = dx_1^2 + ... + dx_m^2$$

Un calcul simple nous donne :

$$\Delta f = \frac{m-1}{r}$$

et

$$\Delta^2 f = -\frac{(m-1)(m-3)}{r^3}$$

D'ou la fonction f *n'est pas biharmonique par rapport à la métrique* g*.Nous allons la rendre biharmonique en déformant conformément la métrique euclidienne* g *sur* $\mathbb{R}^m$ *en* $\widetilde{g} = e^{2\gamma} g$ *où la fonction* γ *dépend seulement de* r*.*
Par suite, l'équation (2.21) *est équivalente à l'équation différentielle ordinaire non linéaire de troisième ordre suivante*

$$\begin{aligned} (m-2)\gamma''' + \tfrac{(m-1)(m-4)}{r}\gamma'' + (m-2)(m-8)\gamma'\gamma'' - \tfrac{(m-1)(3m-8)}{r^2}\gamma' \\ -\tfrac{4(m-1)(m-3)}{r}\gamma'^2 - 2(m-2)(m-4)\gamma'^3 - \tfrac{(m-1)(m-3)}{r^3} = 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Alors si γ *vérifier l'équation* (2.22) *notre fonction* f *devient biharmonique pour cette nouvelle métrique* $\widetilde{g}$*.*

2.3 La biharmonicité sur le produit tordu des variétés riemanniennes

2.3.1 Produit tordu des variétés riemanniennes

Définition 2.3.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux varitiés riemanniennes, la varitié produit tordu $M \times_f N$ munie de la métrique G_f, ou $f \in C^\infty(M)$ une fonction positive telle que :*

$$G_f = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \eta^* h$$

où

$$\pi : M \times N \longrightarrow M$$

et

$$\eta : M \times N \longrightarrow N$$

désignent les projections canoniques.

Si $X, Y \in \Gamma(T(M \times N))$, on a

$$G_f(X,Y) = g(d\pi(X), d\pi(Y)) + (f \circ \pi)^2 h(d\eta(X), d\eta(Y)).$$

Remarque 2.3.1. *Relativement à des cartes locales (U, x^i) sur M et (V, y^i) sur N. la matrice associe à G_f et donnée par :*

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & f^2 h_{lk} \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse est donnée par :

$$\begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & f^{-2} h^{lk} \end{pmatrix}$$

La connexion de Levi-Civita de $M \times_f N$ peut être maintenant rapprochée à celle de M et de N comme suit :

2.3.2 Connexion de Levi-Civita de la variété produit Tordu

Proposition 2.3.1. *([1]) Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés riemanniennes, si ∇ la connexion de Levi-Civita associe à la variété produit $(M \times N, G)$, alors la connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ associe à la variété produit tordu $(M \times_f N, G_f)$ est définie par :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{f} X_1(f)(0, Y_2) + \frac{1}{f} Y_1(f)(0, X_2) - fh(X_2, Y_2)(grad\ f, 0) \tag{2.23}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, tel que $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$.

2.3.3 L'opérateur bilaplacien sur la variété produit tordu

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, notons par Δ^M le Laplacien sur (M, g) et Δ^N le Laplacien sur (N, h).

D'abore on va calculer l'opérateur Laplacien sur $M \times_f N$ sera noté par $\widetilde{\Delta}$ en fonction de Δ^M, Δ^N et la fonction f.

Pour cela, considérons $\{e_1, ..., e_m\}$ une base orthonormée sur (M, g), et $\{f_1, ..., f_n\}$ une base orthonormée sur (N, h), la base orthonormée sur $(M \times_f N, G_f)$ est donnée par :

$$\{(e_1, 0), ..., (e_m, 0), (0, \frac{1}{f} f_1), ..., (0, \frac{1}{f} f_n)\}$$

Proposition 2.3.2. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, Δ^M, Δ^N désignent les opérateurs Laplaciens sur M et N. Si*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M \times_f N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

est une application de classe C^∞, alors :

$$\widetilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M \varphi, 0) + \frac{1}{f^2}(0, \Delta^N \varphi) + n(grad \ln f(\varphi), 0). \tag{2.24}$$

Preuve.

Par définition du Laplacien $\widetilde{\Delta}$ sur $(M \times_f N, G_f)$, on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}\varphi &= \underbrace{(e_i,0)((e_i,0)(\varphi))}_{A_1} - \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0))(\varphi)}_{A_2} + \\ &\quad \underbrace{(0,\frac{1}{f}f_i)((0,\frac{1}{f}f_i)(\varphi))}_{A_3} - \underbrace{(\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_i)}(0,\frac{1}{f}f_i))(\varphi)}_{A_4}\end{aligned} \tag{2.25}$$

Calculons les termes A_1, A_2, A_3 et A_4, on a :

$$\begin{aligned}A_1 &= (e_i,0)((e_i,0)(\varphi)) \\ &= (e_i,0)((e_i(\varphi),0)) \\ &= (e_i(e_i(\varphi)),0).\end{aligned}$$

