

## REMERCIEMENTS

Si nous sommes arrivés jusque là, c'est grâce à mon Dieu qui ma donné la force et la patience afin de suivre mes études et de pouvoir achever ce modeste travail.

Ce travail n'a pas pu être concrétisé sans l'aide généreuse de mon encadreur Dr. Saïd Abbas je le remercie beaucoup et je dois exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour leur aide appréciable et leur sacrifice de son temps, ainsi pour ses précieux et sa grand patience.

Je remercie le membre du jury pour amabilité de juger mon travail.

Je remercie tous les professeurs des départements de mathématique, et en particulier qui ma suivis durant mon cours.

Enfin , je remercie tous ceux ma aidé de près ou de loin, et contribuer à la réalisation de ce travail.

Je suis également très reconnaissante envers ma famille qui s'est constamment préoccupée de m'a scolarité et soutenu pendant toutes mes études universitaires.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>10</b>
1.1	Notations et Définitions . . . . .	10
1.2	Application compactes . . . . .	15
1.3	Lemmes Préliminaires . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Le Problème de Cauchy pour les Equations Différentielles Dis-</b>	
	<b>continues dans Une Algèbre de Banach</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Equation Différentielles Fonctionnelles Discontinues-Le Problème	
	Local . . . . .	21
2.3	Problème de Cauchy avec une Condition Non-locale . . . . .	25
2.4	Exemple . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Equations Différentielles Partielles du Premier Ordre dans une</b>	
	<b>Algèbre de Banach</b>	<b>32</b>
3.1	Introduction . . . . .	32
3.2	Equation Différentielles partielles Fonctionnelles Discontinues-Le	
	Problème Local . . . . .	32
3.3	Le Problème Fonctionnel Partiel Non-local . . . . .	37

---

3.4 Exemple . . . . . 41

# Introduction

Le calcul différentiel et intégral est une branche des mathématiques, développée à partir de l'algèbre et de la géométrie, qui implique deux idées majeures complémentaires :

1. La notion de différentielle, qui établit une relation entre les variations de plusieurs fonctions, ainsi que la notion de dérivées. La vitesse, l'accélération, et les pentes des courbes des fonctions mathématiques en un point donné peuvent toutes être décrites sur une base symbolique commune.

2. Le calcul intégral, qui développe l'idée d'intégration, fait intervenir le concept d'aire sous-tendue par le graphe d'une fonction et inclut des notions connexes comme le volume.

Ces deux concepts définissent des opérations inverses au sens précis défini par les théorèmes fondamentaux du calcul infinitésimal. Ceci veut dire qu'ils ont une priorité équivalente. Cependant l'approche pédagogique habituelle commence par le calcul différentiel.

L'objet de ce mémoire est d'étudier l'existence des solutions de quelques classes d'équations différentielles ordinaires (EDO) et de certaines équations aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre dans une Algèbre de Banach. Beaucoup de ré-

sultats existent dans ce domaine : il est possible de trouver des solutions explicites à ces équations, mais elles ne sont pas nombreuses. La résolution explicite de la plupart des EDO et EDP reste encore un problème ouvert. Les mathématiciens se sont alors tournés vers une étude plus théorique qui permettait de trouver des résultats sur les solutions (existence, unicité par exemple) sans les connaître explicitement. Ce mémoire sera un mélange des deux parce qu'il semble nécessaire de savoir non seulement prouver que des solutions existent et que le cas échéant elles peuvent être unique mais également être capable de résoudre certaines EDO et EDP classiques. Certaines solutions porteront plus d'attention que d'autres, comme les solutions stationnaires (autrement dit indépendantes du temps, si le temps  $t$  est la variable impliquée dans l'EDO). Nous nous intéressons à l'étude analytique de ces solutions, autrement dit la stabilité de ces solutions par rapport à des perturbations dans les conditions initiales. Les EDO et EDP ont des applications dans une très grande variété de domaines physiques, chimiques et biologiques, etc.

Le développement du calcul infinitésimal est attribué à Archimède, Leibniz et Newton. Cependant, lorsque le calcul infinitésimal a été initialement développé, une controverse fut soulevée sur qui en avait la paternité; Leibniz et Newton étant les principaux candidats. La vérité ne sera probablement jamais connue et de toute façon elle importe peu de nos jours. La contribution majeure de Leibniz fut sans conteste son système de notation.

On pense que Newton a découvert plusieurs concepts bien avant Leibniz, mais que ce dernier fut le premier à les publier. Actuellement, on considère que Leibniz et Newton ont développé le calcul infinitésimal indépendamment. Barrow,

Descartes, Fermat, Huygens et Wallis contribuèrent également dans une moindre mesure au développement du calcul infinitésimal. Kowa Seki, un mathématicien japonais contemporain de Leibniz et Newton, a aussi énoncé quelques principes fondamentaux du calcul intégral.

En analyse mathématiques, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy. Dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre de la forme  $y'(t) = f(t, y(t))$ , la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue  $y$ , et prendra la forme d'une équation  $y(t_0) = y_0$ . Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz exigent une certaine régularité de la fonction  $f$ .

Plusieurs papiers ont été consacrés à l'étude des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles avec des conditions initiales locales et non-locales dans des espaces de Banach ; voir par exemple [4, 5], les conditions non-locales de ce type peuvent être appliqués dans la théorie d'élasticité. d'autres résultats sont obtenus dans des Algèbres de Banach ; voir par exemple [3, 7]. Ces dernières années, il y a eu un développement significatif dans les techniques du calcul différentielle dans l'étude des équations différentielles, quelques contributions récentes peuvent être vues dans les ouvrages [1, 2, 8].

Ce mémoire consiste à étudier l'existence des solutions de quelques classes

d'équations différentielles fonctionnelles. Nos résultats sont interprétés comme éclairage et prolongements des résultats précédents de Dawidowski et Kubiacyk obtenus pour les équations différentielles "classiques". Ces résultats sont basés sur des théorèmes de point fixe de Dhage dans une algèbre de Banach.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier Chapitre, nous présentons des notations, des définitions et certaines lemmes préliminaires et théorèmes de point fixe de Dhage.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de du problème de Cauchy pour certaines classes d'équations différentielles discontinues dans une Algèbre de Banach le problème de Cauchy avec condition locale et non-local. Nous utilisons la théorie de point fixe de Dhage pour montrer l'existence et l'unicité des solutions de ces problèmes. On obtient des résultats d'existence et d'unicité pour le problème du premier ordre de Cauchy avec condition locale.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); t \in I = [0, T], T > 0, \quad (1)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

où  $f, g : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues donnée et  $g \neq 0$ .

