République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Problème aux limites pour les equations differentielles ordinaires

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse géométrie et application

par

Fatima **B**.elabdli[1]

Sous la direction de

Dr M. Belmekki

Soutenue le Juin 2016 devant le jury composé de

M. H.Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. M.Belmekki	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. O.Bennihi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. H.Abbess	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail :mathfatima25@yahoo.fr

Table des matières

Introduction

Une équation différentielle linéaire est un cas particulier des équations différentielles pour lequel on peut appliquer des procédés de superposition de solutions, et exploiter des résultats d'algèbre linéaire. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation de la fonction inconnue. Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations différentielles du second ordre.

Le présent travail est divisé en deux chapitres. Dans le premier chapitre, on donne quelques méthodes générales de résolution pour les équations différentielles linéaires à coefficients variables et à coefficients constants. On dispose de formules de résolution explicites à l'aide d'exponentielle de matrices, la méthode de variation des constantes permet une fois résolue l'équation homogène, de résoudre l'équation complète, il suffit donc d'exhiber un nombre suffisant de solutions indépendantes de l'équation homogène pour la résoudre, on peut tester l'indépendance des solutions à l'aide du wronskien.

L'ensemble des solutions de l'équation générale du second ordre est un espace vectoriel de dimension deux. La solution générale est formée de la somme de la solution générale de l'équation linéaire homogène associée et d'une solution particulière de l'équation considérée.

Dans le deuxiéme chapitre on étudie les problèmes aux limites. Un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution prenant des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution.

Contrairement au problème de Cauchy, où une ou plusieurs conditions en un même endroit sont imposées, auquel le théorème de Cauchy-Lipschitz apporte une réponse générale, les problèmes aux limites sont souvent des problèmes difficiles, et dont la résolution peut à chaque fois conduire à des considérations différentes. Pour la résolution de tels problèmes on introduit la méthode du Tir (Shooting Method).

Pour approfondir ses connaissances, le lecteur pourra consulter les livres [1, 2, 3, 4] et les références qu'ils contiennent.

Chapitre 1

Equations différentielles linéaires du second ordre

1.1 Equations à coefficients variables

On considère l'équation différentielle de la forme :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \tag{1.1}$$

où, p, q et f sont des fonctions continues de t.
A l'équation (1.1) on associe l'équation homogène suivante :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{1.2}$$

Le problème de Cauchy ou problème à valeurs initiales consiste en la recherche parmis les solutions de l'équation (1.1) celles vérifiants les conditions initiales suivantes :

$$x(t_0) = \alpha, \ x'(t_0) = \beta \tag{1.3}$$

t_0, α et β sont donnés.

Sans perte de généralité, on peut prendre $t_0 = 0$.

On note par $\mathcal{S}$ l'espace des solutions de (1.3), et on a la proposition suivante :

Proposition 1.1. *$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension* 2.

Preuve.
$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
En effet.
Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation (1.2), il est alors facil de vérifier que $c_1x_1 + c_2x_2$ est elle aussi solution de (1.2) pour toutes constantes c_1 et c_2.
Montrons maintenant que $\mathcal{S}$ est de dimension 2.
Soient x_1 , x_2 deux solutions de (1.2) vérifiants les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0$$

et

$$x_2(0) = 0, \quad x_2'(0) = 1$$

Alors $\{x_1, x_2\}$ est une base de V.
En effet.
Soit $x(t)$ une solution quelconque de (1.2).
Soient $c_1 = x(0)$ et $c_2 = x^{'}(0)$.
On pose

$$\delta(t) = x(t) - c_1x_1(t) - c_2x_2(t)$$

x, x_1 et x_2 sont toutes solutions de (1.2) alors $\delta(t)$ est elle aussi solution de (1.2).
De plus $\delta(t)$ satisfait aux conditions initiales

$$\delta(0) = 0$$

et

$$\delta'(0) = 0.$$

Par suite $\delta(t)$ est identiquement nulle du fait de l'unicité des solutions. d'où :

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

Prouvons que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont linéairement indépendantes.

Supposons que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont linéairement dépendantes, donc il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = 0 \tag{1.4}$$

Or

$$x_1(0) = 1 \text{ et } x_2(0) = 0.$$

On obtient alors

$$c_1 = 0$$

En dérivant (1.4), on obtient :

$$c_1 x_1'(t) + c_2 x_2'(t) = 0 \tag{1.5}$$

D'où

$$c_2 = 0$$

car

$$x_1'(0) = 0 \text{ et } x_2'(0) = 1.$$

La preuve de la proposition est terminée.

1.2 Indépendance linéaire

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation (1.2). On cherche à exprimer de manière simple le fait que x_1 et x_2 soient linéairement indépendants.
Soit $x(t)$ une solution de (1.2) satisfaisant aux conditions

$$x(t_0) = \alpha \; et \; x'(t_0) = \beta.$$

On se propose alors de chercher sous quelles conditions existent-ils des constantes c_1 et c_2 telles que :

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Fixons arbitrairement $t = t_0$. Dans ce cas, on obtient :

$$\alpha = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) \tag{1.6}$$

En dérivant $x(t)$ et en prennant $t = t_0$, on obtient l'équation :

$$\beta = c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) \tag{1.7}$$

En conclusion, (c_1, c_2) sont solutions du système linéaire (1.6)-(1.7).
Or le système (1.6)-(1.7) admet une unique solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

En conclusion, Une condition necessaire et suffisante pour que de telles constantes existent en un point fixé arbitrairement $t = t_0$ est que le déterminant précédent soit non nul.
Dans le paragraphe suivant, on va montrer que cette condition reste valable pour tout t.