Or, grâce à l'équation (2.23), on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0) &= \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0) \\ &= (\nabla_{e_i}e_i,0),\end{aligned}$$

d'où

$$A_2 = (\nabla_{e_i}e_i(\varphi),0).$$

Et pour A_3, on a

$$(0,\frac{1}{f}f_i)(\varphi) = \frac{1}{f}(0,f_i(\varphi)),$$

donc

$$A_3 = \frac{1}{f}(0,f_i)(\frac{1}{f}(0,f_i(\varphi))).$$

Comme $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$, on déduit que :

$$A_3 = \frac{1}{f^2}(0,f_i(f_i(\varphi))).$$

Enfin, pour le terme A_4, en utilisant l'équation (2.23), on a :

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_i)}(0,\tfrac{1}{f}f_i)) &= \tfrac{1}{f^2}(\widetilde{\nabla}_{(0,f_i)}(0,f_i)) \\ &= \tfrac{1}{f^2}(\nabla_{(0,f_i)}(0,f_i) - fh(f_i,f_i)(grad\ f,0)) \\ &= \tfrac{1}{f^2}(0,\nabla_{f_i}f_i) - \tfrac{n}{f}(grad\ f,0).\end{aligned}$$

Comme $grad\ f = f grad\ \ln f$, on déduit que :

$$A_4 = \frac{1}{f^2}(0, \nabla_{f_i} f_i(\varphi)) - n(grad\ \ln f(\varphi), 0). \tag{2.26}$$

En remplaçant les termes A_1, A_2, A_3 et A_4 dans (2.25), on obtient

$$\widetilde{\Delta}\varphi = (\Delta^M\varphi, 0) + \frac{1}{f^2}(0, \Delta^N\varphi) + n(grad \ln f(\varphi), 0).$$

∎

Maintenant on va calculer le bilaplacien dans la variété produit tordu,on obtient le résultat suivant :

Proposition 2.3.3. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, Δ^M, Δ^N désignent les opérateurs Laplaciens sur M et N. Soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M \times_f N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) \end{array}$$

est une application de classe C^∞, alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2\varphi &= ((\Delta^M)^2\varphi, 0) + \tfrac{1}{f^4}(0, (\Delta^N)^2\varphi) + n^2(grad \ln f(d\varphi(grad \ln f)), 0) \\ &+ n(\Delta^M d\varphi(grad \ln f) + grad \ln f(\Delta^M\varphi), 0). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Preuve. Grace à l'équation (2.24), on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2\varphi &= \widetilde{\Delta}(\widetilde{\Delta}\varphi) \\ &= \widetilde{\Delta}((\Delta^M\varphi, 0) + \tfrac{1}{f^2}(0, \Delta^N\varphi) + n(grad \ln f(\varphi), 0)) \\ &= \widetilde{\Delta}((\Delta^M\varphi, 0)) + \widetilde{\Delta}(\tfrac{1}{f^2}(0, \Delta^N\varphi)) + \widetilde{\Delta}(n(grad \ln f(\varphi), 0)), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\widetilde{\Delta}^2\varphi = \underbrace{\widetilde{\Delta}((\Delta^M\varphi, 0))}_{T_1} + \underbrace{\widetilde{\Delta}(\frac{1}{f^2}(0, \Delta^N\varphi))}_{T_2} + \underbrace{\widetilde{\Delta}(n(grad \ln f(\varphi), 0))}_{T_3} \tag{2.28}$$

En utilisant la définition du Laplacien $\widetilde{\Delta}$ sur $(M \times_f N, G_f)$ pour chaque T_1, T_2 et T_3, on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}((\Delta^M\varphi, 0)) &= (e_i, 0)((e_i, 0)(\Delta^M\varphi, 0)) - \widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i, 0)((\Delta^M\varphi, 0)) \\ &+ (0, \tfrac{1}{f}f_j)((0, \tfrac{1}{f}f_j)((\Delta^M\varphi, 0))) - \widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0, \tfrac{1}{f}f_j)((\Delta^M\varphi, 0)). \end{aligned}$$

Un calcul simple donne

$$(e_i,0)((e_i,0)(\Delta^M\varphi,0)) = (e_i(e_i(\Delta^M\varphi)),0),$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)((\Delta^M\varphi,0)) &= \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)((\Delta^M\varphi,0))\\ &= (\nabla_{e_i}e_i(\Delta^M\varphi),0),\end{aligned}$$

et

$$(0,\frac{1}{f}f_j)((0,\frac{1}{f}f_j)((\Delta^M\varphi,0))) = (0,0).$$

Grace à l'équation (2.26), on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\tfrac{1}{f}f_j)((\Delta^M\varphi,0)) &= \tfrac{1}{f^2}(0,\nabla_{fi}f_i)((\Delta^M\varphi,0)) - n(grad\ \ln f,0)((\Delta^M\varphi,0))\\ &= -n(grad\ \ln f(\Delta^M\varphi),0),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}T_1 &= \widetilde{\Delta}((\Delta^M\varphi,0))\\ &= (\Delta^M(\Delta^M\varphi),0) + n(grad \ln f(\Delta^M\varphi),0)\\ &= ((\Delta^M)^2\varphi,0) + n(grad \ln f(\Delta^M\varphi),0).\end{aligned}$$

