République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Nř Attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Année: 2015/2016

Transformée de Sumudu et Applications

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda
Discipline : MATHEMATIQUES
Spécialité : Analyse, Géométrie et Applications

par

Sahli Faiza [1]

Soutenu le —— Juin 2016, devant le jury composé de :

M. Belmekki	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Président
H. Abbas	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Encadreur
A. Azzouz	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur
O. Bennihi	Université Dr : Tahar Moulay de Saida	Examinateur

1. e-mail :karimamalake@gmail.com

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

À mes très chers parents.

À moi-même

À tous mes frères, mes sœurs, leurs maris et enfants

À toute ma famille et spécialement àmes cousins.

À tous mes amis sans éxception et les autres collègues de ma promotion et du département .

À tous mes élèves.

À tous mes amis dans Facebook sans exception

À tous ceux qui me connaissent

À tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie .

À tous mes enseignants.

Faiza Sahli

Remerciements

En préambule de ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été une source de motivation d'encouragement et de beaucoup de bonheur.

Je souhaite aussi adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire. En effet, je voudrai remercier mon université, ma famille, mon encadreur et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je tiens à remercier sincèrement à M^{elle} H. Abbas pour le choix du sujet et à son aide à accomplir ce mémoire. Merci à mes professeurs et enseignants d'avoir été là, de nous avoir énormément appris par la qualité des enseignements qu'ils nous ont prodigués.

J'adresse mes remerciements aussi à notre chef de département de mathématiques, C'est, encore, un grand plaisir pour moi, d'adresser mes plus sincères remerciements à Monsieur M. Belmekki d'avoir bien voulu présider et Messieurs O. Bennihi et A. Azzouz de bien vouloir expertiser mon mémoire.

Je remercie également mes camarades de Master II et mes amis du département pour leurs conseils et leurs idées.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.
Merci à tous et à toutes.

Table des figures

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié la transformation de Sumudu qui semble être une proche de la transformation de Laplace. Ce mémoire contient les pricipales propriétés des deux transfoemations et argumentés par des exemples.

Abstract

In this work, we study Sumudu transform developed earlier by Watugala and performed by many authors later. The Sumudu transform look like Laplace transforms, share many property and proved that two transforms are coupled by a duality relation. Many examples are presented according those properties.

Table des matières

Introduction

Les Transformations intégrales constituent des outils fondamentaux dans le calcul opérationnel. EIles ont été largement appliquées à la résoluion de problèmes pratiques en mathématiques appliquées, la physique et en engineering. Le précurseur des transformations intégrales est la transformée de Fourier, qui est employée pour exprimer des fonctions en intervalle fini. Dès lors, il y a un certain nombre de travaux sur les théories et des applications des transformées, une partie dont sont les transformation de Laplace, Mellin et Hankel. l'émergence de ces transformées a connu un grand succès puisque les fonctions à intégrer (transformer) ne sont plus supposées périodiques. Watugala [9] a proposé une nouvelle transformée appelée la Sumudu. Initialement employée pour résoudre des équations différentielles ordinaires dans des problèmes d'automatique et du contrôle de la production, Weerakon [10] [11] a prolongé la transformée de Sumudu aux équations aux dérivées. Asiru [1], a étudié ensuite le théorème de convolution de la transformée de Sumudu, qui peut être exprimée en termes de polynômes ou série infinie convergente.

Le monde mathématique n'a pas vraiment accepté la transformée de Sumudu comme une transformée à part entière. Après les théorèmes d'inversion de la transformée de Sumudu (basés sur les mêmes théorèmes pour calculer la transformée inverse de Laplace) établis par Weerakoon dans deux documents en 1994 et 1998 [10] [11]. Il défend la transformée de Sumudu contre la définition de Deakin qui prétendait ne percevoir aucune différence entre la Sumudu et le Laplace. Belgacem et d'autres [3] ont définit la dualité entre la transformée de Laplace et la Sumudu, qui constitue une avancée essentielle par l'établissement de nouveaux résultats. Par exemple, la propriété de dualité a été employée pour définir la transformée de Sumudu inverse dans le champs complexe.

La transformée de Sumudu est maitenant considérée parmi les transformations intégrales populaires, ceci est dû à sa conservation de l'unité de mesure. Dans la réalité, plusieurs problèmes sont modélisés par des équations différentielles bien que ces modèles soient inexacts. En présence d'inexactitudes dans les données initiales, les équations différentielles ne peuvent être résolues par les méthodes classiques. Ce qui a contibué à chercher d'autres théories. La théorie des ensembles flous, en progression déja chez les informaticiens, a permit de définir les dérivées floues, et à résoudre des modèles flous.

Ce mémoire a pour but d'étudier la transformée de Sumudu, de donner quelques propriétés et définir les axes qui lui sont spécifiques. Notre mémoire est composé de trois chapitres. Le premier chapitre introduit la transformée de Laplace, l'incoutournable transformation intégrale, on donnera les théorèmes importants et clôtureront ce chapitre par quelques exemples d'application de la transformée de Laplace aux équations différentielles ordinaires. Le second chapitre constitue le pilier de notre mémoire, On définit la transformée de Sumudu et démontreront ses imprtantes propriétés. Bien entendu on discutera de la dualité et ce qu'elle vaut pour la résolution des EDO. On termine ce mémoire par des exemples de l'application de la transformée de Sumud dans la resolution d'un problème de contrôlede la production, puis avec un autre exemple dans lequel une résolution simultanée sera faite.

Chapitre 1

Transformée de Laplace

1.1 Préliminaires

Ce chapitre présente une méthode très puissante et très utile pour analyser des circuits. Méthode basée sur la transformée de Laplace, qu'on verra dans ce chapitre. Pourquoi a-t'on besoin d'une autre méthode pour analyser des circuits ?
1. On veut considérer le comportement transitoire de circuits ayant plusieurs noeuds, ce qui est très difficile à faire avec les équations différentielles.
2. On veut analyser la réponse transitoire de circuits dont la source est quelque chose de plus complexe qu'un échelon.
3. On peut utiliser la transformée de Laplace pour introduire le concept de fonction de transfert pour l'analyse de circuits ayant des sources sinusoïdales.
4. La transformée de Laplace permet de relier le comportement d'un circuit en fonction du temps à celui en fonction de la fréquence.
Dans ce chapitre, on présentera un outil important dans l'analyse de Fourrier, il s'agit de la transformée de Laplace et on établira certaines de sescaractéristiques importanntes.

1.1.1 Définition de la transformée de Laplace

Définition 1.1.1 *La transformée de Laplace d'une fonction f réelle et continue est donnée par l'expression suivante :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{1.1}$$

Le symbole $\mathcal{L}\{f(t)\}$ exprime la transformée de Laplace de $f(t)$, on trouve dans la littérature aussi une autre notation $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace d'une fonction f.
cette notation montre que la transformée de Laplace n'est pas une fonction du temps t, mais plutôt fonction d'une variable s. La variable s sera l'inverse du temps, donc une fréquence *(puisque l'exponentiel dans la définition 1.1.1 doit être sans dimension)*.

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps en domaine de fréquence. Le problème ainsi obtenu sera plus simple à résoudre et la récupération de la solution du problème de départ se fera à l'aide de la transformée de Laplac inverse, le diagramme suivant montre cette procédure.

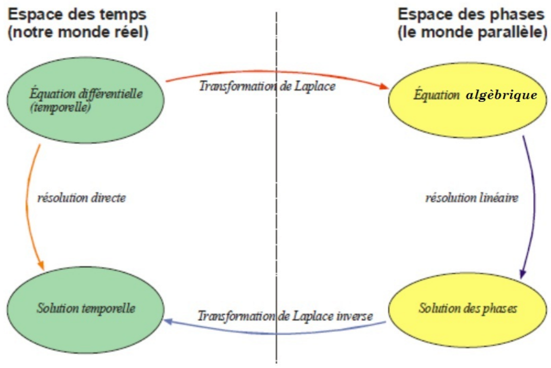

FIGURE 1.1 – Diagramme de Laplace

L'avantage principal d'analyser des circuits de cette façon est que les calculs deviennet beaucoup plus simples dans le domaine le Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simple opérations algébriques sans avoir recours à des équations différentielles.

Avant d'illustrer certaine propriétés importantes de la transformée de Laplace, il faut faire quelques commentaires :

1. L'intégrale donnée dans la définition 1.1.1 est impropre, il faut voir les conditions de sa convergence.
2. La borne inférieure de l'intégrale est nulle, ceci veut dire que $F(s)$ ne tient compte

que du comportement de $f(t)$ pour des valeurs positives de t. On appelle ceci la transformée de Laplace unilatérale. Que se passe t'il si la fonction $f(t)$ a une discontinuité à l'origine ? Est-ce qu'on utilise 0^- , 0^+ ou autre chose pour la borne ? En fait , on verra plus loin qu'on utilise la borne 0^- dans ces cas.

La transformée de Laplace peut être étudiée sous deux angles différents :

1. *Transformée fonctionelle* : Il s'agit de la transformée de Laplace d'une fonction spécifique, comme $\sin(wt), t, e^{-at}$etc.

2. *Transformée opérationnelle* : Ici, on s'intéresse à la transformée de Laplace de la dérivée, de la primitive... de $f(t)$.