Définition 1.1. *On définit le Wronskien de deux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ par le déterminant suivant :*

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

Théorème 1.1. *Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation (1.2). Soit t_0 fixé arbitrairement. Alors*

$$W(x_1, x_2)(t) = W(x_1, x_2)(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

Preuve.
Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation (1.2). On a alors

$$x_1''(t) + p(t)x_1'(t) + q(t)x_1(t) = 0$$

$$x_2''(t) + p(t)x_2'(t) + q(t)x_2(t) = 0$$

On multiplie la 1^{iere} équation par $x_2(t)$ et la 2^{ieme} par $x_1(t)$ et en faisant la différence, on obtient :

$$x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t) + p(t)\left[x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)\right] = 0 \tag{1.8}$$

Or de la définition de $W(x_1,x_2)(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}W(x_1,x_2)(t) = x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t)$$

L'équation (1.8) devient alors :

$$\frac{d}{dt}W(x_1,x_2)(t) + p(t)W(x_1,x_2)(t) = 0 \tag{1.9}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est donnée par :

$$W(x_1,x_2)(t) = W(x_1,x_2)(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right).$$

Corollaire 1.1. *Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation (1.2). Alors*

$$W(x_1,x_2)(t) \neq 0 \text{ pour tout } t$$

si et seulement si, il existe un t_0 tel que

$$W(x_1,x_2)(t_0) \neq 0.$$

Preuve.
On le déduit du théorème précédent et du fait que l'exponentielle n'est jamais nulle.

Ainsi le Wronskien de deux solutions de l'équation (1.2) est identiquement nul à partir du moment qu'il est nul en un certain point t_0. De même, pour montrer que le Wronskien de deux solutions de l'équation (1.2) est non nul, il suffit de montrer qu'il est non nul en un certain point t_0. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation (1.2).*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *x_1 et x_2 forment un système fondamental de solutions.*
2. *x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes.*
3. *En un point t_0 on a $W(x_1,x_2)(t_0) \neq 0$.*
4. *$W(x_1,x_2)(t) \neq 0$, en tout t.*

Pour les équations différentielles à coéficients variables, on ne dispose pas de procédés permettant de déterminer explicitement la solution générale, toute fois si on connait une solution partuclière alors on peut déterminer la solution générale. On a le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Soient $x_1(t)$ une solution de l'équation (1.2). Une solution linéairement indépendante de $x_1(t)$ est donnée par :*

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W(x_1, x_2)(t_0)}{x_1^2(s)} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau\right) ds.$$

La solution générale de l'équation (1.2) est alors donnée par :

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

pour $c_1,\ c_2$ deux constantes arbitraires.

Preuve.
Soit $x_1(t)$ une solution de l'équation (1.2).
D'après la formule du Wronskien, on a :

$$x_2'(t)x_1(t) - x_2(t)x_1'(t) = W(x_1, x_2)(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right)$$

C'est une équation du 1^{er} ordre en x_2.
Pour l'intégrer, divisons tous les termes par $x_1^2(t)$, on a alors :

$$\frac{x_2'(t)x_1(t) - x_2(t)x_1'(t)}{x_1^2(t)} = \frac{W(x_1, x_2)(t_0)}{x_1^2(t)} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \frac{W(x_1, x_2)(t_0)}{x_1^2(t)} \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)$$

Sachant qu'on est entrain de chercher une solution particulière, on peut prendre $x_2(t_0) = 0$.
En intégrant l'équation précédente on obtient :

$$x_2(t) = x_1(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W(x_1, x_2)(t_0)}{x_1^2(s)} \exp\left(-\int_{t_0}^{s} p(\tau)d\tau\right) ds.$$

La solution générale de l'équation (1.2) est alors donnée par :

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

pour $c_1,\ c_2$ deux constantes arbitraires.

Exemple 1.1. *On considère l'équation différenielle suivante :*

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0 \tag{1.10}$$

On remarque que $x_1(t) = t$ est une solution particulière de l'équation 1.10.
Pour $t \neq 1$ et $t \neq -1$, on écrit l'équation 1.10 sous sa forme normale :

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{2}{1-t^2}x = 0 \tag{1.11}$$

Ici

$$p(t) = -\frac{2t}{1-t^2}$$

et

$$q(t) = \frac{2}{1-t^2}$$

En appliquant le Théorème 1.3, on détermine l'autre solution particulière.
Elle est donnée par :

$$x_2(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

D'où la solution générale de l'équation (1.11) :

$$x(t) = c_1 t + c_2\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right)$$

1.3 Equation non homogène

Considérons l'équation différentielle non homogène (1.1) :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t)$$

et son équation homogène associée (1.2) :

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

Théorème 1.4. *La solution générale de l'équation (1.1) est la somme de la solution générale de l'équation (1.2) et d'une solution particulière de l'équation (1.1).*

Preuve.
Soient $\overline{x}(t)$ la générale de (1.2) et $x^*(t)$ une solution particulière de l'équation (1.1).
Considérons la fonction :

$$x(t) = \overline{x}(t) + x^*(t).$$

Montrons d'adord que $x(t)$ est une solution de (1.1).
En effet.

$$\begin{aligned} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) &= (\overline{x}(t) + x^*(t))'' + p(t)\left(\overline{x}(t) + x^*(t)\right)' + (\overline{x}(t) + x^*(t)) \\ &= \left[\overline{x}''(t) + p(t)\overline{x}'(t) + q(t)\overline{x}(t)\right] + \left[x^{*\prime\prime}(t) + p(t)x^{*\prime}(t) + q(t)x^*(t)\right] \end{aligned}$$

Or

$$\overline{x}''(t) + p(t)\overline{x}'(t) + q(t)\overline{x}(t) = 0$$

et

$$x^{*\prime\prime}(t) + p(t)x^{*\prime}(t) + q(t)x^*(t) = f(t)$$

D'où

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t)$$

Par suite $x(t)$ est solution de l'équation (1.1).