Pour T_2 on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}(\tfrac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi)) &= \underbrace{(e_i,0)((e_i,0)(\frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi))}_{A_1} - \underbrace{\widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)(\frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi))}_{A_2}\\ &+ \underbrace{(0,\frac{1}{f}f_j)((0,\frac{1}{f}f_j)(\frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi)))}_{A_3} - \underbrace{\widetilde{\nabla}_{(0,\frac{1}{f}f_j)}(0,\frac{1}{f}f_j)(\frac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi))}_{A_4}\end{aligned} \tag{2.29}$$

le calcule des tremes A_1, A_2, A_3 et A_4 donne

$$\begin{aligned}A_1 &= (e_i,0)((e_i,0)(\tfrac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi))\\ &= (0,0),\end{aligned}$$

et pour A_2, on trouve :

$$\begin{aligned}A_2 = \widetilde{\nabla}_{(e_i,0)}(e_i,0)(\tfrac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi)) &= \nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)(\tfrac{1}{f^2}(0,\Delta^N\varphi))\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

Comme $f \in C^\infty(M)$, on a

$$A_3 = \frac{1}{f^4}(0, f_j(f_j(\Delta^N \varphi)))$$

Enfin

$$A_4 = \frac{1}{f^4}(0, \nabla_{fi} f_i(\Delta^N \varphi))$$

En remplaçant les termes A_1, A_2, A_3 et A_4, on trouve :

$$T_2 = \frac{1}{f^4}(0, (\Delta^N)^2 \varphi).$$

La même méthode de calcul nous donne

$$T_3 = n(\Delta^M d\varphi(grad \ln f), 0) + n^2(grad \ln f(d\varphi(grad \ln f)), 0).$$

Enfin, en remplaçant T_1, T_2 et T_3 dans l'èquation (2.28), on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2 \varphi &= ((\Delta^M)^2 \varphi, 0) + \tfrac{1}{f^4}(0, (\Delta^N)^2 \varphi) + n^2(grad \ln f(d\varphi(grad \ln f)), 0) \\ &+ n(\Delta^M d\varphi(grad \ln f) + grad \ln f(\Delta^M \varphi), 0). \end{aligned}$$

■

Nous allons traiter quelques cas particulier :
Si $\varphi(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}^2 \varphi &= \beta((\Delta^M)^2 \alpha, 0) + \tfrac{1}{f^4}(0, \alpha(\Delta^N)^2 \beta) + n^2 \beta(grad \ln f(d\alpha(grad \ln f)), 0) \\ &+ n\beta(\Delta^M d\alpha(grad \ln f) + grad \ln f(\Delta^M \alpha), 0). \end{aligned}$$

On peut distinguer le cas où $\alpha(x) = 1$ et la cas où $\beta(x) = 1$.
1^{er} **cas** : $\alpha(x) = 1$, on obtient :

$$\widetilde{\Delta}^2 \varphi = \frac{1}{f^4}(0, (\Delta^N)^2 \beta)$$

D'où φ est biharmonique si et seulement si β est biharmonique.
1^{er} **cas** : $\beta(y) = 1$, on trouve l'équation suivante :

$$\widetilde{\Delta}^2 \varphi = ((\Delta^M)^2 \alpha, 0) + n^2(grad \ln f(d\alpha(grad \ln f)), 0) + n(\Delta^M d\alpha(grad \ln f) + grad \ln f(\Delta^M \alpha), 0).$$

Donc φ est biharmonique si et seulement si :

$$(\Delta^M)^2 \alpha + n^2 grad \ln f(d\alpha(grad \ln f)) + n\Delta^M d\alpha(grad \ln f) + n grad \ln f(\Delta^M \alpha) = 0.$$

Chapitre 3

Théorème de Liouville et problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques

Dans ce chapitre, nous établissons le théorème de Liouville pour les fonctions biharmoniques. Nous montrons que toute fonction biharmonique d'une variété riemannienne complète à courbure de Ricci positive à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que sa bi-énergie est finie, est nécessairement harmonique. C'est une généralisation d'une résultat connue pour les fonctions harmonique. Dans la seconde partie, nous étudions le problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques définie sur la boule euclidienne.

3.1 Théorème de Liouville pour les fonctions biharmoniques

Dans ce partie, nous montrons le théorème de Liouville pour les fonctions biharmoniques.