1.1.2 Existence de la transformée de Laplace

Définition 1.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle transformation de Laplace, l'application*

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathrm{C}) \quad \textit{définie par} \quad \mathcal{L}(f)$$

La définition 1.1.1 peut être étendue aux cas des fonctions continues par morceaux $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, c'est à dire :
Sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b], a < b$, les discontinuités de f (lorsqu'elles existent) sont en nombre fini et sont de premiére espèce.

Définition 1.1.3 *On dit que la fonction f est d'ordre exponentielle, s'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha}t$$

Sous ces conditions, il est simple (par une majoration) de vérifier que $\int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ converge pour tout s vérifiant $\mathcal{R}e(s) > \alpha$ ce qui prouve l'existence de la transformée de Laplace de f. S'agissant d'une majoration, il est important de déterminer (le meilleur) $s \in \mathbb{C}$ pour que la transformée de Laplace soit convergente. On admet les théorèmes suivants [6] :

Théorème 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue,*

1. *Il existe un unique* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que*

   a - $\mathcal{R}e(s) > a \Rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ *converge simplement .*

   b - $\mathcal{R}e(s) < a \Rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ *diverge.*

   a est appelé abscisse de la convergence simple.

2. *Il existe un unique* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que*

   a - $\mathcal{R}e(s) > b \Rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ *converge absolument .*

   b - $\mathcal{R}e(s) < b \Rightarrow \int_0^\infty f(t)e^{-ts}dt$ *ne converge pas absolument .*

   a est appelé abscisse de la convergence absolue.

Théorème 1.1.2 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction,* $\mathcal{L}(f)$ *est une intégrale généralisée est bien définie si*

1. f *est continue par morceaux.*
2. f *est d'ordre exponnentiel.*
3. $\exists \beta \in]0,1[$ *tel que* $lim\, t^\beta |f(t)| \to 0$ *quand* $t \to 0$

Exemple 1.1 *On considère la fonction suivante :*

$$f(t)=\begin{cases} a & si \quad t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Calculons la transformée de Laplace de f :
$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} ae^{-ts}dt = a\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = -\frac{a}{s}[e^{-ts}]|_0^{+\infty} = -\frac{a}{s}[e^{-tx}e^{-ity}|_0^\infty = \frac{a}{s}$
Puisque $e^{-ts} = e^{-tx}e^{-ity}$ *et* $|e^{-ity}| = 1$ *donc la convergence de l'intégrale dépend de* $\mathcal{R}e(s)$ *seulement. Ainsi si* $x = \mathcal{R}e(s) > 0$ *alors la transformée de Laplace de* f *existe et vaut* $\frac{a}{s}$.

Exemple 1.2 *On considère la fonction*

$$f(t)=\begin{cases} e^{\alpha t} & si \quad t \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Alors :

$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, e^{-ts} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(s-\alpha)} dt = \frac{-1}{s-\alpha}[e^{-t(s-\alpha)}]_0^{+\infty} = \frac{-1}{s-\alpha}[e^{-t(x-a)} e^{-it(y-b)}]_0^{+\infty}$

$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{-1}{s-\alpha}$ *Si* $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(\alpha)$.

Remarque 1.1.1 *certaines fonctions ne possédent pas de transformées de Laplace, par exemple la fonction* $f(t) = \frac{1}{t}$ *qui ne respecte pas la troisieme condition du theéorème 1.1.2, et* $f(t) = e^{t^2}$ *qui n'est pas d'ordre exponentiel.*

La transformée de Laplace peut être introduite à l'aide de fonctions importantes : La fontion échelon et la fonction implusion.

1.1.3 La fonction impulsion

L'étude de circuits électriques permet de voir des pulses qui ont des durées trés courtes. elles peuvent se produire lors d'une opération de commutation par exemple ou d'exitation de circuits par des sources impulsionnelles. Il existe plusieurs façons pour représenter une impulsion, rectangualire ou triangulaire. On adoptera l'approche d'un signal triangulaire comme dans la figure 1.2.

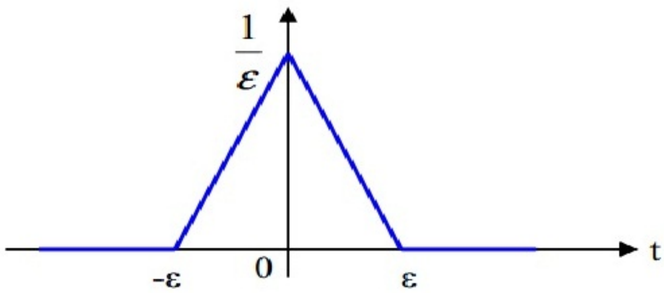

FIGURE 1.2 – Fonction impuslion triangulaire

Remarquons que le triangle est isocèle de base centrée à l'origine, et que la valeur maximale est $1/\varepsilon$. Pour obtenir une vraie impulsion, il faudra que $\varepsilon \to 0$.
Une question s'impose donnant lieu à des situations intéréssantes : Qu'arrive-t'il alors à cette fonction lorsque $\varepsilon \to 0$?

1. L'amplitude approche l'infini.
2. La durée de la pulse se rapproche de 0.
3. La surface du triangle est constante et égale à 1.

On utilise la notation $\delta(t)$ pour désigner la fonction impulsion. Mathématiquement, la fonction impulsion (appelée aussi fonction de **D**irac) est définie par :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si} \quad t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 & \end{cases}$$

Si l'impulsion se produit a un temps $t = a$, on écrit $\delta(t-a)$. Une propriété intéressante de la fonction impulsion est qu'elle permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)d(t) = f(a)$$

du moment que f est continue au point $t = a$. En d'autres terme, l'impulsion élimine la fonction en dehors du point a. Ainsi :

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Pour calculer la transformée de Laplace de la dérivée de la fonction $\delta(t)$, on utilise la définition de la fonction triangulaire, qu'on dérive en premier comme dans la figure 1.3, puis on fait tendre $\epsilon \to 0$

On obtient alors, pour la transformée de Laplace de $\delta'(t)$

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = \lim_{\epsilon \to 0}[\int_{-\epsilon}^{0^-} \frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}dt + \int_{0^-}^{+\epsilon} -\frac{1}{\epsilon^2}e^{-st}dt]$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0}[\frac{e^{s\epsilon} + e^{-s\epsilon} - 2}{s\epsilon^2}]$$

finalement,

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s$$

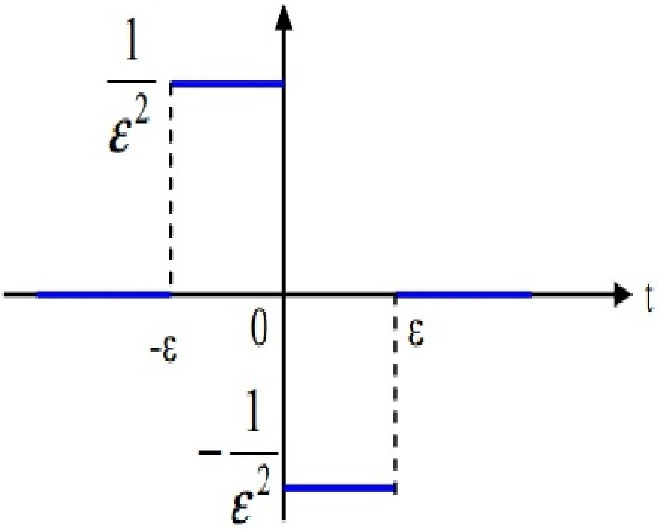

FIGURE 1.3 – Dérivée de la fonction impuslion

On peut répeter la même procédure pour trouver la transformée de Laplace de la dérivée d'ordre n de $\delta(t)$, on obtient :

$$\mathcal{L}\{\delta^n(t)\} = s^n$$

En théorie de distribution, la fonction impulsion représente la dérivée de la fonction échelon :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

1.1.4 Fonction Echelon

La fonction échelon est une fonction constante c (représentant une amplitude) possèdant une seule discontinuité à l'origine comme le fait d'allumer une source de tension éléctrique (DC). Elle est nulle pour $t < 0$, illustrée dans la figure 1.4. On notera souvent la fonction échelon par le symbole $H(t)$ ou $u(t)$.

La multiplication de la fonction échelon unitaire d'amplitude 1 par une constante K donne lieu à la fonction échelon d'amplitude K . Explicitement :

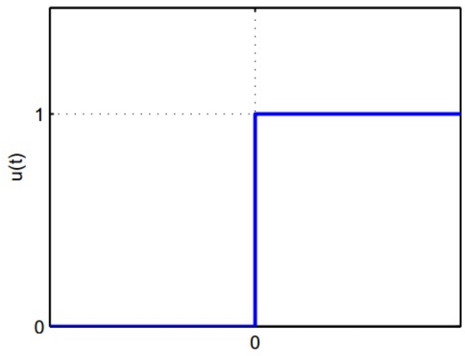

FIGURE 1.4 – Fonction échelon

$$Ku(t)\begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ K & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Remarque 1.1.2 – *La fonction échelon n'est pas définie au point $t = 0$. Cependant, il est nécessaire de définir la transition entre 0^- et 0^+, on suppose que la fonction est linéaire, et que la valeur au point $t = 0$ est égale à $KH(0) = 0.5K$*

– *Lorsqu'une discontinuité survient à un endroit (moment) autre que $t = 0$, on utilise la notation $KH(t-a)$ alors*

$$KH(t-a)\begin{cases} 0 & si\ t < a \\ K & si\ t > a \end{cases}$$

1.1.5 Propriétés de la transformée de Laplace

Transformées fonctionnelles

Une transformée fonctionnelle est tout simplement la transformée de Laplace d'une fonction spécifique de t. Dans ce qui suit, on considère que les fonctions sont nulles pour $t < 0^-$.