Montrons maintenant que $x(t)$ est la solution générale de (1.1), c'est à dire que l'on peut toujours choisir les constantes arbitraires qu'elle contient de maniére à satisfaire les conditions initiales :

$$x(t_0) = \alpha \qquad \text{et} \qquad x'(t_0) = \beta$$

et ce quels que soient t_0, α et β.
$\overline{x}(t)$ est solution de l'équation (1.2), elle se met sous la forme :

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

où x_1 et x_2 sont deux solutions linéairement indépendante de l'équation (1.2) et c_1,c_2 sont des constantes arbitraires.
Par suite $x(t)$ prend la forme :

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + x^*(t)$$

En dérivant $x(t)$ et en prennant $t = t_0$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = \alpha - x^*(t_0) \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) = \beta - x^{*\prime}(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système n'est autre que le Wronskien des solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$ qui est différent de zéro du fait que x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes.
Le système précédent admet donc une unique solution c_1, c_2.
Par suite, $x(t) = \overline{x}(t) + x^*(t)$ est bien la solution générale de l'équation (1.2).
Une conséquence de ce qui précède est que si l'on connait la solution générale de l'équation (1.2), il suffit de trouver une solution particulière de l'équation (1.1).

Dans le paragraphe suivant, on propose une méthode pour déterminer la solution particulière de l'équation (1.1) à partir de la solution générale de l'équation (1.2).

1.4 Méthode de variation des constantes

Soient $x_1(t)$, $x_2(t)$ deux solution linéairement indépendantes de l'équation homogène (1.2). On cherche une solution particulière de l'équation (1.1) sous la forme :

$$x^*(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t).$$

En dérivant $x^*(t)$ on a :

$$x^{*\prime}(t) = c_1'(t)x_1(t) + c_1(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2(t) + c_2(t)x_2'(t).$$

Etant donnée qu'on cherche une solution particulière, on peut imposer aux fonctions arbitraires $c_1(t)$ et $c_2(t)$ la condition suivante :

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0. \tag{1.12}$$

On obtient alors :

$$x^{*\prime}(t) = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t)$$

En dérivant, on a :

$$x^{*\prime\prime}(t) = c_1'(t)x_1'(t) + c_1(t)x_1''(t) + c_2'(t)x_2'(t) + c_2(t)x_2''(t).$$

En remplaçant dans l'équation (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} c_1'(t)x_1'(t) + c_1(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2'(t) + c_2(t)x_2''(t) &\quad + \\ p(t)\left[C_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t)\right] &\quad + \\ q(t)\left[c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)\right] &\quad = \quad f(t) \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} c_1(t)\left[x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1\right] &\quad + \\ c_2(t)\left[x_2'' + p(t)x_2' + q(t)x_2\right] &\quad + \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) &\quad = \quad f(t). \end{aligned}$$

Les deux termes entre crochets sont nuls car $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont solutions de (1.2).
D'où :

$$c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = f(t) \tag{1.13}$$

Les fonctions $c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ sont solutions du système d'équations (1.12)-(1.13). Elles sont déterminées de manière unique car le déterminant du système (1.12)-(1.13) n'est autre que le Wronskien $W(x_1, x_2)(t)$ qui est différent de zéro.

$c_1'(t)$ et $c_2'(t)$ sont données par les formules suivantes :

$$c_1'(t) = -\frac{x_2(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)$$

$$c_2'(t) = \frac{x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)$$

Par intégration, on obtient :

$$c_1(t) = -\int \frac{x_2(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)dt$$

et

$$c_2(t) = \int \frac{x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)dt$$

La solution particulière prend alors la forme suivante :

$$x^*(t) = -x_1(t) \int \frac{x_2(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)dt + x_2(t) \int \frac{x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} f(t)dt \tag{1.14}$$

Exemple 1.2. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$x^{''} - 5x^{'} + 6x = e^t$$

on peut vérifier que $x_1(t) = e^{3t}$ et $x_2(t) = e^{2t}$ sont deux solution linéairement indépendantes. Le Wronskien de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned} W(x_1,x_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{2t} \\ 3e^{3t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} \\ &= -e^{5t} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Pour détèrminer une solution particulière, on applique la formule (1.14), on obtient alors :

$$x^*(t) = \frac{1}{2}e^t$$

La solution générale est alors donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t + c_1e^{3t} + c_2e^{2t}.$$

1.5 Equations à coefficients constants

On considère l'équation différentielle à coefficients constants suivante :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \tag{1.15}$$

et l'équation homogène associée :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \tag{1.16}$$

où a, b et c sont des constantes.
Sachant que la fonction e^t est invariante par dérivation, On cherche s'il existe r tel que la fonction

$$\psi(t) = e^{rt}$$

soit solution de (1.16).

En dérivant la fonction ψ deux fois et en remplaçant dans l'équation (1.16), on obtient :

$$\left(ar^2 + br + c\right)e^{rt} = 0.$$

Or e^{rt} n'est jamais nul, donc r est une racine de l'équation algébrique :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

On a dès lors la définition suivante

Définition 1.2. *L'équation algébrique :*

$$ar^2 + br + c = 0.$$

est dite équation caractéristique de l'équation différentielle

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

Proposition 1.2. *Si r_1 et r_2 sont deux racines distinctes de l'équation caractéristique alors*

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

est la solution générale de l'équation (1.16), où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Preuve.
Soient r_1 et r_2 deux racines distinctes de l'équation caractéristique alors

$$x_1(t) = e^{r_1 t}$$

et

$$x_2(t) = e^{r_2 t}$$

sont solutions de l'équation différentielle (1.16).
Or

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} \\ &= (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)t} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de (1.16).
D'après le Théorème 1.2, la solution générale de l'équation (1.16) s'écrit sous forme :

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Proposition 1.3. *Si r est une racine double de l'équation caractéristique alors :*

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$$

est la solution générale de l'équation (1.16).

Preuve.
Si r est une racine de l'équation caractéristique alors

$$x_1(t) = e^{rt}$$

est solution de (1.16). Montrons que dans ce cas

$$x_2(t) = te^{rt}$$

est elle aussi solution de (1.16). En effet.

$$\begin{aligned} ax_2''(t) + bx_2'(t) + cx_2(t) &= \left(ar^2 + br + c\right) te^{rt} + (2ar + b)\, e^{rt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car r est racine de $ar^2 + br + c = 0$ et que $2ar + b = 0$ du fait que r est une racine double.