Ensuite on donnera des résultats d'existence et l'unicité des solutions du problème du premier ordre de Cauchy avec condition non locale suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); t \in I = [0, T], \quad (3)$$

$$u(0) = u_0 + P(u), \quad (4)$$

où  $P : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue donnée.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes classes d'équations différentielles fonctionnelles partielles du Premier Ordre dans une Algèbre de Banach. On obtient des résultats d'existence pour le problème de Cauchy avec condition locale et non-local. On donnera des résultats d'existence et l'unicité des solutions du problème du premier ordre dans une Algèbre de Banach de Cauchy avec condition locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); \quad (t, x) \in J = [0, a] \times [0, b], \quad a, b > 0 \quad (5)$$

$$u(0, x) = \phi(x); \quad x \in [0, b], \quad (6)$$

où  $f, g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données, et  $g \neq 0$ .

Ensuite on donnera des résultats d'existence des solutions du problème de Cauchy avec condition non-locale :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); \quad (t, x) \in J, \quad (7)$$

$$u(0, x) = \phi(x) + Q(u); \quad x \in [0, b], \quad (8)$$

où  $Q : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue donnée.

On achève ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et certaines Théorèmes et Lemmes préliminaires qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

### 1.1 Notations et Définitions

#### 1. Espace de Banach.

**Définition 1.1.1.** *On appelle espace de Banach  $(E, \|\cdot\|_E)$  tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

#### Exemples.

1. L'ensemble des nombres réels muni de la valeur absolue  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  est un espace de Banach. De même, l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , muni du module.
2. Soit  $I := [0, T]$ ;  $T > 0$ . On note  $\mathcal{C}(I) := C(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions

continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .  $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach avec la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in I} |u(t)|.$$

**Définition 1.1.2.** Une fonction  $w : [0, a] \rightarrow E$ ;  $a > 0$  est dite absolument continue, si

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tel que pour toute suite  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-intervalles d'intérieurs

$$\text{disjoints, } \sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |w(b_n) - w(a_n)| < \epsilon.$$

### Propriétés.

1.  $w$  est absolument continue sur  $[a, b]$  si et seulement s'il existe une fonction intégrable  $v$  sur  $[a, b]$  (au sens de Lebesgue) telle que pour tout  $t \in [a, b]$ ,

$$w(t) - w(a) = \int_a^t v(s) ds.$$

2. Si  $w$  est absolument continue sur  $[a, b]$  alors :

- elle est continue sur  $[a, b]$ ,
- elle est à variation bornée (donc dérivable presque partout) sur  $[a, b]$ ,
- elle possède la propriété  $N$  de Luzin : l'image par  $w$  de tout ensemble de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue) est de mesure nulle.

Réciproquement, si  $w$  est continue, à variation bornée et possède la propriété  $N$  de Luzin, alors elle est absolument continue.

Par  $AC(I, \mathbb{R})$  nous dénotons l'espace des fonctions absolument continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$  un espace mesurable, et soit  $\beta_E$  est  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de tribu de  $E$ .

**Définition 1.1.3.** *une fonction  $v : \Omega \rightarrow E$  est dite mesurable si pour tout  $B \in \beta_E$ ,*

$$v^{-1}(B) = \{w \in \Omega : v(w) \in B\} \subset \mathcal{A}.$$

**Définition 1.1.4.** *Soient  $E$  et  $F$  des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . Une fonction  $f : E \rightarrow F$  est dite  $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ -mesurable si la tribu image réciproque par  $f$  de la tribu  $\mathcal{F}$  est incluse dans  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire si :*

$$\forall B \in \mathcal{F}, f^{-1}(B) \in \mathcal{E}.$$

### Exemples.

1. Si  $F$  est l'ensemble des réels et si  $\mathcal{F}$  est sa tribu borélienne, on dira simplement que  $f$  est une fonction mesurable sur  $(E, \mathcal{F})$ .
2. La tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  étant engendrée (par exemple) par l'ensemble des demi-droites de la forme  $]a, \infty[$ , le lemme de transport assure que  $f$  est une fonction mesurable sur  $(E, \mathcal{E})$  si et seulement si l'image réciproque par  $f$  de chacune de ces demi-droites est dans  $\mathcal{E}$ . Par exemple : toute fonction réelle d'une variable réelle qui est monotone est borélienne.
3. Pour les fonctions à valeurs dans la droite achevée  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , un résultat analogue se vérifie avec les intervalles  $]a, \infty]$ ,

Désignons par  $L^\infty(I, \mathbb{R})$ , l'espace de Banach des fonctions mesurables  $u : I \rightarrow$

$\mathbb{R}$  qui sont bornées, équipé de la norme standard,

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : |u(t)| \leq c; \text{ p.p. } t \in I\}.$$

**Définition 1.1.5.** [6] Une fonction  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite Carathéodory si

- (i) La fonction  $t \mapsto f(t, u)$  est mesurable pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,
- (ii) La fonction  $u \mapsto f(t, u)$  est continue pour tout  $t \in I$ .

**Définition 1.1.6.** Une fonction continue  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ouvert  $I \times U$  de  $\mathbb{R}^2$  est dite Lipschitizienne si, pour tout  $u_1, u_2 \in U$ , et  $t > 0$ , il existe  $d > 0$  telle que :

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq d|u_1 - u_2|.$$

De plus, si  $d \leq 1$ , alors  $f$  est dite contractante.

**Exemple 1.1.1.**  $f(t, u) = \frac{2tu(t)}{1+t^2}$ ,  $t \in [0, 3]$  est de type Lipschitz. En effet, Pour tout  $u_1, u_2 \in U$  et  $t > 0$ , nous avons

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq 6|u_1 - u_2|.$$

**Corollaire 1.1.1.** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un ouvert borné  $I \times U$  de  $\mathbb{R}^2$  (la fonction  $f$  et sa dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial u}$  par rapport à  $u$  sont continues dans un borné  $\implies$  bornées), alors  $f$  est Lipschitizienne.

**Définition 1.1.7.** Soit  $E$  une famille d'application  $X \rightarrow Y$  où  $X$  est un espace topologique et  $Y$  un espace métrique. On dit que  $E$  est équicontinue si, pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $x \in X$  il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$  pour tout  $f \in E$  et tout  $y \in V_x$ .