Exemple 1.3 *La transformée de Laplace d'une exponentielle décroissante est :*

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{a+s}$$

Exemple 1.4 *Soit $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0, \infty)$*

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{1}{s} \qquad \textit{pour tout } s > 0$$

Exemple 1.5 *Une autre fonction rencontrée souvent est un sinusoïde. Sa transformée de Laplace est :*

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \sin(wt)dt = \int_{0^-}^{+\infty} (\frac{e^{+\jmath wt} - e^{-\jmath wt}}{2\jmath})e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \int_{0^-}^{+\infty} (\frac{e^{-(s-\jmath w)t} - e^{-(s+\jmath w)t}}{2\jmath})dt$$

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \frac{1}{2\jmath}(\frac{1}{s-\jmath w} - \frac{1}{s+\jmath w})$$

$$\mathcal{L}\{\sin(wt)\} = \frac{w}{s^2+w^2}$$

Exemple 1.6 *$\mathfrak{L}(cos(wt))(s)$?*
D'aprée l'exemple précédent :

$$\mathfrak{L}(sin(wt))(s) = \frac{a}{s}\mathfrak{L}(cos(wt))(s)$$

par suite :

$$\mathfrak{L}(cos(wt))(s) = \frac{s}{s^2+w^2} \qquad s > 0$$

Exemple 1.7 *Soit $f(t) = t$ pour tout $t \in [0, \infty)$*

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} te^{-st}dt$$

On intègre par parties :

$$\mathfrak{L}(f)(s) = -\frac{t}{s}e^{-st}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}dt = -\frac{t}{s}|_0^{\infty} + \frac{1}{s}(-\frac{1}{s}e^{-st})|_0^{\infty}$$

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{1}{s^2} \qquad \textit{pour tout } Re(s) > 0$$

Exemple 1.8 Fonction de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}\{u(t)\} & = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}dt & \\ \mathcal{L}\{u(t)\} & = [-\frac{e^{-st}}{s}]_0^{\infty} & = \lim_{t \longrightarrow \infty}[-\dfrac{e^{-st}}{s}] - \lim_{t \longrightarrow 0}[-\dfrac{e^{-st}}{s}] \\ \mathcal{L}\{u(t)\} & = \frac{1}{s} & \end{array}$$

Transformées Opérationnelles

1. **Linéarité** *:*

   La transformation de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}(f + g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$$

et

$$\mathcal{L}(kf) = k\mathcal{L}(f) \qquad k \in \mathbb{R}$$

Preuve. *La linéarité de la transformation de Laplace est une conséquence directe des propriétés de l'integrale*

2. **Addition (Soustraction)** *:*

L'addition (soustraction) dans le domaine du temps correspond à une addition (soustraction) dans le domaine de Laplace. Donc, si

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s)$$

alors
$\mathcal{L}\{\ f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s)$

3. **Transformée de Laplace de la translation** *:*

Proposition 1.1.1 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant* $f(t) = 0$ *si* $t < 0$ *et admettant une transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)(s)$*. On considére la fonction* f_α *définie par* $f_\alpha(t) = f(t-\alpha), (\alpha > 0)$.

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-\alpha s}\mathcal{L}(f)(s)$$

Preuve. *Remarquons d'abord que :*

$$f_\alpha(t)\begin{cases} f(t-\alpha) & si\ t-\alpha \geq 0 \\ 0 & si\ t-\alpha < 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}(f_\alpha(t))(s) {=} \int_0^\infty f_\alpha(t)e^{-ts}dt {=} \int_0^\infty f(t-\alpha)e^{-ts}dt {=} \int_\alpha^\infty f(t-\alpha)e^{-ts}dt$

En posant $x = t - \alpha$*, on obtient :*

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-(\alpha+x)}dx = \int_0^\infty f(x)e^{-}e^{-xs}dx$$

$$\mathcal{L}(f_\alpha)(s) = e^{-}\int_0^\infty f(x)e^{-xs}dx = e^{-}\mathcal{L}(f)(s)$$

4. **Transformé de Laplace de l'homothétie** *:*

Proposition 1.1.2 *Soit* $K > 0$ *et* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant* $f(t) = 0$ *si* $t < 0$ *et admettant une transformée de Laplace* $\mathfrak{L}(f)(s)$*. Soit* f_k *la fonction définie par :*$f_k(t) = f(kt)$

$$\mathfrak{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\mathfrak{L}(f)(\frac{p}{k})$$

Preuve.

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \int_0^\infty f_k(t)e^{-ts}dt = \int_0^\infty f(kt)e^{-ts}dt$$

On fait le changement de variable : $y = kt$*, donc* $dt = \frac{dy}{k}$.

$$\mathcal{L}(f_k)(s) = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(y)e^{-y(\frac{s}{k}}dy = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)(\frac{s}{k})$$

5. **Effet de la multiplication par** e^{-at} *:*

Théorème 1.1.3 *La transformation de Laplace de la fonction définie par* $f(t)e^{-at}u(t)$ *est :*

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = F(s+a)$$

Preuve.

$$\mathfrak{L}[f(t)e^{-at}u(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+a)t}u(t)dt = F(s+a)$$

Exemple 1.9

$$f(t) = sint\ e^{-t}u(t)$$

On pose :

$$g(t) = sint\ u(t)$$

de sorte que :

$$f(t) = g(t)e^{-t}$$

comme

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

alors

$$F(s) = G(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

6. **Transformée de Laplace de la dérivée** *:*

On s'intéresse à la transformeé de Laplace de la dériveé et à la dérivée de la transformée d'une fonction.

Théorème 1.1.4 *Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de type exponentielle à l'infini dont la dérivée est continue. Alors $\mathcal{L}(f')$ existe et elle est donnée par :*

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0)$$

Preuve.

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = sF(s) - f(0^-)$$

On obtient cette relation en utilisant la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = \int_{0^-}^{+\infty} [\frac{df(t)}{dt}]e^{-st}dt$$

Une intégration par partie est utilisée. Soit $u = e^{-st}$ et $dv = [\frac{df(t)}{dt}]dt$
on obtient :

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = e^{-st}f(t)|_{0^-}^{+\infty} - \int_{0^-}^{+\infty} f(t)(-se^{-st})dt$$

Le premier terme donne $f(0^-)$, puisque e^{-st} donne 1 pour 0^- et 0 à l'infini. Le côté droit de la dernière équation devient donc :

$$-f(0^-) + s\int_{0^-}^{+\infty} f(t)(e^{-st})dt = sF(s) - f(0^-)$$

Le résultat va être généralisé au cas où on a des points de discontinuité.

Corollaire 1.1.1 *Si f est de type exponentielle et admet des dérivées d'ordre k ($k \leq n$) avec f^n continue. Alors :*

$$\mathfrak{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n \mathfrak{L}(f(t))(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots.. - f^{(n-1)}(0)$$

Preuve. *On utilise une récurence sur n.*
Cette formule va nous être utile pour transformer les équations différentielles en équations algébriques simples à résoudre.

7. **Théorème de le valeur initiale et la valeur finale** *:*

Théorème 1.1.5 *Soit :$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$*

(a) *Si $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = l$ Alors $\lim\limits_{s \to +\infty} sF(s) = l$*

(b) *Si $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$ Alors $\lim\limits_{s \to 0^+} sF(s) = l$*

Preuve. *D'aprés le théorème de la dérivée on a :*

$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0^+)$
(a)- on'a
$\mid \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mid = \mid \int_0^\infty e^{-st} f'(t) d(t) \mid \leq \int_0^\infty e^{-st} \mid f'(t) \mid dt$
or il existe un M telque :$\mid f'(t) \mid \leq e^{Mt}$, donc :

$$\mid \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \mid \leq e^{(M-s)t} dt = -\frac{1}{M-s} \to_{s \to \infty} 0$$

d'où

$$\lim_{s \to \infty} sF(s) = f(0^+)$$

(b)-

$$\lim_{s \to 0^+} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = \lim_{s \to 0^+} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-sT} f'(t) dt$$

or

$$\int_0^T e^{-sT} f'(t)dt = e^{-sT} f(t) \int_0^T dt + s \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

$$\to_{s\to 0^+} f(T) - f(0^+)$$

d'où

$$\lim_{s\to 0^+} sF(s) = \lim_{T\to +\infty} f(T)$$

8. **Dérivée d'une transformée de Laplace** *:*

Théorème 1.1.6 *Si f est continue par morceaux par $[0,\infty)$ et de type exponentielle d'ordre C. Alors :*

$$\mathfrak{L}(-tf(t))(s) = F'(s)$$

Preuve. *On a : pour tout $s > c$*

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty -te^{-st} f(t)dt$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \mathfrak{L}(-tf(t))(s)$$

On peut obtenir par induction le résultat.