D'après le Théorème 1.2, la solution générale de l'équation (1.16) s'écrit sous forme :

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 1.3. *: Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$x'' - 7x' + 12x = 0$$

l'équation caractéristique est :

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

Les racines sont :

$$r_1 = 3 \quad et \quad r_2 = 4$$

Les racines sont différentes donc d'après la proposition 1.2, la solution générale est donnée par :

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t}$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 1.4. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$x'' - 6x' + 9x = 0$$

l'équation caractéristique est :

$$r^2 - 7r + 12 = (r - 3)^2 = 0$$

On a une racine double :

$$r = 3$$

d'après la proposition 1.3, la solution générale est donnée par :

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t}.$$

Pour la suite, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions réelles de la variable réelle t.*
Si la fonction complexe de la variable réelle t

$$\psi(t) = u(t) + iv(t)$$

est solution de l'équation différentielle (1.16). Alors $u(t)$ et $v(t)$ sont elles aussi solutions de l'équation différentielle (1.16).

Preuve.
Supposons que ψ est solution de l'équation (1.16). Alors

$$a\,[u(t) + iv(t)]'' + b\,[u(t) + iv(t)]' + c\,[u(t) + iv(t)] = 0$$

En arrangeant l'équation, on a :

$$[au''(t) + bu'(t) + cu(t)] + i\,[av''(t) + bv'(t) + cv(t)] = 0$$

D'où forcement

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0$$

et

$$av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0$$

Proposition 1.4. *Si les racines de l'équation caractéristique sont complexes conjuguées :*

$$r_1 = \mu + i\omega \ \text{ et } r_2 = \mu - i\omega$$

où $\mu,\ \omega \in \mathbb{R}$ et $\omega \neq 0$. Alors la solution générale de l'équation (1.16) est donnée par

$$x(t) = e^{\mu t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Preuve.

Si $r_1 = \mu + i\omega$ et $r_2 = \mu - i\omega$ sont des racines de l'équation caractéristique alors la solutions particulière prend la forme :

$$x_1(t) = e^{(\mu+i\omega)t} = e^{\mu t}\cos(\omega t) + ie^{\mu t}\sin(\omega t)$$

x_1 est une fonction complexe de la variable réelle t.

D'après le Lemme 1.1, les fonctions réelles de la variable réelle t suivantes :

$$u(t) = e^{\mu t}\cos(\omega t)$$

et

$$v(t) = e^{\mu t}\sin(\omega t)$$

sont elles aussi solutions de l'équation différentielle (1.16).

Montrons maintenant que $u(t)$ et $v(t)$ sont linéairement indépendantes.
En effet.
Le Wronskien de $u(t)$ et $v(t)$ est donné par :

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2)(t) &= e^{\mu t} \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \mu\cos(\omega t) - \omega\sin(\omega t) & \mu\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t) \end{vmatrix} \\ &= \omega e^{\mu t} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Par suite, d'après le Théorème 1.2, la solution générale de l'équation (1.16) s'écrit sous forme :

$$x(t) = e^{\mu t}(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t)$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

Exemple 1.5. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$x'' + 2x' + 2x = 0$$

l'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

Les racines sont :

$$r_1 = -1 + i,\ r_2 = -1 - i$$

Les racines sont complexes conjuguées, d'après la proposition 1.4 la solution prend la forme :

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

où $c_1,\ c_2$ *sont des constantes arbitraires.*

Chapitre 2

Problèmes aux limites pour les équations différentielles linéaires

2.1 Introduction

On considère les équations différentielles du second ordre de type :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \tag{2.1}$$

et l'équation homogène associée :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{2.2}$$

où p et q sont des fonctions continues.

Le problème aux limites consiste en la recherche des solutions de l'équation 2.1 qui vérifient les conditions suivantes :

$$x(t_0) = \alpha \text{ et } x(t_1) = \beta. \tag{2.3}$$

où $t_0,\ t_1,\ \alpha$ et β sont donnés.

Les conditions 2.3 sont dites conditions aux limites de Dirichlet.
D'autres conditions peuvent être utilisées, dont les suivantes :

Conditions de Neumann :

$$x'(t_0) = \alpha \text{ et } x'(t_1) = \beta.$$

Conditions mixtes :

$$c_1 x'(t_0) + c_2 x(t_0) = \alpha \text{ et } c_3 x'(t_1) + c_4 x(t_1) = \beta.$$

De manière générale, on considère des conditions aux limites de la forme :

$$g(x(t_0)) = 0, \ g(x(t_1)) = 0.$$

Les problèmes aux limites ont un comportement différent par rapport aux problèmes à valeurs initiales. Bien que le problème à valeurs initiales admet une unique solution, le problème aux limites peut admettre une unique solution, peut ne pas admettre de solution et peut aussi admettre une infinité de solutions. On propose les exemples suivants :

Exemple 2.1. *Considérons l'équation différentielle :*

$$x''(t) + x(t) = 1$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = 0, \ x(\pi) = 0$$

La solution générale de l'équation est donnée par :

$$x(t) = 1 + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

La condition $x(0) = 0$ implique $c_2 = -1$ et la condition $x(\pi) = 0$ implique $c_2 = 1$.
Ce qui impossible et le problème aux limites n'admet pas de solution.

