

Table des matières

Introduction	8
1 Équations Différentielles Stochastiques	12
1.1 Définitions et propositions	12
1.2 Exemples	13
1.3 Théorème d'existence et d'unicité	15
1.4 Exemple	21
1.5 Théorème de Yamada-Watanabe	23
1.6 Diffusions d'Itô	24
1.6.1 Définitions et propositions	24
2 Système lent-rapide stochastique	29
2.1 Résultats généraux sur les systèmes lents-rapides déterministes	29
2.2 Système lentement dépendant de temps avec une dimension	31
2.3 Branches d'équilibre stables	31
2.3.1 Hypothèse (cas stable)	31
2.3.2 Cas linéaire	33
2.4 Équation déterministe de FitzHugh-Nagumo	34
2.4.1 Système découplé : cas $b = 0$	35
2.5 Systèmes lents-rapides stochastiques	48
2.5.1 Variété lente	49
2.5.2 Concentration des trajectoires	49
2.5.3 Bifurcations dynamiques	53
2.5.4 Bifurcation selle-noeud	53
2.5.5 Bifurcation Hopf	54
2.6 Résonance stochastique	57

2.6.1	Présentation des systèmes dynamiques non linéaires bistables .	60
2.6.2	Quelques résultats antérieurs	62
2.6.3	Description des trajectoires	64
3	Étude qualitative des systèmes de FitzHugh-Nagumo	68
3.1	Limite inférieure du régime bruit fort	68
3.2	Étude qualitative du rayon moyen du petit cycle	71
3.3	Étude qualitative de la transition du bruit fort au bruit faible	75
3.3.1	Transformation de l'équation stochastique	76
3.4	Commentaire	81
4	Simulation avec R	85
4.1	Le modèle de Hull-White, Vasicek	85
	Bibliographie	93

Table des figures

2.1	Quelques trajectoires solution de l'équation (2.8) pour différentes conditions initiales et pour $\epsilon = 0.05$, $a = 0.37$, $b = 0$ et $c = 1$	37
2.2	Graphique du potentiel V défini en (2.11) avec $\epsilon = 0.01$ et en (a) $a = 0.6$, en (b) $a = -2/3\sqrt{3}$ et en (c) $a = 0.37$	39
2.3	Exemples de solutions de l'équation de FitzHugh-Nagumo (2.6). Les courbes bleues montrent la solution en coordonnées (x, y) et les courbes noires la cubique telle que $x = 0$ et la droite telle que $y = 0$. Les valeurs de paramètres sont $\epsilon = 0.01$ et en (a) $\delta = -0.05$, (b) $\delta = 0$, (c) $\delta = 0.01$, (d) $\delta = 0.11$	43
2.4	Exemples de trajectoires de l'équation de Fitzugh-Nagumo (3.0.1) en coordonnées (x, y) (colonne de gauche) et $(t; x)$ (colonne de droite). Les valeurs des paramètres sont " $\epsilon = 0,01$ eta = 0,58. L'intensité du bruit est donnée par $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,001, 0,003, 0,007$. . .	50
2.5	Potentiel bistable quartique à double puits de l'Eq. (2.2) présentant deux minima en $+_-X_b$ séparés par une barrière de potentiel de hauteur U_0	61
2.6	[[16]] Une trajectoire (trait fin) de l'équation (2.67) présentant le phénomène de résonance stochastique. La trajectoire saute presque périodiquement d'une variété stable à l'autre (courbes en gras) en passant par dessus la barrière de potentiel (en traitillé).	63

2.7	[16] Trajectoires près d'une bifurcation selle-noeud évitée. (a) Pour $\sigma < a_0^{3/4} \sqrt{\varepsilon^{3/4}}$, les trajectoires restent confinées, avec grande probabilité, dans un voisinage $\mathcal{B}(h)$ de la solution déterministe x_t^{det} . (b) Pour $\sigma \geq a_0^{3/4} \sqrt{\varepsilon^{3/4}}$, les trajectoires ont toutes les chances de traverser la barrière de potentiel en $x_0^*(t)$ durant l'intervalle $[-\sigma^{2/3}, \sigma^{2/3}]$	64
3.1	Exemples de représentation de ξ en fonction du temps. Les paramètres sont $\epsilon = 0,01$, $\delta = 3.10^{-3}$ pour la ligne du haut et $\delta = 5.10^3$ pour la ligne du bas. L'intensité du bruit est $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,46.10^{-4}$, $1,82.10^{-4}$, $2.73.10^{-4}$ et $3,65.10^{-4}$	80
4.1	Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 1.2$	87
4.2	Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 0.1$	88
4.3	Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 0.01$	89
4.4	Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 1.2$	90
4.5	Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 0.05$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.01$	90

Dédicaces

Je dédie ce travail à ma famille (au sens large) pour leur soutien et sa patience durant ces années de formation.

A mes soeurs Kaouthar et Imen

A ma grand-mère-père

A eux, j'exprime ici toute ma gratitude et ma franche reconnaissance.

A mes collègues et mes amis

Le dernière dédicace, le plus important, va à mes parents (Khadidja et Berrezoug) pour leur dévouement, leur compréhension et leur grande tendresse.

Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie.

OUSSAMA

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon Directeur de mémoire *M^r* **A.Kandouci**, pour la façon de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé. Je le remercie pour la deuxième fois.

Je remercie *M^r*. **F.Madani**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je tiens à remercier aussi *M^{lle}* **F.Benziadi** et *M^{me}* **F.Benziadi**, qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens à remercier *M^r* **D.Djebbouri**, pour m'avoir suivi et encourager dès le début.

Je remercie particulièrement les enseignants de master Probabilités et statistique, sans oublier les membres du laboratoire de Modèles stochastiques, statistique et Applications.

Je saisi cette occasion pour remercier l'ensemble des enseignants qui m'ont initié aux mathématiques.

Je pense aussi à ceux et celles avec qui j'ai étudié. Pour finir, je remercie tous les amis et collègues qui m'ont soutenu et encouragé.

Introduction

Les équations différentielles stochastiques servent de modèle mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire. Par exemple, le mouvement d'une particule macroscopique dans un fluide ou un gaz peut être décrit par une équation de la forme

$$mx'' = F_{ext} + F_{stoch}$$

Ici F_{ext} décrit une force extérieure déterministe, par exemple la gravité ou une force électromagnétique. F_{stoch} décrit l'effet des collisions erratiques des molécules du fluide avec la particule macroscopique. Le mouvement des molécules n'étant pas connu en détail, nous voulons modéliser le second terme par une force aléatoire, ou un bruit. La manière de modéliser le bruit dépend évidemment de la nature du fluide et des échelles de temps et de longueur en jeu. La situation la plus simple apparaît lorsque le temps de corrélation des molécules est négligeable par rapport à l'échelle de temps caractéristique de la particule, on parle alors de bruit blanc.

les équations d'évolution sont des itérations d'applications (Collet et al. [1980]) ou des équations différentielles (Hirsch et al. [1974h]). Dans le premier cas, la terminologie consacrée est un système dynamique à temps discret, dans le second, à temps continu. Ce mémoire concerne plus particulièrement les systèmes dynamiques à temps continu, i.e, les systèmes d'équations différentielles dans lesquelles le temps n'apparaît pas explicitement, lorsque de tels systèmes font intervenir plusieurs échelles de temps caractéristiques, ce qui se traduit par la présence d'un ou plusieurs petits paramètres dans l'une ou plusieurs des composantes de leur champ de vecteurs vitesse, ils sont qualifiés de lents-rapides. Les systèmes dynamiques lents-rapides ont, dans un premier temps, été étudiés à l'aide de la théorie des perturbations

singulières (Andronov et al. [1966]) qui a permis de mettre en évidence une dichotomie du mouvement en trajectoires lentes et rapides. Le qualificatif "singulier" fait référence au fait que lorsque l'on fait tendre " vers zéro, le nombre de degrés de liberté du système change. Ses solutions convergent alors de façon exponentiellement rapide (Tihonov [1952]) vers voisinage de variétés lentes,

Le plus célèbre système lent-rapide est l'équation de van der Pol dont l'analyse peut aller retour au travail de van der Pol dans le 1920 [1] De nouveaux phénomènes (tels que des oscillations d'éclatement) peuvent être induite par une perturbation aléatoire impact sur un système en temps multiples échelles [2][43] et stochastiques réonance.[44][45] Freidlin et Wentzell [46] considérés comme le travail classique sur les perturbations systèmes dynamiques stochastiques Berglund et al.[47] [48] discuté des systèmes dynamiques lent-rapide avec gaussien bruit blanc et le bruit additif.

Les résonance stochastique est une des phénomènes qui se découlet des systèmes lents-rapide

Le phénomène tres surprenant de résonance stochastique est etudie par les physiciens depuis une vingtaine d'années et s'est récemment impose de façon évidente dans de nombreux domaines des sciences naturelles : les lasers, les systèmes électroniques, les transmissions neuronales, la climatologie, Le point commun des problèmes étudiés est la présence d'un système Dynamique (plus ou moms complexe) qui subit deux perturbations extérieures :

1. une perturbation déterministe et périodique en temps généralement de faible intensité
2. une perturbation aléatoire lie soit a un source aléatoire soit a une agrégation d'erreurs de toutes sortes (erreurs de mesures, simplifica- tion de modèle,...)

Une combinaison optimale de ces deux perturbations cree le phenomene de résonance : la solution du système dynamique comporte alors une forte composante périodique qui ne peut provenir uniquement de la perturbation déterministe. C'est ainsi notamment que certains climatologues expliquent les grands changements climatiques qui apparaissent tous les 100 000 ans (changements amplitude 10 degres) et qui seraient une conséquence d'une très faible vari- ation de la constante solaire associées a une perturbation aléatoire de la température de la terre lie notamment au temps, aux saisons

Le plan de ce travail est une conséquence des préoccupations pédagogique déjà énoncées.

Dans le premier chapitre

On donne une définition mathématique d'une équation différentielle stochastique accompagnée de quelques exemples. On citera ensuite l'un des théorèmes les plus importants, à savoir le théorème d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS. On finira ce chapitre par l'énoncé d'un grand théorème qu'on doit aux mathématiciens Yamada et Watanabe

Dans le deuxième chapitre

Dans une première partie bref survol de résultats connus sur les EDO rapides-lentes déterministes, on rappelle d'abord le théorème de Tikhonov [10] et celui de Fenichel [11] sur la dynamique au voisinage de variétés lentes ; puis nous discutons la notion de bifurcation dynamique, en particulier les cas de la bifurcation noeud-col et de la bifurcation fourche

Dans la deuxième partie on commence par l'effet du bruit sur une classe particulière de systèmes singulièrement perturbés puis j'ai établi un résultat général sur la concentration des trajectoires au voisinage d'une variété lente stable d'une EDS rapide-lente. Ensuite, nous examinons la précision d'une approximation de la dynamique par sa projection sur la variété lente. Les résultats présentés ont été publiés dans l'article [12]. après avoir donné des résultats généraux sur les équations lent-rapides, (section 1) j'ai étudié le comportement des solutions du système déterministe associé au modèle de FitzHugh-Nagumo en introduisant des coordonnées adaptées que je utilise par la suite

Ensuite on passe de résultats connus sur les EDO rapides-lentes stochastique puis on donne une description détaillée de l'effet du bruit sur une bifurcation Noeud-col dynamique [12], puis d'une bifurcation fourche dynamique [12]. On finira ce chapitre par le phénomène de la résonance stochastique et les système potentielle bistable sont également étudiés en détail

Dans le troisième chapitre

Je passe à l'étude générale de l'équation de FitzHugh-Nagumo stochastique dans le

cas général .puis en utilisant des résultats généraux sur les systèmes lents-rapides stochastiques. Ensuite, à l'aide de différents changements de variables, nous obtenons des premières approximations pour les frontières entre les différents régimes de comportement des solutions. Nous distinguons trois régimes

1. un régime où les spikes sont isolés et rares, pour un bruit faible
2. un régime où il y a une suite de spikes sans période de repos, pour un bruit fort,
3. un régime intermédiaire où il y a des trains de spikes espacés par des période de repos, pour un bruit intermédiaire. La transition entre les régimes de bruit fort et de bruit faible

Dans le dernier chapitre on traitera le modèle de Hull-white/Vasicek qui sera un exemple illustratif, on va tracer quelques trajectoires pour ce processus moyennant le langage de programmation R

Chapitre 1

Équations Différentielles Stochastiques

1.1 Définitions et propositions

Le but des équations différentielles stochastiques est d'étudier l'évolution d'un système physique perturbé par un bruit aléatoire. Partons d'une équation différentielle ordinaire de la forme.

$$dy_t = b(y_t)dt$$

On rajoute, pour exprimer ce bruit et définir son intensité un terme qui sera de la forme σdB_t où B_t est un mouvement brownien et une constante, on obtient une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma dB_t.$$

On généralise cette équation en permettant à σ de dépendre de l'état de y à l'instant t :

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)d\mathbf{B}_t.$$

On peut encore généraliser cette équation en permettant à b et σ de dépendre aussi du temps t pour avoir enfin une équation différentielle stochastique de la forme

$$dy_t = b(t, y_t)dt + \sigma(t, y_t)d\mathbf{B}_t.$$

Cela conduit à la définition suivante.

On note par $(M)_{d \times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients réels.

Définition 1.1.1. Soient d et m deux entiers positifs et soient σ et b des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $(M)_{d \times m}(\mathbb{R})$ et \mathbb{R}^d . On note $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq m}$ et $b = (b_i)_{1 \leq i \leq d}$.

Une solution de l'équation :

$\mathbf{E}(\sigma, b)$:

$$dX_t = \sigma(t, X_t) d\mathbf{B}_t + b(t, X_t) dt$$

est la donnée de :

- Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.
- Un (\mathcal{F}_t) mouvement brownien défini sur cet espace et à valeurs dans \mathbb{R}^m , $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^m)$.
- Un processus (\mathcal{F}_t) -adapté continu $X = (X^1, \dots, X^d)$ à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) d\mathbf{B}_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

- Lorsque $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$, on dira que le processus X est solution de $\mathbf{E}_x(\sigma, b)$.

Il existe plusieurs notions d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques. On les cite dans la définition suivante.

Définition 1.1.2. Pour l'équation $\mathbf{E}(\sigma, b)$, on dit qu'il y a

- existence faible si pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe une solution de $\mathbf{E}_x(\sigma, b)$.
- existence et unicité faibles si de plus toutes les solutions de $\mathbf{E}_x(\sigma, b)$ ont même loi
- unicité trajectorielle si l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ et le mouvement brownien B étant fixes, deux solutions X et X' telles que $X_0 = X'_0$ P.p.s. sont indistinguables.

On dit de plus qu'une solution X de $\mathbf{E}_x(\sigma, b)$ est une solution forte si X est adapté par rapport à la filtration canonique de \mathbf{B} .

1.2 Exemples

La solution d'une équation différentielle stochastique, si elle existe, n'est pas forcément unique et si elle l'est dans un sens, elle ne l'est pas forcément dans l'autre.

Quelques exemples pour illustrer ceci sont donnés suivis d'un théorème qui assure, sous certaines conditions sur b et σ , l'existence d'une unique solution forte.

Unicité faible mais pas trajectorielle

Soit β un mouvement brownien standard

On pose

$$\mathbf{W}_t = \int_0^t \text{sgn}(\beta_s) d\beta_s.$$

On a alors :

$$\beta_t = \int_0^t \text{sgn}(\beta_s) d\mathbf{W}_s$$

En effet :

$$\int_0^t \text{sgn}(\beta_s) d\mathbf{W}_s = \int_0^t \text{sgn}^2(\beta_s) d\beta_s \quad (1.1)$$

$$= \int_0^t d\beta_s \quad (1.2)$$

$$= \beta_t \quad (1.3)$$

\mathbf{W} est une martingale issue de 0 telle que $\langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle_t = t$ ainsi, par la caractérisation de Levy, \mathbf{W} est aussi un mouvement brownien. On voit alors que β est solution de l'EDS

$$dX_t = \text{sgn}(X_t) d\mathbf{W}_t, \quad X_0 = 0$$

On a l'unicité faible. Par la caractérisation Levy, toute solution doit être un mouvement brownien.

Par contre, on n'a pas d'unicité trajectorielle pour cette équation. En effet, β et $-\beta$ sont toutes les deux des solutions correspondant au même mouvement brownien.

Aussi, β n'est pas solution forte : par la formule de Tanaka, la filtration canonique de ω coïncide avec la filtration canonique de $|\beta|$ qui est strictement plus petite que celle de β . En effet, l'événement $\{\beta_t < 0\}$ appartient à \mathcal{F}^β mais pas à $\mathcal{F}^{|\beta|}$

1.3 Théonème d'existence et d'unicité

Théorème 1.3.1. (*Existence et unicité*)

On suppose qu'il existe une constante K positive telle que pour tout $t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^d$

1. *Condition de Lipschitz*

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

2. *Croissance linéaire*

$$|b(t, x)| \leq K(1 + |x|), \quad |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

Alors il y a unicité trajectorielle pour $\mathbf{E}(\sigma, b)$.

De plus, pour tout espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ et tout $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -mouvement brownien, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, une (unique) solution forte pour $\mathbf{E}_x(\sigma, b)$.

Preuve

Afin d'alléger les notations, on traitera uniquement le cas $d = m = 1$.

Commençons par établir l'unicité trajectorielle. Sur le même espace et avec le même mouvement brownien \mathbf{B} , on se donne deux solutions X et X' telle que $X_0 = X'_0$. Pour $M \geq 0$ fixé, posons

$$\tau = \inf\{t \geq 0, |X_t| \geq M \text{ ou } |X'_t| \geq M\}.$$

On a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$X_{t \wedge \tau} = X_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X_s) d\mathbf{B}_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X_s) ds$$

Vu que X' est aussi une solution, nous avons l'équation analogue

$$X'_{t \wedge \tau} = X'_0 + \int_0^{t \wedge \tau} \sigma(s, X'_s) d\mathbf{B}_s + \int_0^{t \wedge \tau} b(s, X'_s) ds$$

Remarquons que X et X' sont bornées par M sur l'intervalle $]0, \tau]$. En faisant la différence membre à membre de ces deux équations et par passage à l'espérance, on aura :

$$\begin{aligned} h(t) &:= \mathbf{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] \\ &= \mathbf{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) d\mathbf{B}_s + \int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right]^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

En utilisant le fait que $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on aura :

$$h(t) \leq 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) d\mathbf{B}_s\right)^2\right] + 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right)^2\right].$$

Par la propriété, isometrie on a

$$2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) d\mathbf{B}_s\right)^2\right] = 2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) ds\right)^2\right].$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et en majorant $t \wedge \tau$ par T , on trouve

$$2\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right)^2\right] \leq 2TE\left[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds\right]$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} h(t) &\leq 2TE\left[\int_0^{t \wedge \tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds\right] + 2TE\left[\int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds\right] \\ &\leq 2E\left[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - X'_s|^2 ds\right] + 2TE\left[\int_0^{t \wedge \tau} K^2 |X_s - X'_s|^2 ds\right] \\ &\leq 2K^2(1 + T)\left[\int_0^{t \wedge \tau} |X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau}|^2 ds\right] \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité provient du fait que b et σ soient lipschitziennes.

La fonction h vérifie

$$h(t) \leq C \int_0^t h(s) ds$$

avec $C = 2K^2(1 + T^2)$.

h est bornée par $4M^2$ et vérifie les conditions du lemme de Grönwall avec $a = 0$ et $b = C$ ce qui donne alors $h = 0$ donc P-p.s $X_{t \wedge \tau} = X'_{t \wedge \tau}$.

En faisant tendre M vers $+\infty$, on aura $X_t = X'_t$ pour tout t .

X est alors une modification de X' , mais comme ces processus sont continus, alors ils sont indistinguables. Ce qui achève la preuve de l'unicité trajectorielle.

Passons à présent au deuxième point.

On construit la solution par la méthode d'approximation de Picard. On pose

$$X_t^0 = x \quad (1.6)$$

$$X_t^1 = x + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s + \int_0^t b(s, x) ds \quad (1.7)$$

$$X_t^n = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \quad (1.8)$$

Par récurrence pour chaque n , X_t^n est continu et adapté, donc le processus $\sigma(t, X_t^n)$ l'est aussi. Fixons $T > 0$ et raisonnons sur $[0, T]$ vérifions d'abord par récurrence sur n que

$$\exists C_n : \forall t \in [0, T] \quad E[(X_t^n)^2] \leq C_n. \quad (2.2)$$

Pour $n = 0$, il n'y a rien à montrer.

Supposons à présent que ceci est vrai à l'ordre $n - 1$ et vérifions que cela reste vrai à l'ordre n .

Le calcul du moment d'ordre deux de l'intégrale stochastique se justifie par le fait que $E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] < \infty$, ce qui découle de la croissance linéaire et de

l'hypothèse de récurrence.