## 2. Algèbre de Banach.

**Définition 1.1.8.** Une Algèbre  $A$  sur un corps commutatif  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , ou simplement une  $\mathbb{K}$ -Algèbre, est une structure algébrique  $(A, +, \bullet, \times)$  telle que :

- (i)  $(A, +, \bullet)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ;
- (ii) La loi  $\times$  est définie de  $A \times A$  dans  $A$  (loi de composition interne);
- (iii) La loi  $\times$  est bilinéaire.

### Exemples.

1. L'ensemble des nombres complexes  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \times)$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre associative et commutative de dimension 2. Une base de l'Algèbre  $\mathbb{R}$  est constituée des éléments 1 et  $i$ .
2. L'ensemble  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$  des matrices carrées d'ordre  $n \geq 2$  à coefficients réels est une  $\mathbb{R}$ -Algèbre associative et non commutative de dimension  $n^2$ .

L'Algèbre de Banach est une des structures fondamentales de l'Analyse fonctionnelle, portant le nom du mathématicien polonais Stefan Banach (1892-1945).

**Définition 1.1.9.** Une algèbre de Banach  $(A, +, \bullet, \times, \|\cdot\|)$  sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , est une  $\mathbb{K}$ -Algèbre associative normée telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit en outre un espace de Banach (i.e. un espace vectoriel normé et complet).

### Exemples.

1. L'ensemble des nombres réels muni de la valeur absolue, de la somme et du produit  $(\mathbb{R}, +, \bullet, \times, |\cdot|)$ , est une algèbre de Banach réelle et unitaire. De même, l'ensemble des nombres complexes, muni du module, de la somme et du produit est une algèbre de Banach complexe et unitaire.

2. Si  $G$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé complet, l'Algèbre des opérateurs linéaires bornés (c'est-à-dire des endomorphismes réels ou complexes continus) de  $G$  est une  $\mathbb{K}$ -Algèbre de Banach (unitaire) pour la norme d'opérateurs correspondante, la somme et la composition d'opérateurs.

Cet exemple concerne notamment les algèbres d'endomorphismes en dimension finie : en particulier,  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  sont des Algèbres de Banach, pour une norme matricielle classique. L'Algèbre  $\ell^\infty(X)$  des fonctions bornées sur un ensemble  $X$  (à valeurs réelles ou complexes), munie de la norme de la convergence uniforme.

3. Dans l'espace de Banach  $(\mathcal{C}, |\cdot|)$ , on définit une multiplication  $\times$  par

$$(u \times v)(t) = u(t)v(t); \quad t \in I.$$

Alors,  $(\mathcal{C}, +, \bullet, \times, |\cdot|)$  est une algèbre de Banach.

## 1.2 Application compactes

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels normés ;  $\Omega$  un ouvert de  $X$ .

**Définition 1.2.1.** *Une application continue  $T : \Omega \subset X \longrightarrow Y$  est dite compacte si  $T(\overline{\Omega})$  est relativement compacte. Elle est dite compactes complètement continue, si l'image de tout sous ensemble borné  $B$  de  $\Omega$  est relativement compacte.*

### Remarques :

- (i) Toute application compacte est complètement continue (car pour tout borné  $B \subset \Omega$  on a  $T(B) \subset T(\overline{\Omega})$ ). la réciproque est vraie si  $\Omega$  est borné.

(ii)  $T : X \longrightarrow Y$  est une application linéaire, avec  $X$  et  $Y$  des espaces Banach ; pour que  $T$  soit compact il suffit que  $T(B(0, 1))$  est précompact. Si l'un au moins des espaces  $X$  ou  $Y$  est de dimension finie, alors  $T$  est compact si et seulement si  $T$  est continu.

### 1.3 Lemmes Préliminaires

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $f \in C(I, \mathbb{R})$ . Une fonction  $u \in C(I, \mathbb{R})$  telle que sa dérivée  $\frac{d}{dt}$  existe et est intégrable sur  $I$  est une solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = f(t); & t \in I, \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}; & t_0 \in I, \end{cases} \quad (1.1)$$

si et seulement si  $u(t)$  vérifie

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds; \quad t \in I. \quad (1.2)$$

**Lemme 1.3.2.** *Soient  $f, g \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , avec  $g \neq 0$ . Une fonction  $u \in C(I, \mathbb{R})$  telle que sa dérivée existe et est intégrable sur  $I$  est une solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); & t \in I = [0, T], \quad T > 0, \\ u(0) = u_0; & u_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.3)$$

si et seulement si  $u(t)$  vérifie

$$u(t) = g(t, u(t)) \left[ \frac{u_0}{g(0, u(0))} + \int_0^t f(s, u(s))ds \right]; \quad t \in I = [0, T]. \quad (1.4)$$

**Preuve :** Soit  $u(t)$  une solution du problème (1.3). Alors,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)).$$

D'où nous obtenons

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left( \frac{u(s)}{g(s, u(s))} \right) ds = \int_0^t f(s, u(s)) ds.$$

Depuis

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \left( \frac{u(s)}{g(s, u(s))} \right) ds = \frac{u(t)}{g(t, u(t))} - \frac{u(0)}{g(0, u(0))},$$

Il s'ensuit

$$u(t) = g(t, u(t)) \left[ \frac{u_0}{g(0, u(0))} + \int_0^t f(s, u(s)) ds \right].$$

Maintenant si  $u(t)$  vérifie (1.4). il est clair que  $u(t)$  vérifie

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); \quad t \in [0, T].$$

**Lemme 1.3.3.** Soient  $f, g \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ , avec  $g \neq 0$ , et  $\phi \in C([0, b], \mathbb{R})$ . Une fonction  $u \in C(J, \mathbb{R})$  telle que sa dérivée partielle par rapport à  $t$  existe et est intégrable sur  $J$  est une solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); & (t, x) \in J, \\ u(0, x) = \phi(x); & x \in [0, b], \end{cases} \quad (1.5)$$

si et seulement si  $u(t, x)$  vérifie

$$u(t, x) = g(t, x, u(t, x)) \left[ \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds \right]; \quad (t, x) \in J. \quad (1.6)$$

**Preuve :** Soit  $u(t, x)$  une solution du problème (1.5). Alors,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)).$$