Définition 3.1.1. *Soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty(M)$, le tenseur impulsion bi-énergie de f noté $S_2(f)$ est défini par :*

$$S_2(f) = (\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + Tr_g d(\Delta f) \otimes df)g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df). \tag{3.1}$$

Où

$$Sym(d(\Delta f) \otimes df) = \frac{1}{2}\{d(\Delta f) \otimes df + df \otimes d(\Delta f)\}$$

$S_2(f)$ est une 2-forme bilinéaire symetrique qui satisfait les propriétés suivantes

Propriété 3.1.1. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne on a :*

1.

$$S_2(f) = (\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df). \tag{3.2}$$

2.

$$S_2(f) = (-\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + div(\Delta f df))g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df). \tag{3.3}$$

3.

$$Tr_g S_2(f) = \frac{m}{2}(\Delta f)^2 + (m-2)df(grad\Delta f) \tag{3.4}$$

Preuve. Soit (M^m, g) une variété riemannienne et soit $(e_i)_{i=1}^m$ une base orthonormée. Pour le première resultat il suffit de calculer $Tr_g d(\Delta f) \otimes df$, on a donc :

$$\begin{aligned} Tr_g d(\Delta f) \otimes df &= (d(\Delta f) \otimes df)(e_i, e_i) \\ &= d(\Delta f)(e_i) df(e_i) \\ &= g(grad\Delta f, e_i) g(gradf, e_i) \\ &= g(grad(\Delta f), gradf) \\ &= df(grad\Delta f) \end{aligned}$$

on remplaçant cette expresion dans l'équation (3.1), on trouve :

$$S_2(f) = (\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df).$$

Maintenant on calculer $div(\Delta f df)$, on obtient

$$\begin{aligned} div(\Delta f df) &= (\nabla_{e_i}(\Delta f df))(e_i) \\ &= e_i((\Delta f df)(e_i)) - (\Delta f df)(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= e_i(\Delta f) e_i(f) + \Delta f e_i(e_i(f)) - \Delta f \nabla_{e_i} e_i(f) \\ &= df(grad\Delta f) + (\Delta f)^2, \end{aligned}$$

d'où

$$df(grad\Delta f) = div(\Delta f df) - (\Delta f)^2. \tag{3.5}$$

Remplaçons l'équation (3.5) dans (3.2) on obtient

$$S_2(f) = (-\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + div(\Delta f df))g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df).$$

Pour démontrer le troixième résultat, on applique directement la définition de la trace, on obtient :

$$\begin{aligned}
Tr_g S_2(f) &= S_2(f)(e_i, e_i) \\
&= (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i, e_i) - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df)(e_i, e_i) \\
&= m(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f)) - 2\tfrac{1}{2}\{d(\Delta f) \otimes df(e_i, e_i) + df \otimes d(\Delta f)(e_i, e_i)\} \\
&= m(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f)) - 2d(\Delta f)(e_i)df(e_i) \\
&= m(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f)) - 2df(grad\Delta f) \\
&= \tfrac{m}{2}(\Delta f)^2 + (m-2)df(grad\Delta f)
\end{aligned}$$

■

Maintenant on peut trouve un lien entre la divergence de tenseur impulsion bi-énergie et le bilaplacien.

Théorème 3.1.1. *Soit (M^m, g) une variété riemannienne on a :*

$$divS_2(f) = -\Delta^2 f df \tag{3.6}$$

Preuve.

Rappelons la divergence d'une $2-$forme bilinéaire symétrique ω, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned}
(div\omega)(X) &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i, X) \\
&= e_i(\omega(e_i, X)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i, X) - \omega(e_i, \nabla_{e_i}X)
\end{aligned}$$

où $(e_i)_{i=1}^m$ est une base orthonormée, on a donc :

$$\begin{aligned}
(divS_2(f))(X) &= (\nabla_{e_i}S_2(f))(e_i, X) \\
&= e_i(S_2(f)(e_i, X)) - S_2(f)(\nabla_{e_i}e_i, X) - S_2(f)(e_i, \nabla_{e_i}X)
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de $S_2(f)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
divS_2(f)(X) &= e_i\{(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,X) - 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,X)\}\\
&- \{(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(\nabla_{e_i}e_i,X) - 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(\nabla_{e_i}e_i,X)\}\\
&- \{(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,\nabla_{e_i}X) - 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,\nabla_{e_i}X)\}\\
&= e_i(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,X) + (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))e_i(g(e_i,X))\\
&- 2e_i(Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,X)) - (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(\nabla_{e_i}e_i,X)\\
&+ 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(\nabla_{e_i}e_i,X) - (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,\nabla_{e_i}X)\\
&+ 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,\nabla_{e_i}X)\\
&= e_i(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,X) + (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(\nabla_{e_i}e_i,X)\\
&+ (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,\nabla_{e_i}X) - 2e_i(Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,X))\\
&- (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(\nabla_{e_i}e_i,X) + 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(\nabla_{e_i}e_i,X)\\
&- (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,\nabla_{e_i}X) + 2Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,\nabla_{e_i}X)\\
&= \underbrace{e_i(\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,X)}_{A_1} - 2\underbrace{e_i(Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,X))}_{A_2}\\
&+ 2\underbrace{Sym(d(\Delta f)\otimes df)(\nabla_{e_i}e_i,X)}_{A_3} + 2\underbrace{Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,\nabla_{e_i}X)}_{A_4}
\end{aligned}$$