En utilisant encore la croissance linéaire, on écrit

$$\begin{aligned} E[(X_t^n)^2] &\leq 3(x^2 + E[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s)^2]) + E[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds)^2] \\ &\leq 3(x^2 + E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds]) + tE[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds] \\ &\leq 3(x^2 + E[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds]) + tE[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds] \\ &\leq 3(x^2 + (1 + t)E[\int_0^t (K + K|X_s^{n-1}|)^2 ds]) \\ &\leq 3x^2 + 3(1 + t)E[\int_0^t (2K^2 + 2(KX_s^{n-1})^2) ds] \\ &\leq 3x^2 + 6T(1 + T)(K^2 + 4C_{n-1}) := C_n. \end{aligned}$$

La majoration (2.2) et l'hypothèse de croissance linéaire sur σ entraînent que la martingale locale $(\int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s)$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n . On utilisera ceci pour majorer par récurrence

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2]$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})) dB_s + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})) ds$$

d'où

$$\begin{aligned} E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2] &\leq 2E[\sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) dB_u|^2 + \\ &\quad \sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})) du|^2] \\ &\leq 2(4E[(\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) dB_u)^2] + \\ &\quad E[(\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})| du)^2]) \\ &\leq 2(4E[(\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du] + \\ &\quad TE[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2 du]) \\ &\leq 2(4 + T)K^2 E[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du] \\ &\leq C_T E[\int_0^t \sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 dr] \end{aligned}$$

Avec $C_T = 2(4 + T)K^2$, posons

$$g_n(u) := E[\sup_{0 \leq r \leq u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2].$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t) \leq C_T \int_0^t g_n(u) du \quad (I)$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur $[0, T]$.

En effet, pour $n \geq 0$:

$$g_n(u) \leq 2(4+T)K^2 E\left[\int_0^t |X_u^n - X_u^{n-1}|^2 du\right] \quad (1.9)$$

$$\leq 2(4+T)K^2 E\left[\int_0^t (2(X_u^n)^2 + 2(X_u^{n-1})^2) du\right] \quad (1.10)$$

$$\leq 4T(4+T)(C_n^2 + C_{n-1}^2) \quad (1.11)$$

$g_0(t) = x^2$ qu'on appelle C'_T .

Une récurrence simple sur (I) donne :

$$g_n(t) \leq C'_T (C_T)^n \frac{t^n}{n!}.$$

Et, en vertu du critère de D'alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{1/2} < \infty.$$

Comme la norme de L^1 est dominée par la norme de L^2 , on aura

$$\sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right] < \infty.$$

Le théorème de la convergence monotone nous permet de dire que

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right] < \infty.$$

Ce qui entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \infty.$$

Mais si $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n < m$:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^m - X_t^n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{k+1} - X_t^k| \longrightarrow 0 \text{ quand } n, m \rightarrow \infty.$$

Par suite, p.s. la suite $(X_t^n, 0 \leq t \leq T)_n$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui est continu et adapté. En effet, on vérifie par récurrence que chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B , et donc X l'est aussi.

On a P - p.s.

$$\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^m - X_s^n| \quad (1.12)$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^k - X_s^{k-1}| \quad (1.13)$$

En introduisant la norme L^2 , on trouve que

$$E[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2] \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{1/2} \right)^2 \longrightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \text{ dans } L^2$$

et

$$\int_0^t b(s, X_s) dB_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) dB_s \text{ dans } L^2.$$

En effet

$$E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)) dB_s\right)^2\right] = E\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))^2 ds\right) \quad (1.14)$$

$$\leq E(K^2 \int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds) \quad (1.15)$$

$$\leq T^2 K^2 E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s - X_s^n|^2\right] \longrightarrow 0 \quad (1.16)$$

et on procède de la même manière pour b.

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour $X^n(2.3)$, on trouve que X est une solution (forte) de $E_x(\sigma, b)$ sur $[0, T]$.

1.4 Exemple

Dans cette section, on donne trois exemples de résolution d'EDS.

Exemple 1

Soit l'EDS suivante :

$$dX_t = -X_t dt + \exp^{-t} dB_t, \quad X_0 = x$$

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité sont vérifiées, on cherche alors l'unique solution de cette EDS.

On a

$$\exp^t dX_t = -\exp^t X_t dt + dB_t$$

ou encore

$$\exp^t dX_t + \exp^t X_t dt = dB_t$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties assure que :

$$d(\exp^t X_t) = \exp^t dX_t + X_t \exp^t dt$$

Ce qui donne :

$$d(\exp^t X_t) = dB_t$$

et donc, la solution s'écrit :

$$X_t = x + \exp^{-t} B_t.$$

Exemple 2 : Equation d'Ornstein Uhlenbeck

On cherche à résoudre l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t \quad X_0 = x.$$

où μ et σ sont deux réels.

Le théorème d'existence et d'unicité assure qu'il existe une unique solution.

On multiplie les deux côtés de cette équation par $\exp^{-\mu t}$, on obtient :

$$\exp^{-\mu t} dX_t = \mu X_t \exp^{-\mu t} dt + \sigma \exp^{-\mu t} dB_t.$$

ou encore

$$\exp^{-\mu t} dX_t - \mu X_t \exp^{-\mu t} dt = \sigma \exp^{-\mu t} dB_t.$$

D'un autre côté, la formule d'intégration par parties donne :

$$d(X_t \exp^{-\mu t}) = \exp^{-\mu t} dX_t - \mu X_t \exp^{-\mu t} dt$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve :

$$d(X_t \exp^{-\mu t}) = \sigma \exp^{-\mu t} dB_t,$$

d'où, la solution

$$X_t = x + \sigma \exp^{\mu t} \int_0^t \exp^{-\mu s} dB_s.$$

Exemple 3 (Modèle de Black et Scholes)

Le modèle de Black et Scholes est, à l'origine, un modèle à deux actifs : l'un risqué et l'autre pas. Dans cet exemple, on traite le cas de l'actif risqué, à savoir le prix d'une action à l'instant t . Il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

La solution est

$$S_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \exp^{\mu t}.$$

En effet, il suffit d'écrire $\sigma(t, x) = \sigma x$ et $b(t, x) = bx$ pour voir qu'elles vérifient les conditions du théorème (1.3.1). On applique ensuite la formule d'Itô à

$$f(t, x) = x \exp\left(\sigma x - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \exp^{\mu t}$$

on aura

$$S_t = f(t, B_t) \quad (1.17)$$

$$= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds \quad (1.18)$$

$$= \int_0^t (b - \frac{\sigma^2}{2}) S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t S_s ds. \quad (1.19)$$

d'où

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

1.5 Théorème de Yamada-Watanabe

Les conditions du théorème d'existence et d'unicité ne sont pas optimales. Toshio YAMADA et Shinzo WATANABE ont montré qu'on peut les affaiblir dans le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. *Soit $d = m = 1$ Supposons que b et σ sont à croissance linéaire, que b vérifie la condition de Lipschitz locale et $|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq \rho|x - y|$ pour tout $t \geq 0$, où ρ est une fonction borélienne de $]0, \infty[$ dans lui-même telle que*

$$\int_{|z| < \epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \quad \epsilon > 0$$

Alors $E_x(b, \sigma)$ admet une unique solution forte.

En effet, les conditions du théorème de Yamada et Watanabe sont plus faible que la condition de Lipschitz. Si σ est lipschitzienne, alors on a pour tous x et y réels, si

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq c|x - y|.$$

alors

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 \leq c^2|x - y|^2.$$

Il suffit alors de prendre $\rho(x) = x^2$. On a bien

$$\int_{|z| < \epsilon} \frac{1}{\rho^2(z)} dz = +\infty \quad \epsilon > 0$$

Exemples

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'EDS

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \quad X_0 = 0.$$

$f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne mais elle vérifie la condition du théorème de Yamada et Watanabe. La solution unique de cette équation est appelée processus de Feller.

1.6 Difusions d'Itô

Dans ce chapitre, on s'intéresse aussi au cas où les coefficients b, σ dépendent de l'état à l'instant mais pas du temps lui-même $\sigma(t, y) = \sigma(y)$. On montrera que la solution d'une telle équation possède, en outre les propriétés de Markov

1.6.1 Définitions et propositions

Définition 1.6.1. On dit que $(Y_t) = (Y_t^x)_t$ un processus d'Itô dans \mathbb{R}^n s'il s'écrit

$$(Y_t^x)_t = x + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

avec, pour tout $t \geq 0$

- $\int_0^t v(s, \omega)^2 ds < \infty$ presque sûrement
- $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty$ presque sûrement
- $u(t, \cdot)$ et $v(t, \cdot)$ sont \mathcal{F}_t -mesurables.

Définition 1.6.2. Une diffusion d'Itô (homogène) est un processus stochastique $X = (X_t)_{t \geq 0}$ de \mathbb{R}^n satisfaisant l'EDS de la forme

$$dX_t = b(X_t)dt + (\sigma(X_t)dB_t), \quad t \geq s, \quad X_s = x$$

Ou $s \geq 0$ donné, B un mouvement brownien de dimension m , $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ satisfont les conditions du théorème d'existence et d'unicité qui se réduisent dans ce cas à la condition suivante :

$$\exists D > 0; |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|;$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$

Ou $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{i,j}|$. Dans ce chapitre, On notera

- $X_t = X_t^{s,x}; t \geq s$ la solution (unique) de (3, 1) Quand $s = 0$ on note X_t^x au lieu de $X_t^{0,x}$
 - P_x désigne la loi de B sous $B_0 = x$ et E^x l'espérance sous P_x . Quand $x = 0, P_0 = P$
 - P^x désigne la loi de X sous $X_0 = x$ et E^x l'espérance sous P_x . Quand $x = 0$, on note E au lieu E_0
 - $(\mathcal{F}_t^m)_{t \geq 0}$ la filtration canonique de mouvement brownien m -dimensionnel
- Précision que puisque X est la solution de (3, 1), elle est obligatoirement adaptée à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Donnons maintenant une expression mathématique à P_x et P^x : Pour tous boréliens E_1, \dots, E_k de \mathbb{R}^n et tous réels positifs $t_1, \dots, t_k; K \geq 1$ on a :

$$P_x(B_{t_1} \in E_1, \dots, B_{t_k} \in E_k) = P[(B_{t_1} + x) \in E_1, \dots, (B_{t_k} + x) \in E_k]$$

et

$$P^x(X_{t_1} \in E_1, \dots, X_{t_k} \in E_k) = P[(X_{t_1}^x \in E_1, \dots, X_{t_k}^x \in E_k)]$$

Une diffusion d'Itô est homogène dans le temps, chose que l'on voit dans la proposition suivante :

Proposition 1.6.1. les processus $(X_{\tau+t}^{\tau,x})_{t \geq 0}$ et $(X_t^x)_{t \geq 0}$ sont de même loi sous P

Preuve

On a

$$X_{\tau+t}^{\tau,x} = x + \int_{\tau}^{\tau+t} b(X_u^{\tau,x}) du + \int_{\tau}^{\tau+t} \sigma(X_u^{\tau,x}) dB_u$$

En effectuant un changement de variable, $v = u - \tau$, on trouve

$$X_{\tau+t}^{\tau,x} = x + \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) du + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dB_{\tau+v}$$

En posant $B_v^\tau = B_{\tau+v} - B_\tau$, on aura

$$\begin{aligned} X_{\tau+t}^{\tau,x} &= x + \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dv + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) d(B_{\tau+v} - B_\tau) \\ &= x + \int_0^t b(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dv + \int_0^t \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x}) dB_v \end{aligned} \quad (1.20)$$

(1.21)

D'un autre côté,

$$x_t^{0,x} = x + \int_0^t b(x_v^{0,x}) dv + \int_0^t \sigma(x_v^{0,x}) dB_v$$

Comme B et B^τ sont de même loi, par l'unicité faible, on a :

$$(X_{\tau+t}^{\tau,x})_{t \geq 0} = (X_t^x)_{t \geq 0} \text{ en loi.}$$

On est désormais en mesure de vérifier les propriétés de Markov.

Proposition 1.6.2. (*Propriété de Markov faible*) Si f une fonction mesurable bornée de \mathbb{R}^n dans, \mathbb{R}^n , alors

$$\forall t, h \geq 0 \quad E^x[f(X_{t+h})/\mathcal{F}_t^{(m)}](\omega) = E^{X_t(\omega)}[f(X_h)] \quad P - ps$$

Énonçons à présent la propriété de Markov forte, la preuve de la propriété de Markov faible découlera directement de celle-ci.

Proposition 1.6.3. (*Propriété de Markov fort*)

Si f une fonction mesurable bornée de \mathbb{R}^n dans, \mathbb{R}^n et τ un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_\tau^{(m)})$ avec $\tau < \infty$ P -ps. alors

$$\forall h \geq 0 \quad E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \quad P - ps$$

Preuve : On veut montrer que

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)]$$

Remarquons que puisqu'on a la propriété de Markov forte pour un mouvement brownien, l'homogénéité dans le temps pour une diffusion d'Itô reste vraie si l'on change un temps déterministe de t par un temps d'arrêt τ (fini P-p.s).

On a

on a

$$X_t^0 = X_t^x - x$$

donc

$$E[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau] = E[f(X_{\tau+h} + x)/\mathcal{F}_\tau] \quad (1.22)$$

$$= E[f(X_{\tau+h} - X_\tau + X_\tau + x)/\mathcal{F}_\tau] \quad (1.23)$$

$$= E[G(X_{\tau+h} - X_\tau, X_\tau + x)/\mathcal{F}_\tau] \quad (1.24)$$

$$= g(X_\tau^x) \quad (1.25)$$

avec

$$g(\alpha) = E[G(X_{\tau+h} - X_\tau, \alpha)] \quad (1.26)$$

$$= E[f(X_{\tau+h} - X_\tau + \alpha)] \quad (1.27)$$

$$= E[f(X_h + \alpha)] \quad (1.28)$$

$$= E^\alpha[f(X_h)] \quad (1.29)$$

ou $G(x, y) = f(x + y)$

Afin de pouvoir effectuer ces calculs, on a utilisé la proposition suivante.

Soient \mathbb{B} une sous-tribu de \mathbb{F} , Y un vecteur aléatoire \mathbb{B} -mesurable et X une variable aléatoire indépendante de \mathbb{B} . Alors, pour toute fonction mesurable h ,

$$\mathbb{E}[h(Y, X)/\mathbb{B}] = \phi(Y), \quad P - ps$$

où

$$\phi(t) = \mathbb{E}(h(t, X))$$

en effet :

- $X_{\tau+h} - X_\tau$ est indépendant de \mathcal{F}_τ
 - X_τ est \mathcal{F}_τ mesurable
 - G est une fonction mesurable bornée
- En remplaçant α par X_τ , on obtient

$$E^x[f(X_{\tau+h})/\mathcal{F}_\tau^{(m)}](\omega) = E^{X_\tau(\omega)}[f(X_h)] \quad P - ps$$

Ce qui termine la preuve.

La propriété de Markov faible est obtenue en posant, pour chaque t fixé, $\tau = t$

Chapitre 2

Systeme lent-rapide stochastique

2.1 Resultats generaux sur les systemes lents-rapides deterministes

Nous considerons le systeme lent-rapide de dimension deux de la forme

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon} f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

avec f et g deux fonctions suffisamment regulieres de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et ϵ un parametre petit. La variable x est alors la variable rapide et y la variable lente. Nous definissons les branches d'equilibre par

Definition 2.1.1. *Supposons qu'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction continue $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall y \in I, f(x^*(y), y) = 0$$

On appelle branche d'equilibre du systeme (1.1) l'ensemble

$$M_0 = \{(x^*(y), y) : y \in I\}$$

De plus, soit

$$a^*(y) = f(x^*(y), y)$$

la linéarisation du champ de vecteur correspondant à la variable rapide au point $(x^*(y), y)$. La branche d'équilibre est dite stable (respectivement instable) si $a^*(y)$ est négatif (respectivement positif), borné et ne s'annule pas, uniformément pour $y \in I$.

Exemple 2.1.1. (Equation déterministe de FitzHugh-Nagumo)

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y) \\ y' = a - bx - cy. \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans le cas de l'équation de FitzHugh-Nagumo, il est plus simple d'exprimer les branches d'équilibre en fonction de x . Nous avons alors $y^*(x) = x^3 - x$ et $a^*(x) = 1 - x^3$. La branche d'équilibre $(x, x^3 - x)$ est donc stable pour $x < -1/\sqrt{3}$ et $x > 1/\sqrt{3}$ et instable pour $x \in]-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}[$.

Nous avons deux résultats sur les orbites qui commencent suffisamment près de la branche d'équilibre stable. Le premier, de Tikhonov [10] dit que les orbites qui commencent suffisamment près de la branche d'équilibre stable, suivent cette branche à distance d'ordre ϵ . Le deuxième, de Fenichel [11] précise ce résultat en disant que toutes les orbites, commençant près de la branche d'équilibre stable, convergent vers une courbe invariante.

Théorème 2.1.1. ([10]) Toute orbite commençant dans un voisinage suffisamment proche de la branche d'équilibre stable M_0 est attirée de façon exponentiellement rapide dans un voisinage d'ordre ϵ de M_0 .

Théorème 2.1.2. ([11]) Si la branche d'équilibre M_0 est stable, il existe alors une courbe M_ϵ qui est ϵ proche de M_0 et invariante sous le flux, c'est à dire que si $(x(0), y(0)) \in M_\epsilon$ alors $(x(t), y(t)) \in M_\epsilon$ tant que $y(t) \in I$. La courbe M_ϵ attire les orbites voisines exponentiellement rapidement.

La courbe invariante M_ϵ admet une équation paramétrique de la forme

$$x = \bar{x}(y, \epsilon), \text{ avec } \bar{x}(y, \epsilon) = x^*(y) + o(\epsilon).$$

Nous étudions ensuite la dynamique au niveau d'un point de bifurcation noeud-col.

Définition 2.1.2. *Un point (x^*, y^*) est un point de bifurcation noeud-col si le champ de vecteurs rapide vérifie les conditions*

$$\begin{aligned} f(x^*, y^*) &= 0 \\ \partial_x f(x^*, y^*) &= 0 \\ \partial_{xx} f(x^*, y^*) &\neq 0 \\ \partial_y f(x^*, y^*) &\neq 0 \end{aligned}$$

2.2 Système lentement dépendant de temps avec une dimension

Dans ce chapitre, nous examinons l'effet du bruit sur une classe particulière de systèmes singulièrement perturbés, en utilisant des équations à savoir lentement en fonction du temps avec une dimension

2.3 Branches d'équilibre stables

Nous considérons dans cette section le système de la forme

$$dx_t = \frac{1}{\epsilon} f(x_t, t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{(\epsilon)}} F(x_t, t) dW_t$$

dans le cas où f admet une branche d'équilibre asymptotiquement stable $x^*(t)$. Ceci équivaut à supposer que le potentiel $U(x, t)$ est strictement minimum locale en tout temps t . Plus précisément, nous aurons besoin de ce qui suit

2.3.1 Hypothèse (cas stable)

domaine et différentiabilité : $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ et $F \in C^2(D, \mathbb{R})$ où D est un domaine de la forme $D = \{(x, t) : t \in I, d_1(t) < x < d_2(t)\}$ ou interval $I = [0, t]$ et deux fonctions continues $d_1(t), d_2(t)$ tel que $d_2(t) - d_1(t)$ est positif et borné loin de $0 \in I$. Nous supposons en outre que f, F et tous leurs dérivées partielles jusqu'à ordre 2 respectivement 1, sont uniformément bornée dans D par un M . constant

- branche d'équilibre : Il existe une fonction continue $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}$ et une partie constante $d > 0$ tel que $d_1(t) + d < x^*(t) < d_2(t) - d$, et

$$f(x^*(t), t) = 0 \quad \forall t \in I$$

- La stabilité : Soit $a^* = \partial_x f(x^*(t), t)$ il existe une constante $a_0^* > 0$ tel que

$$a^*(t) \leq -a_0^* \quad \forall t \in I$$

- Non-dégénérescence du terme de bruit : il y a une constante $F_- > 0$ tel que

$$F(x, t) \geq F_- \quad \forall (x, t) \in D$$

Depuis la variété lente du système déterministe

$$M = \{(x, t) : x = x^*(t), t \in I\}$$

est un uniforme asymptotiquement stable d'après le théorème [Fenichels] implique l'existence d'une variété invariable M_ϵ à une distance de l'ordre ϵ de M

$$\bar{x}(t, \epsilon) = x^*(t) + \epsilon \frac{x^*(t)}{a^*(t)} + O(\epsilon^2)$$

Notre objectif principal sera de caractériser la déviation ξ_t entre x_t et le trajectoire invariant $\bar{x}(y(t), \epsilon)$ tel que

$$\xi_t = x_t - \bar{x}(y_t, \epsilon)$$

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \frac{1}{\epsilon} [f(\bar{x}(t, \epsilon) + \xi_t, t) - f(\bar{x}(t, \epsilon), t)] dt + \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} F(\bar{x}(t, \epsilon) + \xi_t, t) dW_t \\ &= \frac{1}{\epsilon} [a(t, \epsilon)\xi_t + b(\xi_t, t, \epsilon)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} [F_0(t, \epsilon) + F_1(\xi_t, t, \epsilon)] dW_t \end{aligned}$$

ou

$$a(t, \epsilon) = \partial_x f(\bar{x}(t, \epsilon)) = a^*(t) + O(\epsilon)$$

$$F_0(t, \epsilon) = F(\bar{x}(t, \epsilon), t)$$

On notera que $-a(t)$ est la courbure du potentiel et $-a(t, \epsilon)$ est la courbure a la solution adiabatique.

