DÉDICACES

Je dédie ce mémoire à :

— Mes parents :

  Ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

  Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutient permanent venu de toi.

— Mon frère et mes soeurs qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

— Toute ma famille .

— Ma nièce Amani Mayar qui a changé notre maison et rempli avec l'amour.

— Tous mes amis avec qui je partage des moments de ma vie au fil du temps.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à :

- DIEU, pour m'avoir donné la force dans les moments difficiles d'éditer ce mémoire.
- Mon père et à ma mère qui m'ont toujours entouré et motivé à sans cesse devenir meilleur .
- Mes amis de par le monde qui n'ont cessé de m'encourager .
- Mon encadreur Pr.Belmekki Mohamed pour son aide , ses conseils et sa précieuse attention.
- Tous mes compagnons de promotion.

Trouvez ici l'expression de ma profonde gratitude et reconnaissance.

Table des matières

Introduction

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par la même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opérateur inverse de la dérivée, peut éventuellement être considéré comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle [2], l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$: Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Suite à cette discussion, le sujet du calcul fractionnaire attrapé l'attention des autres grands mathématiciens, dont beaucoup ont contribué directement ou indirectement à son développement. Dans la suite, nous classons par ordre alphabétique les principaux chercheurs au cours de la période visée :

- ABEL, Niels Henrik (5 Août 1802 - 6 Avril 1829), mathématicien Norvégien .
- DJRBASHJAN, Mkhtar M. (11 Septembre 1918 - 6 Mai 1994),mathématicien Arménien.
- EULER, Leonhard (15 Avril 1707 - 18 Septembre 1783),mathématicien et physicien Suisse .

- FOURIER, Jean Baptiste Joseph (21 Mars 1768 - 16 Mai 1830),mathématicien et physicien Français .
- GRÜNWALD, Anton K. (1838-1920), mathématicien Allemand .
- de l'HÔPITAL, Guillaume François Antoine (1661 - 2 Février 1704),mathématicien Français .
- LACROIX, Sylvestre François (28 Avril 1765 - 24 Mai 1843),mathématicien Français .
- LAGRANGE, Joseph-Louis (25 Janvier 1736 10 Avril 1813),mathématicien et astronome Italien-Français .
- LAPLACE, Pierre-Simon (23 Mars 1749 - 5 Mars 1827),mathématicien et astronome Français .
- LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1 Juillet 1646 - 14 Novembre 1716),mathématicien et philosophe Allemand .
- LETNIKOV, Aleksey V. (1 Janvier 1837 - 27 Février 1888),mathématicien Russe .
- LIOUVILLE, Joseph (24 Mars 1809 - 8 Septembre 1882),mathématicien Français .
- MITTAG-LEFFLER, Magnus Gustaf (GÄosta) (16 Mars 1846 - 7 Juillet1927), mathématicien Suédois .
- NEWTON, (Sir) Isaac (4 Janvier 1643 - 31 Mars 1727),physicien Anglais, mathématicien, astronome,alchimiste, et théologien .
- RIEMANN, Georg Friedrich Bernhard (17 Septembre. 1826 - 20 Juillet 1866),mathématicien Allemand .
- ROSS, Bertram (1917 - 27 Octobre. 1993),mathématicien américain .
- WEYL, Hermann Klaus Hugo (9 Novembre 1885 - 8 Decembre. 1955),mathématicien Allemand .

En 1819, Lacroix est devenu le premier mathématicien à publier un document qui mentionne une dérivée fractionnaire [4].

Commençant par $y = x^m$, où m est un nombre entier positif, Lacroix a trouvé la dérivée n^{eme},

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \;\; m \geq n. \tag{1}$$

Et en utilisant le symbole de Legendre Γ, pour la factorielle généralisée, il a écrit :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \tag{2}$$

Finalement, il pose $m = 1$ et $n = \frac{1}{2}$, il obtient :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \tag{3}$$

Cependant, la première utilisation d'opérations fractionnaire a été faite par Abel non pas par Lacroix en 1823 [4]. Il a appliqué le calcul fractionnaire dans la solution d'une équation intégrale qui se pose dans la formule du problème de *tautochrone*-le problème de la détermination est la forme d'une courbe en sorte que le temps de descente d'un objet glissant sur cette courbe par gravité uniforme est indépendante du point de départ de l'objet.

Au cours des années, de nombreux mathématiciens, en utilisant leur propre notation et leur propre approche, ont trouvé diverses définitions qui correspondent à l'idée d'un ordre non entier intégral ou dérivée.Une version qui a été popularisé dans le monde du calcul fractionnaire est la définition de Riemann-Liouville.Il est intéressant de noter que la définition de Riemann-Liouville donne le même résultat que celui obtenu par Lacroix dans l'équation (3).

Les premiers travaux sont dûs à Liouville entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann propose une approche qui s'est avérée celle de Liouville essentiellement. Depuis, cette théorie porte le nom de théorie de Riemann-Liouville. Plus tard d'autre théories ont fait leur apparition comme celles de Caputo et de Grunwald-Leitnikov .

Ce mémoire a pour objet l'étude du calcul diférentiel et intégral d'ordre fractionnaire. Ce travail est constitué principalement de trois chapitres :

Dans le chapitre 1, on introduit la notion d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Pour plus de détail on peut consulter [3].