Exemple 2.2. *Considérons l'équation différentielle :*

$$x''(t) + x(t) = 1$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = 0, \ x(\frac{\pi}{2}) = 0$$

La solution générale de l'équation est donnée par :

$$x(t) = 1 + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

La condition $x(0) = 0$ *implique* $c_2 = -1$ *et la condition* $x(\frac{\pi}{2}) = 0$ *implique* $c_1 = -1$.
Le problème aux limites admet donc une unique solution donnée par :

$$x(t) = 1 - \sin(t) - \cos(t)$$

Exemple 2.3. *Considérons l'équation différentielle :*

$$x''(t) + x(t) = \sin 2t$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = 0, \;\; x(\pi) = 0$$

La solution générale de l'équation est donnée par :

$$x(t) = -\frac{1}{3}\sin 2t + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$$

La condition $x(0) = 0$ *implique* $c_2 = 0$ *et la condition* $x(\pi) = 0$ *implique* $c_2 = 0$
La solution s'écrit alors :

$$x(t) = -\frac{1}{3}\sin 2t + c_1 \sin(t)$$

où c_1 *est une constante arbitraire, par suite le problème aux limites admet une infinité de solutions.*

2.2 Equations linéaires à coefficients constants

On considère une équation différentielle à coefficients constants de type :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0 \tag{2.4}$$

où $a,\ b$ et c sont des Constantes réelles.
L'équation est soummise à des conditions aux limites de type de Dirichlet :

$$x(t_0) = \alpha \text{ et } x(t_1) = \beta. \tag{2.5}$$

où $t_0,\ t_1,\ \alpha$ et β sont donnés.
L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.6}$$

Dans la suite, on va montrer que l'existence des solution dépend des racines de l'équation 2.6, mais aussi des données du problème : $t_0,\ t_1,\ \alpha$ et β.

Proposition 2.1. *Si l'équation caractéristique (2.6) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors le problème aux limites (2.4)-(2.5) admet une unique solution quelque soient les réels α et β.*

Preuve.
Si l'équation caractéristique (2.6) admets deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors la solution de l'équation différentielle (2.4) s'écrit :

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

La première condition aux limites $x(t_0) = \alpha$ implique :

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = \alpha$$

La deuxième condition aux limites $x(t_1) = \beta$ implique :

$$c_1 e^{r_1 t_1} + c_2 e^{r_2 t_1} = \beta$$

Le problème aux limites admet donc une solution si et seulement si c_1 et c_2 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = \alpha \\ c_1 e^{r_1 t_1} + c_2 e^{r_2 t_1} = \beta \end{cases} \tag{2.7}$$

Le système (2.7) est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ e^{r_1 t_1} & e^{r_2 t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Le système (2.7) admet une solution unique pour tout α, β si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_1$ est inversible, où

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ e^{r_1 t_1} & e^{r_2 t_1} \end{bmatrix}$$

Or le déterminant de $\mathcal{M}_1$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ e^{r_1 t_1} & e^{r_2 t_1} \end{vmatrix} \\ &= e^{r_1 t_0} e^{r_2 t_1} - e^{r_1 t_1} e^{r_2 t_0} \\ &= e^{r_1 t_0} e^{r_2 t_0} \left(e^{r_2 (t_1 - t_0)} - e^{r_1 (t_1 - t_0)} \right) \\ &= e^{(r_1 + r_2) t_0} \left(e^{r_2 (t_1 - t_0)} - e^{r_1 (t_1 - t_0)} \right). \end{aligned}$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante, alors

$$\Delta \neq 0.$$

D'où le système (2.7) admet une unique solution (c_1, c_2).
Par suite le problème aux limites (2.4)-(2.3) admet une unique solution et ce quelque soit le choix de α et β.

Proposition 2.2. *Si l'équation caractéristique (2.6) admet une racine réelle double $r_1 = r_2 = r^*$. Alors le problème aux limites (2.4)-(2.5) admet une unique solution quelque soient les réels α et β.*

Preuve.
Supposons que l'équation caractéristique (2.6) admets une racine réelle double $r_1 = r_2 = r^*$. Alors la solution de l'équation différentielle (2.4) s'écrit :

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{r^* t}$$

La première condition aux limites $x(t_0) = \alpha$ implique :

$$c_1 e^{r^* t_0} + c_2 t_0 e^{r^* t_0} = \alpha$$

La deuxième condition aux limites $x(t_1) = \beta$ implique :

$$c_1 e^{r^* t_1} + c_2 t_1 e^{r^* t_1} = \beta$$

Le problème aux limites admet donc une solution si et seulement si c_1 et c_2 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} c_1 e^{r^* t_0} + c_2 t_0 e^{r^* t_0} = \alpha \\ c_1 e^{r^* t_1} + c_2 t_1 e^{r^* t_1} = \beta \end{cases} \tag{2.8}$$

Le système (2.12) est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} e^{r^* t_0} & t_0 e^{r^* t_0} \\ e^{r^* t_1} & t_1 e^{r^* t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Le système (2.12) admet une solution unique pour tout α, β si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_2$ est inversible, où

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} e^{r^* t_0} & t_0 e^{r^* t_0} \\ e^{r^* t_1} & t_1 e^{r^* t_1} \end{bmatrix}$$

Or le déterminant de $\mathcal{M}_2$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} e^{r^*t_0} & t_0 e^{r^*t_0} \\ e^{r^*t_1} & t_1 e^{r^*t_1} \end{vmatrix} \\
&= t_1 e^{r^*(t_0+t_1)} - t_0 e^{r^*(t_1+t_0)} \\
&= (t_1 - t_0)\, e^{r^*(t_0+t_1)} \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

car $t_0 \neq t_1$.
La matrice $\mathcal{M}_2$ est alors inversible, d'où le système (2.12) admet une unique solution (c_1, c_2). Par suite le problème aux limites (2.4)-(2.5) admet une unique solution et ce quelque soit le choix de α et β.

Proposition 2.3. *Si l'équation caractéristique (2.6) admets deux racines complexes conjugées r et $\overline{r}$. Alors on a trois possibilités :*

1. *Le problème aux limites (2.4)-(2.3) admet une unique solution quelque soient les réels α et β.*
2. *Le problème aux limites (2.4)-(2.3) n'admet pas de solution.*
3. *Le problème aux limites (2.4)-(2.3) admet une infinité de solutions.*

Preuve.
Si l'équation caractéristique (2.6) admets deux racines complexes conjugées

$$r = \mu + i\omega \quad \text{et} \quad \overline{r} = \mu - i\omega$$

Alors la solution générale de l'équation (2.4) s'écrit :

$$x(t) = e^{\mu t}\,(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

La condition $x(t_0) = \alpha$ implique :

$$e^{\mu t_0}\,(c_1 \cos \omega t_0 + c_2 \sin \omega t_0) = \alpha.$$

La condition $x(t_1) = \beta$ implique :

$$e^{\mu t_1} \left(c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1\right) = \beta.$$