D'où nous obtenons

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u(s, x)}{g(s, x, u(s, x))} \right) ds = \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds.$$

Depuis

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u(s, x)}{g(s, x, u(s, x))} \right) ds = \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} - \frac{u(0, x)}{g(0, x, u(0, x))},$$

Il s'ensuit

$$u(t) = g(t, x, u(t, x)) \left[ \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds \right].$$

Maintenant si  $u(t, x)$  vérifie (1.6). il est clair que  $u(t, x)$  vérifie

$$u(0, x) = \phi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); \quad (t, x) \in J.$$

**Théorème 1.3.1.** (Arzéla-Ascoli)[9]

Une partie  $G \subset \mathcal{C}(I)$  est relativement compacte (i.e :  $\bar{G}$  est compact) si et seulement si :

1.  $G$  est uniformément bornée ;  
(i.e Il existe une constante  $k > 0$ , telle que :  $\|u\|_{\mathcal{C}} < k$ ; pour tout  $u \in \mathcal{C}$ ),
2.  $G$  est équicontinue ; (i.e pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tels que  
 $|u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon$ , pour tout  $u(\cdot) \in G$  et  $(t_1, t_2) \in I \times I$  vérifiant  
 $|t_1 - t_2| < \delta(\epsilon)$ ).

**Théorème 1.3.2.** (Dhage) [7]

Soit  $X$  une algèbre de banach et soit  $A, B : X \rightarrow X$  deux operateurs tels que :

- (i) Il existe  $\alpha > 0$ , tel que  $A$  est  $\alpha$ -Lipschitzien,
- (ii)  $B$  est continue et compact,
- (iii)  $\alpha M < 1$ , où  $M = \|B(X)\| := \sup\{\|B(w)\| : w \in X\}$ .

Alors, soit

- (S1) l'équation  $\lambda[AuBu] = u$  admet une solution pour  $0 < \lambda < 1$ ; soit
- (S2) l'ensemble  $\varepsilon = \{u \in X : \lambda[AuBu] = u, 0 < \lambda < 1\}$  est non-borné.

# Chapitre 2

## Le Problème de Cauchy pour les Equations Différentielles

## Discontinues dans Une Algèbre de Banach

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons des résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles fonctionnelles du premier ordre avec une condition locale et non-locale, dans une Algèbre de Banach.

## 2.2 Equation Différentielles Fonctionnelles Discontinues- Le Problème Local

Cette section est consacré à l'étude d'existence des solutions du problème de Cauchy pour certaines classes d'équations différentielles discontinues Soit le problème suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); t \in I = [0, T], T > 0, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

où  $f, g : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données et  $g \not\equiv 0$ .

**Définition 2.2.1.** Une fonction  $u \in \mathcal{C}$  est dite solution du problème (2.1)-(2.2) si

- (i)  $t \rightarrow \frac{u(t)}{g(t, u(t))}$  est absolument continue,
- (ii)  $u$  satisfait l'équations (2.1) sur  $I$  et la condition locale (2.2) dans  $\mathbb{R}$ .

Considérons les hypothèses suivantes :

( $H_1$ ) La fonction  $f$  est Carathéodory, et il existe  $h \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$  telle que,

$$|f(t, u)| \leq \frac{h(t)}{1 + |u|}; \quad (2.3)$$

pour tout  $t \in I$  et  $u \in \mathbb{R}$ .

( $H_2$ ) Il existe une fonction  $\alpha \in C(I, \mathbb{R}_+)$  telle que

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq \alpha(t)|u - v|;$$

pour tout  $t \in I$ , et  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Posons  $u_1 := \left| \frac{u_0}{g(0, u_0)} \right|$ , et  $h^* := \|h\|_{L^\infty}$ .

**Théorème 2.2.1.** *Supposons que les hypothèses ( $H_1$ ) et ( $H_2$ ) sont vérifiées. Si en plus*

$$\|\alpha\|_\infty [u_1 + Th^*] < 1, \tag{2.4}$$

alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution dans  $\mathcal{C}$ .

**Démonstration :** Définissons deux opérateurs  $A, B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par

$$(Au)(t) = g(t, u(t)); \quad t \in I, \tag{2.5}$$

et

$$(Bu)(t) = \frac{u_0}{g(0, u_0)} + \int_0^t f(s, u(s)) ds; \quad t \in I. \tag{2.6}$$

Les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont les points fixe de l'équation

$$u(t) = (Au)(t)(Bu)(t); \quad t \in I. \tag{2.7}$$

Nous montrons que les opérateurs  $A$  et  $B$  vérifient toutes les conditions du théorème de point fixe de Dhage.

**Etape 1 :**  $A$  est de type lipschitz.

d'après l'hypothèse  $(H_2)$ , nous avons

$$\begin{aligned} |(Au)(t) - (Av)(t)| &= |g(t, u(t)) - g(t, v(t))| \\ &\leq \alpha(t, x)|u(t) - v(t)| \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \quad (2.8)$$

Donc  $A$  est  $\|\alpha\|_\infty$ -lipschitz.

**Etape 2 :** L'opérateur  $B$  est compact.

Soit  $\{u_n\}$  une suite dans  $\mathcal{C}$ . D'après l'hypothèse  $(H_1)$  on a,

$$\begin{aligned} |Bu_n(t)| &\leq \left| \frac{u_0}{g(0, u_0)} \right| + \int_0^t |f(s, u_n(s))| ds \\ &\leq u_1 + h^* \int_0^T ds \end{aligned}$$

On obtint alors,

$$\|B(u_n)\|_\infty \leq u_1 + ah^*. \quad (2.9)$$

Donc,  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble uniformément borné dans  $\mathcal{C}$ .

D'autre part, pour  $t_1, t_2 \in I$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 |Bu_n(t_1, x) - Bu_n(t_2, x)| &\leq \left| \int_0^{t_2} f(s, u_n(s))ds - \int_0^{t_1} f(s, u_n(s))ds \right| \\
 &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u_n(s))ds \right| \\
 &\leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, u_n(s))| ds \\
 &\leq h^* \int_{t_1}^{t_2} ds \\
 &= h^*(t_2 - t_1) \rightarrow 0 \text{ Quand } t_2 \rightarrow t_1.
 \end{aligned}$$

Donc,  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, d'après le Théorème d'Arzéla-Ascoli, l'opérateur  $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est compact.