Le chapitre 2 est consacré aux différentes définitions de dérivation fractionnaire.

— L'intégration, opérateur inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo.

Les résultats de ces sections se trouvent dans [3] et [5].

— La limite de taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de Grunwald-Letnikov, trés utile numériquement.
  Les résultats de cette section se trouvent dans [1].

Dans le dernier chapitre on utilise la transformation de Laplace associé la dérivation fractionnaire et l'intégrale fractionnaire pour resoudre des équations différentilles d'ordre fractionnaire.
Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [3].

Une bibliographie est apportée à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Intégration fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul intégral d'ordre fractionnaire. on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. Nous définissons certaines fonctions nouvelles telles que la fonction Gamma, la fonction Béta, la fonction d'erreur, la fonction de Mittag-Leffler et la fonction de Mellin-Ross. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. De telles fonctions sont dites Fonctions spéciales .

1.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions dites fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale.

Définition 1.1. *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \ \ x > 0 \tag{1.1}$$

En utilisant es relations de récursion que nous pouvons obtenir des formules

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ \ x > 0$$

$$\Gamma(x) = (x-1)! \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(x+1) = x! \ \forall x \in \mathbb{N}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

Exemple 1.1. *Pour $x = \frac{1}{2}$, on a par définition :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

On définit la fonction Gamma incomplète par :

$$\Gamma^*(\alpha, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) t^\alpha} \int_0^t e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad \alpha > 0.$$

1.1.2 Fonction Bêta :

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

Définition 1.2. *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \ \ x,y>0 \tag{1.2}$$

Le changement de variable

$$u = 1-t$$

permet de montrer que la fonction Béta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x,y) = B(y,x)$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$B(x,y) = \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a t^{x-1}(a-t)^{y-1}dt$$

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$$

$$B(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta)\cos^{2y-1}(\theta)d\theta$$

La fonction Bêta et la fonction Gamma sont liées par la formule suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{1.3}$$

1.1.3 La fonction Erreur :

La fonction Erreur est définie par l'intégrale suivante :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}dt \ \ ,x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

La fonction Erreur Complémentaire notée $Erfc$ est définie par

$$Erfc(x) = 1 - Erf(x) \tag{1.5}$$

Comme conséquences on a :

$$Erf(0) = 0$$

et

$$Erf(\infty) = 1$$

1.1.4 Fonction de Mittag-Leffler :

La fonction Mittag-Leffler est une généralisation de la fonction exponentielle. Elle joue un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Définition 1.3. *La fonction de Mittag-Lefller à un paramêtre est définie par :*

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{1.6}$$

La fonction de Mittag-Lefller à deux paramêtres est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{1.7}$$

Pour $\beta = 1$, on a :

$$E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$$

et pour $\alpha = 1$, on a :

$$E_1(x) = e^x$$

En particulier, on a les expressions explicites de certaines fonctions de Mittag-Lefller :

$$E_{\frac{1}{2},1}(x) = e^{x^2} Erfc(-x)$$

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{2,2}(x) = \frac{\sinh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Proposition 1.1. *Les relations suivantes sont satisfaites :*

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) \tag{1.8}$$

et

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(x) + \alpha x \frac{d}{dx} E_{\alpha,\beta+1}(x) \tag{1.9}$$

Preuve 1.1. *Montrons la première relation.*

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1)\beta)} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{x x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+(\alpha+\beta))} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} + xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x). \end{aligned}$$

Comme conséquence de l'égualité 1.9, on a

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta+1}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left(E_{\alpha,\beta}(x) - \beta E_{\alpha,\beta+1}(x)\right),$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dx}E_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha x}\left(E_{\alpha,\beta-1}(x) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(x)\right).$$

Dans la suite, on définit une fonction plus générale que la fonction de Mittag-Lefller, elle est dite fonction $\alpha-$exponentielle et elle est donnée par la formule suivante :

$$e_{\alpha}^{\lambda x} = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}),\ \ x\in\mathbb{R}^*,\ \ \alpha>0,\ \ \lambda\in\mathbb{R}$$

Cette fonction généralise la fonction exponentielle et on a :

$$e_1^{\lambda x} = e^{\lambda x}$$

1.1.5 La fonction de Mellin-Ross :

La fonction de Mellin-Ross notée $E_t(\alpha,a)$ est étroitement liée à la fois avec la fonction incomplète gamma et la fonction de Mittag-Leffler. Elle est définie par :

$$E_t(\alpha,a) = t^{\alpha}e^{at}\Gamma^*(\alpha,t) \tag{1.10}$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$E_t(\alpha, a) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)} = t^\alpha E_{1,\alpha+1}(at) \tag{1.11}$$

1.2 La formule de Dirichlet

Soient $h(x, y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. L'expression suivante est dite formule de Dirichlet.

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dx$$

Certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.
Par exemple, si on prend

$$h(x, y) = g(x) f(y)$$

et

$$g(x) \equiv 1$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy \tag{1.12}$$

où B est la fonction bêta.