Théorème 1.1.7 *Sous les mêmes conditions du théoreme précedent , on a :*

$$\mathfrak{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \qquad s > c$$

Exemple 1.10 *Soit à calculer* $\mathfrak{L}(t\, coswt)(s)$

$$\mathfrak{L}(t\, coswt)(s) = -\frac{d}{ds}\mathfrak{L}(coswt)(s)$$

$$\mathfrak{L}(t\, coswt)(s) = -\frac{d}{ds}(\frac{s}{s^2+w^2})$$

$$\mathfrak{L}(t\, coswt)(s) = \frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$$

9. **Transformé d'une intégrale** *:*

Théorème 1.1.8 *Si* $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)U(t)]$ *et si* $\Phi(t) = \int_0^t f(u)U(u)du$ *alors :*

$$\mathfrak{L}[\Phi(t)] = \frac{1}{s}F(s) \qquad (s \neq 0)$$

Preuve. *Si* Ψ *est une primitive de* f *alors :*

$$\Phi(t) = \Psi(t) - \Psi(0)$$

donc :

$$\Phi'(t) = \Psi'(t) = f(t)$$

On en deduit :

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)U(t)] = s\mathfrak{L}[\Phi'(t)U(t)] = s\mathfrak{L}[\Phi(t) - \Phi(0^+)] = s\mathfrak{L}[\Phi(t)]$$

Donc :

$$\mathfrak{L}[\Phi(t)] = \frac{1}{s}F(s)$$

Exemple 1.11 *Retrouver la transformée de Laplace* $t^2\, U(t)$ *à partir de la transformée de Laplace de la fonction* $f(t) = t\, U(t)$

$$\Phi(t) = \int_0^t f(u)U(u)du = \int_0^t udu = [\frac{u^2}{2}]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

et

$$\mathfrak{L}[t^2U(t)] = 2 \times \frac{1}{s}(s) = \frac{1}{s^2}$$

10. **Integration de la transformé de Laplace** *:*

Théorème 1.1.9 *Si f est continue par morçeaux sur $[0, \infty)$ et de type exponentielle d'ordre C. Si $lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe Alors :*

$$\int_s^\infty F(u)du = \mathfrak{L}(\frac{f(t)}{t})(s) \qquad s > c$$

Preuve. *Soit* $F(x) = \int_0^\infty -e^{-xt} f(t)dt$

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)du &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t)\right) dtdu \\ &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-ut} f(t)\right) dudt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt\end{aligned}$$

ce qui donne $\int_s^\infty F(u)du = \mathfrak{L}(\frac{f(t)}{t})(s)$ *pour tout* $s > c$

Exemple 1.12

$$\mathfrak{L}(\frac{sint}{t})(s) = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1}$$

$$\mathfrak{L}(\frac{sint}{t})(s) = \frac{\pi}{2} - arctgs$$

$$\mathfrak{L}(\frac{sint}{t})(s) = arctg\frac{1}{s}, \quad s > 0$$

11. **Transformée de Laplace du produit de convolution** *:*

Définition 1.1.4 *Soient les fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ s'annulant sur le demi plan négatif. On définit le produit de convolution est par :*

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 1.1.3 *Le produit de convolution est commutatif*

$$f \star g = g \star f$$

Preuve.
En effet : On utilise le changement de variables : $y = t - x$*, on obtient*

$$\begin{aligned}(f \star g)(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_t^0 f(t-y)g(y)(-dy) \\ &= -\int_t^0 f(t-y)g(y)dy \\ &= \int_0^t g(y).f(t-y)dy \\ &= (g \star f)(t) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposition 1.1.4 $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *s'annulant sur le demi plan négatif (dites causales) ayant des tranforméeS de Laplace* $\mathfrak{L}(f)(s)$, $\mathfrak{L}(g)(s)$ *respectivement. Alors :*

$$\mathfrak{L}(f \star g)(s) = \mathfrak{L}(f)(s)\mathfrak{L}(g)(s)$$

Preuve. *Rappelons que* $(f \star g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)du$
Tenant compte du fait que $f(y) = g(y) = 0$ *si* $y < 0$ *, les calculs donnent :*

$$\mathfrak{L}(f \star g)(s) = \int_0^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du]e^{-ts}dt = \int_0^{\infty}[\int_0^t f(t-u)g(u)]e^{-ts}dt$$

$$= \int_0^{\infty}[\int_u^{\infty} f(t-u)e^{-ts}dt]g(u)du.$$

Dans l'integrale $\int_u^{\infty}[f(t-u)e^{-ts}dt]g(u)du$ *, on fait le changement de variable* $v = t - u$
$\int_u^{\infty}[f(t-u)e^{-ts}dt]g(u)du = \int_0^{\infty} f(v)e^{-(u+v)s}dv = e^{-us}\mathfrak{L}(f)(s)$
c'est la transformée de la translation . Finalement :

$$\mathfrak{L}(f \star g)(s) = \int_0^{\infty} e^{ts}\mathfrak{L}(f)(s)g(u)du = \mathfrak{L}(f)(s)\int_0^{\infty} g(u)e^{-us}du = \mathfrak{L}(f)(s)\mathfrak{L}(g)(s)$$

$\blacksquare$

Tableau des transformées de Laplace

Fonction	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))$
Impulsion	$\delta(t)$	1
Echelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
Polyn$\hat{o}me$	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
cosinus	$\cos(wt)u(t)$	$\frac{s}{w^2+s^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(wt)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

1.2 Transformées de Laplace inverses

La résolution des équations différentielles conduit souvent, en appliquant la transformation de Laplace unilatérale, à la résolution des équations algébriques de type fraction retaionnelle en s notée $V(s)$. En général, La solution de l'équation différentielle s'obtient alors en cherchant la transformée inverse d'une fonction qui a la forme

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 s + b_0}$$

De façon générale, La technique utilisée pour résoudre ce genre d'équations est de faire la décomposition en fractions simples. Trois cas sont à considérer :

1. ***Racines réelles et distinctes.***

   Exemple 1.13

   $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

   On peut écrire :

   $$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

Par simples calculs, on obtient :

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

En utilisant le tableau des transformées de Laplace, la transformée inverse est alors :

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

2. ***Racines réelles et répétées***

Exemple 1.14 *Soit*

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

On peut facilement décomposer cette expression en fractions simples :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2}$$

Le tableau des transformées de Laplace nous fournit :

$$f(t) = -2(t+1)e^{-2t} + 2e^{-t}$$

3. ***Racines complexes***

Ici encore, on argumente à l'aide d'un exemple

Exemple 1.15 *Soit*

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

On peut écrire

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Le coefficient K_1 *est obtenu de la façon habituelle ;*$K_1 = 0.6$*. Pour* K_2 *et* K_3*, on multiplie les deux côtés par le dénominateur,* $s(s^2 + 2s + 5)$*. On obtient :*

$$3 = K_1(s^2 + 2s + 5) + (K_2 s + K_3)s$$
$$= (K_1 + K_2)s^2 + (2K_1 + K_3)s + 5K_1$$

On a donc trois équations,

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$2K_1 + K_3 = 0$$

$$5K_1 = 3$$

d'où on trouve que $K_2 = -0.6$ *et*$K_3 = -1.2$*.*
La fonction de transfert devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}$$

La transformée inverse est

$$f(t) = 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5 \sin 2t)$$

$$= 0.6 - 0.67e^{-t} \cos(2t - 26.57°)$$

Pour transformer la solution précédente avec un sinus et cosinus à une solution où il n'y a qu'un cosinus, on se sert de relations trigonométriques. Soit :

$$g(x) = a \cos x + b \sin x$$

On peut factoriser l'équation précédente de la façon suivante :

$$\sqrt{(a^2 + b^2)}(\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \cos x \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \sin x)$$

Les termes devant les cosinus et sinus forment les équations d'un triangle de coté a et b et d'hypoténus $\sqrt{(a^2+b^2)}$. On définit :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

et

$$\sin\phi = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad (1.34)$$

On peut donc réduire l'équation 1.35 à :

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos\phi\cos x + \sin\phi\sin x)$$

Et à l'aide d'identités trigonométriques,

$$g(x) = \sqrt{(a^2+b^2)}(\cos(x-\phi))$$

où

$$\phi = \arctan(\frac{b}{a})$$

On peut aussi faire ce type de problème avec des nombres complexes :

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j^2)(s+1-j^2}$$

$$= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j^2} + \frac{K_3}{s+1-j^2}$$

On utilise la première technique pour résoudre, $K_1 = 0.6$.
Les autre coefficients sont :

$$K_2 = \frac{3}{s(s+1-j^2}|_{s=-1} = -0.15(2+j)$$

Et K_3 est le conjugué de K_2, $K_3 = -0.15(2-j)$.
La fonction devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} + \frac{-0.15(2+j)}{s+1+j^2} + \frac{-0.25(2-j)}{s+1-j^2}$$

Dans le domaine du temps, la fonction est :

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15[(2+j)e^{(j^2+1)t} + (2-j)e^{-(1-j^2)t}] \\ &= 0.6 - 0.15e^{(-t)}[(2+j)e^{-j^2t} + (2-j)e^{j^2t}] \end{aligned}$$

Avec la relation d'Euler,

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.15e^{(-t)}[(2+j)(\cos(-2t) + j\sin(-2t)) + (2-j)e^{(1-j^2)t}] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(2t) - j(\sin(2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\ &= 0.6 - 0.15e^{-t}(4\cos(2t) + 2\sin(2t)) \\ &0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57°) \end{aligned}$$

C'est la même solution que celle obtenue plus haut.