Le problème aux limites admet donc une solution si et seulement si c_1 et c_2 sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\mu t_0} \left(c_1 \cos \omega t_0 + c_2 \sin \omega t_0\right) = \alpha. \\ e^{\mu t_1} \left(c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1\right) = \beta. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Le système (2.12) admet une solution unique pour tout $\alpha,\ \beta$ si et seulement si la matrice $\mathcal{M}_3$ est inversible, où

$$\mathcal{M}_3 = \begin{bmatrix} e^{\mu t_0} \cos \omega t_0 & e^{\mu t_0} \sin \omega t_0 \\ e^{\mu t_1} \cos \omega t_1 & e^{\mu t_1} \sin \omega t_0 \end{bmatrix}$$

Or le déterminant de $\mathcal{M}_3$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} e^{\mu t_0} \cos \omega t_0 & e^{\mu t_0} \sin \omega t_0 \\ e^{\mu t_1} \cos \omega t_1 & e^{\mu t_1} \sin \omega t_1 \end{vmatrix} \\ &= e^{\mu(t_0+t_1)} \left(\cos \omega t_0 \sin \omega t_1 - \sin \omega t_0 \cos \omega t_1\right) \\ &= e^{\mu(t_0+t_1)} \sin \omega (t_0 - t_1). \end{aligned}$$

Par suite :

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \sin \omega (t_0 - t_1) = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{n\pi}{t_1 - t_0}.$$

Si $\omega \neq \frac{n\pi}{t_1 - t_0}$, alors le problème admet une unique solution, d'où 1).

Si $\omega = \frac{n\pi}{t_1 - t_0}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ alors le problème n'admet pas de solution et s'il en admet une alors il en admet une infinité, d'où 2) et 3).

2.3 Problèmes aux valeurs propres

On cosidère le problème aux limites suivant :

$$x''(t) = \lambda x(t) \tag{2.10}$$

$$x(0) = 0, \quad x(l) = 0, \; l > 0. \tag{2.11}$$

Il est clair que $x(t) \equiv 0$ est solution du problème (2.10)-(2.11) et ce quelque soit le choix de λ. On se demande maintenant s'il existe des valeurs de λ pour lesquelles le problème (2.10)-(2.11) admet des solutions non identiquement nulles. Si de telles valeurs existent, elles sont dites valeurs propres du problème et les solutions correspondantes sont dites fonctions propres.

Théorème 2.1. *Le problème (2.10)-(2.11) admet une infinité de solutions données par :*

$$x_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right), \; n \in \mathbb{N},$$

associées aux valeurs propres :

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \; n \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

1^{er} **Cas :** $\lambda = 0$.

L'équation devient :

$$x''(t) = 0$$

La solution est donnée par :

$$x(t) = c_1 + c_2 t.$$

Les conditions aux limites impliquent :

$$x(0) = c_1 = 0$$

et

$$c_1 + c_2 l = 0,$$

d'où

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Par suite $x(t) \equiv 0$ est la seule solution du problème aux limites (2.10)-(2.11).

2^{me} **Cas :** $\lambda > 0$.

On pose $\lambda = \mu^2,\ \mu > 0$. La solution s'écrit alors :

$$x(t) = c_1 e^{\mu t} + c_2 e^{-\mu t}.$$

Les conditions aux limites impliquent :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\mu l} + c_2 e^{-\mu l} = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Ce système est équivalent à l'équation matricielle :

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice donnée par :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu l} & e^{-\mu l} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de $\mathcal{M}$ est :

$$\Delta = e^{-\mu l} - e^{\mu l} \neq 0$$

pour tout $l \neq 0$, la matrice $\mathcal{M}$ est alors inversible, le système linéaire admet donc une unique solution $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$.
D'où $x \equiv 0$ est la seule solution du problème aux limites (2.10)-(2.11).

3^{me} **Cas :** $\lambda < 0$.

On pose $\lambda = -\mu^2,\ \mu > 0$. La solution générale est donnée par :

$$x(t) = c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t).$$

La condition aux limites $x(0) = 0$ implique $c_1 = 0$.
La condition aux limites $x(l) = 0$ implique

$$c_2 \sin(\mu l) = 0.$$

Par suite, ou bien

$$c_2 = 0$$

et la solution est alors

$$x(t) \equiv 0$$

ou bien

$$\sin(\mu l) = 0$$

ce qui implique

$$\mu l = n\pi,\ n \in \mathbb{N}.$$

D'où l'existence d'une infinité de valeurs de μ qu'on note :

$$\mu_n = \frac{n\pi}{l},\ n \in \mathbb{N},$$

auxquelles correspondent les valeurs propres :

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Les solutions correspondantes sont données par :

$$x_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

La preuve du théorème est terminée.

Considérons maintenant, le problème aux limites suivant :

$$t^2x''(t) - tx'(t) - \lambda x(t) = 0 \tag{2.13}$$

$$x(1) = 0, \quad x(l) = 0, \; l > 1. \tag{2.14}$$

Ce problème est lui aussi un problème de valeurs propres.
Il est clair que la fonction identiquement nulle est solution du problème problème aux limites (2.13)-(2.14) et ce pour toute valeur de λ.

On a le resultat suivant :

Théorème 2.2. *Le problème (2.13)-(2.14) admet une infinité de solutions données par :*

$$x_n(t) = t \sin\left(\frac{n\pi \ln(t)}{\ln(l)}\right), \; n \in \mathbb{N},$$

associées aux valeurs propres :

$$\lambda_n = -1 - \left(\frac{n\pi}{\ln(l)}\right)^2, \; n \in \mathbb{N}.$$

Preuve.
Les fonctions puissance $x(t) = t^r$ ont la caractéristique suivante :

$$x'(t) = rt^{r-1},$$

qui implique

$$tx'(t) = rt^r.$$

De même

$$x''(t) = r(r-1)t^{r-2},$$

qui implique

$$t^2x''(t) = r(r-1)t^r.$$

En remplaçant dans l'équation (2.13), on obtient :

$$[r(r-1)-r-\lambda]\, x^r = 0.$$

D'où

$$r(r-1)-r-\lambda = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$r^2 - 2r - \lambda = 0. \tag{2.15}$$

Cette dernière équation est dite équation caractéristique associée à l'équation (2.13).
Le descriminant de l'équation (2.15) est donné par :

$$\Delta = 1 + \lambda$$

Cas où $\lambda > -1$.