1.3 Integrale de Riemann-Liouville

Dans cette section, on va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Définition 1.4. *Soit $f : [a;b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive de f est donnée par :*

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Proposition 1.2. *Soit $f : [a;b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre n de f est donnée par :*

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt$$

En effet. Les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left(I_a^1 f(s)\right) ds \\ &= \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Dirichlet (1.12) on a :

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left(\int_t^x f(t)ds\right) dt \\ &= \int_a^x f(t)\left(\int_t^x ds\right) dt \end{aligned}$$

alors,

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} I_a^3 f(x) &= \int_a^x \left(I_a^2 f(s)\right) ds \\ &= \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f(t)dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_a^4 f(x) &= \int_a^x \left(I_a^3 f(s)\right) ds \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_a^x (x-t)^3 f(t)dt \end{aligned}$$

Par récurence, on a :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt$$

qui est la formule recherchée.

On adopte alors, la définition suivante :

Définition 1.5. *Soient α un réel positif et $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivante :*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt$$

Proposition 1.3. *Pour toute fonction continue f, on a :*

1.
$$I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x), \ \ \alpha, \beta > 0 \tag{1.13}$$

2.
$$\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) = I_a^{\alpha-1} f(x), \ \ \alpha > 1 \tag{1.14}$$

Preuve :

On montre la première égalité.

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(I_a^\beta f(s)\right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt\right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1} ds \int_a^s (s-t)^{\beta-1} f(t)dt
\end{aligned}$$

D'aprés la formule de Dirichlet (1.12), on a :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha(I_a^\beta f(x)) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\
&= I_a^{(\alpha+\beta)} f(x)
\end{aligned}$$

D'où la première égalité.

On montre maintenant la deuxième égalité.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right)\end{aligned}$$

puisque $f(t)$ et $(x-t)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$t \to (x-t)^{\alpha-1}f(t)$$

est continue, et on a Alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(I_a^\alpha f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{d}{dx}\left((x-t)^{\alpha-1}f(t)\right)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2}f(t)dt\\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-2}f(t)\\ &= I_a^{\alpha-1}f(x)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

De manière générale on a :

$$D[I^\alpha f(x))] \neq I^\alpha[Df(x))]$$

En effet, on a le resultat suivant :

Théorème 1.1. *Soient $\alpha > 0$ et f une fonction continue sur $J = [0, b)$. Si Df est continue alors pour tout $x > 0$ on a :*

$$D[I^\alpha f(x)] = I^\alpha[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \tag{1.15}$$

Preuve.
Par définition, on a :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt$$

En faisant le changement de variable :

$$t = x - s^\lambda$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

ce qui implique :

$$dt = -\lambda s^{\lambda-1}ds$$

alors on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x^\alpha}^0 (s^\lambda)^{\alpha-1}f(x-s^\lambda)(-\lambda s^{\lambda-1})ds$$

qui se réduit à :

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda\int_{x^\alpha}^0 f(x-s^\lambda)ds \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^{x^\alpha} f(x-s^\lambda)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{x^\alpha} f(x-s^\lambda)ds \end{aligned}$$

En utilisant la règle de Leibniz qui stipule :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{b(t)} f(t,x)dx\right) = f(t,b(t))b'(t) + \int_0^{b(t)} \frac{d}{dt}f(t,x)dx$$

On a alors :

$$D\left(I^\alpha f(x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[f(0)\alpha x^{\alpha-1} + \int_0^{x^\alpha} \frac{d}{dx}f(x-s^\lambda)ds\right]$$

Maintenant, si on inverse le changement de variable, $i.e$

$$t = x - s^{\lambda}$$

donc

$$ds = -\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} dt$$

on obtient

$$D\left(I^{\alpha} f(x)\right) = \frac{f(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{0} \frac{d}{dx} f(t)(-\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda}) dt$$

Enfin, puisque

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

et

$$s = (x-t)^{\frac{1}{\lambda}}$$

l'équation précédente se réduit à :

$$D\left(I^{\alpha} f(x)\right) = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} f(t) dt$$

ce qui implique que

$$D\left(I^{\alpha} f(x)\right) = I^{\alpha}\left(D f(x)\right) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.$$

1.3.1 Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 1.2. ***Fonction puissance :***
Considérons le monôme :

$$f(x) = x^{\beta}$$

En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Luoiville, on obtient :

$$I^{\alpha} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{(\alpha-1)} t^{\beta} dt$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)}x^{(\alpha-1)}xu^\beta xdu \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+\beta}\int_0^1 u^\beta(1-u)^{(\alpha-1)}du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

d'où :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}x^{\alpha+\beta}$$

La formule précédente est une généralisation du cas $\alpha = 1$*.*
En effet, pour $\alpha = 1$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}x^{\beta+1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}x^{\beta+1} \\ &= \frac{1}{(\beta+1)}x^{\beta+1} \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et pour* $\beta = 0,\ 1,\ 2$ *on a :*

$$I^{\frac{1}{2}}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

$$I^{\frac{1}{2}}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$$

De ce qui précède, on déuit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α *d'une constante* k *est donnée par :*

$$I^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha. \tag{1.16}$$

Exemple 1.3. ***Fonction $\alpha-$exponentielle :***

$$
\begin{aligned}
I^{\alpha}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}\left(\lambda x^{\mu}\right) &= I^{\alpha}x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^{\mu})^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}I^{\alpha}x^{\beta-1}x^{\mu k}}{\Gamma(\mu k+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}I^{\alpha}x^{\beta+\mu K-1}}{\Gamma(\mu k+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)}\frac{\Gamma(\mu k+\beta)}{\Gamma(\mu k+\beta+\alpha)}x^{\beta+\alpha+\mu k-1} \\
&= x^{\beta+\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta+\alpha)}x^{\mu k} \\
&= x^{\beta+\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^{\mu})^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta+\alpha)}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$I^{\alpha}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}\left(\lambda x^{\mu}\right)=x^{\beta+\alpha-1}E_{\mu,\beta+\alpha}\left(\lambda x^{\mu}\right) \tag{1.17}$$