1.3 Applications à la résolution des équations différentielles

Commençons par une équation différentielle linéaire d'ordre n à coéfficients constants

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(t)$$

On cherche la solution de cette équation pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = y_0, y\prime(0) = y\prime_0, ..., y\prime(n-1) = y\prime_{n-1}$$

On calcule la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}(a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + ... + a_{n-1}y' + a_ny) = \mathcal{L}(f(t))$$

ce qui donne, par linéarité de la transformée de Laplace
$a_0\mathcal{L}(y^n)(s) + a_1\mathcal{L}(y^{n-1})(s) + ... + a_{n-1}\mathcal{L}(y\prime)(s) + a_n\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$
Sachant que : $\mathcal{L}(f^\kappa(t))(s) = s^\kappa F(s) - \Sigma_{\ell=1}^{\kappa} s^{\ell-1} f^{(\ell-1)}(0^+)$

1.3.1 Applications aux équations différentielles

Exemple 1.16 *Soit à résoudre l'équation différentielle*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t}$$

avec $x(0)=4$, $x'(0) = 9$.
Posons : $\mathcal{L}(x) = X$, *alors*

$$\mathcal{L}(x') = sX - x(0)$$

$$\mathcal{L}(x'') = s^2X - sx(0) - x'(0)$$

L'équation devient :

$$(s^2 - 3s + 2)X = \frac{4}{s-3} + 4s - 3$$

D'où

$$X = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

$$X = \mathcal{L}(e^t + e^{2t} + 2e^{3t})(s)$$

Parsuite, $x(t) = e^t + e^{2t} + 2e^{3t}$

Exemple 1.17 *: Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{3}{2}\sin(2t)$$

avec $y(0) = 1$ *et* $\frac{dy(0)}{dt} = 2$
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$\mathcal{L}\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}\{\sin(2t)\}$$

Compte tenu du théorème de la dérivation, on a :

$$p^2y(p) + py(0) - \frac{dy(0)}{dt} + y(p) = \frac{3}{2}\frac{2}{p^2+4}$$

$$p^2y(p) - p - 2 + y(p) = \frac{3}{p^2+4}$$

$$(p^2+1)y(p) - p - 2 = \frac{3}{p^2+4}$$

$$y(p) = \underbrace{\frac{p+2}{p^2+1}}_{A(p)} + \underbrace{\frac{3}{(p^2+1)(p^2+4)}}_{B(p)}$$

On décompose en éléments simples :

$$B(p) = \frac{3}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{T_1}{(p^2+1)} + \frac{T_2}{(p^2+4)}$$

$$T_1 = (p^2+1)_{\rightarrow\pm\jmath}\frac{3}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{3}{-1+4} = 1$$

$$T_2 = (p^2+4)_{\rightarrow\pm2\jmath}\frac{3}{(p^2+1)(p^2+4)} = \frac{3}{-4+1} = -1$$

$$B(p) = \frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+4)}$$

$$y(p) = \frac{p+2}{p^2+1} + \frac{1}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+4)}$$

$$y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{3}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+4)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(p)\} = \cos(t) + 3\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Donc $y(t) = \cos(t) + 3\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$

1.3.2 Applications Système différentiel

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace, les systèmes différentiels deviendront des systèmes d'équations algébriques, comme on peut le voir dans les exemples qui suivent :

Exemple 1.18 *Soit le système différentiel :*

$$(s)\left\{\begin{array}{l} x'-y'+x-y=2+3e^{2t} \\ x'+2y'-3x=-3+2e^{2t} \\ x(0)=4\ ;\ y(0)=1 \end{array}\right.$$

$$(s)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} sX-4-sX+1+X-Y=\frac{2}{s}+\frac{3}{s-2} \\ sX-4+2sY-2-3X=\frac{-3}{s}+\frac{2}{s-2} \end{array}\right.$$

Parsuite : $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-2} \\ Y=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2} \end{array}\right.$ *et donc* $\left\{\begin{array}{l} x(t)=1+e^{t}+2e^{2t} \\ y(t)=-1+e^{t}+e^{2t} \end{array}\right.$

Exemple 1.19 *Soit à déterminer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ vérifiant :*

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dx(t)}{dt} & =2y(t)+\cos(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} & =-x(t)+\sin(t) \end{array}\right.$$

En appliquant la transformée de Laplace à chacune des équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} & =\mathcal{L}\{2y(t)\}+\mathcal{L}\{\cos(t)\} \\ \mathcal{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\} & =\mathcal{L}\{-x(t)\}+\mathcal{L}\{\sin(t)\} \end{array}\right.$$

Par le théorème de la dérivation, et tenant compte des conditions initiales on a :

$$px(p)-x(0)=2y(p)+\frac{p}{p^2+1}$$

$$px(p)-y(0)=-x(p)+\frac{1}{p^2+1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} px(p)-1=2y(p)+\frac{p}{p^2+1}) \\ px(p)-2=-x(p)+\frac{1}{p^2+1} \end{array}\right.$$

En résolvant le système des équations on a :

$$y(p) = \frac{2p-1}{p^2+2} = \frac{2p}{p^2+2} - \frac{1}{p^2+2}$$

$$x(p) = \frac{2(2p-1)}{p(p^2+2)} + \frac{1}{p^2+1)} + \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$x(p) = \frac{p^2+4p}{p(p^2+2)} \frac{1}{p^2+1)} = \frac{p+4}{p^2+2} + \frac{1}{p^2+1}$$

$$x(p) = \frac{p}{p^2+2} + \frac{4}{p^2+2} \frac{1}{p^2+1}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse sur $X(p)$ et $Y(p)$ obtenus, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(p)\} = x(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{y(p)\} = y(t) = 2\cos(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)$$

Chapitre 2

Transformée de Sumudu

Watugala [9] est probablement le premier à introduire la transformée de Sumudu qui porte le nom de sa fille et celui de son village (En Sri Lanka). Sa formulation simple et ses applications directes aux équations différentielles ordinaires a vite donné de l'interêt à mieux l'investiguer.

2.1 Définition de la Transformée de Sumudu

Dans cette section, on presentera la transformée de Sumudu d'une fonction analytique puis pour d'autres qui ne le sont pas.

2.1.1 Forme sommable de la sumudu

On considère une fonction $f(t)$ *définie pour* $t \geqslant 0$ *et qui peut être exprimée comme un polynôme ou par une série convergente. Notons par* $F(u)$ *sa transformée de Sumudu.*
Posons

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... \tag{2.1}$$

Où $a_0, a_1, a_2.....$ *sont des constantes non toutes nulles.*
La première étape pour obtenir la transformée de Sumudu est d'écrire $G(u)$ *sous la forme :*

$$G(u) = a_0 + a_1 u + 2!a_2 u^2 + 3!a_3 u^3 + ... \tag{2.2}$$

Dans le cas des polynômes, le nombre de termes dans le côté droit de l'expression (2.2) est fini et la transformée de Sumudu de $f(t)$ est donnée par :

$$G(u) = F(u)$$

Dans le cas de séries entières (analytiques), nous pouvons trouver une valeur M telle que le côté droit de l'expression de $G(u)$ est convergent pour $0 \leq u < M$ où M est une constante positive.
On peut alors donner une expression approchée de $G(u)$ aussi. Notons par $G^*(u)$ la somme de la série convergente (et de sa forme approchée si elle existe). Alors la transformée Sumudu de $f(t)$ est définie par

$$G^*(u) = F(u)$$

Exemple 2.1 *Transformée de Sumudu de la fonction échelon (unité).*
La fonction échelon unité est définie par

$$f(t) = \begin{cases} 0, & pour \quad t < 0 \\ 1, & pour \quad t \geq 0 \end{cases}$$

A l'aide de la définition précédente, la transformée de Sumudu de la fonction échelon unité vaut par identification :
$F(u) = 1$
Dans ce cas la fonction $f(t)$ et sa transformée Sumudu $F(u)$ sont égales dans le demi plan positif .

Exemple 2.2 *Transformation de Sumudu de f(t) =exp(at) où a est une constante.*
En utilisant le développement en série entière de exp(at) nous avons :

$$exp(at) = 1 + (at) + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + ...$$

et par la définition on sait que :

$$G(u) = 1 + (au) + (au)^2 + (au)^3 + ...$$

Cette série est une géométrique donc convergente pour $\mid au \mid< 1$ *. Ainsi, nous pouvons prendre* $M = \frac{1}{|a|}$*,et l'expression de* $G^*(u)$ *et F(u) sont on*

$$F(u) = G^*(u) = \frac{1}{1 - au} \quad pour \quad 0 \leq u < M = \frac{1}{\mid a \mid}$$

Exemple 2.3 *La transformée de Sumudu de* $\sin(wt)$ *et* $\cos(wt)$*. Pour trouver la transformée de sumudu des deux fonctions en une seule étape on utilise*

$$exp(\jmath wt) = \cos(wt) + \jmath \sin(wt) \quad où \quad \jmath^2 = -1$$

À partir de l'exemple précédent, nous savons que (avec la notation : S{f(t)}=F(u))

$$\mathcal{S}\{e^{\jmath wt}\} = \frac{1}{1 - \jmath wt}$$

Où encore

$$\mathcal{S}\{e^{\jmath wt}\} = \frac{1 + \jmath wt}{1 + w^2u^2}$$

Séparant les parties réelles et imaginaires, il vient que :

$$\mathcal{S}\{\cos(wt)\} = \frac{1}{1 + w^2u^2} \qquad\qquad \mathcal{S}\{\sin(wt)\} = \frac{wu}{1 + w^2u^2}$$

2.1.2 Forme intégrale de la transformée de Sumudu

La transformation de Sumudu $F(u)$ *d'une fonction* $f(t)$ *est donnée par la formule suivante :*

$$F(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt, \quad u \in [-\tau_1, \tau_2] \tag{2.3}$$

sur l'ensemble,

$A = \{f(t)/\exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \mid f(t) \mid < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, si\ t \in (-1)^j \times [0; \infty)\}$

Exemple 2.4 *Transformée de Sumudu de le fonction implusion au point t=0*

$$f(t) = \delta(t)$$

$$F(u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}\delta(t)dt = \frac{1}{u}$$

Ainsi, on peut trouver la transformée de Sumudu d'une fonction quelconque en utilisant le forme intégrale (2.3).