Les restes satisfont $|b(y, t, \epsilon)| < M|y|^2$ et $|F_1(y_t, t, \epsilon)| < M|y|$ pour tout y suffisamment petit

2.3.2 Cas linéaire

Dans cette section, nous étudions le l'EDS linéaire non autonome

$$dy_t^0 = \frac{1}{\epsilon} a(t) y_t^0 dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} F_0(t) dW_t$$

avec l'état initial $y_0 = 0$ où l'on suppose que a et F_0 sont des fonctions continues et différentiable dans \mathbb{R} avec $F_0(t)$ minorée par $F_0 > 0$ et $a(t)$ majorée par $-a_0 < 0$.

Sa solution et un processus gaussien et peut être représentée par les intégrales d'Itô

$$y_t^0 = \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^t e^{a(t,s)/\epsilon} F_0(s) dW_s$$

avec $a(t, s) = \int_s^t a(u)$ (la courbure cumulée entre les instants s et t),

y_t^0 est caractérisée par sa valeur moyenne égale à zéro et sa variance donnée par

$$\text{var}(y_t^0) = \frac{\sigma^2}{\epsilon} \int_0^t e^{2a(t,s)/\epsilon} ds. \quad (2.3)$$

La variance peut être calculée. En principe, on évalue deux intégrales. Cependant, l'expression (2.3) n'est pas facile à manipuler. Une autre expression se trouve en notant que $\text{var}(y_t^0) = \sigma^2 v(t)$ où $v(t)$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\epsilon v' = 2a(t)v + F_0(t)^2 \quad (2.4)$$

avec une condition initiale $v(0) = 0$.

Le côté droit de (2.4) disparaît sur la variété lente de l'équation

$$v(t) = v^*(t) = \frac{F_0(t)^2}{2|a(t)|} \quad (2.5)$$

ce qui est uniformément asymptotiquement stable

Nous concluons donc par le théorème de Tikhonov que (2.11) admet une solution particulière de la forme

$$\xi(t) = \frac{F_0(t)^2}{2|a(t)|} + O(\epsilon)$$

Remarque, en particulier que pour ϵ suffisamment petit, il existe des constantes $\xi_+ > \xi_- > 0$ telles que

$$\xi_- \leq \xi(t) \leq \xi_+.$$

La relation entre $\xi(t)$ et la variance de y_t^0 est donnée par

$$\text{var}(y_t^0) = \sigma^2 v(t) = \sigma^2 [\xi(t) - \xi(0)e^{2a(t)/\epsilon}]$$

où $\xi(0) = \frac{F_0(t)^2}{2|a(t)|} + O(\epsilon)$ et $a(t) = a(t, 0) \leq -a_0 \forall t \geq 0$.

Ainsi la variance s'approche de $\sigma^2 \xi(t)$ exponentiellement rapide.

Notre objectif est de montrer que les trajectoires de y_t^0 sont concentrées dans des ensembles de la forme

$$B(h) = \{(y, t), t \in I, |y| < h\sqrt{\xi(t)}\}.$$

Chaque fois que nous choisissons $h > \sigma$ en tout instant $t \in I$ fixé, la probabilité que (y_t^0, t) ne fait pas partie de $B(h)$ peut être exprimée en termes de distribution de fonction de la loi normale $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$

$$P\{(y_t^0, t) \in B(h)\} = 2\phi\left(\frac{-h}{\sigma} \sqrt{\frac{\xi(t)}{v(t)}}\right) \leq 2\phi\left(\frac{-h}{\sigma}\right) \leq e^{-h^2/2\sigma^2}$$

2.4 Équation déterministe de FitzHugh-Nagumo

Dans la section 1, on a commencé par des résultats généraux sur les systèmes d'équations lents-rapides. Ces résultats décrivent le comportement des solutions au voisinage des branches d'équilibre et des points de bifurcations. Nous appliquerons ces résultats au cas qui nous intéresse. Nous allons utiliser la notion de système excitable. On dit qu'un système est excitable s'il possède un point d'équilibre asymptotiquement stable et que des orbites peuvent passer proche du point d'équilibre mais faire une grande excursion dans le plan avant de retourner au point d'équilibre. Nous étudions d'abord le comportement des

solutions de l'équation de FitzHugh-Nagumo déterministe, introduite dans les articles [66] et [67], en faisant varier les différents paramètres de l'équation

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y) \\ y' = a - bx - cy \end{cases} \quad (2.6)$$

où a , b et c sont des réels et $\epsilon > 0$ est un petit paramètre. Nous supposons $c > 0$ pour avoir des solutions bornées. Pour l'étude de ce système, nous allons différencier les cas $b = 0$ et $b \neq 0$. Dans ces deux cas, nous étudierons les points d'équilibre. Dans le cas où $b = 0$, le système a entre un et trois points d'équilibre. Quand il y a un seul point d'équilibre, celui-ci est stable et le système n'est pas excitable alors qu'il l'est dans les autres cas. L'équation étant découplée, nous pouvons calculer directement y et le système se ramène alors à l'étude d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 avec potentiel. Dans notre cas, le potentiel peut avoir deux puits et la solution est attirée dans un de ces deux puits. Dans une troisième partie, nous considérons le cas $b \neq 0$. Nous commençons par étudier le cas particulier où $c = 0$. Dans ce cas, nous pouvons calculer facilement les valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre et dresser les différents cas suivant les valeurs d'un paramètre dépendant de a .

On peut trouver une étude plus détaillée des différents cas dans l'article[69].

2.4.1 Système découplé : cas $b = 0$

Nous étudions maintenant l'équation de FitzHugh-Nagumo (2.6) dans le cas où $b = 0$. Dans le cas où $b = 0$ et $c = 0$, la deuxième équation s'écrit alors $y' = a$. Si $a \neq 0$, il n'y a pas de point d'équilibre et les trajectoires partent à l'infini le long de la cubique. Si $a = 0$, alors y est constant et il y a entre un et trois points d'équilibre suivant la valeur de y . Les trajectoires sont parallèles à l'axe des abscisses et se terminent en l'un des points d'équilibre. Nous supposons ensuite $c \neq 0$ et nous pouvons donc diviser les deux équations par c , faire le changement de temps $t' = ct$ et définir les constantes a' et ϵ' telles que $a' = \frac{a}{c}$

et $\epsilon' = c\epsilon$.

Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y) \\ y' = a' - y \end{cases} \quad (2.7)$$

où le point désigne alors la dérivée par rapport au nouveau temps t' . Quitte à faire ce changement de temps et renommer les paramètres, nous pouvons prendre $c = 1$. Nous étudions alors le système

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y) \\ y' = a - y \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce système est découplé. Nous pouvons résoudre la deuxième équation qui ne porte que sur la variable y . Nous remplaçons ensuite y par son expression dans la première équation pour obtenir une équation différentielle non-linéaire sur x . Commençons par étudier les points d'équilibre de ce système.

Proposition 2.4.1. *Le système (2.8) a :*

- un point d'équilibre P stable si $a > 2/3\sqrt{3}$ ou $a < -2/3\sqrt{3}$
- deux points d'équilibres, P et B' ou P et B , si $a = \pm 2/3\sqrt{3}$ pour $a = -2/3\sqrt{3}$ le point B est dégénéré et l'autre point est un noeud stable. Pour $a = 2/3\sqrt{3}$ le point B' est dégénéré et l'autre point est un noeud stable.
- trois points d'équilibres, P' , P_1 et P_2 (voir figure), si $-2/3\sqrt{3} < a < 2/3\sqrt{3}$
Le point dont l'abscisse (P_1 sur la figure) est compris entre $-2/3\sqrt{3}$ et $2/3\sqrt{3}$ est dégénéré et les deux autres sont des noeuds stables.

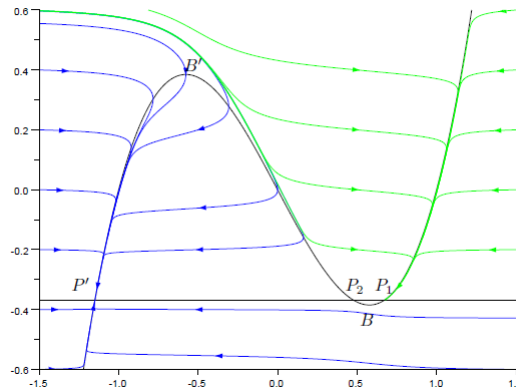


FIGURE 2.1 – Quelques trajectoires solution de l'équation (2.8) pour différentes conditions initiales et pour $\epsilon = 0.05$, $a = 0.37$, $b = 0$ et $c = 1$.

Le système (2.8) étant découplé et l'équation portant uniquement sur y étant simple, nous pouvons la résoudre et remplacer y dans la première équation.

La solution de $y' = a - y$ est

$$y(t) = a + (y_0 - a)e^{-t} \quad (2.9)$$

où y_0 est l'ordonnée initiale de la trajectoire. En remplaçant dans la première équation de (2.8), nous obtenons

$$x' - \frac{1}{\epsilon}v'(x) = \frac{y_0 - a}{\epsilon}e^{-t} \quad (2.10)$$

où V est le potentiel

$$v(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - ax \quad (2.11)$$

Nous avons à nouveau trois cas pour l'allure du potentiel. Si $|a| > 2/3\sqrt{3}$ la dérivée $V'(x)$ s'annule en un seul point et V admet un minimum global qui

correspond à un puits de potentiel qui correspond à l'unique point d'équilibre que nous avons vu pour ce cas (figure 2.2 (a)). Si $|a| = 2/3\sqrt{3}$ (figure 2.2 (b)), la dérivée $V'(x)$ s'annule en deux points, mais en un des points il n'y a pas d'extremum local. Enfin, si $|a| < 2/3\sqrt{3}$ (figure 2.2 (c)), la dérivée $V'(x)$ s'annule en deux points x_{P_-} et x_{P_+} . L'un correspond au minimum global et l'autre à un minimum local. Quand a est négatif, le minimum global est obtenu pour une abscisse négative x_- . Plus a augmente, plus la différence $x_{P_+} - x_{P_-}$ est petite. Pour $a = 0$, les deux minimums sont les mêmes. Quand a devient positif, le minimum global est atteint pour une abscisse positive x_+ . Sur la représentation graphique du potentiel V de la figure 1.2 (c), nous définissons les points P_- et P_+ de coordonnées respectives $(x_-; V(x_-))$ et $(x_+; V(x_+))$. Le premier correspond au minimum global de la fonction V et le second à un minimum local. Nous avons donc deux puits de potentiel qui correspondent aux deux points d'équilibre du système (2.8). Le puits correspondant à P_- est beaucoup plus profond que celui de P_+ . Il est ainsi difficile d'en sortir : si nous prenons une condition initiale x_0 un peu écarté de x_- nous revenons en x_- . Le puits associé à P_+ est, en revanche, très peu profond sur la gauche : le maximum local et le minimum local sont très proches. Prenons une condition initiale x_0 plus petite que x_+ . Si x_0 est suffisamment proche de x_+ , la faible pente ramène au niveau du point P_+ . Dès que x_0 passe l'abscisse du maximum local, nous tombons dans le puits plus profond vers le point P_- .

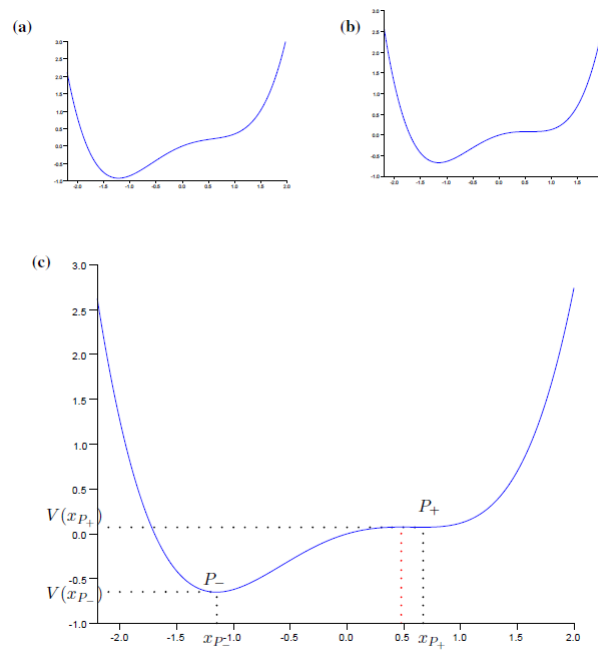


FIGURE 2.2 – Graphique du potentiel V défini en (2.11) avec $\epsilon = 0.01$ et en (a) $a = 0.6$, en (b) $a = -2/3\sqrt{3}$ et en (c) $a = 0.37$.

Cas $b \neq 0$

Dans le cas où $b \neq 0$, nous pouvons diviser les deux équations par b , faire le changement de temps $t' = bt$ et définir les constantes a' , c' et ϵ' telles que $a' = a/b$, $c' = c/b$ et $\epsilon' = b\epsilon$. Nous obtenons alors le système

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon'}(x - x^3 + y) \\ y' = a' - x - c'y \end{cases} \quad (2.12)$$

où le point désigne alors la dérivée par rapport au nouveau temps t' . Quitte à faire ces changements, nous pouvons donc prendre $b = 1$ dans le système (2.6)

et étudier le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y) \\ \dot{y} = a - x - cy \end{cases} \quad (2.13)$$

Cas particulier où $c = 0$

Afin de limiter le nombre de variables, nous fixons dans un premier temps $c = 0$. Nous allons calculer le point d'équilibre et étudier sa nature suivant la valeur des paramètres a et ϵ

Proposition 2.4.2. *Le système (2.13) a un unique point d'équilibre $P(x^*; y^*)$ qui a pour coordonnées*

$$(x^*, y^*) = (a : a - a^3) \quad (2.14)$$

Soit

$$\delta = \frac{3a^2 - 1}{2} \quad (2.15)$$

1. si $\delta < -\sqrt{\epsilon} < 0$ où $\delta > \sqrt{\epsilon} > 0$, P est un noeud instable. où instable
2. si $\delta = 0$, P est un point de bifurcation de Hopf.
3. si $-\sqrt{\epsilon} < \delta < \sqrt{\epsilon}$, P est un foyer stable. où instable

Preuve

Nous pouvons réécrire le système sous la forme

$$\dot{X} = F(X) \quad (2.16)$$

où X est le vecteur ligne (x, y) et F une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$F(X) = F(x, y) = \left(\frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y), a - x \right) \quad (2.17)$$

Les points d'équilibre $(x^*; y^*)$ vérifient l'équation $F(x^*; y^*) = 0$. Ce système a une unique solution

$$(x^*, y^*) = (a, a^3 - a) \quad (2.18)$$

Pour déterminer la nature de ce point d'équilibre, nous calculons les valeurs propres de la matrice jacobienne au point d'équilibre. La matrice jacobienne est

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}(1 - 3x^2) & \frac{1}{\epsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.19)

La jacobienne au point d'équilibre est donc

$$DF(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon}(1 - 3a^2) & \frac{1}{\epsilon} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.20)

Nous calculons le polynôme caractéristique de la matrice puis ses racines pour déterminer les valeurs propres. Le polynôme caractéristique de $DF(x^*, y^*)$ est

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{\epsilon}(1 - 3a^2)X + \frac{1}{\epsilon} \quad (2.21)$$

Les valeurs propres sont donc

$$\mu_{+-} = \frac{1 - 3a^2 \pm \sqrt{(1 - 3a^2)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon} \quad (2.22)$$

Posons

$$\delta = \frac{3a^2 - 1}{2} \quad (2.23)$$

Les valeurs propres se réécrivent alors :

$$\mu_{+-} = \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \epsilon}}{\epsilon} \quad (2.24)$$

Nous avons alors cinq cas différents

1. si $\delta < -\sqrt{\epsilon} < 0$ où $\delta > \sqrt{\epsilon} > 0$ les deux valeurs propres sont réelles
Si les deux valeurs propres sont positives (respectivement négatives), P est un noeud instable (respectivement stable)
2. si $\delta = 0$ les deux valeurs propres sont imaginaires pures. Le point d'équilibre est un centre.
3. si $-\sqrt{\epsilon} < \delta < \sqrt{\epsilon}$, les deux valeurs propres sont complexes
Si la partie réelle est positive (respectivement négative), P est un foyer instable (respectivement stable)

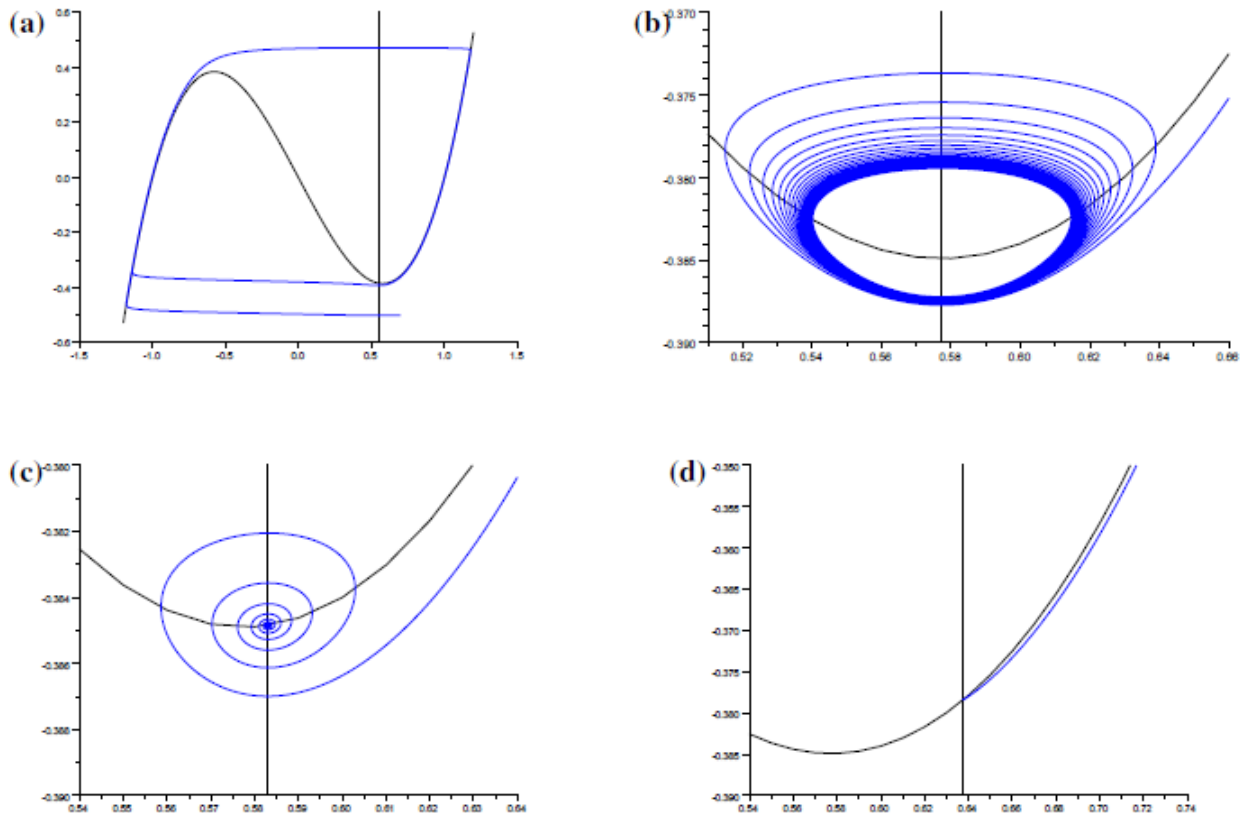


FIGURE 2.3 – Exemples de solutions de l'équation de FitzHugh-Nagumo (2.6). Les courbes bleues montrent la solution en coordonnées (x, y) et les courbes noires la cubique telle que $x = 0$ et la droite telle que $y = 0$. Les valeurs de paramètres sont $\epsilon = 0.01$ et en (a) $\delta = -0.05$, (b) $\delta = 0$, (c) $\delta = 0.01$, (d) $\delta = 0.11$

Nous illustrons ces résultats sur la (figure 2.3). En (a), nous avons toute la trajectoire alors qu'en (b), (c) et (d), nous avons un gros plan sur le comportement au voisinage du point d'équilibre. Quand le point d'équilibre est instable ($\delta < 0$), la trajectoire tend vers un grand cycle limite (figure 2.3 (a)). Nous pouvons voir que la variable x est la variable rapide : quand la trajectoire s'éloigne de la cubique, la courbe est presque parallèle à l'axe des x . Quand le point d'équilibre est stable ($\delta \geq 0$), nous avons trois comportements différents. Si $\delta = 0$ (figure 2.3 (b)), le point d'équilibre est un point de bifurcation de Hopf et la trajectoire tend vers un petit cycle limite autour

du point d'équilibre. Si $0 < \delta < -\sqrt{\epsilon}$ (figure 2.3 (c)), la trajectoire s'enroule autour du point d'équilibre. Dans le dernier cas, le point d'équilibre est très attractif et la trajectoire va directement sur le point d'équilibre (figure 2.3 (d)).