Pour calculer $divS_2(f)(X)$, on va expliciter tous les termes A_1, A_2, A_3 et A_4, on a donc :

$$\begin{aligned}
A_1 &= e_i(\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(e_i,X)\\
&= (\Delta f e_i(\Delta f) + e_i(df(grad\Delta f)))g(e_i,X)\\
&= \Delta f e_i(\Delta f)g(e_i,X) + e_i(df(grad\Delta f))g(e_i,X)\\
&= \Delta f g(e_i(\Delta f)e_i,X) + g(e_i(df(grad\Delta f))e_i,X)\\
&= \Delta f g(grad(\Delta f),X) + g(grad(df(grad\Delta f)),X)\\
&= \Delta f X(\Delta f) + X(df(grad\Delta f)),
\end{aligned}$$

pour A_2, on trouve

$$\begin{aligned}
A_2 &= e_i(Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i,X))\\
&= e_i\{\tfrac{1}{2}(d(\Delta f)\otimes df + df\otimes d(\Delta f))(e_i,X)\}\\
&= \tfrac{1}{2}e_i(d(\Delta f)(e_i)df(X) + df(e_i)d(\Delta f)(X))\\
&= \tfrac{1}{2}e_i(e_i(\Delta f))df(X) + \tfrac{1}{2}e_i(\Delta f)e_i(X(f)) + \tfrac{1}{2}e_i(e_i(f))X(\Delta f) + \tfrac{1}{2}e_i(f)e_i(X(\Delta f))
\end{aligned}$$

Le calcul de A_3 nous donne

$$\begin{aligned} A_3 &= Sym(d(\Delta f)\otimes df)(\nabla_{e_i}e_i, X) \\ &= \tfrac{1}{2}(\nabla_{e_i}e_i(\Delta f)X(f)+\nabla_{e_i}e_i(f)X(\Delta f)) \\ &= \tfrac{1}{2}\nabla_{e_i}e_i(\Delta f)X(f)+\tfrac{1}{2}\nabla_{e_i}e_i(f)X(\Delta f). \end{aligned}$$

Enfin, pour le thèrme A_4, on obtient :

$$\begin{aligned} A_4 &= Sym(d(\Delta f)\otimes df)(e_i, \nabla_{e_i}X) \\ &= \tfrac{1}{2}(e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}X(f)+e_i(f)\nabla_{e_i}X(\Delta f)) \\ &= \tfrac{1}{2}e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}X(f)+\tfrac{1}{2}e_i(f)\nabla_{e_i}X(\Delta f). \end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant les termes A_1, A_2, A_3 et A_4, on trouve :

$$\begin{aligned} divS_2(f)(X) &= \Delta f X(\Delta f)+X(df(grad\Delta f))-e_i(e_i(\Delta f))df(X)-e_i(\Delta f)e_i(X(f)) \\ &- e_i(e_i(f))X(\Delta f)-e_i(f)e_i(X(\Delta f))+\nabla_{e_i}e_i(\Delta f)X(f)+\nabla_{e_i}e_i(f)X(\Delta f) \\ &+ e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}X(f)+e_i(f)\nabla_{e_i}X(\Delta f) \\ &= \Delta f X(\Delta f)+X(df(grad\Delta f))-\Delta^2 f X(f)-\Delta f X(\Delta f)-e_i(\Delta f)(e_i(X(f)) \\ &- \nabla_{e_i}X(f))-e_i(f)(e_i(X(\Delta f))-\nabla_{e_i}X(\Delta f)) \\ &= Xg(gradf, grad\Delta f)-\Delta^2 f X(f)-e_i(\Delta f)g(\nabla_{e_i}gradf, X) \\ &- e_i(f)g(\nabla_{e_i}grad\Delta f, X) \\ &= g(\nabla_X gradf, grad\Delta f)+g(gradf, \nabla_X grad\Delta f)-\Delta^2 f X(f) \\ &- g(gradf, \nabla_X grad\Delta f)-g(\nabla_X gradf, grad\Delta f) \\ &= -\Delta^2 f df(X), \end{aligned}$$

d'où

$$divS_2(f) = -\Delta^2 f df.$$

■

Conséquences 3.1.1. *De l'équation* (3.6), *on déduit le résultat suivant :*

$$f \text{ est biharmonique } \Leftrightarrow\ divS_2(f)=0$$

Pour le cas harmonique, on a résultat suivant

Théorème 3.1.2. *([7]). Soit (M, g) une variété riemannienne complète non compacte dont la courbure de Ricci est positive , et soit $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que*

$$\int_M |df|^2 dv_g < \infty,$$

alors f est constante.