2.1.3 Théorème d'existence

Théorème 2.1.1 *Si f est d'ordre exponentielle, Alors sa transformée Sumudu*

$$\mathcal{S}\{f(t)\} =: F(u)$$

est donnée par :

$$F(u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}}f(t)dt$$

Où $\frac{1}{u} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\iota}$.

L'intégrale définissant pour existe aux points $\frac{1}{u} = \frac{1}{\eta} + \frac{\iota}{\tau}$ dans le demi-plan positif $\frac{1}{\eta} > \frac{1}{\kappa}$ et $\frac{1}{\zeta} > \frac{1}{L}$

preuve *À l'aide de $\frac{1}{u} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{\iota}$ nous pouvons exprimer $F(u)$ comme*

$$F(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\eta}}dt - \imath\int_0^\infty f(t)\sin(\frac{t}{\tau})e^{-\frac{t}{\eta}}dt.$$

Alors pour les valeurs de $\frac{1}{\eta} > \frac{1}{\kappa'}$ *Nous avons*

$$\int_0^\infty \mid f(t) \mid\mid \cos(\frac{t}{\tau}) \mid e^{-\frac{t}{\eta}} dt \leq M \int_0^\infty e^{(\frac{1}{K}-\frac{1}{\eta})t} f(t) dt \leq (\frac{M\eta K}{\eta - K})$$

et

$$\int_0^\infty \mid f(t) \mid\mid \sin(\frac{t}{\tau}) \mid e^{-\frac{t}{\eta}} dt \leq M \int_0^\infty e^{(\frac{1}{K}-\frac{1}{\eta})t} f(t) dt \leq (\frac{M\eta K}{\eta - K})$$

Qui implique que les intégrales définissant les parties réelle et imaginaire de F *existent pour la valeur de* $Re(\frac{1}{u}) > \frac{1}{K}$.

Remarque *: La fonction est sensée s'annuler au dessous d'une constante* $c \in \mathcal{R}$. *L'ensemble des fonctions qui sont localement intégrables et s'annulent dans une région sera noté par* loc_{-}. *La plupart des fonctions que nous allons voir dans notre mémoire s'annulent pour* $t < 0$.

2.2 Propriétés de la transformée de Sumudu

2.2.1 Dérivation

Théorème 2.2.1 *Si la transformée de Sumudu de* $f(t)$ *est* $F(u)$, *alors la transformée de sumudu de* $f'(t)$ *est :*

$$\frac{F(u) - f(0)}{u} = \frac{F(u) - F(0)}{u} \tag{2.4}$$

Preuve. *:Encore une fois on considère les fonctions qui peuvent être exprimées par des séries entièrse ou comme polynôme :*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n + ..$$

Par la définition de la transformée de Sumudu

$$\mathcal{S}\{f(t)\} = F(u) = a_0 + a_1 u + 2! a_2 u^2 + ... + n! a_n u^n + ...$$

La dérivée de $f(t)$ et sa transformée sont

$$\begin{aligned} f'(t) &= a_1 + 2a_2t + 3a_2t^2 + ... + na_nt^{n-1} + ... \\ \mathcal{S}\{f'(t)\} &= a_1 + 2!a_2u + 3!a_3u^2 + ... + n!a_nu^{n-1} + ... \\ &= \tfrac{F(u)-a_0}{u} = \tfrac{F(u)-F(0)}{u} = \tfrac{F(u)-f(0)}{u} \end{aligned}$$

■

Si $f(0) = 0$, la différentiabilité de $f(t)$ par rapport à t est équivalente de la division de F par u. Il s'agit d'une règle qui conserve les unités.

2.2.2 Intégration :

Théorème 2.2.2 *:Si la transformée de Sumudu de $f(t)$ est $F(u)$ alors la transformée Sumudu de sa primitive*

$$S\{\int_0^t f(x)dx\} = uF(u) \tag{2.5}$$

preuve :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_nt^n + .. \\ \int_0^t f(x)dx &= a_0t + \tfrac{1}{2}a_1t^2 + \tfrac{1}{3}a_2t^3 + ... + \tfrac{1}{n+1}a_nt^{n+1} + ... \\ &d'u \\ \mathcal{S}\{\int_0^t f(x)dx\} &= a_0u + a_1u_2 + 2!a_2u^3 + ... + n!a_nu^{n+1} + ... \\ &= uF(u) \end{aligned}$$

Cela montre que l'intégration de $f(t)$ de 0 à t dans le $t-$ domaine est équivalente à la multiplication de $F(u)$ par u dans le domaine de u, une autre règle qui préserve les unités.

2.2.3 Linéarité :

Théorème 2.2.3 *soient $f(t)$ et $g(t)$ en $A = \{f(t)/\exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \mid f(t) \mid < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}$,si $t \in (-1)^j \times [0; \infty)\}$,et a, b des constantes :*

$$\mathcal{S}\{af(t) + bg(t)\} = aF(u) + bG(u) \tag{2.6}$$

Ce résultat découle de la linéarité de l'intégrale.

2.3 Dualité

Belgacem et al. [2] établissent plusieurs propriétés fondamentales de la transformée de Sumdu et montrent une relation de dualité explicite avec la transformée de Laplace. Pour $Re(s) > 0$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{2.7}$$

qui peut être réécrite, après un changement de variables, $w = st$, avec $dw = sdt$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^w f(\frac{w}{s})\frac{dw}{s} = \frac{\mathcal{S}\{f(t)\}_{u=\frac{1}{s}}}{s} = \frac{G(\frac{1}{s})}{s} \tag{2.8}$$

qui aussi, en posant $\frac{1}{s}$, devient :

$$G(u) = \frac{F(\frac{1}{u})}{u} \tag{2.9}$$

Les équations 2.8 et 2.9 traduisent la dualité Sumudu- Laplace, ou le DLS en abréviation. Le DLS est mieux illustré par le fait que les transformées de Sumudu et Laplace intervertissent l'échange des images de $sin(t)$ et $cos(t)$, (si on confond u et s),

$$\begin{array}{l} S\{\sin(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{u}{1+u^2} \\ S\{\cos(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{1+u^2} \end{array}$$

(2.10)

La Dualité $L - S$ peut aussi être utilisée, pour fournir une formulation de l'inverse de la transformée de Sumudu dans le cadre complexe, à travers la formule intégrale de Bromwhich, pour calculer la transformation inverse de Laplace :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(t)\} = \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma-\iota\infty}^{\gamma+\iota\infty} e^{st}F(s)ds \tag{2.11}$$

Belgacem établit alors une formulation de la transformée inverse du Sumudu son unicité. Cela se fait bien sur en faisant L'implantation d'une formulation équivalente pour la Sumudu Inverse, dans le théorème suivant, se faite ensuite en connectant le théorème des résidus et le théorème de Cauchy et l'équation (2.8).

Théorème 2.3.1 *Notons par $G(u)$ la transformée de Sumudu de la fonction $f(t)$, tels que :*
(i) La fonction, $G(1/u)/u$, est un méromorphique, avec singularités ayant $Re(u) < \gamma$,
et
(ii) Il existe une zone circulaire Γ avec rayon R et des constantes positives, M et K,tels que

$$|\frac{G(\frac{1}{u})}{u}| < MR^{-k} \tag{2.12}$$

alors la fonction $f(t)$, est donnée par :

$$S^{-1}\{G(u)\} = \frac{1}{2\pi\iota}\int_{\gamma-\iota\infty}^{\gamma+\iota\infty} e^{ut}\frac{(G\frac{1}{u})}{u}du = \sum Res[e^{ut}\frac{G(\frac{1}{u})}{u}]. \tag{2.13}$$

Nous soulignons que, par le théorème de Lerch concernant l'unicité de la transformée de Laplace inverse [[4], théorème 2.1 p 23], il est aussi montré par le même argument l'unicité de la transformée Sumudu Inverse de $G(u)$ notée $\mathbb{S}^{-1}\{G(u)\}$.
Par exemple, la transformée de Sumudu inverse de la fonction $\frac{1}{(1+u)}$, est donnée par la somme des résidus de la fonction $e^{ut}\frac{(G\frac{1}{u})}{u} = e^{ut}\frac{1}{1+u}$, qui a un pôle au point $u = -1$, et la valeur de la fonction en ce résidu :

$$e^{-t} = \mathbb{S}^{-}\{\tfrac{1}{(1+u)}\} = Res[e^{ut}\tfrac{1}{1+u}] = \lim_{t\to -1}\frac{e^{ut}(1+u)}{(u+1)} = \lim_{t\to -1} e^{ut}.$$