**Etape 3 :**  $\alpha M \leq 1$ .

On a

$$\begin{aligned}
 M &= \|B(\mathcal{C})\| \\
 &\leq u_1 + \int_0^T |f(s, u(s))| ds \\
 &\leq u_1 + h^* \int_0^T ds \\
 &\leq u_1 + Th^*.
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la condition (2.4), on obtient

$$\alpha M \leq \alpha(u_1 + Th^*) \leq 1.$$

**Etape 4 :** l'assertion (ii) dans le Théorème de Dhage n'est pas possible.

Soit  $u \in \mathcal{C}$  une solution du problème (2.1)- (2.2). Pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , nous avons

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda[g(t, u(t))] \left( \frac{u_0}{g(0, u_0)} + \int_0^t f(s, u(s)) ds \right) \\ |u(t)| &\leq \lambda |g(t, u(t))| \left( u_1 + \int_0^T |f(s, u(s))| ds \right) \\ &\leq [|g(t, u(t)) - g(t, 0)| + |g(t, 0)|] \left( u_1 + \int_0^T h(s) ds \right) \\ &\leq (\|\alpha\|_\infty \|u\|_\infty + g^*)(u_1 + Th^*), \end{aligned}$$

où  $g^* = \sup_{t \in I} |g(t, 0)|$ . Par conséquent

$$\|u\|_\infty \leq \frac{g^*[u_1 + Th^*]}{1 - \|\alpha\|_\infty[u_1 + Th^*]} := \ell. \quad (2.10)$$

D'où, la conclusion (ii) du Théorème ne tient pas. Finalement, d'après le Théorème de point fixe de Dhage, le problème (2.1)-(2.2) admet une solution définie sur  $I$ .

## 2.3 Problème de Cauchy avec une Condition Non-locale

Dans cette section, nous considérons le problème Non-local suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); \quad t \in I = [0, T], \quad (2.11)$$

$$u(0) = u_0 + P(u), \quad (2.12)$$

$u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données, et  $g \neq 0$ .

**Définition 2.3.1.** Une fonction  $u \in \mathcal{C}$  est dite solution du problème (2.11)-(2.12) si

- (i)  $t \rightarrow \frac{u(t)}{g(t, u(t))}$  est absolument continue,
- (ii)  $u$  satisfait l'équations (2.11) sur  $I$  et la condition locale (2.12).

Considérons les hypothèses suivantes :

( $H'_1$ ) La fonction  $f$  est Carathéodory, et il existe  $h \in L^\infty(I, \mathbb{R}_+)$  telle que,

$$|f(t, u(t))| \leq \frac{h(t)}{1 + |u|}; \quad (2.13)$$

pour tout  $t \in I$  et  $u \in \mathbb{R}$ ,

( $H'_2$ ) Il existe une fonction  $\alpha \in C(I, \mathbb{R}_+)$  telle que

$$|g(t, u) - g(t, v)| \leq \alpha(t)|u - v|;$$

pour tout  $t \in I$ , et  $u, v \in \mathbb{R}$ ,

( $H'_3$ ) Il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$|P(u)| \leq \frac{k|u|}{1 + |u|}; \quad (2.14)$$

pour  $u \in \mathbb{R}$ .

Posons  $u_1 := \left| \frac{u_0}{g(0, u_0)} \right|$ , et  $u_2 := \left| \frac{k}{g(0, u_0)} \right|$ , et  $h^* := \|h\|_{L^\infty}$ .

**Théorème 2.3.1.** *Supposons que les hypothèses  $(H'_1)$ ,  $(H'_2)$  et  $(H'_3)$  sont vérifiées.*

*Si en plus*

$$\|\alpha\|_\infty [u_1 + u_2 + Th^*] < 1, \quad (2.15)$$

*alors le problème (2.11)-(2.2') admet au moins une solution dans  $\mathcal{C}$ .*

**Démonstration :** Définissons deux opérateurs  $A, B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par

$$(Au)(t) = g(t, u(t)); \quad t \in I, \quad (2.16)$$

et

$$(Bu)(t) = \frac{u_0}{g(0, u_0)} + \frac{P(u)}{g(0, u_0)} + \int_0^t f(s, u(s)) ds; \quad t \in I. \quad (2.17)$$

Les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont les points fixe de l'équation

$$u(t) = (Au)(t)(Bu)(t); \quad t \in I. \quad (2.18)$$

Nous montrons que les opérateurs  $A$  et  $B$  vérifient toutes les conditions du théorème de point fixe de Dhage.

**Etape 1 :**  $A$  est de type lipschitz.

Les hypothèses  $(H'_2)$ , et  $(H'_3)$ , impliquent

$$\begin{aligned} |(Au)(t) - (Av)(t)| &= |g(t, u(t)) - g(t, v(t))| \\ &\leq \alpha(t, x)|u(t) - v(t)| \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \quad (2.19)$$

Donc  $A$  est  $\|\alpha\|_\infty$ -lipschitz.

**Etape 2 :** L'opérateur  $B$  est compact.

Soit  $\{u_n\}$  une suite dans  $\mathcal{C}$ . D'après l'hypothèse  $(H'_3)$  on a,

$$\begin{aligned} |Bu_n(t)| &\leq \frac{u_0}{g(0, u_0)} + \frac{k|u|}{(1 + |u|)|g(0, u_0)|} + \int_0^t f(s, u_n(s)) ds \\ &\leq u_1 + u_2 + h^* \int_0^T ds. \end{aligned}$$

On obtint alors,

$$\|B(u_n)\|_\infty \leq u_1 + u_2 + Th^*. \quad (2.20)$$

Par conséquent  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble uniformément borné dans  $\mathcal{C}$ .

Nous pouvons aussi montrer que l'ensemble  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, d'après le Théorème un d'Arzéla-Ascoli, nous obtenons  $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est compact.