Nous allons étudier l'allure de la trajectoire au voisinage du point d'équilibre . Nous commençons par translater l'origine des coordonnées au point d'équilibre P de coordonnées (x^*, y^*) . Nous faisons donc le changement de variables :

$$\begin{aligned}x &= x^* + u \\ y &= y^* + v\end{aligned}\tag{2.25}$$

Le système (2.13) avec $c = 0$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\epsilon u' &= (1 - 3a^2)u + v - 3au^2 - u^3 \\ v' &= -u\end{aligned}\tag{2.26}$$

Le point d'équilibre P a alors pour coordonnées $(u, v) = (0, 0)$. Regardons une approximation valable au voisinage du point d'équilibre. Si u et v sont petits, nous pouvons, en première approximation, négliger les termes en u^2 et u^3 car $u^3 \leq u^2 \leq u \leq 1$. Le système (2.26) se comporte alors comme le système

$$\begin{aligned}\epsilon u' &= (1 - 3a^2)u + v \\ v' &= -u\end{aligned}\tag{2.27}$$

Nous allons montrer que dans le cas où la matrice jacobienne $DF(x^*, y^*)$ a deux racines complexes conjuguées avec une partie réelle négative, la solution de (2.27) est une spirale logarithmique

Proposition 2.4.3. *Il existe un changement de variables $(u, v) \rightarrow (r, \theta)$ en coordonnées de type polaire tel que le système (2.27) avec la condition initiale $r_0 e^{i\theta_0}$ ait pour solution*

$$\begin{aligned} r &= r_0 e^{-\mu_R t} \\ \theta &= \theta_0 + \mu_I t \end{aligned} \tag{2.28}$$

où μ_R, μ_I sont deux réels strictement positifs définis en fonction du paramètre δ par

$$\mu_R = \frac{\delta}{\epsilon} \mu_1 = \frac{\sqrt{\epsilon - \delta^2}}{\epsilon} \tag{2.29}$$

Preuve

La matrice jacobienne $DF(x^*, y^*)$ au point d'équilibre a deux racines réelles complexes avec une partie réelle négative. Nous avons donc

$$0 < \delta < \sqrt{\epsilon} \tag{2.30}$$

Nous pouvons alors écrire les valeurs propres de la matrice $DF(x^*, y^*)$ sous la forme

$$\mu_{+-} = \mu_R \pm i\mu_I \tag{2.31}$$

Nous avons en particulier la relation entre μ_R et μ_I

$$\mu_R^2 + \mu_I^2 = \frac{1}{\epsilon} \tag{2.32}$$

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres μ_{+-} sont les vecteurs

$$v_{+-} = \begin{pmatrix} \frac{-\delta \pm \sqrt{-\delta^2 + \epsilon}}{\epsilon} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Prenons alors la matrice de changement de base Q qui permet d'obtenir la réduction de Jordan J de la matrice $DF(x^*, y^*)$ dans \mathbb{R} . Q est définie par

$$Q = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} -\delta & \sqrt{-\delta^2 + \epsilon} \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_R^2 & \mu_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

L'inverse de la matrice Q est donnée par :

$$Q^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon - \delta^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ -\delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_I} \begin{pmatrix} 0 & \mu_I \\ 1 & \mu_R \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

La matrice $DF(x^*; y^*)$ dans cette base est alors :

$$J = Q^{-1}DF(x^*, y^*)Q = \begin{pmatrix} -\mu_R & -\mu_I \\ \mu_I & -\mu_R \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Le système (2.27) peut s'écrire

$$U \cdot = DF(x^*, y^*)U \quad (2.37)$$

où U est le vecteur colonne

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Nous pouvons écrire ce système linéaire

$$Q^{-1}U = jQ^{-1}U \quad (2.39)$$

En faisant le changement de variable

$$\Phi = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = Q^{-1}U \quad (2.40)$$

Nous obtenons l'équation :

$$\Phi \cdot = J\Phi \quad (2.41)$$

En posant,

$$z = \xi + i\zeta \quad (2.42)$$

nous trouvons l'équation

$$z' = (-\mu_R + i\mu_I)z \quad (2.43)$$

La solution générale de cette équation est :

$$z(t) = z_0 e^{-\mu_R t} e^{i\mu_I t} \quad (2.44)$$

En coordonnées polaires, si nous posons $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, nous obtenons la courbe donnée par le système (2.28). Le réel μ_R est positif et non nul. Nous avons alors une spirale logarithmique.

Remarque

Les coordonnées d'un point d'équilibre P peuvent se mettre sous la forme $(a, a^3 - a)$ avec a qui vérifie la relation

$$a + c(a^3 - a) = a$$

Remarque

Soit

$$a_* = \sqrt{\frac{1 - c\epsilon}{3}}$$

Si $c^2 < 1/\epsilon$, le système (2.13) admet un point de bifurcation de Hopf pour $a = a_{+-}$

Proposition 2.4.4. (*Changement de coordonnées*) *L'équation de FitzHugh-Nagumo (2.6) peut se mettre sous la forme*

$$\begin{cases} \xi' = \frac{1}{2} - z + \sqrt{\epsilon}(c\xi - \frac{1}{9a_*^2\xi^3}) \\ z' = \mu + 2z\epsilon + \sqrt{\epsilon}(\frac{2}{9a_*^2\xi^4} + c(\frac{1}{2} - 3\xi^2 - z)) \end{cases} \quad (2.45)$$

où μ est une constante définie par

$$\mu = \frac{3a_*(a - a_* - c(a_*^3 - a_*))}{\sqrt{\epsilon}}$$

2.5 Systèmes lents-rapides stochastiques

Nous considérons, dans ce chapitre, des perturbations stochastiques de l'EDO lente-rapide (2.1) de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\epsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} F(x_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t, y_t) dW_t. \end{aligned} \quad (2.46)$$

De cette façon, σ^2 et $(\sigma')^2$ mesurent le rapport entre taux de diffusion et de dérive, respectivement, pour la variable rapide x et lente y . Nous pouvons envisager, $\sigma = \sigma(\epsilon)$ et $\sigma' = \sigma'(\epsilon)$ comme étant des fonctions de ϵ , pourvu que le rapport $\rho(\epsilon) = \sigma'(\epsilon)/\sigma(\epsilon)$ soit borné supérieurement lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

avec Les coefficients de dérive $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$ et $g \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$, et les coefficients de diffusion $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times k})$ et $G \in C^1(D, \mathbb{R}^{m \times k})$ seront uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; et $\{W_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener k -dimensionnel standard dans $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, et les intégrales stochastiques sont définies dans le sens d'Itô;

– les coefficients de dérive et de diffusion satisfont les conditions usuelles de croissance et de Lipschitz garantissant l'existence d'une unique solution forte $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$ de (3.1), admettant une version continue.

Pour $(x_0, y_0) \in D$, nous dénotons par $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$ la loi du processus de Markov homogène $(x_t, y_t)_{t \geq t_0}$, de condition initiale $(x_{t_0}, y_{t_0}) = (x_0, y_0)$, et par $\mathbb{E}^{t_0, (x_0, y_0)}$ les espérances relativement à $\mathbb{P}^{t_0, (x_0, y_0)}$.

2.5.1 Variété lente

Définition 2.5.1. – Soit $D_0 \in \mathbb{R}^m$ d'ouvert connexe et une fonction continue $x^* : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ tel que l'ensemble

$$M = \{(x, y) \in D : x = x^*(y), y \in D_0\}$$

et $f(x^*(y), y) = 0$ est une variété lente du système.

– La stabilité : La variété lente est uniformément asymptotiquement stable, si, tout valeurs propres de la matrice jacobienne

$$A^*(y) = \partial_x f(x^*(y), y) \tag{2.47}$$

sont des parties réelles négatives, uniformément bornée loin de 0 pour $y \in D_0$

2.5.2 Concentration des trajectoires

Afin de définir le domaine de la concentration $B(h)$ nous considérons d'abord l'approximation linéaire du système (1.3) à proximité du variété adiabatique M_ϵ

Nous introduisons la déviation ξ_t entre x_t et la trajectoire invariante $\bar{x}(y(t), \epsilon)$ tel que

$$\xi_t = x_t - \bar{x}(y_t, \epsilon)$$

Nous rappelons que avec $\bar{x}(y(t), \epsilon) = x^*(y) + o(\epsilon)$ Nous obtenons alors l'équation

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \frac{1}{\epsilon} [\bar{a}(y_t, \epsilon)\xi_t + O(\xi_t^2) + O(\epsilon(\sigma_2)^2)]dt \\ &= + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\epsilon}} [F_0(y_t, \epsilon) + O(\xi_t)]dW_t^1 \\ &= -\sigma_2 \partial_y \bar{x}(y(t), \epsilon) [G_0(y(t), \epsilon) + O(\xi(t))]dW_t^2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

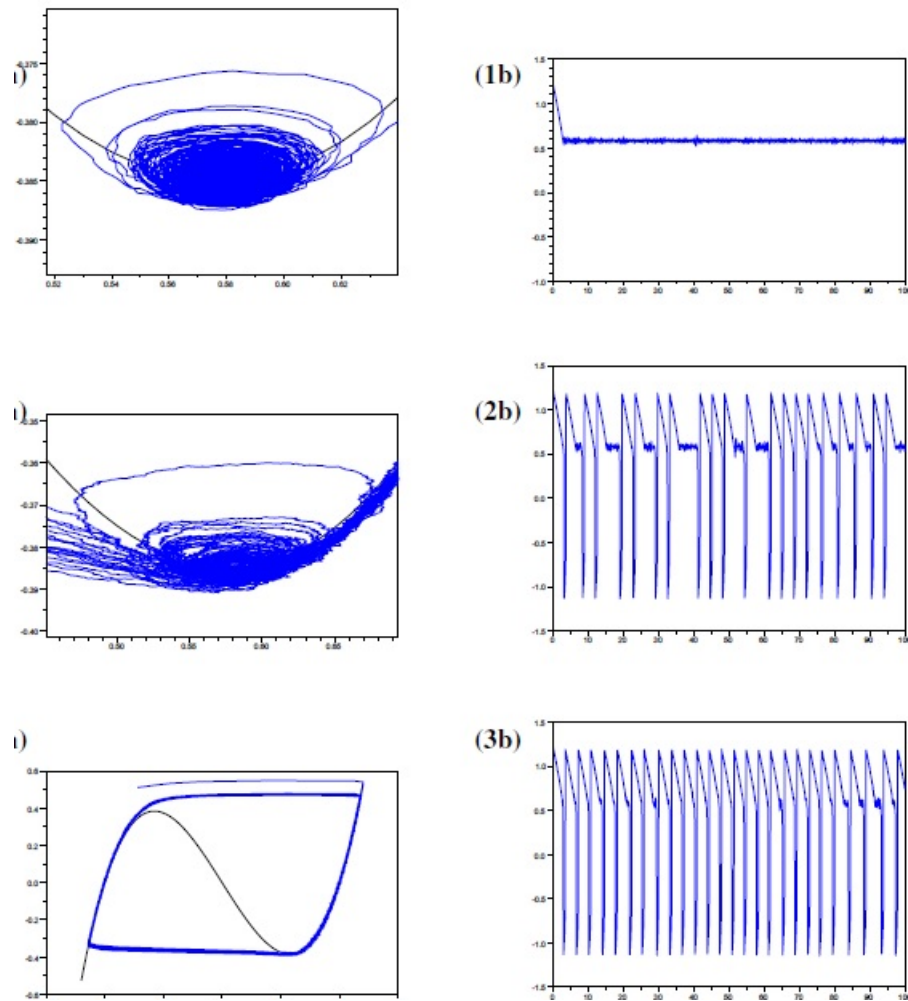


FIGURE 2.4 – Exemples de trajectoires de l'équation de Fitzugh-Nagumo (3.0.1) en coordonnées (x, y) (colonne de gauche) et $(t; x)$ (colonne de droite). Les valeurs des paramètres sont $\sigma_1 = 0,001, \sigma_2 = 0,003, \sigma_3 = 0,007$.

Où \bar{a}, F_0 , et G_0 sont définis par

$$\begin{aligned}
 \bar{a}(y, \epsilon) &= \partial_x f(\bar{x}(y, \epsilon), y) = a^*(y) + O(\epsilon) \\
 F_0(y, \epsilon) &= F(\bar{x}(y, \epsilon), y) = (x^*(y), y) + O(\epsilon) \\
 G_0(y, \epsilon) &= G(\bar{x}(y, \epsilon), y) = G(x^*(y), y) + O(\epsilon)
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Notez que le nouveau terme de dérive disparaît lorsque $\xi_t = 0$ et $\sigma' = 0$ par ce que l'équation $\epsilon \partial_x \bar{x}(y_t, \epsilon) g(\bar{x}(y_t, \epsilon))$ satisfaite par $f(\bar{x}(y_t, \epsilon), y_t)$

Nous approchons $y(t)$ par $y^0(t)$ solution de l'équation déterministe associée et nous considérons l'approximation linéaire ξ_t^0 de ξ_t . Nous obtenons alors le système

$$\begin{aligned} d\xi_t^0 &= \frac{1}{\epsilon} \bar{a}(y_t^0, \epsilon) \xi_t^0 dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\epsilon}} F_0(y_t^0, \epsilon) dW_t^1 \\ &= -\sigma_2 \partial_y \bar{x}(y^0(t), \epsilon) G_0(y^0(t), \epsilon) dW_t^2 \\ dy_t^0 &= g(\bar{x}(y_t^0, \epsilon), y_t^0) dt \end{aligned} \quad (2.50)$$

En supposant que $x(t)$ part de la trajectoire invariante $\bar{x}(y(t), \epsilon)$ au temps = 0 nous avons alors $\xi_t = 0$ et nous pouvons supposer $\xi_t^0 = 0$ le processus $\{\xi^0(t)\}_t$ est un processus gaussien, centré et une variance $\sigma_1 v(t)$. la fonction $v(t)$ est solution du système lent-rapide déterministe :

$$\begin{aligned} \epsilon v &= 2\bar{a}(y^0(t), \epsilon) v(t) + F_0(y^0(t), \epsilon)^2 + \epsilon \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \partial_y \bar{x}(y^0(t), \epsilon) G_0(y^0(t), \epsilon) \right]^2 \\ dy_t^0 &= g(\bar{x}(y_t^0, \epsilon), y_t^0) dt \end{aligned} \quad (2.51)$$

par le théorème de Tikonove, nous déduisons que $v(t)$ peut être approchée par une fonction $\bar{v}(y^0(t), \epsilon)$ qui vérifie

$$\bar{v}(y^0(t), \epsilon) = \frac{F(\bar{x}(y, \epsilon), (y^0(t))^2)}{2\partial_x f(\bar{x}(y, \epsilon), y^0(t))} + O(\epsilon) \quad (2.52)$$

Cela signifie que la variance de la déviation $\xi^0(t)$ est proportionnelle à la variance du terme de bruit et inversement proportionnelle à l'attractivité de la branche d'équilibre stable.

Nous introduisons ensuite le domaine

$$B(h) = \{(x, y) : y \in I, |x - \bar{x}(y, \epsilon)| < h^2 \bar{v}(y, \epsilon)\}$$

où I est un intervalle sur lequel la branche d'équilibre $x^*(y)$ est stable.

Nous définissons les deux temps de sortie :

$$\tau_{B(h)} = \inf\{t > 0 : (x(t), y(t)) \notin B(h)\}$$

Le domaine $B(h)$ est un tube centré autour de la courbe invariante \bar{x} et correspond à l'ensemble dans lequel nous supposons que la trajectoire va rester. Le temps τ_I donne le premier temps pour lequel la variable lente y sort de l'intervalle correspondant à une branche d'équilibre stable. Le temps $\tau_{B(h)}$ correspond au premier temps de sortie du domaine $B(h)$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.5.1. (*[12]*) *Supposons que la condition initiale $(x(0), y(0))$ soit sur la courbe invariante, ie $x(0) = \bar{x}(y(0), \epsilon)$ pour un $y(0) \in I$. Il existe alors des constantes $h_0, c, l > 0$ telles que pour tout $h < h_0$*

$$P\{\tau_{B(h)} < \min(t, \tau_I)\} \leq C(t, \epsilon) \exp(-kh^2/2\sigma^2)$$

où l'exposant k ne dépend pas du temps et vérifie

$$k = 1 - O(h) - O(\epsilon(\sigma_1/h)^2) - O(\exp -c/\epsilon/h)$$

et le préfacteur est donné par

$$C(t, \epsilon) = L \frac{(1+t)^2}{h^2 \epsilon} \left(1 + \frac{h^2}{\sigma^2}\right)$$

Pour une valeur de h suffisamment grande, pour $h \gg \sigma$, la trajectoire a une probabilité très faible de quitter le domaine $B(h)$, avant que $y(t)$ ne quitte l'intervalle I sur lequel la branche d'équilibre est définie. En particulier si nous prenons h suffisamment plus grand que σ , de l'ordre de $\sigma |\log \sigma|$, le majorant de l'inégalité (3.2.10) devient très petit, même si nous attendons un temps assez long. La trajectoire reste donc avec une grande probabilité dans le domaine $B(\sigma |\log \sigma|)$. Nous donnons ensuite un résultat pour le comportement au voisinage d'un point de bifurcation

2.5.3 Bifurcations dynamiques

Nous considérons toujours le système lent-rapide stochastique

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(x_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t, y_t) dW_t. \end{aligned} \quad (2.53)$$

dans le cas où le système associé admet un point de bifurcation. Plus précisément, nous ferons les hypothèses suivantes

Hypothèse

- Domaine et dérivabilité : Les coefficients de dérive $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$ et $g \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$, et les coefficients de diffusion $F \in C^1(D, \mathbb{R}^{n \times k})$ et $G \in C^1(D, \mathbb{R}^{m \times k})$ seront uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; et $\{W_t\}_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener k -dimensionnel standard dans $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$
- point de bifurcation : supposons que $f(0, 0) = 0$ et que $\partial_x f(0, 0)$ admet q valeurs propres sur l'axe imaginaire, les autres $n - q$ valeurs propres ayant partie réelle négative. Nous pouvons alors introduire des coordonnées (x^-, z) en $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ dans lesquelles le système s'écrit

$$\begin{aligned} dx_t^- &= \frac{1}{\varepsilon} f^-(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^-(x_t^-, z_t, y_t) dW_t \\ dz_t &= \frac{1}{\varepsilon} f^0(x_t^-, z_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F^0(x_t^-, z_t, y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t^-, z_t, y_t) dt + \sigma' G(x_t^-, z_t, y_t) dW_t, \end{aligned} \quad (2.54)$$

On discutera la dynamique réduite le cas particulier avec $q = 1$: la bifurcation selle-noeud

2.5.4 Bifurcation selle-noeud

Nous considérons ici un système réduit dans le cas d'une bifurcation selle-noeud à l'origine (en particulier $q = 1$). Pour simplifier, nous discutons le cas où $m = 1$,

et où la dynamique lente est triviale :

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Nous pouvons donc admettre que $y_t = t$ (avec t_0 pas nécessairement nul), et considérer le processus homogène $\{x_t\}_{t \geq t_0}$. Une bifurcation selle-noeud (indirecte) a lieu en $(0, 0)$ si

$$f(0, 0) = 0, \quad \partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, 0) < 0, \quad \partial_{xx} f(0, 0) < 0. \tag{2.56}$$

Dans ce cas, la variété lente est formée d'une branche stable $\{x = x^*(y), y \leq 0\}$, avec $x^*(y) \asymp |y|^{1/2}$, et une variété instable $\{x = x_-(y), y \leq 0\}$, avec $x_-(y) \asymp -|y|^{1/2}$.

2.5.5 Bifurcation Hopf

Dans cette section, nous considérons le cas où le système rapide admet un point de bifurcation de Hopf. Afin de garder la discussion raisonnablement simple, plutôt que de considérer le cas le plus général, nous restreindrons notre attention aux situations dans lesquelles

- le coefficient de diffusion pour la variable rapide ne dépend que de la variable lente,
- Il n'y a aucun terme de bruit agissant sur la variable lente,
- la variable lente est unidimensionnelle, tandis que la variable rapide et le mouvement brownien sont 2-dimensionnels.

Nous examinerons donc un système lent-rapide d'EDS de la forme

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} f(x_t, y_t) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F(y_t) dW_t \\ dy_t &= g(x_t, y_t) dt, \end{aligned} \tag{2.57}$$

sous les hypothèses suivantes.

Hypothèse(Bifurcation Hopf).

- **Domaine et dérivabilité** : Il y a un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sont real-analytique et uniformément bornées dans la norme par une constante M .
- **Variété lente** : Il existe une fonction $x^* : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(x^*(y), y) \in D$ et $f(x^*(y), y) = 0$ pour tout y .
- **Bifurcation de Hopf** : la matrice jacobienne $A^*(y) = \partial_x f(x^*(y), y)$ a valeurs propres complexe conjugué $a^*(y) = \pm iw^*(y)$. Il y a un $y_0 \in I$ tel que $a^*(y)$ a le même signe que $y - y_0$ et $d_y a^*(y_0)$ est strictement positif. La partie imaginaire $w^*(y)$ est bornée loin de 0 dans I . Enfin, $g(0, y) > 0$ pour $y \in I$.
- **Non-dégénérescence du terme de bruit** : $F(y)F(y)^T$ est définie positive pour tout $y \in I$.