Théorème 3.1.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète non compacte dont la courbure de Ricci est positive , et soit $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction biharmonique telle que*

$$\int_M |\Delta f|^2 dv_g < \infty,$$

alors f est harmonique.

Corollaire 3.1.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne complète non compacte dont la courbure de Ricci est positive , et soit $f : (M, g) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction biharmonique vérifiant :*

$$\int_M (|\Delta f|^2 + |df|^2) dv_g < \infty,$$

alors f est constante.

Pour la preuve du théorème 3.1.3*, nous avons bosoin de deux lemmes.*

Lemme 3.1.1. *([3]) Soit (M, g) une variété riemannienne complète non-compacte dont la courbure de Ricci est positive et soit f une fonction positive sur-harmonique $(\Delta f \geq 0)$, alors on a*

$$\textit{soit} \int f^2 = \infty, \textit{soit } f \textit{ est constante.}$$

Lemme 3.1.2. *([5]) Toute variété riemannienne complète non-compacte dont la courbure de Ricci est positive a un volume infini.*

Preuve du théorème 3.1.3 :

Soit h une fonction positive sur M, on sait que

$$\Delta h^p = h^{p-2}(ph\Delta h + p(p-1)|dh|^2),$$

en posant $p = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$\Delta h^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{-3}{2}}(\frac{1}{2}h\Delta h - \frac{1}{4}|dh|^2).$$

Pour $h = (|\Delta f|^2 + \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$ on a :

$$\Delta((\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} = ((\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{-3}{2}}(\frac{1}{2}((\Delta f)^2 + \varepsilon)\Delta((\Delta f)^2) - \frac{1}{4}|d((\Delta f)^2|^2).$$

Comme

$$\begin{aligned} |d((\Delta f)^2|^2 &= |grad(\Delta f)^2|^2 \\ &= 4(\Delta f)^2|grad\Delta f|^2, \end{aligned}$$

et

$$\Delta((\Delta f)^2) = 2\Delta f\Delta^2 f + 2|grad\Delta f|^2,$$

et puisque f est biharmonique ($\Delta^2 f = 0$),on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta((\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} &= (\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{-3}{2}}\{((\Delta f)^2 + \varepsilon)|grad\Delta f|^2 - (\Delta f)^2|grad\Delta f|^2\} \\ &= \varepsilon(\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{-3}{2}}|grad\Delta f|^2. \end{aligned}$$

Alors :

$$\Delta((\Delta f)^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Faisons ε tend vers 0, on obtient :

$$\Delta|\Delta f| \geq 0.$$

$|\Delta f|$ est une fonction positive sur-harmonique alors daprés le lemme 3.1.1, on a soit $\int |\Delta f|^2 = \infty$, soit $|\Delta f|$ est constante comme par hypothèse :

$$\int |\Delta f|^2 < \infty.$$

Alors $|\Delta f|$ est constante.

On sait que d'aprés le lemme 3.1.2 , que la volume de (M, g) est infini

$$Vol((M, g)) = \int_M dv_g = \infty.$$

Alors on déduit que

$$\Delta f = 0.$$

Donc f est harmonique.

Proposition 3.1.1. *Soit D un domaine compact d'une variété riemanienne (M,g) et soient u,v deux fonctions de classe C^2 sur (M,g). Alors :*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\upsilon^D = \int_{\partial D}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\upsilon^{\partial D},$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est le vecteur normal.

Preuve. On sait que :

$$div(ugradv) = u\Delta v + g(gradu, gradv).$$

De même, on a

$$div(vgradu) = v\Delta u + g(gradu, gradv),$$

ces deux équations nous donnent :

$$u\Delta v - v\Delta u = div(ugradv) - div(vgradu),$$

par une intégration, on obtient

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\upsilon^D = \int_D (div(ugradv) - div(vgradu))\upsilon^D. \tag{3.7}$$

Or, en utilisant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \textstyle\int_D div(ugradv)\upsilon^D &= \textstyle\int_{\partial D} g(ugradv, \frac{\partial}{\partial n})\upsilon^{\partial D} \\ &= \textstyle\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\upsilon^{\partial D}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_D div(ugradv)\upsilon^D = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}\upsilon^{\partial D}. \tag{3.8}$$

De même

$$\int_D div(vgradu)\upsilon^D = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial n}\upsilon^{\partial D}. \tag{3.9}$$

En remplaçant l'équations (3.8) et (3.9) dans (3.7), on déduit que :

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\upsilon^D = \int_{\partial D}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})\upsilon^{\partial D}.$$

■

3.2 Problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques

Nous étudions le problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques définies sur la boule euclidienne B^m lorsque la donnée au bord de la fonction est constante.