La dualité Laplace- Sumudu peut être alors illustrée par l'échange de l'image de la fonction Heaviside et la fonction de Dirac, $H(t)$ et $\delta(t)$, respectivement, puisque, pour $u > 0$,

$$S^{-}\{1\} = \mathcal{L}^{-}\{\delta(t)\} = H(t) \tag{2.14}$$

et

$$S^{-}\{\frac{1}{u}\} = \mathcal{L}^{-}\{1\} = \delta(t) \tag{2.15}$$

2.4 Théorèmes fondamentaux

Théorème de shift :

Soit $A = \{f(t)/\exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \mid f(t) \mid < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, si\ t \in (-1)^j \times [0; \infty)\}$, *On appelle shift ou décalage l'application* $f(t) \to e^{at}f(t)$

Théorème 2.4.1 *:Soit* $f \in A$ *et* $G(u)$ *sa transformée de Sumudu. Alors,*

$$\mathcal{S}\{e^{at}f(t)\} = \frac{1}{1-a}G(\frac{u}{1-au}) \tag{2.16}$$

preuve :

$$\mathcal{S}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty f(ut)e^{-(1-au)t}dt$$

Par conséquent, par un changement de variable $(w = (1-au)t)$ *, on obtient*

$$\mathcal{S}\{e^{at}f(t)\} = \frac{1}{1-au}\int_0^\infty f(\frac{uw}{1-au})e^{-w}dw = \frac{1}{1-au}G(\frac{u}{1-au})$$

Théorème 2.4.2 *: Soit* $f(t) \in A$ *avec les transformée de Laplace et sumudu F(s) et G(u), respectivement. Puis la fonction*

$$h(t)\begin{cases} f(t-a), & si \quad t > a \\ 0, \quad si \quad t < a \end{cases}$$

une transformation de Sumudu est donnée par

$$\mathcal{S}\{h(t)\} = e^{-\frac{a}{u}}G(u) \tag{2.17}$$

Si dualité décrit àu la section précédente

2.5 Convolution

Théorème 2.5.1 *Soit $f(t)0$ et $g(t)$ dans d'ensemble A, ayant des transformées de Laplace $F(s)$ et $G(s)$, respectivement, et des transformées de sumudu $M(u)$ et $N(u)$, respectivement. Alors la transformée de Sumudu de la convolution de f et g,*

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t)g(t-\tau)d\tau$$

est donnée par

$$\mathcal{S}\{(f * g)(t)\} = uM(u)N(u) \tag{2.18}$$

Preuve. *Tout d'abord, rappelons que la transformée de Laplace $(f*g)$ est donnée par*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$$

Maintenant, par la relation de dualité,

$$\mathcal{S}\{(f * g)(t)\} = \frac{1}{u}\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}$$

puisque,

$$M(u) = \frac{F(\frac{1}{u})}{u}; \qquad N(u) = \frac{G(\frac{1}{u})}{u}$$

la transformée de Sumudu $(f * g)$ est obtenue comme suit :

$$\mathcal{S}\{(f * g)(t)\} = \frac{F(\frac{1}{u}) \times G(\frac{1}{u})}{u}$$

$$= u\frac{F(\frac{1}{u})}{u}\frac{G(\frac{1}{u})}{u}$$

$$= uM(u)N(u)$$

.

$f(t)$	$\mathbb{S}\Big(f(t)\Big)$
1	1
t	u
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, ...$	u^{n-1}
e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
te^{at}	$\frac{u}{(1-au)^2}$
$\frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt}), a \neq b$	$\frac{u}{(1-au)(1-bu)}$
$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt}), a \neq b$	$\frac{1}{(1-au)(1-bu)}$
$\cos wt$	$\frac{1}{1+w^2u^2}$
$\frac{1}{w}(\sin wt + wt \cos wt)$	$\frac{u}{(1+w^2u^2)^2}$
$H(t-a)$	$e^{\frac{-a}{u}}$
$\delta(t-a)$	$\frac{1}{u}e^{\frac{-a}{u}}$
$\frac{1}{t} \sin wt$	$\frac{1}{u} \arctan wu$

FIGURE 2.1 – Transformée de Sumudu de quelques fonctions

2.6 Transformée inverse de Sumudu

Bien qu'il est bon de s'appuyer sur les listes et les tableaux de transformations de fonctions usuelles et celles combinées, pour trouver les solutions des équations différentielles comme dans l'exemple précédent, il est indispensable pour la pratique des ingénieurs et mathématiciens appliqués de disposer de formules pour la transformation inverse . Heureusement, la dualité $S - L$

$$G(\frac{1}{u}) = sF(s); \quad F(\frac{1}{u}) = uG(u)$$

fournit un meilleur outil. En effet, la dualité Sumudu-Laplace peut intervenir pour définir la transformée de Sumudu inverse dans le cadre complexe.

Théorème 2.6.1 *[3] Soit* $G(u)$ *la transformée de Sumudu de* $f(t)$ *telle que :*
(i)$\frac{G(1/s)}{s}$ *est une fonction méromorphe, ayant des singularités* $Re(s) < \gamma$
(ii) il existe une zone circulaire de Γ *avec le rayon* R *et des constantes positives,* M *et* K*, avec*

$$\mid \frac{G(1/s}{s} \mid < MR^{-K}$$

alors la fonction $f\ (t)$*, est donnée par*

$$\mathbb{S}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\infty} e^{st}G(1/s)\frac{ds}{s} = \sum res[e^{st}\frac{G(1/s)}{s}] \tag{2.19}$$

Idée de la preuve du théorème :
Rappellons qu'une fonction méromorphe f *est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction* f*.*

Soit $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *et* $G(u) = S\{f(t)\}$ *les transformées de Laplace et de Sumudu de* $f(t)$ *respectivement, alors par la formule d'inversion pour la transformée de Laplace dans le domaine complexe, pour* $t > 0$*, la fonction* $f(t)$ *est donnée par*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{\gamma-\imath\infty}^{\gamma+\infty} e^{st}F(s)ds$$

où $s = x + iy$. L'intégration est réalisée dans le plan complexe le long d'une ligne verticale $s = \gamma$ avec γ choisi arbitrairement. Dans la pratique, l'intégrale précédente est calculée sur un contour approprié dit contour de Bromwich (Voir [12]).

Pour $G(u) = \dfrac{1}{1+u}$, sa transformée inverse est donnée par la somme des résidus de la fonction $e^{ut}\dfrac{G(\frac{1}{u})}{u} = \dfrac{e^{ut}}{(u+1).}$ qui a un pôle au point $u = -1$. La valeur du résidu

$e^{-t} = S^{-1}(\dfrac{1}{1+u}) = res\left(\dfrac{e^{ut}}{(u+1).}\right) = u \to -1 lim(1+u)\dfrac{e^{ut}}{(u+1).}$

Le théorème d'unicité de la transformée de Laplace est encore necéssaire pour garantir l'existence du Sumudu inverse, à savoir la continuité de la fonction f :

Exemple 2.5 *Soit f la fonction identique à 1 et g la fonction définie par :*

$$g(t)=\begin{cases} 1 & si \quad 0 < t < 3 \\ -8 & si \quad t = 3 \\ 1 & si \quad t > 3 \end{cases}$$

Il est clair que $S(f) = S(g)$ bien que $f \neq g$.

2.7 Applications aux équations différentielles

Considérons l'équation différentielle $\frac{dx}{dy} + y = f(t)$,où $y = 0$ à $t = 0$ et f(t) est une fonction échelon unité.
La transformation de la Sumudu de l'équation est

$$\frac{Y(u) - y(0)}{u} + Y(u) = F(u)$$

La résolution de $Y(u)$, nous obtenons

$$Y(u) = \frac{F(u)}{(\frac{1}{u}) + 1} + \frac{y(0)}{u+1}$$

Puisque f(t) est une étape de l'unité $F(u) = 1$*. Autre y (0) = 0.*
Son remplacement par ces

$$Y(u) = \frac{1}{(1/u)+1} = 1 - \frac{1}{u+1}$$

le développement en séries donne

$$Y(u) = 1 - (1 - u + u^2 - u^3 + ...)$$

et la Transformation inverse de Sumudu donne

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - (1 - t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ...) \\ &= 1 - exp(-t) \end{aligned}$$

Dans le problème ci-dessus, $Y(u)$ *a été inversé à l'aide de la règle d'inversion simple pour la transformation de Sumudu de séries entières et des polynômes. Il est également possible d'inverser à l'aide de tables de transformations.*

Exemple 2.6 *Soit à résoudre l'équation différentielle*

$$y^{''}(t) - 3y^{'}(t) + 2y(t) = \delta + \delta^{''}(t) + \sin(t)H(t) \tag{2.20}$$

où $H(t)$ *est la fonction de Heaviside et* δ *est la fonction delta de Dirac.*
En utilisant la transformée de Sumudu pour l'équation (2.20). On a :

$$Y(u) = \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u(1-3u+2u^2)} + \frac{(2u^2+u)}{(u^2+1)(1-3u+2u^2)} \tag{2.21}$$

Pour obtenir la solution de l'équation différentielle, on applique la transformée inverse, mais avant celà, on fait un changement de variable en posant $u = \frac{1}{s}$*. L'équation (2.21) devient*

$$Y(\frac{1}{s}) = \frac{s^3 e^s}{(s^2-3s+2)} + \frac{s(s^2+2)}{(s^2-3s+2)}$$

Alors, le théorème de résidus, on obtient la solution de la forme :

$$y(t) = (-\frac{3}{2}e^{t} + \frac{6}{5}e^{2t} + \frac{1}{10}(3\cos(t) + \sin(t)))H(t) + \delta(t+1) + (4e^{2t+2} - e^{t+1})H(t+1)$$

Chapitre 3

Applications de la Transformée de Sumudu

3.1 Application à un problème de la production

Dans ce chapitre, nous utilisons la transformée de Sumudu pour traiter un problème de dévaluation de la production, d'abord examiné par Kalla et al [7]. Ce problème porte sur la variation de la production d'un produit avec le temps, lorsque, les pertes sont connues ou pré éstimées, le montant total des produits doit rester constant. Le modèle suivant peut facilement adopté à des modèles de croissance démographique pondéré, à des processus de naissance-morbidité à des problèmes de severage.