**Etape 3 :**  $\alpha M \leq 1$ .

On a

$$\begin{aligned}
M &= \|B(\mathcal{C})\| \\
&\leq u_1 + u_2 + \int_0^T |f(s, u(s))| ds \\
&\leq u_1 + u_2 + h^* \int_0^t ds \\
&\leq u_1 + u_2 + Th^*.
\end{aligned}$$

Donc, d'après la condition (2.15), on obtient

$$\alpha M \leq \alpha(u_1 + u_2 + Th^*) \leq 1.$$

**Etape 4 :** l'assertion (ii) dans le Théorème de Dhage n'est pas possible.

Soit  $u \in \mathcal{C}$  une solution du problème (2.11)- (2.12). Pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , nous avons

$$u(t) = \lambda[g(t, u(t))] \left( \frac{u_0}{g(0, u_0)} + \frac{P(u)}{g(0, u_0)} + \int_0^t f(s, u(s)) ds \right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq \lambda |g(t, u(t))| \left( u_1 + u_2 + \int_0^T |f(s, u(s))| ds \right) \\
&\leq [|g(t, u(t)) - g(t, 0)| + |g(t, 0)|] \left( u_1 + ku_2 + \int_0^T h(s) ds \right) \\
&\leq (\|\alpha\|_\infty \|u\|_\infty + g^*)(u_1 + u_2 + Th^*),
\end{aligned}$$

où  $g^* = \sup_{t \in I} |g(t, 0)|$ . Par conséquent

$$\|u\|_\infty \leq \frac{g^*[u_1 + u_2 + Th^*]}{1 - \|\alpha\|_\infty[u_1 + u_2 + Th^*]} := \ell. \quad (2.21)$$

Donc, la conclusion (ii) du Théorème ne tient pas. Finalement, d'après le Théorème de point fixe de Dhage, le problème (2.11)-(2.12) admet une solution définie sur  $I$ .

## 2.4 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{g(t, u(t))} \right) = f(t, u(t)); \quad \text{si } t \in [0, 1], \quad (2.22)$$

$$u(0) = e^{-10}. \quad (2.23)$$

Posons

$$f(t, u(t)) = \frac{1}{e^{t+4}(1 + |u(t)|)}; \quad t \in [0, 1],$$

et

$$g(t, u(t)) = \frac{1}{e^{t+5}(1 + |u(t)|)}; \quad t \in [0, 1].$$

Pour  $u, \bar{u} \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1] \times [0, 1]$  on obtient

$$|g(t, u(t)) - g(t, \bar{u}(t))| \leq \frac{1}{e^5} \|u - \bar{u}\|_\infty.$$

La fonction  $f$  est Carathéodory, et elle satisfait l'hypothèse  $(H_1)$  avec  $h(t) = \frac{1}{e^{t+4}}$ .

D'où  $h^* = \frac{1}{e^4}$ .

Aussi, la condition  $(H_2)$  est satisfaite avec  $\alpha(t) = \frac{1}{e^{t+5}}$  et  $\|\alpha\|_\infty = \frac{1}{e^5}$ . Donc les conditions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont satisfaites. En plus, la condition (2.4) est satisfaite.

En effet,  $u_1 = 2e^{-4}$ , et

$$\|\alpha\|_\infty[u_1 + Th^*] = \frac{1}{e^5} \left( \frac{2}{e^4} + \frac{1}{e^4} \right) < \frac{3}{e^9} < 1.$$

Donc, le Théorème 2.2.1 implique que le problème (2.22) – (2.23) possède une solution sur  $[0, 1]$ .

# Chapitre 3

## Equations Différentielles Partielles du Premier Ordre dans une Algèbre de Banach

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles partielles fonctionnelles discontinues avec une condition locale et non-locale dans une Algèbre de Banach .

### 3.2 Equation Différentielles partielles Fonctionnelles Discontinues-Le Problème Local

Cette section est consacrée à l'étude de l'existence des solutions du problème de Cauchy pour la classe d'équations différentielles partielles discontinues du premier

ordre suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); (t, x) \in J = [0, a] \times [0, b], a, b > 0 \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = \phi(x); x \in [0, b], \quad (3.2)$$

où  $f, g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues, et  $g \not\equiv 0$ .

**Définition 3.2.1.** Une fonction  $u \in \mathcal{C}$  est dite solution du problème (3.1)-(3.2) si

(i)  $t \rightarrow \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))}$  est absolument continue,

(ii)  $u$  satisfait l'équations (3.1) sur  $J$  et la condition locale (3.2) dans  $[0, b]$ .

Considérons les hypothèses suivantes :

(H01) La fonction  $f$  est Carathéodory, et il existe  $h \in L^\infty(J, \mathbb{R}_+)$  telle que,

$$|f(t, x, u)| \leq \frac{h(t, x)}{1 + |u|}; \quad (3.3)$$

pour tout  $(t, x) \in J$ , et  $u \in \mathbb{R}$ .

(H02) Il existe une fonction  $\alpha \in C(J, \mathbb{R}_+)$  telle que

$$|g(t, x, u) - g(t, x, v)| \leq \alpha(t)|u - v|,$$

pour tout  $(t, x) \in J$ , et  $u, v \in \mathbb{R}$ .

**Remarque :** Comme la fonction  $g$  est continue, alors la fonction  $x \rightarrow \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))}$

est continue.

Posons  $\phi^* := \sup_{x \in [0, b]} \left| \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} \right|$ , et  $h^* := \|h\|_{L^\infty}$ .

**Théorème 3.2.1.** *Supposons que les hypothèses (H01) et (H02) sont vérifiées.*

*Si en plus*

$$\|\alpha\|_\infty [\phi^* + ah^*] < 1, \quad (3.4)$$

*alors le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution dans  $\mathcal{C}$ .*

**Démonstration :** Définissons deux opérateurs  $A, B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par

$$(Au)(t, x) = g(t, x, u(t, x)); \quad (t, x) \in J, \quad (3.5)$$

et

$$(Bu)(t, x) = \frac{\phi(x)}{g(0, \phi(x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds; \quad (t, x) \in J. \quad (3.6)$$

Les solutions du problème (2.1)-(2.2) sont les points fixe de l'équation

$$u(t, x) = (Au)(t, x)(Bu)(t, x); \quad (t, x) \in J. \quad (3.7)$$

Nous montrons que les opérateurs  $A$  et  $B$  vérifient toutes les conditions du théorème de point fixe de Dhage.

**Étape 1 :**  $A$  est de type lipschitz.

Par (H02), nous avons,

$$\begin{aligned} |(Au)(t, x) - (Av)(t, x)| &= |g(t, x, u(t, x)) - g(t, x, v(t, x))| \\ &\leq \alpha(t, x) |u(t, x) - v(t, x)| \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \quad (3.8)$$

Donc  $A$  est  $\|\alpha\|_\infty$ -lipschitz.