Définition 3.2.1. *Soit* (M, g) *une variété riemannienne. Pour* $X \in \Gamma(TM)$*, on définit la 1-forme notée* $S_2(f)(X, .)$*, par*

$$S_2(f)(X, .)(Y) = S_2(f)(X, Y).$$

Proposition 3.2.1. *Pour* $X \in \Gamma(TM)$*, on a :*

$$div(S_2(X, .)) = (divS_2(f))(X) + \langle S_2(f), \nabla X\rangle, \tag{3.10}$$

où

$$\langle S_2(f), \nabla X\rangle = S_2(f)(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i}, e_j).$$

$(e_i)_{i=1}^m$ *est une base orthonormée locale sur* M*.*

Preuve. Pour une 1-forme ω, on définit sa divergence par

$$\begin{aligned} div\omega &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i), \end{aligned}$$

on par définition

$$S_2(f) = (\frac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df),$$

et

$$S_2(f)(X, .)(Y) = S_2(f)(X, Y),$$

on obtient

$$\begin{aligned} (divS_2(f))(X) &= (\nabla_{e_i}S_2(f))(e_i, X) \\ &= e_i(S_2(f)(e_i, X)) - S_2(f)(\nabla_{e_i}e_i, X) - S_2(f)(e_i, \nabla_{e_i}X). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} div(S_2(f)(X, .)) &= (\nabla_{e_i}S_2(f)(X, e_i)) \\ &= e_i(S_2(f)(X, e_i)) - S_2(f)(X, \nabla_{e_i}e_i), \end{aligned}$$

donc

$$div(S_2(f)(X,.)) = (divS_2(f))(X) + S_2(f)(e_i, \nabla_{e_i}X).$$

Or

$$\begin{aligned} S_2(f)(e_i, \nabla_{e_i}X) &= S_2(f)(e_i, g(\nabla_{e_i}X, e_j)e_j) \\ &= S_2(f)(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i}X, e_j) \\ &= \langle S_2(f), \nabla X\rangle, \end{aligned}$$

on déduit que

$$div(S_2(X,.)) = (divS_2(f))(X) + \langle S_2(f), \nabla X\rangle.$$

■ La résultat du problème de Dirichlet pour le cas harmonique est donnée par ce théorème

Théorème 3.2.1. *([6]) Soient $f : \mathbb{B}_r^m \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction harmonique, où $\mathbb{B}_r^m$ est la boule euclidienne de dimension m et de rayon r.*
Si f est constante sur le bord $\partial\mathbb{B}_r^m = \mathrm{S}_r^{m-1}$, Alors f est constante.

Théorème 3.2.2. *Soient $f : \mathbb{B}_r^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $(m > 4)$ une fonction biharmonique telle que $f_{/\mathrm{S}_r^{m-1}}$ est constante et $df(\frac{\partial}{\partial r})_{/\mathrm{S}_r^{m-1}} \equiv 0$, Alors f est constante.*

Preuve.
Comme f est biharmonique, alors

$$divS_2(f) = 0,$$

d'où

$$div(S_2(X,.)) = \langle S_2(f), \nabla X\rangle.$$

Pour $X = r\frac{\partial}{\partial r}$ où $\frac{\partial}{\partial r}$ le vecteur normal à S_r^{m-1}, calculons le deuxième terme de cette équation , on a

$$\begin{aligned} \langle S_2(f), \nabla X\rangle &= S_2(f)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial r})g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, \tfrac{\partial}{\partial r}) + S_2(f)(\tfrac{\partial}{\partial r}, e_i)g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, e_i) \\ &+ S_2(f)(\tfrac{\partial}{\partial r}, e_i)g(\nabla_{e_i}X, \tfrac{\partial}{\partial r}) + S_2(f)(e_i, e_j)g(\nabla_{e_i}X, e_j). \end{aligned}$$

où $i, j = 1, ..., m-1$. Comme $X = r\frac{\partial}{\partial r}$, alors :

$$g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}X, \frac{\partial}{\partial r}) = 1,$$

de même

$$g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X, e_i) = g(\nabla_{e_i} X, \frac{\partial}{\partial r}) = 0,$$

et

$$g(\nabla_{e_i} X, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Il suit que pour $X = r\frac{\partial}{\partial r}$, on a

$$\begin{aligned} \langle S_2(f), \nabla X \rangle &= S_2(f)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial r}) + g(e_i, e_i) \\ &= tr_g S_2(f). \end{aligned}$$

Donc pour $X = r\frac{\partial}{\partial r}$, on déduit que

$$div(S_2(f)(X, .)) = tr_g S_2(f) = \frac{m}{2}(\Delta f)^2 + (m-2)df(grad\Delta f)$$