Les exemples ci-dessus peuvent donner une idée que les intégrales fractionnaires sont généralement facile à évaluer. Ceci est faux. En effet, certaines intégrales fractionnaires, même de fonctions élémentaires telles que la fonction exponentielle, la fonction sinus et la fonction cosinus peuvent conduire à des fonctions transcendantes.

Exemple 1.4. *Considérons la fonction*

$$f(x)=e^{ax}$$

où a est une constante. Alors, par définition, on a :

$$I^{\alpha}e^{ax}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}e^{at}dt \quad \alpha>0$$

En faisant le changement de variable

$$y=x-t$$

on obtient :

$$I^{\alpha}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-ay}dy$$

D'où

$$I^{\alpha}e^{ax} = E_x(\alpha, a) = x^{\alpha}E_{1,\alpha+1}(ax) \tag{1.18}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$*, on a :*

$$I^{\frac{1}{2}}e^{ax} = E_x(\frac{1}{2}, a) = a^{-\frac{1}{2}}e^{ax}Erf(ax)^{\frac{1}{2}} \tag{1.19}$$

Exemple 1.5. *Pour* $\alpha > 0$*, les primitives d'ordre* α *des fonctions élémentaires* sin *et* cos*, sont données par :*

$$I^{\alpha}\cos(ax) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}\cos\left(a(x-y)\right)dy := C_x(\alpha, a). \tag{1.20}$$

$$I^{\alpha}\sin(ax) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}\sin\left(a(x-y)\right)dy := S_x(\alpha, a). \tag{1.21}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$*, on a :*

$$I^{\frac{1}{2}}\cos(ax) = C_x(\frac{1}{2}, a) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C(t)\cos(ax) - S(t)\sin(ax)\right) \tag{1.22}$$

$$I^{\frac{1}{2}}\sin(ax) = S_x(\frac{1}{2}, a) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left(C(t)\sin(ax) - S(t)\cos(ax)\right) \tag{1.23}$$

avec :

$$t = \sqrt{\frac{2ax}{\pi}}$$

$$C(t) = \int_0^t \cos(x^2)dx$$

et

$$S(t) = \int_0^t \sin(x^2)dx.$$

Chapitre 2

Dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre, On introduit la notion de dérivation fractionnaire. on s'intéresse aux trois méthodes de dérivation les plus utilisées : la méthode de Riemann-Liouville, la méthode de Caputo et celle de Grünwald-Letnikov.

2.1 Dérivation au sens de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.

Définition 2.1. *Soit $n-1<\alpha<n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f est définie par :*

$$D^\alpha f(x) \quad = \quad D^n\left(I^{(n-\alpha)}f(x)\right) \tag{2.1}$$

Si on suppose que :

$$\beta = n-\alpha, \ \ avec \ \ 0<\beta<1$$

On a alors :

$$D^\alpha f(x) = D^n\left(I^\beta f(x)\right)$$

Exemple 2.1. ***Fonction puissance :***
Soit $0<n-1<\alpha<n$. Considérons la fonction monôme

$$f(x)=x^\mu, \quad \mu>0.$$

La dérivée d'ordre α de f est donnée par :

$$D^\alpha f(x) = D^n[I^{(n-\alpha)}x^\mu]$$

Pour $n = 1$, *on a :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha} f(x) &= D^{1}[I^{(1-\alpha)} x^{\mu}] \\ &= D^{1}[I^{\beta} x^{\mu}], \quad \beta = 1-\alpha. \end{aligned}$$

par suite :

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x^{\mu} &= D^{1}[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+1)} x^{\beta+\mu}] \\ &= (\beta+\mu) \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\beta+\mu)\Gamma(\beta+\mu)} x^{\beta+\mu-1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu)} x^{\beta+\mu-1} \end{aligned}$$

comme $\beta = 1-\alpha$, *on obtient alors :*

$$D^{\alpha} x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}$$

Si $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} D^{1} x^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} \\ &= \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu)} x^{\mu-1} \\ &= \mu x^{\mu-1} \\ &= \frac{d}{dx} x^{\mu} \end{aligned}$$

On retrouve alors la dériavation classique .

Si $\mu = 0$

$$\begin{aligned} D^{\alpha} x^{0} &= D^{\alpha} 1 \\ &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Il est alors important de noter que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une constante n'est pas forcément nulle.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\mu = -\frac{1}{2}$*, on a :*

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x x^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{t}{x})^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt\right) \end{aligned}$$

on fait un changement de variable

$$y = \frac{t}{x}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}xdy\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}dy\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que la dérivée au sens de Riemann- Liouville d'une fonction non identiquement nulle, peut être nulle.