**Etape 2 :** L'opérateur  $B$  est compact.

Soit  $\{u_n\}$  une suite dans  $\mathcal{C}$ . D'après l'hypothèse (H01) on a,

$$\begin{aligned} |Bu_n(t, x)| &\leq \left| \frac{\phi(x)}{g(0, \phi(x))} \right| + \int_0^t |f(s, x, u_n(s, x))| ds \\ &\leq \phi^* + h^* \int_0^a ds. \end{aligned}$$

On obtint alors,

$$\|B(u_n)\|_\infty \leq \phi^* + ah^*. \quad (3.9)$$

Par conséquent  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble uniformément borné dans  $\mathcal{C}$ .

D'autre part, pour  $(t_1, x), (t_2, x) \in J$ , on trouve

$$\begin{aligned} |Bu_n(t_1, x) - Bu_n(t_2, x)| &\leq \left| \int_0^{t_2} f(s, x, u_n(s, x)) ds - \int_0^{t_1} f(s, x, u_n(s, x)) ds \right| \\ &\leq h^* \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq h^*(t_2 - t_1) \rightarrow 0 \text{ Quand } t_2 \rightarrow t_1. \end{aligned}$$

Donc,  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, d'après le Théorème d'Arzéla-Ascoli, l'opérateur  $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est compact.

**Etape 3 :**  $\alpha M \leq 1$ .

On a

$$\begin{aligned}
 M &= \|B(\mathcal{C})\| \\
 &\leq \phi^* + \int_0^a |f(s, x, u(s, x))| ds \\
 &\leq \phi^* + h^* \int_0^t ds \\
 &\leq \phi^* + ah^*.
 \end{aligned}$$

Donc, d'après la condition (3.4), on obtient

$$\alpha M \leq \alpha(\phi^* + ah^*) \leq 1.$$

**Etape 4 :** l'assertion (ii) dans le Théorème de Dhage n'est pas possible.

Soit  $u \in \mathcal{C}$  une solution du problème (3.1)- (3.2). Pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \lambda[g(t, x, u(t, x))] \left( \frac{\phi(x)}{g(0, \phi(x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds \right) \\
 |u(t, x)| &\leq \lambda |g(t, x, u(t, x))| \left( \phi^* + \int_0^a |f(s, u(s))| ds \right) \\
 &\leq [|g(t, x, u(t, x)) - g(t, x, 0)| + |g(t, x, 0)|] \left( \phi^* + \int_0^a h(s, x) ds \right) \\
 &\leq (\|\alpha\|_\infty \|u\|_\infty + g^*)(\phi^* + ah^*),
 \end{aligned}$$

où  $g^* = \sup_{(t,x) \in J} |g(t, x, 0)|$ . Par conséquent

$$\|u\|_\infty \leq \frac{g^*[\phi^* + ah^*]}{1 - \|\alpha\|_\infty[\phi^* + ah^*]} := \ell. \quad (3.10)$$

Donc, d'après le Théorème du point fixe de Dhage, le problème (3.1)-(3.2) admet

une solution définie sur  $J$ .

### 3.3 Le Problème Fonctionnel Partiel Non-local

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); (t, x) \in J, \quad (3.11)$$

$$u(0, x) = \phi(x) + Q(u); x \in [0, b], \quad (3.12)$$

où  $f, g : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Q : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues données, avec  $g \not\equiv 0$ , et  $\phi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue sur  $[0, b]$ .

**Définition 3.3.1.** Une fonction  $u \in \mathcal{C}$  est dite solution du problème (3.11)-(3.12) si

- (i)  $t \rightarrow \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))}$  est absolument continue,
- (ii)  $u$  satisfait l'équations (3.11) sur  $J$  et la condition locale (3.12) sur  $[0, b]$ .

Considérons les hypothèses suivantes :

(H01') La fonction  $f$  est Carathéodory, et il existe  $h \in L^\infty(J, \mathbb{R}_+)$  telle que,

$$|f(t, x, u(t, x))| \leq \frac{h(t, x)}{1 + |u|}; \quad (3.13)$$

pour tout  $(t, x) \in J$  et  $u \in \mathbb{R}$ ,

(H02') Il existe une fonction  $\alpha \in C(J, \mathbb{R}_+)$  telle que

$$|g(t, x, u) - g(t, x, v)| \leq \alpha(t)|u - v|;$$

pour tout  $(t, x) \in J$ , et  $u, v \in \mathbb{R}$ ,

(H03') Il existe  $d \in C(J, \mathbb{R}_+)$  telle que

$$|Q(u(t, x))| \leq \frac{d(t, x)|u(t, x)|}{1 + |u(t, x)|} \quad (3.14)$$

pour  $u \in \mathbb{R}$ .

Posons  $\phi^* := \sup_{x \in [0, b]} \left| \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} \right|$ , et  $d^* := \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \frac{d(t, x)}{g(0, x, u(0, x))} \right|$  et  $h^* := \|h\|_{L^\infty}$ .

**Théorème 3.3.1.** *Supposons que les hypothèses (H01'), (H02') et (H03') sont vérifiées. Si en plus*

$$\|\alpha\|_\infty[\phi^* + d^* + ah^*] < 1, \quad (3.15)$$

alors le problème (3.11)-(3.12) admet au moins une solution dans  $\mathcal{C}$ .

**Démonstration :** Définissons deux opérateurs  $A, B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  par

$$(Au)(t, x) = g(t, x, u(t, x)); \quad (t, x) \in J, \quad (3.16)$$

et

$$(Bu)(t, x) = \frac{Q(u)}{g(0, x, \phi(x))} + \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x))ds; \quad (t, x) \in J. \quad (3.17)$$

Les solutions du problème (2.11)-(2.12) sont les points fixe de l'équation

$$u(t, x) = (Au)(t, x)(Bu)(t, x); \quad (t, x) \in J. \quad (3.18)$$

Nous montrons que les opérateurs  $A$  et  $B$  vérifient toutes les conditions du théorème de point fixe de Dhage.

**Etape 1 :**  $A$  est de type lipschitz.

Par  $(H_2)$ , nous avons

$$\begin{aligned} |(Au)(t, x) - (Av)(t, x)| &= |g(t, x, u(t, x)) - g(t, x, v(t, x))| \\ &\leq \alpha(t, x)|u(t, x) - v(t, x)| \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\|A(u) - A(v)\|_\infty \leq \|\alpha\|_\infty \|u - v\|_\infty. \quad (3.19)$$

Donc  $A$  est  $\|\alpha\|_\infty$ -lipschitz.