On sait que

$$df(grad\Delta f) = div(\Delta f df) - (\Delta f)^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} div(S_2(f)(X, .)) &= \tfrac{m}{2}(\Delta f)^2 + (m-2)df(grad\Delta f) \\ &= \tfrac{4-m}{2}(\Delta f)^2 + (m-2)div(\Delta f df) \end{aligned}$$

Par intégration sur $\mathbb{B}_r^m$, on obtient

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(S_2(f)(r\frac{\partial}{\partial r}, .))dx = \frac{4-m}{2}\int_{\mathbb{B}_r^m} (\Delta f)^2 dx + (m-2)\int_{\mathbb{B}_r^m} div(\Delta f df)dx \quad (3.11)$$

Or D'aprés le théorème de la divergence, on a

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(\Delta f df)dx = \int_{\mathbf{S}_r^{m-1}} \Delta f \frac{\partial f}{\partial r} d\sigma \quad (3.12)$$

et

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(S_2(f)(r\frac{\partial}{\partial r}, .))dx = \int_{\mathbf{S}_r^{m-1}} rS_2(f)(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})d\sigma. \quad (3.13)$$

Calculons maintenant deuxième terme de l'équation (3.13), d'abord

$$\begin{aligned} S_2(f)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial r}) &= (\tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f))g(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial r}) - 2Sym(d(\Delta f) \otimes df)(\tfrac{\partial}{\partial r}, \tfrac{\partial}{\partial r}) \\ &= \tfrac{1}{2}(\Delta f)^2 + df(grad\Delta f) - 2\tfrac{\partial \Delta f}{\partial r}\tfrac{\partial f}{\partial r}, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}} rS_2(f)(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r})d\sigma = \frac{r}{2}\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}(\Delta f)^2 d\sigma + r\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}} df(grad\Delta f)d\sigma - 2r\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\frac{(\partial\Delta f)}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma$$

On sait que

$$df(grad\Delta f) = e_i(f)e_i(\Delta f) + \frac{\partial\Delta f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Comme $f_{/\mathbf{S}_r^{m-1}}$ est constante, alors $df(e_i) = e_i(f) = 0$, d'où

$$df(grad\Delta f) = \frac{\partial\Delta f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Finalement, on arrive à l'équation suivante

$$\int_{\mathbb{B}_r^m} div(S_2(f)(r\frac{\partial}{\partial r},.))dx = \frac{r}{2}\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}(\Delta f)^2 d\sigma - r\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\frac{\partial\Delta f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma. \tag{3.14}$$

En remplaçant l'équation (3.12) et (3.14) dans (3.11) nous obtenons

$$\frac{4-m}{2}\int_{\mathbb{B}_r^m}(\Delta f)^2 dx + (m-2)\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\Delta f\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma = \frac{r}{2}\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}(\Delta f)^2 d\sigma - r\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\frac{\partial\Delta f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma$$

d'où

$$\frac{4-m}{2}\int_{\mathbb{B}_r^m}(\Delta f)^2 dx = \frac{r}{2}\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}(\Delta f)^2 d\sigma - (m-2)\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\Delta f\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma - r\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}\frac{\partial\Delta f}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial r}d\sigma \tag{3.15}$$

En utilisant l'hypothèse $df(\frac{\partial}{\partial r})_{/\mathbf{S}_r^{m-1}} \equiv 0$, alors l'égalité (3.15) nous donne

$$\frac{4-m}{2}\int_{\mathbb{B}_r^m}(\Delta f)^2 dx = \frac{r}{2}\int_{\mathbf{S}_r^{m-1}}(\Delta f)^2 d\sigma.$$

Comme $m > 4$, nous concluons que

$$\int_{\mathbb{B}_r^m}(\Delta f)^2 dx = 0.$$

d'où

$$\Delta f = 0$$

Donc l'aplication f est harmonique, et comme elle est constante sur $\mathbf{S}_r^{m-1}$ et d'aprés le théorème 3.2.1, nous déduisons que f est constante. ■

Bibliographie

[1] M.Berger et P.Gauduchon et E.Mazet, le spectre d'une variété Riemannienne,Lecture Notes in Mathematics. 194, Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1971.

[2] A.Balmus, S.Montaldo, C.Oniciuc, Biharmonic maps between warped product manifolds. Jornal of Geometry and physics. Volume 57, Issue 2, January 2007, Pages 449-466.

[3] S.T. Yau, Harmonic Function on Complete Riemannian Manifold, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 201-228.

[4] P. Baird, J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds, Clarendon Press Oxford 2003.

[5] S.T. Yau, Some Function-Teoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and thier Application to Geometry, Indiana University Mathimatics Journal, vol.25, No.1 (1976).

[6] J.Karcher et J.C Wood, Non existence results and growth properties for harmonics maps and forms, J.Reine. Angew. Math. 353 (1984), 165-180.

[7] R. Schoen et S.T. Yau, Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces and manifolds with nonnegative Ricci curvature, Comment. Math. Helvetici 51 (1975), 333-341.