Exemple 2.2. ***Fonction*** α***-exponentielle :***
Considérons la fonction :

$$f(x) = x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^{\mu})$$

La dérivée d'ordre α est donnée par :

$$\begin{aligned}
D^\alpha x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu) &= D^n[I^{n-\alpha}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu)] \\
&= D^n[x^{\beta+n-\alpha-1}E_{\mu,n-\alpha+\beta}(\lambda x^\mu)] \\
&= D^n[x^{\beta+n-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^\mu)^k}{\Gamma(\mu k+\beta+n-\alpha)}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta+n-\alpha)}D^n x^{\mu k+\beta+n-\alpha-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\mu k+\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\mu k+\beta-\alpha)}x^{\mu k+\beta-\alpha-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta-\alpha)}x^{\mu k+\beta-\alpha-1} \\
&= x^{\beta-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\mu k+\beta-\alpha)}x^{\mu k}
\end{aligned}$$

d'où

$$D^\alpha x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^\mu) = x^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda x^\mu) \tag{2.2}$$

Si $\mu=\beta=\alpha$

$$D^\alpha x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^\alpha) = D^\alpha e_\alpha^{\lambda x} = \lambda e_\alpha^{\lambda x}$$

Si $\alpha=1$, on retrouve le cas classique,

$$D^1 e_1^{\lambda x} = \frac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

Exemple 2.3. *Soit $0<\alpha<1$, considérons la fonction :*

$$f(x) = e^{\lambda x}$$

la dérivée d'ordre α est donnée par :

$$D^\alpha e^{\lambda x} = D^1\left(I^\beta e^{\lambda x}\right), \quad \beta = 1-\alpha$$

d'après (1.18), on a :

$$D^\alpha e^{\lambda x} = D^1\left(x^\beta E_{1,\beta+1}(\lambda x)\right).$$

en utilisant (1.9), *on obtient finallement :*

$$D^{\alpha}e^{\lambda x} = x^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(\lambda x)$$

En particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$, *et* $\lambda = 1$, *on a :*

$$D^{\frac{1}{2}}e^{x} = x^{-\frac{1}{2}}E_{1,\frac{1}{2}}(x).$$

2.2 Dérivation au sens de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 2.2. *Soient* $0 < n-1 < \alpha < n$ *et* f *une fonction de classe* $C^n([a,b])$. *La dérivée de Caputo d'ordre* α *de la fonction* f *est définie par :*

$$D^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}\left(D^{n}f(x)\right).$$

Exemple 2.4. ***Fonction puissance :***
Considérons la fonction

$$f(x) = x^{\beta}.$$

Pour $0 < n-1 < \alpha < n$, *on a :*

$$D^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}\left(D^{n}x^{\beta}\right)$$

or,

$$D^{n}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}x^{\beta-n}.$$

par suite

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}t^{\beta-n}dt$$

on fait le changement de variable :

$$t = yx$$

qui implique

$$dt = xdy$$

on obtient, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt &= \int_0^1 (x-yx)^{n-\alpha-1} (yx)^{\beta-n} x dy \\
&= \int_0^1 x^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} x^{\beta-n+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\beta-\alpha} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\
&= x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}
\end{aligned}$$

d'où :

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$$

et finalement, on obtient :

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$$

En particulier, pour $\beta = 0$, on a :

$$D^\alpha x^0 = D^\alpha 1 = 0. \tag{2.3}$$

Contrairement à la dérivation de Riemann-Liouvuille, la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.
D'autres cas particuliers peuvent être obtenus. Si on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient pour $\beta = 1, 2$ les resultats suivants :

$$D^{\frac{1}{2}} x = I^{\frac{1}{2}}\left(D^1 x\right) = I^{\frac{1}{2}} 1 = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

et

$$D^{\frac{1}{2}} x^2 = I^{\frac{1}{2}}\left(D^1 x^2\right) = 2 I^{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}$$

Exemple 2.5. ***Fonction $\alpha-$exponentielle :***

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^{\mu}) &= I^{n-\alpha}\left(D^{n}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^{\mu})\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(D^{n}x^{\beta-1}x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^{\mu})^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)}\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(D^{n}x^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)}x^{\mu k+\beta-1}\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)}D^{n}x^{\mu k+\beta-1}\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta)}\frac{\Gamma(\mu k+\beta)}{\Gamma(\mu k+\beta)-n}x^{\mu k+\beta-n-1}\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^{\mu})^{k}}{\Gamma(\mu k+\beta-n)}x^{\beta-n-1}\right) \\
&= I^{n-\alpha}\left(x^{\beta-n-1}E_{\mu,\beta-n}(\lambda x^{\mu})\right)
\end{aligned}$$

En fin on obtient :

$$D^{\alpha}x^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda x^{\mu}) = x^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda x^{\mu}) \tag{2.4}$$

Maintenant, si dans la relation (2.4), on prend $\mu=\beta=\alpha$, Alors :

$$D^{\alpha}x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) = D^{\alpha}e_{\alpha}^{\lambda x} = \lambda e_{\alpha}^{\lambda x}$$