[15][théorème 5.3.8]. On va fixer la condition initiale $(0, y_0) \in \mathcal{B}(h)$ avec $y_0 \leq \sqrt{\varepsilon}$. Il existe des constantes $\varepsilon_0, \Delta_0, h_0, c_1, L > 0$, tel que pour tous $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \Delta \leq \Delta_0$ et tout $\gamma \in (0, 1)$ et pour tout $h \leq h_0\sqrt{\varepsilon}$,

$$\mathbb{P}^{0, y_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < \bar{\tau}(\sqrt{\varepsilon}) \} \leq \frac{L}{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{1 - \gamma} e^{-k_+ h^2 / 2\sigma^2} \quad (2.58)$$

où l'exposant k_+ satisfait

$$k_+ = \gamma[1 - c_1(\Delta + h^2/\varepsilon)]. \quad (2.59)$$

Considérons maintenant la dynamique après y_t a atteint $\sqrt{\varepsilon}$, toujours en supposant que $\sigma \leq \sqrt{\sigma}$. Nous attendons maintenant des chemins d'échantillon de quitter les environs de la direction de l'équilibre au $x = 0$ exponentiellement rapide. L'évasion est dominée par diffusion dans un ensemble de forme

$$\mathcal{S}(h) = \{(x, y) : y > \sqrt{\varepsilon}, y \in I, \|x\| \leq h\rho(y)\}, \quad (2.60)$$

où la définition de $\rho(y)$ est donné par

$$\rho(y) = \sqrt{\frac{\text{Tr}(F(y)F(y)^T)}{2a(y)}} \quad (2.61)$$

[15][théorème 5.3.9]. Soit $\mu > 0$, et l'ensemble $C_\mu = (2 + \mu)^{-(1+\mu/2)}$. Alors, pour tout y et pour tout condition initiale $(x_0, y) \in \mathcal{S}(h)$ telle que $\sigma < h < (y_0^2 C_\mu \sigma^{1+\mu})^{1/(3+\mu)}$, et tout $y \in I$ avec $y \geq y_0 \vee \sqrt{\varepsilon}$,

$$\mathbb{P}^{x_0, y_0} \{ \tau_{\mathcal{S}(h)} \geq \bar{\tau}(y) \} \leq \left(\frac{h}{\sigma} \right)^{2\mu} \exp \left\{ -k_\mu \frac{\alpha(y, y_0)}{\varepsilon} \right\}, \quad (2.62)$$

où $\alpha(y, y_0) = \int_{y_0}^y a(z) dz$, et l'exposant k_μ est donnée par

$$k_\mu = \frac{2\mu}{1+\mu} \left[1 - \mathcal{O} \left(\varepsilon \frac{1+\mu}{\mu} \right) - \mathcal{O} \left(\frac{1}{\mu \log(1+h/\sigma)} \right) \right]. \quad (2.63)$$

La probabilité en (3.37) devient petite dès que y est telle que $\alpha(y, y_0) \gg \varepsilon(1+\mu) \log(h/\sigma)$. Étant donné que $\alpha(y, y_0)$ croît quadratiquement avec y , Nous pouvons conclure que les chemins de l'échantillon sont susceptibles de quitter le domaine après un moment d'ordre $\sqrt{\varepsilon \log(h/\sigma)}$.

Pour compléter la discussion, Nous devons montrer que les chemins de l'échantillon laissent un voisinage d'ordre \sqrt{y} de la branche d'équilibre dès qu'y atteint ordre $\sqrt{\varepsilon |\log \sigma|}$, et puis, si la bifurcation de Hopf est supercritique, approcher l'orbite périodique originaires de la bifurcation. Cette analyse n'ayant ne pas encore été travaillée en détail, nous allons nous limiter à ce qui donne une idée de comment on pourrait procéder.

Selon la formule de Itô passer à coordonnées polaires, on obtient un système de la forme

$$\begin{aligned} dr_t &= \frac{1}{\varepsilon} [a(y_t)r_t + b_r(r_t, \theta_t, y_t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} F_r(\theta_t, y_t) dW_t \\ d\theta_t &= \frac{1}{\varepsilon} [w(y_t) + b_\theta(r_t, \theta_t, y_t)] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{F_\theta(\theta_t, y_t)}{r_t} dW_t \end{aligned} \quad (2.64)$$

où b_r contient des termes d'ordre r^2 et σ^2/r , et b_θ contient des termes d'ordre r et σ^2/r^2 , tandis que F_r et F_θ sont d'ordre 1. Notons, en particulier, qui en dehors de la $\mathcal{S}(\sigma)$ les termes d'ordre σ^2/r et σ^2/r^2 , qui résultent de l'expression de second ordre dans la formule d'Itô deviennent négligeable en ce qui concerne le rôle de premier plan de l'expression correspondante de la dérive.

Dans l'analyse, nous nous intéressons principalement à la dynamique de la r_t . Comme le mouvement de θ_t se produit sur une échelle de temps plus rapide que le mouvement de r_t pour y_t petit, nous attendons le système (3.39) soit bien approchées par sa version moyenne

$$d\bar{r}_t = \frac{1}{\varepsilon} [a(y_t)\bar{r}_t + \bar{b}_r(\bar{r}_t, y_t)]dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} \bar{F}_r(y_t)dW_t. \quad (2.65)$$

2.6 Résonance stochastique

Description générale de la résonance stochastique

La résonance stochastique est un phénomène non linéaire dans lequel la transmission par certains systèmes non linéaires d'un signal utile ou cohérent, peut être améliorée par l'ajout de bruit au système [43], [55], [57]. Ce phénomène paradoxal a été introduit il y a une quinzaine d'années dans le contexte de la dynamique des climats [43], [59]. Au cours des diverses études qui ont suivi, le cadre de la résonance stochastique s'est progressivement élargi. Aujourd'hui, la résonance stochastique apparaît comme un phénomène non linéaire général, observable dans de nombreux systèmes, et qui désigne un effet de transmission du signal favorisé par le bruit [57]. On peut maintenant inscrire ce phénomène dans le cadre général des signaux et systèmes dynamiques complexes (non linéaires) où il se présente comme un paradigme illustrant la possibilité dans de tels processus d'extraire de l'ordre hors du désordre, ou de l'information utile hors du bruit.

La résonance stochastique peut revêtir diverses formes, selon les types considérés pour le signal utile, le bruit, le système de transmission et la mesure de performance qui se voit améliorée par l'ajout de bruit. Les signaux utiles ou cohérents impliqués dans la résonance stochastique peuvent être des signaux

de forme connue ou des signaux porteurs d'information. Ces signaux peuvent prendre par exemple la forme de signaux périodiques, on parle alors de résonance stochastique périodique. Ils peuvent aussi être des signaux apériodiques déterministes ou aléatoires, on parle alors de résonance stochastique apériodique. Les signaux de bruit considérés peuvent être de distributions statistiques et de structures de corrélation diverses. Ils peuvent être par exemple de type gaussien, blanc ou coloré. Les systèmes présentant la résonance stochastique sont de types variés mais ils sont tous non linéaires. La résonance stochastique se manifeste par une amélioration de la transmission du signal utile, obtenue grâce à une augmentation du niveau de bruit. Selon le contexte, on peut définir différentes mesures pour caractériser cet effet. Dans le cas de Signaux utiles périodiques, on peut définir par exemple un rapport signal sur bruit dans le domaine fréquentiel à partir de la densité spectrale de puissance du signal de sortie [55]. Pour des signaux utiles apériodiques, on peut calculer par exemple un coefficient de corrélation entrée sortie, ou une information mutuelle entrée sortie. En présence de résonance stochastique, ces mesures suivent une évolution non monotone, passant par un maximum, en fonction du niveau de bruit. Dans la suite, nous allons revenir en détails sur les propriétés des signaux et systèmes qui participent au phénomène de résonance stochastique.

Aperçu historique de l'étude de la résonance stochastique :

La résonance stochastique a été introduite pour la première fois dans le contexte de la dynamique des climats, au début des années 1980. Il s'agissait d'expliquer la récurrence régulière des ères glaciaires [43],[2],[59] par la proposition du schéma suivant. Une ère glaciaire résulte de variations importantes de l'ensoleillement terrestre. Ces variations peuvent provenir de deux sortes de causes. La première est une cause périodique due à des variations d'excentricité de l'orbite terrestre, que l'on considère comme un signal cohérent du fait de sa périodicité. La deuxième est une cause aléatoire due à des fluctuations du rayonnement solaire, que l'on considère comme un bruit incohérent du fait de son caractère erratique. La cause périodique est d'influence insuffisante et elle n'est pas la seule qui provoque une ère glaciaire. Cependant, l'interaction de la cause aléa-

toire avec la cause périodique permet la survenue d'une façon régulière des ères glaciaires. Il apparaît donc que d'influence sur le résultat de la cause périodique cohérente peut être renforcée par la cause aléatoire.

A partir de cette première introduction, la résonance stochastique a progressivement été étendue à différents types de systèmes non linéaires. Elle a été étudiée tout d'abord dans le cas de la transmission de signaux périodiques par des systèmes dynamiques non linéaires bistables ou plus généralement multistables [2],[59] Les systèmes de ce type sont gouvernés par des champs de potentiel possédant des états stationnaires stables, séparés par des barrières de potentiel qui peuvent être franchies sous l'influence conjointe du signal et du bruit.

La résonance stochastique a été ainsi mise en évidence dans différents systèmes dynamiques bistables tels que des systèmes mécaniques [63],[52], des circuits électroniques [1], des systèmes optiques à lasers [55], des systèmes magnétiques.

Par la suite, il a été montré [65] que la bistabilité n'était pas indispensable pour l'apparition de résonance stochastique. Celle-ci peut en effet avoir lieu dans des systèmes dynamiques non linéaires gouvernés par des potentiels monostables, c'est-à-dire présentant un seul état stable [64], [52].

L'effet a aussi été étendu aux systèmes excitable, [47], [50], [53]. Ces systèmes présentent un état de repos stable dont ils ne peuvent sortir que sous l'influence d'une excitation suffisamment forte. Celle-ci provoque alors une excursion déterministe qui entraîne le système loin de son état de repos et l'y ramené ensuite. Pour certains de ces systèmes excitable, l'excursion déterministe peut être réalisée par l'émission d'une impulsion en sortie, suivie du retour à l'état de repos du système.

Plus récemment, la résonance stochastique a été observée pour des systèmes sans une dynamique excitable avec retour spontané à l'état de repos, et gouverné uniquement par une dynamique à seuil. Dans ce cas, la sortie du système ne dépend à chaque instant que de l'amplitude du signal bruité en entrée, par

rapport à un seuil, Enfin dans des études encore plus récentes, des systèmes sans retour spontané à l'état de repos et sans seuil ont également été étudiés comme présentant de la résonance stochastique [44].

L'ensemble de ces développements a progressivement élargi le cadre de définition de la résonance stochastique. Une avancée supplémentaire a été de montrer les liens de ce phénomène avec d'autres situations où le bruit peut jouer un rôle bénéfique notamment avec le "dithering noise" utilisé lors de la conversion analogique numérique d'un signal ou dans le codage d'une image[49].

2.6.1 Présentation des systèmes dynamiques non linéaires bistables

Considérons un signal sinusoïdal $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$ et un bruit stationnaire $\eta(t)$ appliqués en entrée d'un système dynamique non linéaire dont l'état $x(t)$ évolue suivant

$$\epsilon \dot{x}(t) = x(t) - \frac{x^3(t)}{x_b^2} + s(t) + \eta(t) \quad (2.66)$$

avec les paramètres $x_b > 0$ et $\epsilon > 0$.

Une telle évolution caractérise un système forcé par l'entrée $s(t) + \eta(t)$ et dont la relaxation libre $\epsilon \dot{x} = -dU/dx$ est gouvernée par le potentiel "quartique"

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{c^4}{4}$$

Ce potentiel à double puits est représenté sur la Fig. 2.5 Un tel système possède deux états stationnaires stables $\pm X_b$ correspondant aux deux minima du potentiel $U(x = \pm X_b) = -X_b/4$ séparés par une barrière de potentiel de hauteur $U_0 = X_b^2/4$

Si on interprète mécaniquement l'évolution du système, l'Eq. (2.66) décrit le mouvement en régime suramorti (l'inertie $\epsilon \dot{x}$ est supposée négligeable devant les forces de frottements visqueux x) d'une particule dans le potentiel $U(x)$

soumise à la force extérieure $s(t) + \eta(t)$

En présence de l'excitation périodique $s(t)$ seule et d'amplitude trop faible, la particule ne peut pas franchir la barrière de potentiel située autour de l'origine. Elle oscille alors périodiquement en restant confinée dans l'un des deux puits situés autour des minima du potentiel.

Si l'on ajoute un bruit $\eta(t)$ de faible amplitude, celui-ci pourra permettre occasionnellement à la particule de franchir la barrière de potentiel. Il en résulte alors en sortie une succession de transitions entre les deux puits du potentiel. Ces transitions sont corrélées avec le signal périodique en entrée $s(t)$ car elles sont produites par l'action conjointe du signal $s(t)$ et du bruit. En augmentant l'amplitude du bruit on augmente d'abord la probabilité de survenue de transitions cohérentes et on renforce ainsi la corrélation du signal de sortie (un signal binaire qui indique dans quel puits se trouve la particule) avec le signal $s(t)$ d'entrée. En continuant d'augmenter l'amplitude du bruit, les transitions produites par la seule influence du bruit deviennent de plus en plus fréquentes, ce qui provoque progressivement une diminution de la corrélation de la sortie avec l'entrée périodique. jusqu'à un niveau optimal de bruit. Puis il provoque ensuite une décroissance de cette corrélation

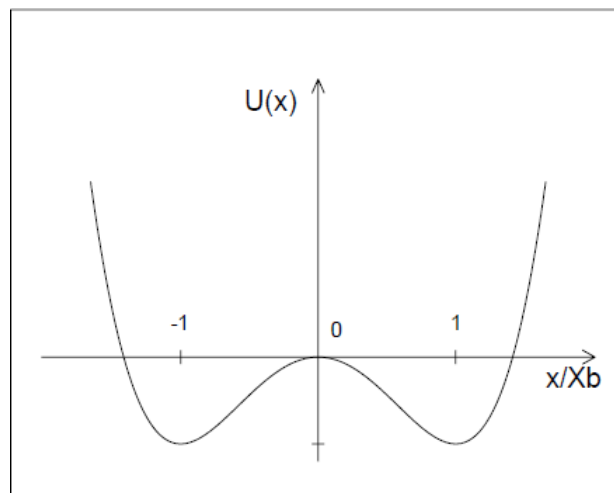


FIGURE 2.5 – Potentiel bistable quartique à double puits de l'Eq. (2.2) présentant deux minima en $\pm X_b$ séparés par une barrière de potentiel de hauteur U_0 .

2.6.2 Quelques résultats antérieurs

Le phénomène de résonance stochastique a été initialement introduit dans [29] (voir aussi [25] dans le but de proposer une explication de l'apparence régulière d'époques glaciaires (c.f. [14] pour une description de leur modèle). Depuis, la résonance stochastique a été observée dans de nombreux systèmes physiques et biologiques, voir par exemple [27], [28], [26].

Pour être concrets, considérons l'équation

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon}[x_t - x_t^3 + A \cos(y_t)]dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}dW_t \\ dy_t &= 1 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Elle décrit le mouvement suramorti d'une particule dans un potentiel $V(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + A \cos(y)x$, où le dernier terme agit comme une force déterministe périodique. Si $A < A_c := 2/(3\sqrt{3})$, alors la variété lente, d'équation $x - x^3 = A \cos y$, comporte deux branches stables, que nous noterons $x_-^*(y) < x_+^*(y)$, séparées par une branche instable $x_0^*(y)$. Soit $H = V(0, \Pi/2) - V(1, \Pi/2) = 1/4$ la hauteur de la barrière de potentiel pour $\cos y = 0$. Les cas suivants peuvent se présenter :

1. si $\sigma = 0$ et $0 < A < A_c$, les trajectoires restent toujours voisines de l'une des variétés stables (c'est-à-dire l'un des puits de potentiel), sans jamais visiter l'autre variété stable ;
2. si $\sigma > 0$ et $A = 0$, on a affaire au problème bien connu du passage stochastique par-dessus une barrière de potentiel : les transitions ont lieu à des temps aléatoires, dont la loi converge, pour $\sigma \rightarrow 0$, vers la loi exponentielle [31], d'espérance d'ordre $\varepsilon e^{2H/\sigma^2}$ (ceci reste vrai pour des potentiels multidimensionnels) ;
3. si $\sigma > 0$ et $0 < A < A_c$, la loi des transitions aléatoires sera influencée par le terme périodique $-A \cos(y)x$, qui rend ces transitions plus probables à certains instants qu'à d'autres ; c'est cette trace du caractère périodique

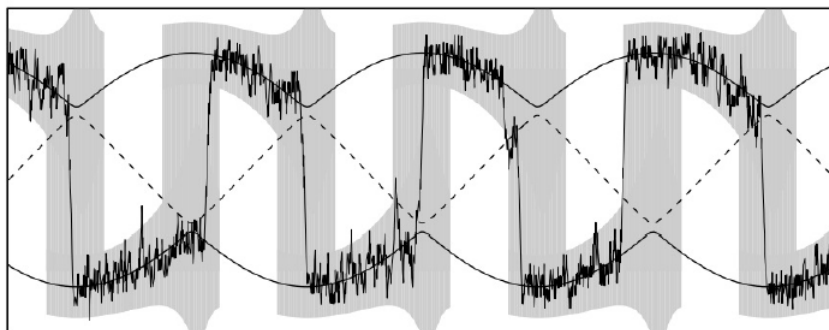


FIGURE 2.6 – [[16]] Une trajectoire (trait fin) de l'équation (2.67) présentant le phénomène de résonance stochastique. La trajectoire saute presque périodiquement d'une variété stable à l'autre (courbes en gras) en passant par dessus la barrière de potentiel (en traitillé).

du forçage dans le comportement de x_t que l'on dénomme résonance stochastique

Les premières approches mathématiques à ce problème se sont concentrées sur des versions simplifiées de l'équation (2.67). En particulier, le cas où le potentiel $V(x, y)$ est une fonction constante par morceaux de y a été considéré dans [29], et plus récemment dans [32]. Le cas d'une variable x discrète, i.e. d'une chaîne de Markov, a été étudié dans [33],[34], puis dans [35]. Enfin, les physiciens ont passablement étudié les propriétés spectrales du générateur de (2.67) et la densité de probabilité [36], [37]. Ces différentes approches montrent en particulier que le phénomène de résonance est le plus prononcé pour une période $1/\varepsilon$ proche du temps de Kramers e^{2H/σ^2} .

Une description du comportement des trajectoires a été donnée pour la première fois par Freidlin dans [38], en utilisant la théorie des grandes déviations. Ses résultats montrent que les trajectoires convergent en probabilité, au sens de la norme L^p , vers une fonction périodique $P(t)$:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0, \varepsilon = e^{-2H_1/\sigma^2}} \mathbb{P} \left\{ \int_0^T |x_t - P(t)|^p dt > \delta \right\} = 0 \quad (2.68)$$

pour $H_1 > H$, tous $\delta; T > 0$ fixés et $p \geq 1$. La fonction $P(t)$ suit le fond d'un puits de potentiel, en changeant de puits deux fois par période. Ce résultat s'applique à une classe de systèmes très générale, en revanche il ne donne pas d'informations sur la vitesse de convergence, ni sur sa dépendance de δ et p .

2.6.3 Description des trajectoires

Nous considérons ici le cas où $a_0 = A_c - A$ est un petit paramètre, ce qui a pour effet de rendre probables les transitions sur des échelles de temps sous-exponentielles.

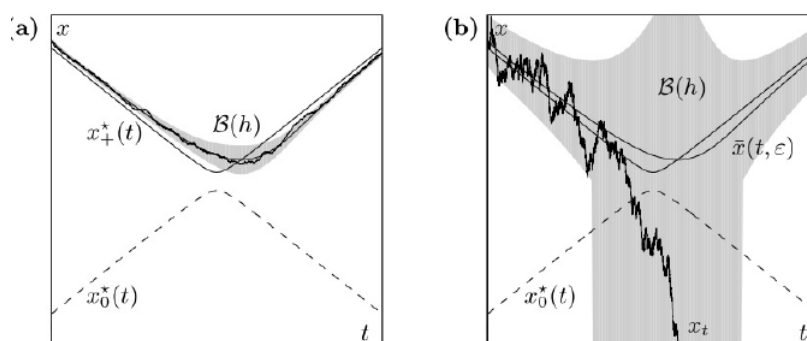


FIGURE 2.7 – [16] Trajectoires près d'une bifurcation selle-noeud évitée. (a) Pour $\sigma < a_0^{3/4} \sqrt{\varepsilon^{3/4}}$, les trajectoires restent confinées, avec grande probabilité, dans un voisinage $\mathcal{B}(h)$ de la solution déterministe x_t^{det} . (b) Pour $\sigma \geq a_0^{3/4} \sqrt{\varepsilon^{3/4}}$, les trajectoires ont toutes les chances de traverser la barrière de potentiel en $x_0^*(t)$ durant l'intervalle $[-\sigma^{2/3}, \sigma^{2/3}]$

Pour simplifier la présentation, nous nous concentrons sur l'équation (2.67), bien que les résultats de [16] s'appliquent à des équations plus générales.