**Etape 2 :** L'opérateur  $B$  est compact.

Soit  $\{u_n\}$  une suite dans  $\mathcal{C}$ . D'après les hypothèses  $(H01')$  et  $(H03')$ , on a,

$$\begin{aligned} |(Bu_n)(t, x)| &\leq \left| \frac{\phi(x)}{g(0, x, \phi(x))} \right| + \left| \frac{Q(u)}{g(0, x, \phi(x))} \right| + \int_0^t |f(s, x, u_n(s, x))| ds \\ &\leq \phi^* + d^* + h^* \int_0^a ds \end{aligned}$$

On obtint alors,

$$\|B(u_n)\|_\infty \leq \phi^* + d^* + ah^*. \quad (3.20)$$

Par conséquent  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble uniformément borné dans  $\mathcal{C}$ .

D'autre part, pour  $(t_1, x), (t_2, x) \in J$ , on trouve

$$\begin{aligned} |Bu_n(t_1, x) - Bu_n(t_2, x)| &\leq \left| \int_0^{t_2} f(s, x, u(s, x)) ds - \int_0^{t_1} f(s, x, u(s, x)) ds \right| \\ &\leq h^* \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq h^*(t_2 - t_1) \rightarrow 0 \text{ Quand } t_2 \rightarrow t_1. \end{aligned}$$

Donc,  $\{Bu_n : n \in \mathbb{N}\}$  est un ensemble équicontinu dans  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, d'après le Théorème un d'Arzéla-Ascoli, nous obtenons  $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  est compact.

**Etape 3 :**  $\alpha M \leq 1$ .

On a

$$\begin{aligned} M &= \|B(\mathcal{C})\| \\ &\leq \phi^* + \left| \frac{Q(u)}{g(0, x, \phi(x))} \right| + \int_0^a |f(s, x, u(s, x))| ds \\ &\leq \phi^* + d^* + h^* \int_0^a ds \\ &\leq \phi^* + d^* + ah^*. \end{aligned}$$

Donc, d'après la condition (3.15), on obtient

$$\alpha M \leq \alpha(\phi^* + du^* + ah^*) \leq 1.$$

**Etape 4 :** l'assertion (ii) dans le Théorème de Dhage n'est pas possible.

Soit  $u \in \mathcal{C}$  une solution du problème (3.11)- (3.12). Pour tout  $\lambda \in (0, 1)$ , nous avons

$$u(t, x) = \lambda[g(t, x, u(t, x))] \left( \frac{\phi(x)}{g(0, \phi(x))} + \frac{Q(u)}{g(0, u(0, x))} + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq \lambda|g(t, x, u(t, x))| \left( \phi^* + du^* + \int_0^a |f(s, u(s))| ds \right) \\ &\leq [|g(t, x, u(t, x)) - g(t, x, 0)| + |g(t, x, 0)|] \left( \phi^* + d^* + \int_0^a h(s, x) ds \right) \\ &\leq (\|\alpha\|_\infty \|u\|_\infty + g^*)(\phi^* + d^* + ah^*), \end{aligned}$$

où  $g^* = \sup_{(t,x) \in J} |g(t, x, 0)|$ . Par conséquent

$$\|u\|_\infty \leq \frac{g^*[\phi^* + d^* + ah^*]}{1 - \|\alpha\|_\infty[\phi^* + d^* + ah^*]} := \ell'. \quad (3.21)$$

Donc, la conclusion (ii) du Théorème ne tient pas. Finalement, d'après le Théorème de point fixe de Dhage, le problème (3.11)-(3.12) admet une solution définie sur  $J$ .

### 3.4 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u(t, x)}{g(t, x, u(t, x))} \right) = f(t, x, u(t, x)); \quad \text{si } (t, x) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (3.22)$$

$$u(0, x) = x^2 e^{-10}; \quad x \in [0, 1]. \quad (3.23)$$

où  $f, g : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Défini par

$$f(t, x, u(t, x)) = \frac{1}{e^{t+x+8}(1+u^2)},$$

$$g(t, x, u(t, x)) = \frac{1}{e^{t+x+10}(1+|u|)}.$$

La fonction  $f$  satisfait (H01) avec  $h(t, x) = \frac{1}{e^{t+x+8}}$  et  $h^* = \frac{1}{e^8}$ . d'autre part, pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , et  $u, v \in \mathbb{R}$ , on obtient

$$|g(t, x, u(t, x)) - g(t, x, v(t, x))| \leq \frac{1}{e^{10}} \|u - v\|_{\infty}.$$

Donc la condition (H02) est satisfaite avec  $\alpha(t, x) = \frac{1}{e^{t+x+10}}$  et  $\|\alpha\|_{\infty} = \frac{1}{e^{10}}$ .

En plus, la condition (3.4) est satisfaite. En effet,  $\phi^* = e(1 + e^{-10})$ , et

$$\|\alpha\|_{\infty} [\phi^* + ah^*] < e(1 + e^{-10}) \left( \frac{1}{e^{10}} + \frac{1}{e^8} \right) < \frac{4}{e^7} < 1.$$

D'après le Théorème 3.2.1, le problème (3.22)-(3.23) admet une solution sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré l'existence de solutions de certaines classes d'équations différentielles fonctionnelles ordinaires, et d'autres aux dérivées partielles du premier ordre dans une Algèbre de Banach. Nos résultats sont basés sur la théorie du point fixe.

# Bibliographie

- [1] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2012.
- [2] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Advanced Fractional Differential and Integral Equations, Nova Science Publishers, New York, 2015.
- [3] S. Abbas, M. Benchohra, G.M. N'Guérékata and B.A. Slimani, Darboux problem for fractional order discontinuous hyperbolic partial differential equations in Banach algebras, Complex Variables and Elliptic Equations, **57** (2-4) (2012), 337-350.
- [4] L. Byszewski, Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation  $u_{xt} = F(x, t, u, u_x)$ , J. Appl. Math. Stochastic Anal. **3** (1990), 163-168.
- [5] L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Appl. Anal., **40** (1991), 173-180.
- [6] Curtain, R. F. and Pritchard, A. J. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics Academic press.1977.

- 
- [7] B.C. Dhage, A nonlinear alternative in Banach algebras with applications to functional differential equations, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **8**, 563-575 (2004).
- [8] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [9] J. K. Hale and S. V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [10] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.