Si de plus $\alpha = 1$ alors

$$D^{1}e_{1}^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

2.2.1 Lien avec la dérivée de Riemann-Liouville

On note par ${}_{a}^{R}D_{x}^{\alpha}f(x)$ la dérivée au sens de Riemann-Liouville et par ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x)$ la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

Théorème 2.1. *Soit $n-1<\alpha<n, (n\in\mathbb{N}^{*})$. Supposons que f est une fonction telle que ${}_{a}^{R}D_{x}^{\alpha}f(x)$ et ${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x)$ existent, alors*

$${}_{a}^{C}D_{x}^{\alpha}f(x) = {}_{a}^{R}D_{x}^{\alpha}f(x) - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}. \tag{2.5}$$

De la relation (2.5), on déduit que si

$$f^{(m)}(a) = 0 \quad m = 1, 2, ..., n-1$$

on aura

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a^R D_x^\alpha f(x)$$

et les deux définitions sont alors équivalentes.

Si $a = 0$, la formule (2.5) se réduit à :

$$^C D^\alpha f(x) = {}^R D^\alpha f(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0) x^{m-\alpha}}{\Gamma(m - \alpha + 1)}. \tag{2.6}$$

2.3 Dérivation au sens de Grünwald-Letnikov

La dérivée de Grunwald-Letnikov ou aussi nommé le differintegral de Grunwald-Letnikov est une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

On sait que la dérivée d'une fonction f est définie comme :

$$D^1 f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.7}$$

On peut exprimer la dérivée d'ordre n d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^n f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) f\left(x + (n-m)h\right). \tag{2.8}$$

On peut aussi écrire cette formule comme suit :

$$D^n f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) f(x - mh). \tag{2.9}$$

avec

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$$

On peut généraliser cette formule pour α non entier : $0 < n-1 < \alpha < n$. Comme

$$\begin{aligned}(-1)^m \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} &= \tfrac{-n(m-n)...(m-n-1)}{m!} \\ &= \tfrac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}\end{aligned}$$

on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-mh). \tag{2.10}$$

et

$$I^\alpha f(x) = \lim_{h\longrightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)} f(x-mh) \tag{2.11}$$

Si f est de classe C^n, alors en utilisant une intégration par parties on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{2.12}$$

et

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{2.13}$$

Pour $a = 0$, on obtient‘ :

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)(x)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt. \tag{2.14}$$

Exemple 2.6. ***Fonction puissance :***
Considérons la fonction

$$f(x) = x^\beta$$

De la définition (2.14), *on a :*

$$D^\alpha x^\beta = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} D^n t^\beta dt$$

on a :

$$f^{(m)}(0) = 0 \ \textit{pour} \ m = 0, 1, ..., n-1$$

et

$$f^{(n)}(t) = D^n t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-n}$$

d'où

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt.$$

En faisant le changement de variable

$$t = sx$$

on obtient :

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{2.15}$$

En particulier, pour $\beta = 0$ *on a :*

$$D^\alpha x^0 = D^\alpha 1 = \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha}. \tag{2.16}$$

C'est-à-dire que la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov d'une constante n'est pas forcément nulle.

Chapitre 3

Équations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on applique la transformée de Laplace pour résoudre certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire, mais dans un premier lieu, on utilise la définition de Riemann-Liouville pour examine la transformée de Laplace de l'intégrale et de la dérivée fractionnaire.

3.1 La transformée de Laplace

Définition 3.1. *Soit f une fonction de la variable réelle, la transformée de Laplace de f, lorsqu'elle existe est la fonction F de la variable complexe z définie par l'intégrale :*

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)e^{-zt}dt \tag{3.1}$$

Exemple : Fonction exponentielle $t \to e^{at}$

$$f(t) = e^{at} \to^F \mathcal{L}[f(t)] = \int_{\mathbb{R}^+} e^{at}e^{-zt}dt = \frac{1}{z-a} \ \ pour \ \ Re\, z > Re\, a$$

Propriétés 3.1. *On a les proprités suivantes :*

a) ***Linéarité :***

$$\mathcal{L}[\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda\mathcal{L}[f(t)] + \mu\mathcal{L}[g(t)] \ \ avec \ \ \lambda, \mu \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

b) ***Addition :*** *La transformée de Laplace d'une somme de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est égale à la somme de leurs transformées de Laplace.*

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \tag{3.3}$$

c) ***Dérivée :*** *La dérivée première est obtenue par :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= z\mathcal{L}[f(z)] - f(0)\\ &= z.F(z) - f(0)\end{aligned}$$

La dérivée seconde :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= z^2\mathcal{L}[f(z)] - z.f(0) - f'(0)\\ &= z^2.F(z) - z.f(0) - f'(0)\end{aligned}$$

La dérivée troisième :

$$\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = z^3\mathcal{L}[f(z)] - z^2 f(0) - zf'(0) - f''(0)$$

Généralisation aux dérivées d'ordre n, supposons que $f(t)$, et ses dérivés $f^{(k)}(t)$ pour $k = 1, ..., n$ sont continues, on à :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = z^n\mathcal{L}[f(z)] - z^{n-1}f(0) - ... - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Donc :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = z^n.F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}f^{(k)}(0) \tag{3.4}$$