Si a_0 est petit mais positif, on est dans une situation de bifurcation selle-noeud évitée. Lorsque $\cos y = -1$, la variété stable $x_+^*(y)$ et la variété instable $x_0^*(y)$ s'approchent à une distance d'ordre $\sqrt{a_0}$, et la barrière de potentiel a une hauteur d'ordre $a_0^{3/2}$. Nous choisissons l'origine du temps de manière que $\cos y_t = -1$ en $t = 0$.

Dans le cas déterministe $\sigma = 0$, donne (c.f. [16][Théorème 2.5])

$$\begin{aligned} x_t^{det} - x_+^*(y) &\asymp \frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \leq -c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \\ x_t^{det} - x_c &\asymp \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon} && \text{pour } |y_t| \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \\ x_t^{det} - x_+^*(y) &\asymp -\frac{\varepsilon}{|y_t|} && \text{pour } y_t \geq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

pour une constante $c_0 > 0$, où $x_c = 1/\sqrt{3}$ est le "centre" de la bifurcation évitée. Nous pouvons en définissant à nouveau

$$\mathcal{B}(h) = \left\{ (x, t) : \frac{(x - x_t^{det})^2}{\zeta(t)} < h^2 \right\}, \quad (2.70)$$

avec ici,

$$\zeta(t) \asymp \frac{1}{|\partial_x f(x_t^{det}, t)|} \asymp \frac{1}{|t| \vee \sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon}} \quad (2.71)$$

Alors il existe une constante h_0 telle que pour $h \leq h_0[|t|^{3/2} \vee a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}]$ et $t \leq c_0(\sqrt{a_0} \vee \sqrt{\varepsilon})$,

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau_{\mathcal{B}(h)} < t \} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-kh^2/\sigma^2}, \quad (2.72)$$

avec, $k = 1 - \mathcal{O}(\varepsilon) - \mathcal{O}(h/[|t|^{3/2} \vee a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}])$. Comme précédemment, nous avons donc deux cas à considérer :

1. si $\sigma < a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma\sqrt{\zeta(t)}$ de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont peu probables
2. si $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors le résultat ne s'applique que pour $t \leq -\sigma^{2/3}$. Il suit du théorème (3.3.1) que le temps de premier passage τ^0 , disons, en $x = 0$, satisfait

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 < t \} \leq \text{const} \left(\frac{t - t_0}{\varepsilon^2} + 1 \right) e^{-k[(-t^3) \vee a_0^{3/2} \vee \varepsilon^{3/2}]/\sigma^2}, \quad (2.73)$$

pour tous les t dans un voisinage de 0 dans le premier cas, et pour $t \leq -\sigma^{2/3}$ dans le second cas. Le comportement pour $t \geq -\sigma^{2/3}$ dans le second cas est alors décrit par l'analogie suivant du théorème (2.6.1).

Théorème 2.6.1. [16][Théorème 2.7]. Si $\sigma \geq a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$, alors il existe une constante $k > 0$ telle que

$$\mathbb{P}^{t_0, x_0} \{ \tau^0 \geq t \} \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ - \frac{k \sigma^{2/3} (t + \sigma^{2/3})}{\varepsilon |\log \sigma|} \right\} + e^{-k/\sigma^2} \quad (2.74)$$

pour $-\sigma^{2/3} + \mathcal{O}(\varepsilon) \leq t \leq \sigma^{2/3}$.

Par conséquent, le système a une probabilité d'ordre $1 - e^{-k\sigma^{4/3}/\varepsilon|\log \sigma|}$ d'effectuer une transition dans l'intervalle de temps $-\sigma^{2/3} \leq t \leq \sigma^{2/3}$. Une fois le niveau 0 atteint, le processus a une forte probabilité d'atteindre rapidement la variété lente en $x_-^*(t)$, qu'il suit pendant une demi-période jusqu'à la transition suivante

Il est à relever que le seuil $a_0^{3/4} \vee \varepsilon^{3/4}$ de l'intensité du bruit rendant des transitions probables ne tend pas vers 0 avec le paramètre a_0 contrôlant la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Ceci est un effet purement dynamique, dû au fait que même si la barrière de potentiel disparaît, elle le fait durant un intervalle de temps trop court pour augmenter la probabilité de transition.

Remarquons finalement que des résultats analogues peuvent être obtenus dans le cas d'un potentiel symétrique, dont la barrière est modulée périodiquement, comme dans le cas

$$\begin{aligned} dx_t &= \frac{1}{\varepsilon} [(a_0 + 1 - \cos t)x_t - x_t^3] dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t \\ dy_t &= 1. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Le petit paramètre a_0 correspond à nouveau à la hauteur minimale de la barrière de potentiel. Les instants t tels que $\cos t = 1$ correspondent à une bifurcation fourche évitée. Les résultats sont similaires aux précédents, avec d'autres exposants. Ainsi,

1. si $\sigma < \sigma_c = a_0 \vee \varepsilon^{2/3}$, les trajectoires restent concentrées dans un voisinage d'ordre $\sigma/(|t| \vee \sqrt{\sigma_c})$ de la solution déterministe, et des transitions vers l'autre variété stable sont exponentiellement peu probables ;

2. si $\sigma \geq \sigma_c$, les trajectoires peuvent passer d'un puits de potentiel à l'autre durant l'intervalle de temps $[-\sqrt{\sigma}, \sqrt{\sigma}]$; après cet intervalle de transition, elles suivront à nouveau l'une des branches stables, et auront changé de branche avec probabilité exponentiellement proche de $1/2$.

Chapitre 3

Étude qualitative des systèmes de FitzHugh-Nagumo

Nous ajoutons maintenant les termes de bruit à l'équation (2.6) dans le cas où $b \neq 0$. Nous considérons le système d'équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\epsilon}(x - x^3 + y)dt + \sigma_1 dw_t^1 \\ y' = (a - bx - cy)dt + \sigma_2 dw_t^2. \end{cases} \quad (3.1)$$

où σ_1 et σ_2 sont deux réels positifs représentant l'intensité du bruit, $W_t^{(1)}$ et $W_t^{(2)}$ sont deux mouvements browniens standards indépendants. D'après les théorèmes généraux [68], ce système admet une unique solution forte $(x_t, y_t)_{t \in [0, T]}$ presque sûrement continue.

3.1 Limite inférieure du régime bruit fort

Nous cherchons à déterminer pour quels paramètres nous avons les trois comportements mis en évidence dans les simulations numériques. Nous nous plaçons dans le cas où le point d'équilibre est un foyer, c'est à dire pour $|\delta| \leq \sqrt{\epsilon}$. Pour cela, nous transformons l'équation de FitzHugh-Nagumo en coordonnées polaires $(r; \theta)$ introduites dans la proposition(2.4.4) après avoir transformé le système en coordonnées (ξ, ζ) introduites dans la preuve de cette Proposition. En étudiant l'ordre de grandeur

des termes, nous obtenons un premier bruit de coupure σ_c . Il correspond à la limite inférieure du bruit fort et est donné par $\sigma_c = \sqrt{\varepsilon\delta}$.

En faisant les mêmes transformations que pour la partie linéaire dans le cas déterministe, nous obtenons pour l'équation de FitzHugh-Nagumo (3.1) le résultat suivant :

Proposition 3.3.1. En coordonnées (r, θ) , pour $0 \geq \delta \geq -\sqrt{\varepsilon}$, l'équation de FitzHugh-Nagumo (3.1) prend la forme

$$\begin{aligned} dr_t &= \left[-\mu_R r_t - \frac{3a}{\varepsilon\mu_I} r_t^2 \sin\theta_t (\tilde{\Delta})^2 + \frac{1}{\varepsilon\lambda_I} r_t^3 \sin\theta_t (\tilde{\Delta})^3 + \frac{1}{2r_t} \left(\frac{\sigma_1^2}{\varepsilon\lambda_I^2} \cos^2\theta_t + \sigma_2^2 \sin^2\theta_t \right) \right] dt \\ &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda_I} \sin\theta_t dW_t^{(1)} + \sigma_2 \cos\theta_t dW_t^{(2)} \\ d\theta_t &= \left[\lambda_I - \frac{3a}{\varepsilon\lambda_I} r_t \cos\theta_t (\tilde{\Delta})^2 + \frac{1}{\varepsilon\lambda_I} r_t^2 \cos\theta_t (\tilde{\Delta})^3 \right] dt + \frac{1}{r_t} \left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda_I} \right] \cos\theta_t dW_t^{(1)} - \sigma_2 \sin\theta_t dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où

$$\tilde{\Delta} = -\mu_R \xi - \mu_I \zeta$$

et nous rappelons la définition de μ_R et μ_I

$$\mu_R = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu_I = \frac{\sqrt{\varepsilon - \delta^2}}{\varepsilon}$$

Preuve. En translatant l'origine au point d'équilibre du système (x^*, y^*) , le système de FitzHugh-Nagumo (3.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon du_t &= [(1 - 3a^2)u_t + v_t - 3au_t^2 - u_t^3] dt + \sqrt{\varepsilon}\sigma_1 dW_t^{(1)} \\ dv_t &= -u_t v_t + \sigma^2 dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Faisons ensuite le changement de variables qui permet d'obtenir la forme de Jordan pour la partie linéaire

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_R & \mu_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

nous obtenons alors le système :

$$\begin{aligned} d\xi_t &= [-\mu_R\xi_t - \mu_I\zeta_t]dt + \sigma^2 dW_t^{(2)} \\ d\zeta_t &= [\mu_I\xi_t - \mu_R\zeta_t - \frac{3a}{\varepsilon\mu_I}(\Delta_t)^2 + \frac{1}{\varepsilon\mu_I}(\Delta_t)^3]dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon\mu_I}}dW_t^{(1)} \end{aligned}$$

où

$$\Delta_t = -\mu_R\xi_t - \mu_I\zeta_t$$

Passons ensuite en coordonnées polaires en posant

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos\theta \\ \zeta &= r \sin\theta \end{aligned}$$

Nous cherchons un système sous la forme

$$\begin{aligned} dr_t &= \rho_1(r_t, \theta_t)dt + \psi_1^1(r_t, \theta_t)dW_t^{(1)} + \psi_1^2(r_t, \theta_t)dW_t^{(2)} \\ d\theta_t &= \rho_2(r_t, \theta_t)dt + \psi_2^1(r_t, \theta_t)dW_t^{(1)} + \psi_2^2(r_t, \theta_t)dW_t^{(2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

D'après la formule d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \cos\theta_t dr_t - r_t \sin\theta_t d\theta_t - \frac{1}{2}r_t \cos\theta_t (d\theta_t)^2 \\ d\zeta_t &= \sin\theta_t dr_t + r_t \cos\theta_t d\theta_t - \frac{1}{2}r_t \sin\theta_t (d\theta_t)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{aligned} (d\theta_t)^2 &= (\psi_1^2(r_t, \theta_t)dW_t^{(1)} + \psi_2^2(r_t, \theta_t)dW_t^{(2)})^2 \\ &= [\psi_1^1(r_t, \theta_t)^2 + \psi_2^1(r_t, \theta_t)^2]dt \end{aligned}$$

Par combinaison linéaire, nous obtenons :

$$\begin{aligned} dr_t &= \cos\theta_t d\xi_t \sin\theta_t d\zeta_t + \frac{1}{2}r_t [\psi_2^1(r_t, \theta_t)^2 + \psi_2^2(r_t, \theta_t)^2]dt \\ r_t d\theta_t &= -\sin\theta_t d\xi_t + \cos\theta_t d\zeta_t \end{aligned} \quad (3.5)$$

En remplaçant $d\xi_t$ et $d\zeta_t$ par les expressions du système (3.4) , nous avons :

$$\begin{aligned}
 dr_t &= \left[-\mu_R r_t - \frac{3a}{\varepsilon \mu_I} r_t^2 \sin\theta_t (\tilde{\Delta})^2 + \frac{1}{\varepsilon \lambda_I} r_t^3 \sin\theta_t (\tilde{\Delta})^3 + \frac{1}{2r_t} \left(\frac{\sigma_1^2}{\varepsilon \lambda_I^2} \cos^2\theta_t + \sigma_2^2 \sin^2\theta_t \right) \right] dt \\
 &\quad + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \lambda_I} \sin\theta_t dW_t^{(1)} + \sigma_2 \cos\theta_t dW_t^{(2)} \\
 d\theta_t &= \left[\lambda_I - \frac{3a}{\varepsilon \lambda_I} r_t \cos\theta_t (\tilde{\Delta})^2 + \frac{1}{\varepsilon \lambda_I} r_t^2 \cos\theta_t (\tilde{\Delta})^3 \right] dt + \frac{1}{r_t} \left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \lambda_I} \right] \cos\theta_t dW_t^{(1)} - \sigma_2 \sin\theta_t dW_t^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où nous avons posé

$$\tilde{\Delta} = -\mu_R \cos\theta - \mu_I \sin\theta$$

Par identification entre (3.3) et (3.5), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 \psi_2^1(r_t, \theta_t) &= \frac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon} \lambda_I} \frac{\cos\theta_t}{r_t} \\
 \psi_2^2(r_t, \theta_t) &= -\sigma_2^2 \frac{\sin\theta_t}{r_t}
 \end{aligned}$$

Nous n'avons plus qu'à remplacer $\psi_2^1(r_t, \theta_t)$ et $\psi_2^2(r_t, \theta_t)$ dans l'équation (3.4), pour obtenir (3.2).

3.2 Étude qualitative du rayon moyen du petit cycle

Nous évaluons et comparons l'ordre de grandeur des différents termes de (3.2) pour étudier le comportement des solutions.

Nous considérons le cas $|\delta| \geq \sqrt{\varepsilon}$. Nous avons alors $\mu_I \gg \mu_R$. Regardons l'ordre de grandeur des autres termes dans l'équation (3.2). Comparons μ_I et $3a \cos\theta (\tilde{\Delta})^2 / (\varepsilon \mu_I)$.

La constante $3a$ est proche de $\sqrt{3}$ donc d'ordre 1. Nous avons alors

$$\frac{1}{\mu_I} \frac{3a}{\varepsilon \mu_I} r \cos\theta (\tilde{\Delta})^2 \simeq \frac{1}{\varepsilon \mu_I^2} r (\tilde{\Delta})^2$$

Nous considérons que $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont de l'ordre de 1. Cela donne pour $\tilde{\Delta}$ l'estimation :

$$(\tilde{\Delta})^2 \simeq \mu_R^2 + \mu_I^2 = \frac{1}{\varepsilon}$$

et donc

$$\frac{3a}{\varepsilon\mu_I^2} r \cos\theta (\tilde{\Delta})^2 \simeq \frac{r}{\varepsilon - \delta^2}$$

Nous sommes dans le cas $\delta^2 \ll \varepsilon$. Pour que le terme en μ_I soit dominant dans la deuxième équation différentielle qui porte sur θ , c'est à dire $\mu_I \gg 3a \cos\theta / \varepsilon \mu_I (\tilde{\Delta})^2$, nous devons avoir

$$r \ll \varepsilon$$

Posons

$$S = \frac{\sigma_1^2}{\varepsilon\mu_I^2} \cos^2\theta + \sigma_2^2 \sin^2\theta.$$

Regardons l'ordre de grandeur de S.

$$S \simeq \frac{4\varepsilon\sigma_1^2}{4\varepsilon - \sigma^2} + \sigma_2^2$$

Si $\delta^2 \ll \varepsilon$, nous avons alors pour S l'estimation

$$S \simeq \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Comparons maintenant les termes $\mu_R r$ et S/r . Dans le cas où $\delta^2 \ll \varepsilon$ et $r \ll \varepsilon$, $\mu_R r \ll \sqrt{\varepsilon}$ et $S/r \gg (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/\varepsilon$. Pour r suffisamment petit, le champ de vecteur est horizontal donc θ varie beaucoup plus vite que r et nous pouvons regarder la moyenne de r sur une période c'est à dire sur $[0, 2\pi]$. Regardons la moyennisation en θ_t sur $[0, 2\pi]$ de l'équation sur drt du système (3.2),

$$\sin\theta (\tilde{\Delta})^2 = \mu_R^2 \sin\theta \cos^2\theta - 2\mu_R \mu_I \cos\theta \sin^2\theta + \mu_I^2 \sin^3\theta \quad (3.7)$$

$$\sin\theta(\tilde{\Delta})^3 = -\mu_R^3 \sin\theta \cos^3\theta - 3\mu_R^2 \mu_I \sin^2\theta \cos^2\theta - 3\mu_R \mu_I^2 \sin^3\theta \cos\theta - \mu_I^3 \sin^4\theta \quad (3.8)$$

Calculons les différentes intégrales des termes en θ qui apparaissent dans les développements (3.3) et (3.4) :

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos\theta d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi$$

Nous obtenons alors l'équation différentielle ordinaire portant sur le rayon moyen \bar{r} :

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = -\mu_R \bar{r} - \frac{3}{8\varepsilon} (\mu_R^2 + \mu_I^2) \bar{r}^3 + \left(\frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon \mu_I^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \frac{1}{\bar{r}} + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} dW_t$$

Nous pouvons un peu simplifier en utilisant $\mu_1^2 \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et nous posons $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$,

$$d\bar{r} = \left[-\mu_R \bar{r} - \frac{3}{8\varepsilon^2} \bar{r}^3 + \frac{\sigma}{2} \frac{1}{\bar{r}} \right] dt + \sigma dW_t \quad (3.9)$$

Calculons la valeur à l'équilibre \bar{r}_{eq} de l'équation différentielle déterministe associée à l'équation (3.5).

C'est une racine du polynôme P de degré 4 :

$$P\bar{r}_{eq} = \mu_R \bar{r}_{eq}^2 - \frac{3}{8\varepsilon^2} \bar{r}_{eq}^4 + \frac{\sigma^2}{2}$$

Le polynôme P a une unique racine réelle positive \bar{r}_{eq}

$$\bar{r}_{eq} = \sqrt{\frac{4\varepsilon^2}{3} \left(\mu_R + \sqrt{\mu_R^2 + \frac{3\sigma^2}{2\varepsilon^2}} \right)}$$

Regardons l'ordre de grandeur de \bar{r}_{eq} suivant la valeur de μ_R . Nous pouvons distinguer deux cas :

si $\mu_R^2 \gg \sigma^2/\varepsilon^2$, ce qui revient à $\sigma \gg \varepsilon$ alors

$$\sqrt{\mu_R^2 + \frac{3\sigma^2}{2\varepsilon^2}} \simeq \mu_R \left(1 + \frac{3\sigma^2}{4\varepsilon^2} \right)$$

ce qui implique pour \bar{r}_{eq}

$$\bar{r}_{eq} \simeq \sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu_R}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\sigma^2}{\delta}}$$

si $\mu_R^2 \ll \sigma^2/\varepsilon^2$, ce qui revient à $\sigma \ll \varepsilon$ alors

$$\bar{r}_{eq} \simeq \varepsilon^{1/2} \sigma^{1/2}$$

3.3.2 commentaire

Nous avons travaillé dans le cas où $|\delta| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Nous allons comparer le rayon moyen \bar{r}_{eq} avec ε qui est la distance du point d'équilibre à la ligne séparatrice. Nous considérons que si le rayon moyen est plus petit que ε , nous ne faisons pas (ou rarement) de spike alors que si ce rayon est plus grand que ε nous avons une suite de spikes.