Si au point $t = 0$*, le montant inutilisé d'un produit est* M*, et à cause de l'exposition du montant* M *du produit à une fonction de dévaluation* $f(t)$*, for* $t \geq 0$*, on souhaite équilibrer la production de cet article par une fonction afin de préserver le montant* M *en tout temps.*
On peut suupposer que la fonction de dévaluation satisfait la condition :

$$\int_0^\infty f(t)dt = 1. \tag{3.1}$$

Par conséquent, le montant des pertes dû à la dévaluation en l'absence de production $(g(t) = 0, t > 0)$ *est donné par :*

$$\int_0^\infty Mf(t)dt = M.$$

Le montant d'un produit produit en l'absence de dévaluation ($f(t) \equiv 0$) dans un intervalle de temps $[x, x+\Delta x]$ est donné par $g(x)\Delta x$. En présence de dévaluation, le montant du produit en perte dans un moment ultérieur t est donné par $g(x)f(t-x)\Delta x$ et la perte totale depuis le démarrage de la production jusqu'au temps t est donnée par l'intégrale (– de Convuolution)

$$(f * g)(t) = \int_0^t g(x)f(t-x)dx \tag{3.2}$$

Par conséquent, si la production et la dévaluation sont simultanément affectées par le temps t, la différence nette de la production et de la perte doit être égale à $Mf(t)$. C'est à dire,

$$\int_0^t g(x)dx - \int_0^t f(t-x)g(x)dx = Mf(t) \tag{3.3}$$

Kalla et al [7] ont résolu le problème (3.3) pour la fonction de dévaluation

$$f(t) = \frac{(a)^k}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{-at} \tag{3.4}$$

avec a et k sont des constantes, et ont aussi obtenu la fonction de production

$$g(t) = M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^{nk}}{\Gamma(nk)} t^{nk-n-1} e^{-at} L^{nnk-n-1}(-at), \tag{3.5}$$

où $L_n^p(x)$ sont les polynômes de Laguerre généralisés [8].
Pour résoudre l'équation intégrale (3.3), Belgacem et al. [2] utilisent la transformée de Sumudu sur le produit de convolution décrit dans le théorème 2.5.1.

Maintenant, pour résoudre le problème de production, Posons $G(u)$ et $F(u)$ les transformées de Sumudu de la production souhaitée $g(t)$ et de la fonction de dépreciation $f(t)$, respectivement, l'équation (3.3) devient

$$uG(u) - uG(u)F(u) = MF(u) \tag{3.6}$$

Par conséquent, nous avons

$$G(u) = \frac{MF(u)}{u[1 - F(u)]} \tag{3.7}$$

Soit $f(t) = e^{-t}$ *, Alors*

$$F(u) = \frac{1}{1+u} \tag{3.8}$$

$$G(u) = \frac{M(1/(1+u))}{u[1 - 1/(1+u)]} = \frac{M}{u^2} \tag{3.9}$$

Par conséquent, à partir de l'équation (3.9),

$$\frac{M}{u} = uG(u) = S\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right) \tag{3.10}$$

Par conséquent, par la linéarité de la transformée de Sumudu $S\left(\int_0^t g(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{u}$ *et* $\int_0^t g(\tau)d\tau = \delta(t)$ *, nous déduisons que*

$$\int_0^t g(\tau)d\tau = M\delta(t) \tag{3.11}$$

A présent, sur la base des équations (3.4) et (3.5), la fonction de dévaluation établie par Belgacem (dans le même article cité dans cette section) coincide avec celle de Kalla et al donnée dans [3]*, pour* $a = k = 1$ *. Par conséquent, sa solution* $g(t)$ *doit correspondre à la leur pour les mêmes valeurs.*

Pour $f(t) = e^{-t}$ *, nous prenons la fonction de production*

$$g(t) = \frac{e^{-t}}{t}\sum_{n=1}^{\infty} nL_n^{-1}(-t), \tag{3.12}$$

où les L_n^{-1} *sont les polynômes de Laguerre généralisé. En revanche,* $g(t)$ *est devra satisfaire l'équation (3.11) De ce fait, nous devons avoir*

$$\delta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\tau} L_n^{-1}(-\tau) d\tau \tag{3.13}$$

Du moment où il existe la notion de la dérivé généralisée pour $\delta(t)$, alors $g(t)$, ainsi définie dans (3.12), est un résultat suspect probablement.

3.2 Transformée de Sumudu et les EDO

On Considère l'équation différentielle à coéficients non constants

$$tf''(t) - tf'(t) + f(t) = 2; f(0) = 2, f'(0) = -1. \tag{3.14}$$

Solution par la transformée de Laplace : *En utilisant la transformée de Laplace et tenant compte des conditions initiales on a :*

$$F'(s) + (\frac{2}{s})F(s) = -\frac{2}{s^2(s-1)}$$

On obtient alors la solution :

$$F(s) = -\frac{\ln(s-1)}{s^2} + \frac{c}{s^2}$$

où c est une constante
La transformée inverse nous fournit :

$$f(t) = 2 - 2\iota\pi t + ct. \tag{3.15}$$

Résolution par la transformée de Sumudu : *En utilisant la transformée de Sumudu pour l'équation (3.14) on obtient :*

$$F\prime(u) - \frac{F(u)}{u} = -\frac{2}{u}$$

par l'application de la même technique utilisée plus haut, on obtient la solution de la forme

$$F(u) = 2 + au \tag{3.16}$$

où a est une constante. L'application de la transformée inverse de Sumudu pour l'équation (3.16) par rapport à u donne :

$$f(t) = 2 + at \tag{3.17}$$

Notons que si on compare les deux équations (3.15) et (3.17), on voit la solution donnée par la transformée de Laplace dans le domaine complexe domain est celle fournie par la transformée de Sumudu dans le domaine des réels. Ceci nous amène à dire si la solution existe par la transformée de Sumudu, elle devra aussi exister par la transformée de Laplace.

Conclusion

La transformée de Sumudu représente un outil mathématique capital dans la résolution dans les problèmes économiques, d'engineering en général. Bien que cela représente notre sujet d'étude, on devait passer par la transformée de Laplace connue par tous et dont les propriétés sont trés pratiques en éléctronique et en calcul fonctionnel et formel. Ce que nous avons appris sur la transformée de Laplace nous a été utile dans la suite de notre travail. On se rend compte que les applications des mathématiques sont de plus en plus rigoureuses.

Nous n'avions pas l'idée de comparer les deux transformations, bien qu'une petite remarque a été glissée en fin du dernier chgapitre. Etudier les transformations intégrales et voir leurs portées est un élément essentiel à conclure. Chercher des documents sur le Sumudu n'etait pas une tâche facile, puisque la théorie est encore jeune, et plusieurs axes sont à inverstiguer. La transformées de Sumudu floue est née pour reconstruire des solutions des équations differentielles (EDP aussi) floues, les équations differentilleles fractionnaires sont aussi examinées par les transformations intégrales.

Avec l'espoir que ce mémoire, me soit bénéfique, sur le plan formation aussi bien que sur le devenir de ma carrière. Que ce travail sera utile pour d'autres étudiants.

Bibliographie

[1] Asiru, M.A. Further properties of the Sumudu transform and its application. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 2002, 33, 441Ű449.

[2] Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., and Shyam L. Kalla. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations .Mathematical Problems in Engineering. Volume 2003 (2003), Issue 3, Pages 103-118

[3] Belgacem, F.B.M. ; Karaballi, A.A. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications. Int. J. Stoch. Anal. 2006, 2006, doi :10.1155/JAMSA/2006/91083.

[4] A.M. Cohen. Numerical Methods for Laplace Transform Inversion. Springer 2007

[5] G. Cormier. La transformée De Laplace. http ://www8.umoncton.ca/umcm-cormier-gabriel/Asservissements/GELE5313-Notes2.pdf

[6] Collectif. Cours d'Analyse 4, EPS Tlemcen, http ://www.epst-tlemcen.dz/docs/cours/math/S4/Chap-2-analyse42015.pdf

[7] S. L. Kalla, L. Viloria, and S. Conde, On an integral equation associated with a production problem, Kyungpook Math. J. 19 (1979), no. 1, pp. 135Ű147.

[8] T.S Chihara. An introduction to orthogonal polynomials Mathematics and Its Applications, Vol. 13, Gordon and Breach, NY (1978)

[9] Watugala, G. K. Sumudu transform : a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 24 (1993), no. 1, 35–43

[10] Weerakoon, S. Application of Sumudu transform to partial differential equations. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1994, 25, 277Ű283.

[11] Weerakoon, S. Complex inversion formula for Sumudu transform. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1998, 29, 618Ű621.

[12] D. V. Widder, The Laplace Transform. Dover Publications, 2011 (ISBN 048647755X)