Si $\lambda > -1$ alors $\Delta > 0$.
L'équation caractéristique (2.15) admet deux racines distinctes :

$$r_1 = 1 + \mu \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - \mu,$$

où

$$\mu^2 = 1 + \lambda.$$

La solution générale est donnée par :

$$x(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

La condition aux limites $x(1) = 0$ implique

$$c_1 + c_2 = 0.$$

La condition aux limites $x(l) = 0$ implique

$$c_1 l^{r_1} + c_2 l^{r_2} = 0.$$

D'où

$$c_1 = c_2 = 0,$$

par suite

$$x(t) \equiv 0$$

est la seule solution du problème (2.13)-(2.14).

Cas où $\lambda = -1$.

Si $\lambda = -1$ alors $\Delta = 0$.
L'équation caractéristique (2.15) admet une racine double :

$$r_1 = r_2 = r^*.$$

Une première solution s'écrit alors :

$$x_1(t) = t^{r^*}$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche la deuxième solution sous forme :

$$x_2(t) = c(t)t^{r^*}$$

En dérivant $x_2(t)$, on obtient :

$$x_2'(t) = c'(t)t^{r^*} + c(t)r^* t^{r^*-1}$$

et

$$x_2''(t) = c''(t)t^{r^*} + 2c'(t)r^* t^{r^*-1} + c(t)r^*(r^* - 1)t^{r^*-2}$$

En remplaçant dans l'équation 2.13, on obtient :

$$c''(t)t^{r^*+2} + c'(t)r^*t^{r^*+1} + [r^*(r^*-1) - r^* - \lambda]\, c(t)t^{r^*} = 0.$$

Sachant que r^* est solution de l'équation caractéristique, on a alors

$$[c''(t)t + c'(t)]\, r^*t^{r^*+1} = 0$$

Or

$$r^*t^{r^*+1} \neq 0,$$

par suite

$$c''(t)t + c'(t) = 0.$$

Posons

$$v(t) = c'(t).$$

$v(t)$ est alors solution de l'équation différentielle

$$tv'(t) + v(t) = 0$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(tv(t))' = 0$$

En intégrant, on obtient

$$tv(t) = k, \quad k \text{ une constante réelle.}$$

Etant donné qu'on cherche une solution particulière, on peut prendre

$$k = 1,$$

d'où

$$v(t) = \frac{1}{t}$$

par suite

$$c(t) = \ln(t).$$

Finalement

$$x_2(t) = t^{r^*} \ln(t).$$

Il est clair que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont linéairement indépendantes.
La solution de l'équation différentielle (2.13) s'écrit alors

$$x(t) = [c_1 + c_2 \ln(t)]\, t^{r^*},$$

où $c_1,\ c_2$ sont des constantes arbitraires.

La condition aux limites $x(1) = 0$ implique $c_1 = 0$.

La condition aux limites $x(l) = 0$ implique

$$[c_1 + c_2 \ln(l)]\, l = 0,$$

par suite

$$c_2 l \ln(l) = 0,$$

ce qui implique

$$c_2 = 0.$$

Ainsi $x(t) \equiv 0$ est la seule solution du problème aux limites (2.13)-(2.14).

Cas où $\lambda < -1$.

Si $\lambda < -1$ alors $\Delta < 0$.
L'équation caractéristique (2.15) admet deux racines complexes conjuguées.

$$r_1 = 1 + i\mu \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - i\mu,\ \mu > 0.$$

où

$$-\mu^2 = 1 + \lambda.$$

La solution s'écrit alors :

$$x(t) = t\,[c_1 \cos(\mu \ln(t)) + c_2 \sin(\mu \ln(t))]\,.$$

La condition aux limites $x(1) = 0$ implique $c_1 = 0$.
La condition aux limites $x(l) = 0$ implique

$$c_2 l \sin(\mu \ln(l)) = 0,$$

étant donné qu'on cherche des solutions non identiquement nulle, on a alors

$$c_2 \neq 0$$

d'où forcément :

$$\sin(\mu \ln(l)) = 0,$$

ce qui implique :

$$\mu \ln(l) = n\pi, \ n \in \mathbb{N}.$$

d'où l'existence d'une infinité de valeurs de μ qu'on note

$$\mu_n = \frac{n\pi}{\ln(l)}$$

par suite

$$\lambda_n = -1 - \left(\frac{n\pi}{\ln(l)}\right)^2.$$

et les solutions correspondantes sont :

$$x_n(t) = t \sin\left(\frac{n\pi \ln(t)}{\ln(l)}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

La preuve du théorème est terminée.

2.4 Equations linéaires à coefficients variables

On considère une équation différentielle à coefficients variables de type :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t) \tag{2.16}$$

où $p,\ q$ et r sont des fonctions continues.

L'équation est soummise à des conditions aux limites de Dirichlet :

$$x(t_0) = \alpha \text{ et } x(t_1) = \beta. \tag{2.17}$$

où $t_0,\ t_1,\ \alpha$ et β sont donnés.

Dans le cas des équations différentielle à coefficients variables on ne dispose pas de solutions linéairement indépendantes, on propose alors une procédure dite méthode de Tir "Shooting method", elle consiste à remplacer le problème aux limites par des problèmes à valeurs initiales.