Nous distinguons alors les deux cas que nous avons obtenus pour l'approximation de \bar{r}_{eq} :

1. pour le cas $\bar{r}_{eq} \simeq \sqrt{\epsilon\sigma^2/\delta}$ le rayon moyen est égal à ϵ pour $\sigma_c = \sqrt{\epsilon\delta}$ Dans ce cas δ est bien plus petit que σ
2. pour le cas $\bar{r}_{eq} \simeq \epsilon^{1/2}\sigma^{1/2}$ et $\delta \ll \sigma$ le rayon moyen est égal à ϵ pour $\sigma_c = \epsilon$

Nous avons donc

1. $0 < |\delta| \ll \epsilon, \sigma_c = \epsilon$
2. $\epsilon \gg |\delta| < \sqrt{\epsilon}, \sigma_c = \sqrt{\epsilon\delta}$

La valeur σ_c est l'intensité de coupure entre le régime sans spike et le régime avec une suite de spikes : pour $\sigma < \sigma_c$, nous n'avons pas de spike et pour $\sigma > \sigma_c$, nous avons une suite de spikes. Nous allons affiner les frontières dans la partie suivante

3.3 Étude qualitative de la transition du bruit fort au bruit faible

Nous transformons l'équation (3.1) en coordonnées (ξz) qui ont été introduites dans la partie sur l'équation déterministe. Ensuite nous nous intéressons à l'approximation de cette équation pour des valeurs de z petites. Nous pouvons ainsi exprimer ξ en fonction du temps et obtenir une EDS portant sur z que nous résolvons. En considérant que nous obtenons un spike quand z devient négatif, nous pouvons calculer la probabilité qu'il n'y ait pas de spike, c'est à dire que z reste positif. A partir de l'expression de cette probabilité, nous étudions pour quelles valeurs de σ, ϵ et δ cette probabilité est proche de 0, proche de 1 et proche de 1/2. Nous obtenons trois bruits de coupures : $\sigma_{c1} = \epsilon^{1/4}\delta$ qui est la limite supérieure du bruit faible, $\sigma_{c2} = \epsilon^{3/4}$ qui est la limite supérieure du bruit fort et une limite intermédiaire $\sigma_{c3} = \sqrt{\epsilon\delta}$ pour laquelle nous avons la même probabilité de faire un spike et une petite oscillation. Nous avons alors les trois cas :

1. $\sigma \ll \epsilon^{1/4}\delta$ correspond au régime où il y a de rares spikes isolés
2. $\sigma \gg \epsilon^{3/4}$ correspond au régime il y a une suite de spikes ininterrompus
3. $\epsilon^{1/4}\delta < \sigma < \epsilon^{3/4}$ correspond au régime intermédiaire avec des trains de spikes entrecoupés de petites oscillations. Dans ce régime, nous avons le cas particulier $\sigma = \sqrt{\epsilon\delta}$ où la probabilité de faire un spike est égale à 1/2

3.3.1 Transformation de l'équation stochastique

Nous écrivons l'équation (3.1) dans les coordonnées (ξ, z) introduites dans l'étude du système déterministe (2.6) Nous rappelons la définition de la variable

$$a_* = \frac{1 - c\epsilon}{3}$$

Proposition 3.3.1. *Dans les variables (ξ, z) et le temps $t/\sqrt{\epsilon}$ le système de FitzHugh-Nagumo (3.1) prend la forme*

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left(\frac{1}{2} - z + \frac{\sqrt{\epsilon}}{3}\xi_t^3\right)dt + \tilde{\sigma}_1 + d\tilde{w}_t^1 \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\xi_t z_t + \frac{\sqrt{\epsilon}}{3}\xi_t^4\right)dt - 2\tilde{\sigma}_1\xi_t d\tilde{w}_t^1 + \tilde{\sigma}_2\xi_t d\tilde{w}_t^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Où

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_1 &= -3a_*\epsilon^{-3/4}\sigma_1 \\ \tilde{\sigma}_2 &= 3a_*\epsilon^{-3/4}\sigma_2 \\ \tilde{\mu} &= \mu - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{3a_*} = \frac{3a_*(\delta - \sigma_1^2/\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pruve

Nous allons faire les mêmes changements de variables que pour l'équation déterministe dans la proposition (2.4.4)

$$\begin{aligned} \epsilon dx_t &= (x_t - x_t^3 + y_t)dt + \sigma_1\sqrt{\epsilon}dW_t^{(1)} \\ dy_t &= (a - x_t - cy_t)dt + \sigma_2dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Le premier changement de variables

$$\begin{aligned} x &= u + a_* \\ v &= v + a_*^3 - a_* \end{aligned} \tag{3.12}$$

qui est le changement d'origine ne modifie pas les termes stochastiques. Nous obtenons le système en coordonnées (u, v) :

$$\begin{aligned} \epsilon du_t &= (u_t - 3\alpha * u_t^2 - u_t^3 + c\epsilon u_t)dt + \sigma_1 \sqrt{\epsilon} dW_t^{(1)} \\ dv_t &= (\delta - u_t - cv_t)dt + \sigma_2 dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Où le parametre $\delta = a - a_* - c(a_*^3 - a_*)$. A présent nous faisons le changement d'échelle

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\epsilon} \xi \\ v &= \epsilon \eta \end{aligned} \tag{3.13}$$

Les termes stochastiques sont divisés par $\sqrt{\epsilon}$. Cela donne le système en (ξ, η) :

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon} d\xi_t &= (\eta_t - 3\alpha * \xi_t^2 + \sqrt{\epsilon}(c\xi_t - \xi_t^3))dt + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(1)} \\ \sqrt{\epsilon} d\eta_t &= \left(\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}} - \xi_t - c\sqrt{\epsilon}\eta_t\right)dt + \frac{\sigma_2}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(2)} \end{aligned}$$

Ensuite nous faisons le changement de temps $t = \sqrt{\epsilon} t'$ Nous avons l'égalité de loi $\sqrt{a} W_{at} = W_t$. Dans notre cas nous avons $W_t = W_{\sqrt{\epsilon} t'} = \epsilon^{-1/4} W_{t'}$. En notant t à la place de t' pour alléger l'écriture, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\xi_t &= (\eta_t - 3\alpha_* \xi_t^2 + \sqrt{\epsilon}(c\xi_t - \xi_t^3))dt + \epsilon^{-3/4} \sigma_1 dW_t^1 \\ d\eta_t &= \left(\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}} - \xi_t - c\sqrt{\epsilon}\eta_t\right)dt + \epsilon^{-3/4} \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Maintenant nous faisons le quatrième changement :

$$\eta = \xi^2 + z - \frac{1}{2} \tag{3.15}$$

D'après la formule d'Itô,

$$d\eta = dz_t + 2\xi_t d\xi_t + (d\xi_t)^2 \tag{3.16}$$

et

$$(d\xi_t)^2 = ((\eta_t - 3a_*\xi_t^2 + \sqrt{\epsilon}(c\xi_t - \xi_t^3))dt + \epsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^1)^2 \tag{3.17}$$

avec les règles de multiplication

$$\begin{aligned} dt^2 &= dt.dw_t^1 = 0 \\ (dw_t^1)^2 &= dt \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dans le calcul du carré dans l'expression (3.7), il ne reste donc qu'un terme

$$(d\xi_t^2)^2 = \epsilon^{-3/2}\sigma_1^2 dt \tag{3.19}$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \left[z_t - \frac{1}{6a_*} + \sqrt{\epsilon}(c\xi_t - \xi_t^3) \right] dt + \epsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^1 \\ d\eta_t &= \left[\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}} - \epsilon^{-3/2}\sigma_1^2 - 6a_*\xi_t z_t + \sqrt{\epsilon}(6a_*\xi_t^4 + c(\frac{1}{6a_*} - 9a_*\xi_t^2 - z_t)) \right] dt - 2\epsilon^{-3/4}\sigma_1 dW_t^1 + \epsilon^{-3/4}\sigma_2 dW_t^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nous finissons par deux renormalisations en changeant ξ en $-\xi = 3a_*$ et z en $z = 3/a_*$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 d\xi_t &= \left[\frac{1}{2} - z + \sqrt{\epsilon} \left(c\xi_t - \frac{1}{9a_*^2} \xi_t^3 \right) \right] dt - 3a_* \epsilon^{-3/4} \sigma_1 dW_t^1 \\
 dz_t &= \left[\frac{3a_* \delta}{\sqrt{\epsilon}} - 3a_* \epsilon^{-3/2} \sigma_1^2 - 2\xi_t z_t + \sqrt{\epsilon} \left(\frac{2}{9a_*^2} \xi_t^4 + c \left(\frac{1}{2} - 3a_* \xi_t^2 - z_t \right) \right) \right] dt - 6a_* \epsilon^{-3/4} \sigma_1 \xi_t dW_t^1 \\
 &\quad + 3a_* \epsilon^{-3/4} \sigma_2 dW_t^2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

En définissant, $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_1$ et $\tilde{\mu}$ comme dans la proposition, nous avons le système d'EDS (3.4.1).

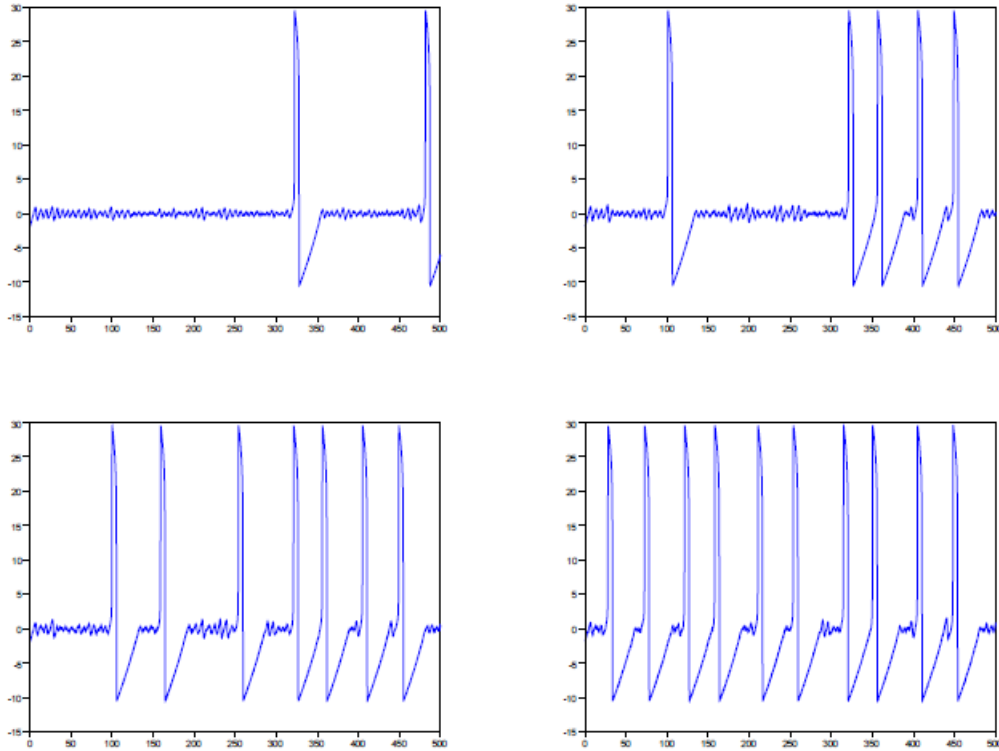


FIGURE 3.1 – Exemples de représentation de ξ en fonction du temps. Les paramètres sont $\epsilon = 0,01$, $\delta = 3 \cdot 10^{-3}$ pour la ligne du haut et $\delta = 5 \cdot 10^3$ pour la ligne du bas. L'intensité du bruit est $\sigma_1 = \sigma_2 = 1,46 \cdot 10^{-4}$, $1,82 \cdot 10^{-4}$, $2,73 \cdot 10^{-4}$ et $3,65 \cdot 10^{-4}$.

Sur la figure(3.1), nous avons représenté l'évolution de la variable ξ en fonction du temps pour différentes valeurs de δ , σ_1 et σ_2 . Pour un bruit faible, nous avons de rares spikes isolés. Le nombre de spikes augmente ensuite avec le bruit mais leur amplitude est presque constante. Entre deux spikes, nous observons des petites oscillations autour de la valeur d'équilibre qui est proche de $-\tilde{\mu}$. Quand le bruit est faible, il y a un grand nombre de petites oscillations entre deux spikes et ce nombre diminue quand le bruit augmente. L'amplitude de ces petites oscillations n'est pas constante.

3.4 Commentaire

Nous allons regarder comment évolue le comportement de la solution du système (3.6) suivant les valeurs des différents paramètres. Avant d'étudier le système (3.6), nous considérons d'abord une approximation de ce système. Nous étudierons dans une autre partie l'écart entre la solution approchée et la solution de (3.4.1) et nous montrerons que cet écart est petit. Nous pouvons séparer le comportement de la solution en deux parties :

1. la trajectoire reste au voisinage du point d'équilibre P. La variable z est alors positive.
2. la trajectoire s'éloigne du point d'équilibre en allant dans la région $z < 0$

Nous considérons qu'il y a un spike quand la trajectoire coupe la ligne séparatrice $z = 0$. Pour z petit, nous pouvons approcher la première équation par $d\xi_t/dt \simeq 1/2$ et nous approchons ξ par

$$\xi_t = \frac{t}{2} + \xi_0 \quad (3.22)$$

En prenant $\xi_0 = 0$, nous avons alors pour z_t l'équation approchée

$$dz_t = [\tilde{\mu} + tz_t]dt - \tilde{\sigma}_1 d\tilde{W}^1 + \tilde{\sigma}_2 d\tilde{W}^2 \quad (3.23)$$

Par la méthode de la variation de la constante, nous obtenons :

$$z_t = e^{t^2/2} \left(z_0 e^{-t^2/2} + \tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds - \tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^1 + \tilde{\sigma}_2 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^2 \right) \quad (3.24)$$

Le processus z_t suit une loi normale $\mathbb{N}(E(z_t), Var(z_t))$. Calculons $E(z_t)$ et $Var(z_t)$:

$$\mathbb{E}(z_t) = e^{t^2/2} \left(z_0 e^{-t^2/2} + \tilde{\mu} \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds \right) \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(z_t) &= \mathbb{E}[(z_t - \mathbb{E}(z_t))^2] \\
&= e^{t^2} \mathbb{E} \left(-\tilde{\sigma}_1 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^1 + \tilde{\sigma}_2 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} d\tilde{W}_s^2 \right)^2 \\
&= e^{t^2} \left(-\tilde{\sigma}_1^2 \int_{t_0}^t e^{-s^2} ds + \tilde{\sigma}_2^2 \int_{t_0}^t e^{-s^2/2} ds \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

par l'isométrie d'Itô.

Regardons la probabilité qu'il n'y ait pas de spike, c'est à dire que z_t est plus grand qu'une valeur seuil x :

$$\mathbb{P}[z_t > x] = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-(y-\mathbb{E}(z_t))^2/2\text{var}(z_t)}}{\sqrt{2\pi\text{var}(z_t)}} dy \tag{3.27}$$

En faisant le changement de variable

$$u = \frac{y - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{var}(z_t)}} \tag{3.28}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[z_t > x] &= \int_{(x-\mathbb{E}(z_t))/\sqrt{\text{var}(z_t)}}^{+\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \\
&= 1 - \phi\left(\frac{x - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{var}(z_t)}}\right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi normale standard

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \tag{3.30}$$

Nous prenons $t_0 = 0$, $x = 0$ et $z_0 \ll \tilde{\mu}$ et étudions alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x - \mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{var}(z_t)}} \quad (3.31)$$

Nous avons

$$\int_0^{+\infty} s^2 e^{-s^2} ds = \frac{1}{2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (3.32)$$

Nous pouvons alors approcher

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{\text{var}(z_t)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{t^2/2} \tilde{\sigma} \quad (3.33)$$

Cela nous donne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\mathbb{E}(z_t)}{\sqrt{\text{var}(z_t)}} \simeq \frac{-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \pi^{1/4} \quad (3.34)$$

La probabilité p de faire un spike est égal à

$$\mathbb{P} = \phi\left(-\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}} \pi^{1/4}\right) = \phi\left(-(\pi\epsilon)^{1/4} \frac{\delta - \sigma_1^2/\epsilon}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (3.35)$$

Nous pouvons distinguer les trois différents régimes suivant la valeur de $\tilde{\mu}/\tilde{\sigma}$

1. $\tilde{\mu} \gg \tilde{\sigma}$ alors la probabilité p est très petite et nous sommes dans le régime où il n'y a pas de spike. Dans les variables de départ, cela donne $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ll \epsilon^{1/4}\delta$
2. $\tilde{\mu} \ll \tilde{\sigma}$, alors la probabilité p est proche de 1. Nous sommes dans le régime où il y a une suite de spikes $\tilde{\mu} \ll \tilde{\sigma}$ implique que $\tilde{\mu}^2 \ll \tilde{\sigma}^2$ qui s'écrit dans les variables d'origine $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \gg \epsilon^{3/4}$
3. $|\tilde{\mu}| = O(\tilde{\sigma})$ nous avons alors le régime intermédiaire avec une alternance de suite de spikes et de petites oscillations. Cela correspond à $\epsilon^{1/4}\delta \ll \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ll \epsilon^{3/4}$
 Dans ce régime, nous avons le cas particulier $\tilde{\mu} = 0$ C'est à dire $\sigma_1 = \sqrt{\epsilon}\delta$ où la probabilité de faire un spike est égale à $1/2$.

Chapitre 4

Simulation avec R

R est un logiciel de calcul scientifique R est un environnement intégré de manipulation de données, de calcul et de préparation de graphiques. Toutefois, ce n'est pas seulement un " autre " environnement statistique (comme SPSS ou SAS, par exemple), mais aussi un langage de programmation complet et autonome.

4.1 Le modèle de Hull-White, Vasicek

Exemple d'application (dans chapitre 1)

L'intérêt pratique de la simulation d'équations différentielles stochastiques est très important, car la résolution analytique n'est pas toujours facile. Cela rend difficile l'étude de l'évolution dynamique d'un phénomène, ou par exemple l'analyse statistique de la variable aléatoire : instant de premier passage (IPP) correspondant à la solution de l'équation, qui sera illustré dans ce chapitre. Aujourd'hui, le développement de l'outil informatique motive les scientifiques pour mettre au point des schémas numériques pour la résolution approchée des EDS.

Nous utilisons dans le paragraphe qui suit le Logiciel R avec le package `Sim :DiffProc` avec un sous programme personnel. Nous utilisons également le package `Sim :DiffProcGui` établi par Guidoum pour avoir d'autres aspects de la simulation.

Considérons le processus X à valeurs dans \mathbb{R} solution de

$$dX_t = r(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t$$

ou r, θ, σ sont des constantes, W est un F_t -mouvement brownien. En posant

$$Z_t = x_t - \theta$$

par la formule d'Itô nous avons

$$\begin{aligned} dZ_t &= dx_t \\ &= r(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t \\ &= -rZ_t dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

Le processus Z est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck la solution sous forme intégrale est donnée par

$$Z_t = z_0 e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW_s$$

En remplaçant Z_t par $X_t - \theta$ nous obtenons

$$X_t - \theta = (X_0 - \theta)e^{-rt} + \sigma e^{-rt} \int_0^t e^{rs} dW_s$$

$$X_t = X_0 \exp(-rt) + \theta(1 - \exp(-rt)) + \sigma \exp(-rt) \int_0^t \exp(rs) dw_s$$

Simulation numérique des trajectoires

Nous simulons d'abord quelques trajectoires à l'aide du package Sim.DiffProcGui. Effectuons un changement de paramètres, par exemple, on prend σ plus petite que 1, pour voir l'effet du coefficient de diffusion sur la perturbation de la trajectoire.

Nous remarquons que les trajectoires [4.3], [4.2] sont plus lisses que la trajectoire [4.1] lorsque σ est plus petite que 1.

Nous pouvons aussi utiliser une autre méthode de simulation. La fonction "snsde" permet de simuler numériquement la solution approchée des EDS. `R> help("snsde")`

```
R> example("snsde")
```

```
R> snsde(N, M, T = 1, t0, x0, Dt, drift, diffusion)
```

Détails :

N : La taille du processus .

M : Le nombre de trajectoires à simuler.

T : L'instant final.

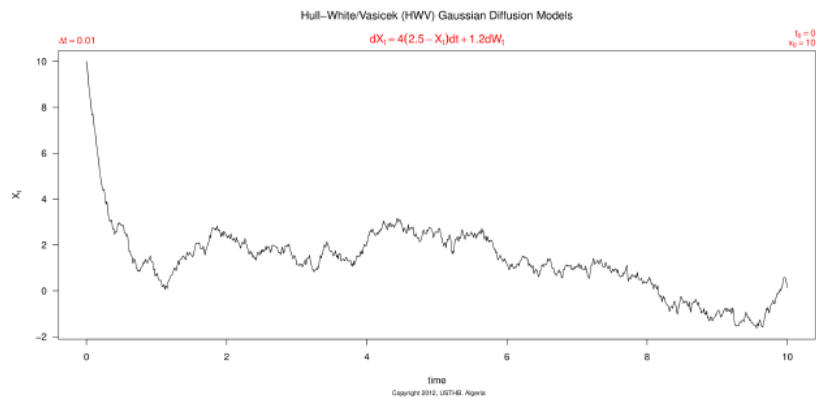


FIGURE 4.1 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 1.2$

t_0 : L'instant initial.

x_0 : La valeur initiale.

Dt : La discrétisation ou le pas (par défaut $T = t_0 + Dt * N$)

Drift : Coefficient de dérive.