Si on considère les valeurs initiales toute nulle, on à :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = z^n\mathcal{L}[f(z)] = z^n.F(z)$$

d) *On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l'aide de la transformée de Laplace inverse*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f(z)]$$

e) *La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est :*

$$\mathcal{L}[t^{p-1}](z) = \Gamma(p)z^{-p} \tag{3.5}$$

f) *Le théorème de convolution indique que la transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions est le produit de leurs transformées de Laplace. Donc, si $F(z)$ et $G(z)$ sont les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement, puis :*

$$f * g = F(z)G(z)$$

avec :

$$F(z)G(z) = \mathcal{L}[\int_0^t f(t-s)g(s)ds]. \tag{3.6}$$

3.1.1 Transformée de Laplace de l'integrale fractionnaire

L'intégrale fractionnaire de $f(t)$ d'ordre α est :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad \alpha > 0. \tag{3.7}$$

L'équation (3.7) est en fait une intégrale de convolution.
En utilisant (3.2) et (3.5), on obtient alors :

$$\mathcal{L}[I^\alpha f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[t^{\alpha-1}] \mathcal{L}[f(t)] = z^{-\alpha} F(z). \tag{3.8}$$

L'équation (3.8) est la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire.

3.1.2 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire

Nous savons au chapitre 2 que la dérivée fractionnaire de $f(t)$ est donnée par :

$$D^\alpha f(t) = D^n[I^{n-\alpha} f(t)]. \tag{3.9}$$

Maintenant, en supposant que la transformée de Laplace de $f(t)$ existe, puis par l'utilisation de (3.4), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[D^\alpha f(t)\right] &= \mathcal{L}\left[D^n(I^{n-\alpha} f(t))\right] \\ &= z^n \mathcal{L}\left[I^{n-\alpha} f(t)\right] - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} D^k (I^{n-\alpha} f(t))_{t=0} \\ &= z^n z^{\alpha-n} F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} D^{k-n+\alpha} f(0) \\ &= z^\alpha F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} D^{k-n+\alpha} f(0). \end{aligned}$$

Alors :

$$\mathcal{L}\left[D^\alpha f(t)\right] = z^\alpha F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1} D^{k-n+\alpha} f(0). \tag{3.10}$$

En particulier,
Si $n = 1$, alors $0 < \alpha < 1$ et on a :

$$\mathcal{L}\left[D^\alpha f(t)\right] = z^\alpha F(z) - D^{\alpha-1} f(0). \tag{3.11}$$

Si $n = 2$, alors $1 < \alpha < 2$ et on a :

$$\mathcal{L}[D^{\alpha} f(t)] = z^{\alpha} F(z) - zD^{\alpha-2} f(0) - D^{\alpha-1} f(0). \tag{3.12}$$

Le tableau suivant donne un résumé de quelques transformée de Laplace.

Tableau de transformée de Laplace.

$F(z)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)]$
$\frac{1}{z^{\alpha}}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(z+a)^{\alpha}}$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-at}$
$\frac{1}{z^{\alpha}-a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha})$
$\frac{z^{\alpha}}{z(z^{\alpha}+a)}$	$E_{\alpha}(-at^{\alpha})$
$\frac{a}{z(z^{\alpha}+a)}$	$1 - E_{\alpha}(-at^{\alpha})$
$\frac{1}{z(z^{\alpha}-a)}$	$t^{\alpha} E_{1,\alpha+1}(at)$
$\frac{z^{\alpha-\beta}}{z^{\alpha}-a}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$
$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$

(3.13)

Dans ce tableau a et b sont des constantes réelles distinctes.

3.2 Exemples d'équations différentielles fractionnaires

Exemple 3.1. *Soit à résoudre l'équation différentielle :*

$$D^{\frac{4}{3}} f(t) = 0$$

Ici $1 < \alpha = \frac{4}{3} < 2$, *nous allons utiliser* (3.12).
En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation, on a :

$$\mathcal{L}[D^{\frac{4}{3}} f(t)] = 0$$

ce qui implique :

$$z^{\frac{4}{3}} F(z) - zD^{\frac{4}{3}-2} f(0) - D^{\frac{4}{3}-1} f(0) = 0. \tag{3.14}$$

On pose :

$$zD^{\frac{4}{3}-2} f(0) = zI^{\frac{2}{3}} f(0) = zc_1$$

et

$$D^{\frac{4}{3}-1} f(0) = D^{\frac{1}{3}} f(0) = c_2$$

Ensuite (3.14) *devient :*

$$z^{\frac{4}{3}}F(z) - zc_1 - c_2 = 0.$$

d'où :

$$F(z) = \frac{zc_1}{z^{\frac{4}{3}}} + \frac{c_2}{z^{\frac{4}{3}}}.$$

Enfin, en utilisant le tableau (3.13), *nous déterminons la transformée inverse de* $F(z)$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\frac{zc_1}{z^{\frac{4}{3}}}] + L^{-1}[\frac{c_2}{z^{\frac{4}{3}}}] \\ &= \frac{c_1}{\Gamma(\frac{1}{3})}t^{-\frac{2}{3}} + \frac{c_2}{\Gamma(\frac{4}{3})}t^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.2. *Resolvons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}f(t) = af(t) \\ f_0 = f(0) = c \end{cases} .$$