Considérons les problèmes à valeurs initiales suivants :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t) \tag{2.18}$$

$$x(t_0) = \alpha, \quad x'(t_0) = 0. \tag{2.19}$$

et

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{2.20}$$

$$x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = 1. \tag{2.21}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.3. *Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions respectives des problèmes à valeurs initiales (2.18)-(2.19) et (2.20)-(2.21). Alors :*

1. *La fonction $x(t) = u(t) + \lambda v(t)$ est solution de l'équation différentielle (2.16), où λ est une constante réelle.*

2. *Si $v(t_1) \neq 0$ alors l'unique solution du problème aux limites (2.16)-(2.17) est donnée par :*

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(t_1)}{v(t_1)} v(t).$$

Preuve.

Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions respectives des équations différentielles (2.18) et (2.20). Alors on a :

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = r(t),$$

et

$$v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = 0.$$

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x(t) = u(t) + \lambda v(t)$.
   Montrons que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle (2.16).
   En effet. On a :

$$\begin{aligned} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) &= [u(t) + \lambda v(t)]'' + p(t)\,[u(t) + \lambda v(t)]' \\ &\quad + q(t)\,[u(t) + \lambda v(t)] \\ &= [u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t)] \\ &\quad + \lambda\,[v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t)] \\ &= r(t). \end{aligned}$$

   $x(t)$ est alors solution de (2.16).

2. D'un coté, on a :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= u(t_0) + \lambda v(t_0) \\ &= \alpha + \lambda \times 0 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Cherchons λ de telle sorte que $x(t)$ vérifie la condition aux limites (2.17).
λ doit vérifier alors l'égalité :

$$u(t_1) + \lambda v(t_1) = \beta.$$

Or

$$v(t_1) \neq 0$$

donc

$$\lambda = \frac{\beta - u(t_1)}{v(t_1)}.$$

Ainsi la fonction :

$$x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(t_1)}{v(t_1)} v(t).$$

est l'unique solution du problème aux limites (2.16)-(2.17).

La pruve du théorème est terminée.

Exemple 2.4. *Soit le problème aux limites suivant :*

$$t^2 x''(t) - t x'(t) + x(t) = t, \ 1 < t < l, \tag{2.22}$$

$$x(1) = 1, \quad x(l) = \beta, \ l > 1. \tag{2.23}$$

Considérons les problèmes à conditions initiales

$$t^2 x''(t) - t x'(t) + x(t) = t, \ 1 < t < l, \tag{2.24}$$

$$x(1) = 1, \quad x'(1) = 0, \ l > 1. \tag{2.25}$$

et

$$t^2 x''(t) - t x'(t) + x(t) = 0, \ 1 < t < l, \tag{2.26}$$

$$x(1) = 0, \quad x'(1) = 1, \ l > 1. \tag{2.27}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

dont il admet une racine double :

$$r_1 = r_2 = 1.$$

La solution générale de l'équation (2.26) est :

$$x(t) = c_1 t + c_2 t \ln(t).$$

$c_1,\ c_2$ *sont deux constantes arbitraires.*

On peut vérifier que la fonction

$$x_p(t) = t$$

est une solution particulière de l'équation (2.24).

La solution générale de l'équation (2.24) s'écrit alors :

$$x(t) = c_1 t + c_2 t \ln(t) + t.$$

Les conditions aux limites (2.25) impliquent

$$c_1 = 0 \ \text{et}\ c_2 = -1.$$

La solution du problème (2.24)-(2.25) s'écrit alors :

$$u(t) = -t \ln(t) + t.$$

et les conditions aux limites (2.27) impliquent

$$c_1 = 0 \ \text{et}\ c_2 = 1.$$

La solution du problème (2.26)-(2.27) s'écrit alors :

$$v(t) = t\ln(t).$$

Pour tout $l > 1$, *on a*

$$v(l) = l\ln(l) \neq 0$$

Le théorème 2.3 s'applique et la solution du problème est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \frac{\beta - u(l)}{v(l)} v(t) \\ &= [-t\ln(t) + t] + \frac{\beta + l\ln(l) - l}{l\ln(l)} t\ln(t) \\ &= t + \frac{\beta - l}{l\ln(l)} t\ln(t). \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que $x(t)$ *est solution de l'équation (2.24) et que*

$$x(1) = 1$$

et

$$x(l) = \beta.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires du second ordre. Les problèmes à coefficients constants sont complétement résolus, par contre pour les équations à coefficients varaibles nous ne disposons pas de procédés pour les résoudre explicitement, pour de tels problèmes nous avons proposés la méthode de Tir linéaire (Linear Shooting Method) qui consiste à remplacer le problème d'origine par deux problèmes à valeurs initiales. Cette étude reste valable pour les équations différentielles d'ordre supérieur, ainsi que pour les systèmes d'équations différentielles.

Les problèmes non linéaires n'ont pas étés couverts par cette étude. Ces problèmes ne peuvent être résolus explicitement. Ils nécessitent une étude à par entière. Dans un premier lieu ces équations sont transformées en des équations intégrales grace à l'utilisation des fonctions de Green combinée avec la théorie du point fixe. Dans un deuxième lieu, une étude numérique est entreprise pour résoudre certains problèmes à valeurs initiales, ici on fait appel généralement aux méthodes de Runge-Kutta d'ordre quatre. La méthode du Tir non-linéaire (Non Linear Shooting Method) consiste à remplaçer le problème aux limites par une suite de problèmes à valeurs initiales, la deuxième condition aux limites conduit à une équation non-linéaire qui nécssite elle aussi une étude numérique pour la résoudre, ici on fait appel à la méthode de Newton. Cette étude pourra faire l'objet d'un projet de master.

Bibliographie

[1] Uri M. Ascher, Robert M. M. Mattheij and Robert D. Russell. Numerical solution of boundary value problems of ordinary differential equations. *Classics in applied mathematics* 13. 1995.

[2] Herbert B. Keller. Numerical solutions of two point boundary value problems. *Capital City Press, Montpelier, Vermont* 1990.

[3] Stephen R. Bernfeld, V. Lakshmikantham. An introduction to non linear boundary value problems. *Mathematics in Science and Engineering* 109, 1974.

[4] Dennis G. Zill, Michael R. Cullen. Differential equations with boundary value problems. *BROOKS/COLE* 2009.