Diffusion : Coefficient de diffusion

Utilisons cette méthode pour le modèle de HWV

```
R> f<-expression(4 * (2.5 - x))
```

```
R> g<-expression(1.2)
```

```
R> res<-snnssde1d(driff=f,diffusion=g,M=1,x0=10,t0=0,T=10,N=1000,Dt=0.01)
```

```
R> plot(res,main="Le modèle de Hull-white/Vasicek",xlab="temps",ylab="Xt", sub="Xt=4(2.5-  
Xt)+1.2dWt")
```

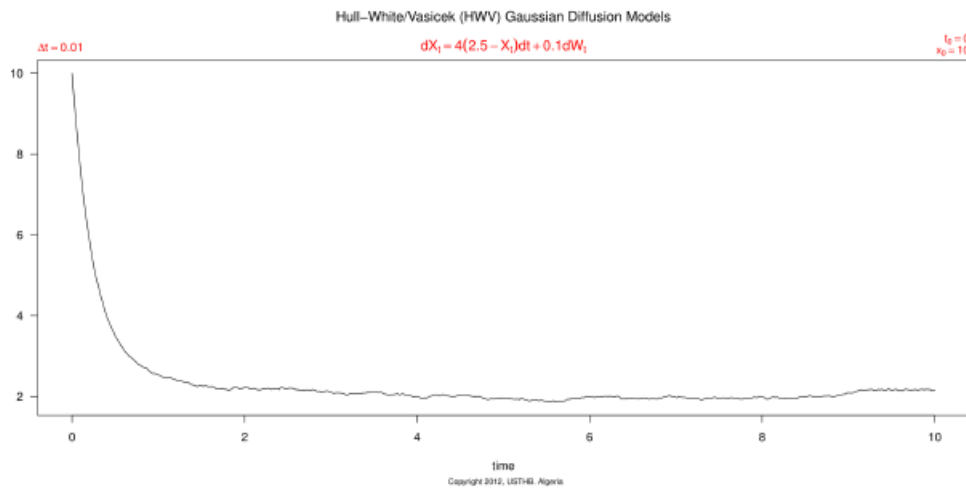


FIGURE 4.2 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 0.1$

Ornstein-Uhlenbeck simulation

```

xo = 10
mu = 2.5
sig = 1.2
alpha = 4
mesh = 100
t = 10
par(mfrow = c(1, 2), mar = c(2, 1.75, 1.5, 1), tck = -.03, mgp = c(3, .5, 0), cex.axis =
0.7)
bm = c(0, cumsum(rnorm(1000)))/sqrt(100)
xlist = numeric(1001)
for (iin0 : 1000)
xlist[i + 1] = xo * exp(-alpha * i/100) + mu * (1 - exp(-alpha * i/100)) +
sig * exp(-alpha * i/100) * sum(exp(alpha * i/100) * (bm[1 : (i + 1)] - bm[1 : (i)]))

plot(seq(0, 10, .01), xlist, type = "l", ylim = c(-2, 10), xlab = "", ylab = "")abline(h =
-1, lty = 2)
for (iin1 : 1)

```

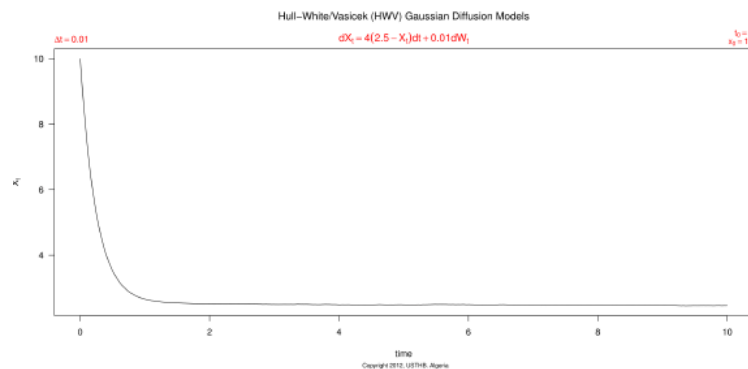



FIGURE 4.3 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 0.01$

```

bm = c(0, cumsum(rnorm(1000)))/sqrt(100)
xlist = numeric(1001)
for (iin0 : 1000)
xlist[i + 1] = xo * exp(-alpha * i/100) + mu * (1 - exp(-alpha * i/100)) +
sig * exp(-alpha * i/100) * sum(exp(alpha * i/100) * (bm[1 : (i + 1)] - bm[1 : (i)]))

lines(seq(0, 10, .01), xlist, type = "l")

```

Interprétation

Pour un ω fixé de manière aléatoire la simulation nous permet de mettre en évidence l'idée que la trajectoire de $X_t(\omega)$ est de plus en plus lisse "presque dérivable" quand σ est proche de 0 (réduction de la perturbation), de plus si on prend σ nul l'équation différentielle stochastique devient une équation différentielle ordinaire dont la trajectoire de sa solution est complètement lisse "dérivable".

Remarque

En peut simuler le temps de premier passage avec la commande suivants "fptsde1d"

Exemple

$$dX(t) = -4 * X(t) * dt + 0.5 * dW(t)$$

$$S(t) = 0 \text{ (constant boundary)}$$

```
set.seed(1234)
```

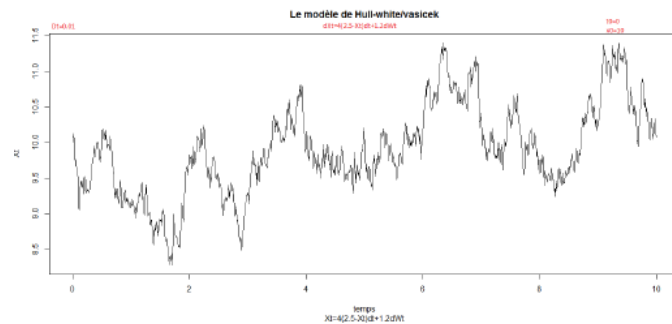


FIGURE 4.4 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 2.5$, $r = 4$, $\sigma = 1.2$

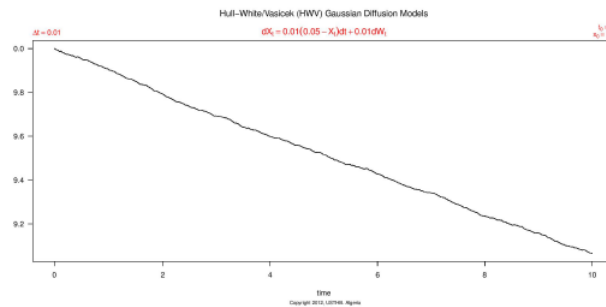


FIGURE 4.5 – Trajectoire du modèle de HWV avec $\theta = 0.05$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.01$

```
f<-expression(-4*x)
g<-expression(1.2)
St <- expression(0)
res1 <- fptsde1d(drift=f,diffusion=g,boundary=St,x0=2)
res1
plot(res1)
```

Les détails de l'excursions

Ito Sde 1D :

$$dX(t) = -4 * X(t) * dt + 1.2 * dW(t)$$

Method :

Euler scheme of order 0.5

Summary :

Size of process $N = 1000$.

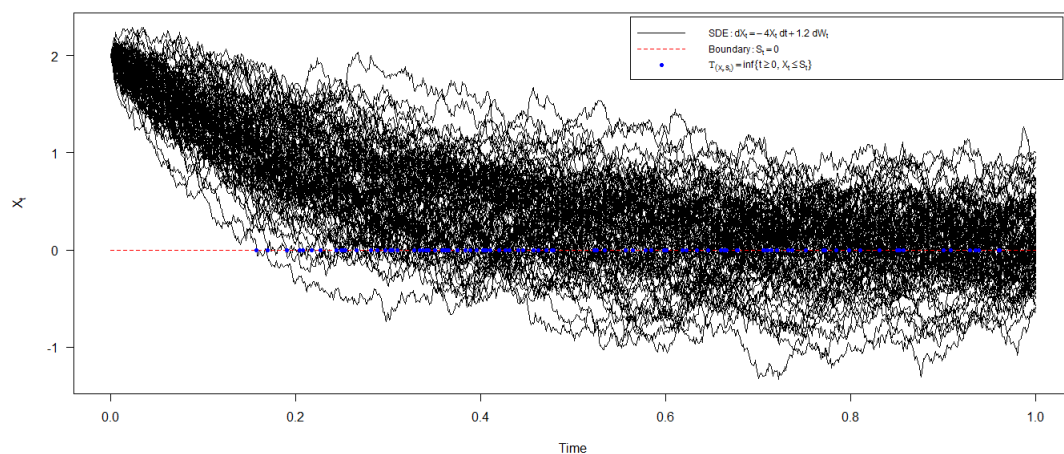
Number of simulation $M = 100$.

Initial value $x_0 = 2$.

Time of process t in $[0,1]$.

Discretization $Dt = 0.001$.

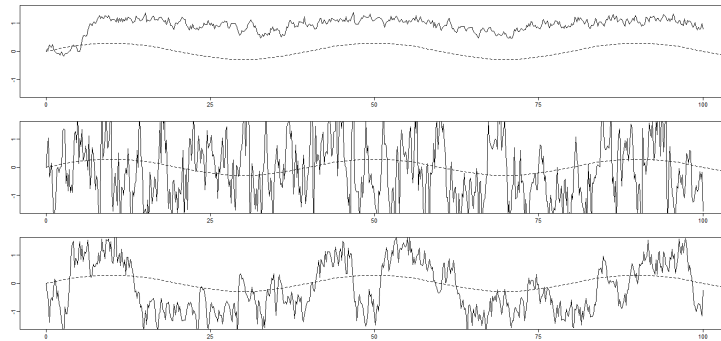
boundary [1] 0



Exemple de resonance stochastique

La résonance stochastique est un phénomène par lequel la transmission d'un signal utile ou cohérent, par certains systèmes non linéaires, peut être améliorée par l'augmentation du bruit appliqué au système .

$$\frac{dx}{dt} = [x - x^3 + s(t)]\frac{1}{\epsilon} + \xi_t$$



avec $s(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$ et $\xi_t = \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_t$

simulation(R)

```
par(mfrow=c(1,3),mar=c(2,1.75,1.5,1),tck=-0.03,mgp=c(3,.5,0))
```

```
sig <- c(0.2,2,0.8)
```

```
set.seed(20)
```

```
for (k in 1 :3)
```

```
sigma<- sig[k]
```

```
T <- 100
```

```
n <- 600
```

```
A <- .3
```

```
z <- 1
```

```
w <- 2*pi/40
```

```
x <- numeric(n+1)
```

```
x[1]<- 0
```

```
for (i in 2 :(n+1)) x[i] <- x[i-1] + (z*x[i-1] - z*x[i-1]3 + A * sin(w * T * (i - 1)/n)) *  
T/n + sigma * sqrt(T/n) * rnorm(1)
```

```
plot(seq(0,T,T/n),x,type = "l",ylim = c(-1.5,1.5),xaxt = "n",xlab = "",ylab =  
"",yaxt = "n",lwd = 0.5)
```

```
axis(2,c(-1,0,1))
```

```
axis(1,c(0,25,50,75,100))
```

```
curve(A * sin(w * x),0,400,lty = 2,add = TRUE)
```

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les systèmes lent-rapides déterministes puis stochastique et on a introduit un exemple typique de ces système sont les résonances, nous avons donné des exemples pratiques avec simulation.

Ce mémoire est consacré à l'étude des systèmes de FitzHugh-Nagumo stochastiques qui ont été introduits pour modéliser la transmission de l'influx nerveux dans un neurone. Nous avons commencé par rappeler des résultats sur le système déterministe associé afin de trouver les valeurs des paramètres intéressants pour notre étude. Celles-ci correspondent aux cas où le système admet au moins un point d'équilibre stable et où le système est excitable.

Comme perspectives, on s'intéresse à l'étude du comportement de solutions des systèmes lent-rapides plus compliqués dans lesquels les coefficients du système de FitzHugh-Nagumo (a, b, c) sont aléatoires, et dans ce cas, on introduit d'autres approches probabilistes pour étudier ce système et voir le comportement asymptotique puis la stabilité et la stabilisation.

Bibliographie

- [1] . B. van der Pol. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Rev.* 1, 701-710 (1920).
- [2] . J. Z. Su, J. Rubin, D. Terman. Effects of noise on elliptic bursters. *Nonlinearity* 17, 133-157 (2004).
- [3] . P. Hitczenko, G. S. Medvedev. Bursting oscillations induced by small noise. *SIAM J. Appl. Math.* 69, 1359-1392 (2009)
- [4] . R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. Stochastic réonance in the thermohaline circulation. *J. Phys. A* 11, 453-457 (1981).
- [5] . B. McNamara, K. Wiesenfeld. Theory of stochastic réonance. *Phys. Rev. A* 39, 4854-4869 (1989).
- [6] . M. I. Freidlin, A. D. Wentzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York (1998).
- [7] . N. Berglund, B. Gentz. The effect of additive noise on dynamical hysteresis. *Nonlinearity* 15, 605-632 (2002).
- [8] . N. Berglund, B. Gentz, C. Kuehn. Hunting French ducks in a noisy environment. *Journal of Differential Equations* 252, 4786-4841 (2012).
- [9] . W. Wang, A. J. Roberts. Average and deviation for slow-fast stochastic partial differential equations. *Journal of Differential Equations* 253, 1256-1286 (2012).
- [10] A. N. Tihonov, *Systems of différential equations containing small parameters in the derivatives*, *Mat. Sbornik N. S.* 31 (1952), 575-586.
- [11] Neil Fenichel, *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, *J. Differential Equations* 31 (1979), no. 1, 53-98.

-
- [12] Nils Berglund and Barbara Gentz, Beyond the FokkerPlanck equation : Pathwise control of noisy bistable systems, *J. Phys. A* 35 (2002), no. 9, 2057-2091.
- [13] The effect of additive noise on dynamical hysteresis, *Nonlinearity* 15 (2002), no. 3, 605-632.
- [14] Metastability in simple climate models : Pathwise analysis of slowly driven Langevin equations, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), 327-356.
- [15] Pathwise description of dynamic pitchfork bifurcations with additive noise, *Probab. Theory Related Fields* 122 (2002), no. 3, 341-388.
- [16] A sample-paths approach to noise-induced synchronization : Stochastic réonance in a double-well potential, *Ann. Appl. Probab.* 12 (2002), 1419-1470.
- [17] Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations, *J. Differential Equations* 191 (2003), 1-54.
- [18] On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit I : Two-level model, *J. Statist. Phys.* 114 (2004), 1577-1618.
- [19] On the noise-induced passage through an unstable periodic orbit II : The general case, In preparation, 2005.
- [20] Y. Shimazu, K. Sugiyama, T. Kojima, and E. Tomida, Some problems in ecology oriented environmentology. II. Terrestrial environmentology, 1. *Earth Sci. Nagoya Uniu.* 20 :31-89 (1972).
- [21] M. E. Gilpin, Enriched predator-prey systems : Theoretical stability, *Science* 177902994 (1972).
- [22] H. L. Smith, The interaction of steady state and Hopf bifurcations in a two-predator-one-prey competition model, *SIAM J. Appl. Math.* 42 :27-43 (1982).
- [23] Richard Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGrawHill, New York, 1960.
- [24] L. S. Pontryagin and L. V. Rodygin. Approximate solution of a system of ordinary differential equations involving a small parameter in the derivatives. *Soviet Math. Dokl.*, 1 :237240, 1960.
- [25] Roberto Benzi, Giorgio Parisi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, A theory of stochastic réonance in climatic change, *SIAM J. Appl. Math.* 43 (1983), no. 3, 565-578.

-
- [26] Luca Gammaitoni, Peter Hanggi, Peter Jung, and Fabio Marchesoni, Stochastic réonance, *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998), 223-287.
- [27] Frank Moss and Kurt Wiesenfeld, The benefits of background noise, *Scientific American* 273 (1995), 50-53.
- [28] Kurt Wiesenfeld and Frank Moss, Stochastic réonance and the benefits of noise : from ice ages to crayfish and SQUIDS, *Nature* 373 (1995), 33-36.
- [29] Roberto Benzi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani, The mechanism of stochastic réonance, *J. Phys. A* 14 (1981), no. 11, L453-L457.
- [30] Richard Bellman, *Introduction to matrix analysis*, McGrawHill, New York, 1960.
- [31] Martin V. Day, On the exponential exit law in the small parameter exit problem, *Stochastics* 8 (1983), 297-323.
- [32] P. Imkeller and I. Pavlyukevich, Model reduction and stochastic réonance, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), no. 4, 463-506.
- [33] J.-P. Eckmann and L. E. Thomas, Remarks on stochastic réonance, *J. Phys. A* 15 (1982), L261-L266.
- [34] Bruce McNamara and Kurt Wiesenfeld, Theory of stochastic réonance, *Phys. Rev. A* 39 (1989), 4854-4869.
- [35] Samuel Herrmann and Peter Imkeller, Barrier crossings characterize stochastic réonance, *Stoch. Dyn.* 2 (2002), no. 3, 413-436, Special issue on stochastic climate models.
- [36] Ronald F. Fox, Stochastic réonance in a double well, *Phys. Rev. A* 39 (1989), 4148-4153.
- [37] Peter Jung and Peter Hänggi, Stochastic nonlinear dynamics modulated by external periodic forces, *Europhys. Letters* 8 (1989), 505-510.
- [38] Mark I. Freidlin, Quasi-deterministic approximation, metastability and stochastic réonance, *Physica D* 137 (2000), 333-352.
- [39] Richard Haberman, Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems, *SIAM J. Appl. Math.* 37 (1979), no. 1, 69-106.

- [40] E. F. Mishchenko and N. Kh. Rozov, Differential equations with small parameters and relaxation oscillations, Plenum Press, New York, 1980.
- [41] Peter Jung, George Gray, Rajarshi Roy, and Paul Mandel, Scaling law for dynamical hysteresis, Phys. Rev. Letters 65 (1990), 1873-1876.
- [42] Nils Berglund and Hervre Kunz, Memory effects and scaling laws in slowly driven systems, J. Phys. A 32 (1999), no. 1, 15-39.
- [43] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. Journal of Physics A, 14 :L453-L458, 1981.
- [44] S. M. Bezrukov, I. Vodyanov. Stochastic resonance in non-dynamical systems without response thresholds. Nature, 385 :319-321, 1997.
- [45] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, L. Kiss. Stochastic resonance in a single neuron model : Theory and analog simulation. Journal of Theoretical Biology, 152 :531-555, 1991
- [46] A. R. Bulsara, L. Gammaitoni. Tuning in to noise. Physics Today, 49 :39-45, March 1996
- [47] A. R. Bulsara, S. B. Lowen, C. D. Rees. Cooperative behavior in the periodically modulated Wiener process : Noise-induced complexity in a model neuron. Physical Review E, 49 :4989-5000, 1994.
- [48] J. M. Casado, J. J. Mejias, M. Morillo. Comments on Stochastic resonance in a periodic potential system under a constant driving force". Physics Letters A, 197 :365-366, 1995.
- [49] L. Gammaitoni. Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems. Physical Review E, 52 :4691-4698, 1995.
- [50] Z. Gingl, L. B. Kiss, F. Moss. Non-dynamical stochastic resonance : Theory and experiments with white and arbitrarily coloured noise. Europhysics Letters, 29 :191-196, 1995.
- [51] M. Gitterman, I. B. Khaln, B. Y. Shapiro. On the onset of stochastic resonance. Physics Letters A, 184 :339-340, 1994.
- [52] M. Gitterman, G. H. Weiss. Escape of a periodically driven particles from a metastable state in a noisy system. Journal of Statistical Physics, 70 :107-123, 1993.

- [53] P. Jung. Stochastic resonance and optimal design of threshold detectors. *Physics Letters A*, 207 :93-104, 1995.
- [54] A. Longtin, A. R. Bulsara, F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67 :656-659, 1991.
- [55] B. McNamara, K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, 39 :4854-4869, 1989.
- [56] F. Moss, J. K. Douglass, L. Wilkens, D. Pierson, E. Pantazelou. Stochastic resonance in an electronic Fitzhugh-Nagumo model. *Annals of New York Academy of Sciences*, 706 :2641, 1993.
- [57] F. Moss, D. Pierson, D. O’Gorman. Stochastic resonance : Tutorial and update. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4 :1383-1398, 1994.
- [58] Z. Neda. Stochastic resonance in 3D Ising ferromagnets. *Physics Letters A*, 210 :125- 128, 1996.
- [59] C. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions response to periodic forcing. *Tellus*, 9 :34 1982. 112 References
- [60] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, 1985.
- [61] G. Sampath, S. K. Srinivasan. *Stochastic Models for Spike Trains of Single Neurons*. Springer, Berlin, 1977.
- [62] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, F. Moss. Visual perception of stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 78 :1186-1189, 1997.
- [63] M. Spano, M. Wun-Fogle, W. L. Ditto. Experimental observation of stochastic resonance in a magnetoelastic ribbon. *Physical Review A*, 46 :5253-5256, 1992.
- [64] N. G. Stocks, N. D. Stein, P. V. E. McClintock. Stochastic resonance in monostable systems. *Journal of Physics A*, 26 :L385-L390, 1993.
- [65] N. G. Stocks, N. D. Stein, S. M. Soskin, P. V. E. McClintock. Zero-dispersion stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 25 :L1119-L1124, 1992.
- [66] R. FitzHugh, Impulses and physiological states in models of nerve membrane, *Biophys. J.* 1 (1961), 445-466.

-
- [67] J. S. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* 50 (1962), 2061-2070
- [68]] Bernt Oksendal, *Stochastic differential equation, An introduction with application*, fourth edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [69] T. Kostova, , R. Ravindran and M. Schonbek, FitzHugh-Nagumo Revisited, *International J. Bifurcation and Chaos* 14 (3) (2004), 913-925.