avec $0 < \alpha < 1$, *et* a *est une constante.*
En utilisant (3.11), *et en prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation, nous avons :*

$$\mathcal{L}[D^{\alpha}f(t)] = a\mathcal{L}[f(t)]$$

ce qui implique :

$$z^{\alpha}F(z) - D^{\alpha-1}f(0) = aF(z). \tag{3.15}$$

Comme nous l'avons fait dans l'exemple précédent,on pose :

$$D^{\alpha-1}f(0) = c_1$$

Puis (3.15) *devient :*

$$z^{\alpha}F(z) - c_1 = aF(z)$$

d'où :

$$F(z) = \frac{c_1}{z^{\alpha} - a}$$

Puis, en utilisant le tableau (3.13), *nous trouvons l'inverse de Laplace de* $F(z)$, *et on obtient :*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{c_1}{z^{\alpha} - a}] = c_1 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}).$$

Maintenant en utilisant la condition initiale donnée pour trouver la valeur de c_1.
On a :
$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha}) = 1.$$
et comme :
$$f(t) = c_1 t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(at^{\alpha})$$
alors :
$$\lim_{t\to 0} f(t) = c_1.$$
ce qui implique :
$$f_0 = c = c_1 = D^{\alpha-1}f(0).$$

Exemple 3.3. *Considérons le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}f(t) - \lambda f(t) = g(t) \\ \lim_{t\to 0} f(t) = b \end{cases}.$$

avec $0 < \alpha < 1$, *et* b *est une constante .*
En utilisant (3.11), *et en prenant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation, nous avons :*

$$\mathcal{L}[D^{\alpha}f(t)] - \lambda\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$$

ce qui implique :

$$z^{\alpha}F(z) - D^{\alpha-1}f(0) - \lambda F(z) = G(z). \tag{3.16}$$

Comme nous l'avons fait dans les exemples précédents, on pose :

$$D^{\alpha-1}f(0) = c_1$$

Puis (3.16) *devient :*

$$z^{\alpha}F(z) - c_1 - \lambda F(z) = G(z)$$

donc :
$$F(z)(z^{\alpha} - \lambda) = G(z) + c_1$$
d'où :
$$F(z) = \frac{G(z) + c_1}{z^{\alpha} - \lambda} = \frac{1}{z^{\alpha} - \lambda}G(z) + \frac{c_1}{z^{\alpha} - \lambda}$$

on pose :

$$\frac{1}{z^\alpha - \lambda} = Y(z)$$

alors :

$$F(z) = Y(z)G(z) + \frac{c_1}{z^\alpha - \lambda}$$

d'aprés (3.6) *, on obtient :*

$$F(z) = \mathcal{L}[\int_0^t y(t-s)g(s)ds] + \frac{c_1}{z^\alpha - \lambda}$$

Puis, en utilisant le tableau (3.13)*, nous trouvons l'inverse de Laplace de* $F(z)$*, et on obtient :*

$$f(t) = \int_0^t y(t-s)g(s)ds + \mathcal{L}^{-1}[\frac{c_1}{z^\alpha - \lambda}] = \int_0^t y(t-s)g(s)ds + c_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha).$$

enfin :

$$f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-s)^\alpha) g(s)ds + c_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha).$$

Maintenant, on utilise la condition initiale donnée pour trouver la valeur de c_1.
On a :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = b$$

donc :

$$\lim_{t\to 0}[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-s)^\alpha) g(s)ds + c_1 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)] = b.$$

donc :

$$c_1 = b$$

finallement, la solution de ce problème est :

$$f(t) = bt^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda (t-s)^\alpha) g(s)ds.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a introduit le calcul différentiel et intégral d'ordre non entier. On a étudié l'intégration au sens de Riemann-Liouville ainsi que la dérivation au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grünwald-Letnikov. On a appliqué la transformée de laplace à la résolution de certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Le calcul intégro-différentiel d'ordre fractionnaire est un domaine très vaste, d'autres sens de dérivation existent : Dérivation au sens d'Hamadard, dérivation séquentielle,... et plusieurs phénomènes de la nature sont modélisés par des équations d'ordre fractionnaire. Le lecteur pourra approfondir ses connaissances en consultant ces dizaines de livres didiés spécialement au calcul différentiel fractionnaires et ses applications.

Bibliographie

[1] A.A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[2] B.Ross ; *The Development of Fractional Calculus* 1695-1900. Historia Math 4, (1977), 7589.

[3] Kimeu, Joseph M. *"Fractional Calculus : Definitions and Applications"*, (2009). Masters Theses and Specialist Projects. Paper 115.

[4] B. Ross (editor) ; *Fractional Calculus and Its Applications* ; Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974, Springer Verlag, 1975.

[5] *Introductory Notes on Fractional Calculus*, xuru.org, July 31, 2006.

[6] K. Miller, B. Ross ; *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc... 1993.

[7] *A poster about the old history of fractional calculus*, J. A. Tenreiro Machado, Virginia Kiryakova , Francesco Mainardi, 2010.