

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique



N Attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Année Univ. : 2015/2016



Regularisation d'une classe de problème mal posés non homogène

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse géométrie et application

par

Ikhlef Nadia¹

Sous la direction de

Dr G.Djellouli

Soutenue le Juin 2016 devant le jury composé de

M. H.Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. H.Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. K.Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur
M. N.Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examineur

1. e-mail : nadia.ikhlef92@gmail.com

Dedicace

Je dédie ce mémoire

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiances, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A mes soeurs ainsi qu'à mon chère frère pour leur tendresse, leur complicité et leur présence malgré la distance qui nous sépare.

A mes tante pour toute l'affection qu'ils m'ont donnée et pour leurs précieux encouragements.

A toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

Remerciements

Avec l'aide de dieu tout puissant, on a pu achever ce modeste travail. Je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Djellouli, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Mes remerciements s'adressent également à mes cheres collegues, pour sa générosité et la grande patience. J'exprime ma gratitude à tous les jurés rencontrés lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse. Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adressé mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

Table des matières

1	RAPPEL SUR LES OPÉRATEURS ET LES SEMIGROUPES	11
1.1	Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert	11
1.1.1	Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire	11
1.1.2	Opérateurs auto-adjoints	12
1.1.3	Spèctre d'un opérateur linéaire	13
1.1.4	Opérateurs non-bornés dans un espace de Hilbert	14
1.2	Rappel sur les semi-groupes	16
1.2.1	Définitions	16
1.2.2	Propriétés des semi-groupes de contraction	17
1.2.3	Théorème de Hille-Yosida	17
2	Problème bien et mal posé. Définitions et exemples	19
2.1	Introduction	19
2.2	Définition mathématique d'un problème inverse au sens de Hadamard	20
2.3	Exemples	23
2.3.1	Résolution du système linéaire $Ax = b$	23
2.3.2	Calcul de la série de Fourier à coefficients approchés dans la métrique de l_2	25
2.3.3	Les équations intégrales de première espèce de Fredholm et Vol- tera	27
2.3.4	Différentiation et intégration	31
2.3.5	Problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace	33

3	Méthodes de régularisation	37
3.1	Introduction	37
3.2	Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses linéaires . . .	38
3.2.1	Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés .	38
3.2.2	Équations normales	44
3.2.3	La méthode de Tikhonov	44
3.2.4	Estimation de la solution approchée	45
3.2.5	Méthode de Morozov	52
3.2.6	Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)	56
3.3	Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses non linéaires	57
3.3.1	La méthode de Newton-Raphson	58
4	REGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSE NON HOMOGENÈNE	61
4.1	Introduction	61
4.2	Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène	63
4.2.1	Le problème approché	64
4.2.2	Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché	65
4.3	Estimation de la solution approchée	67
4.3.1	Résultats de convergence	68
4.4	Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché	72

0.1 NOTATION

\mathbb{R} : Ensemble des nombres réels.

A : Opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.

$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A .

A^* : Opérateur adjoint de l'opérateur A .

$\ker A$: le noyau de l'opérateur A .

$\text{Im}A$: l'image de l'opérateur A .

A_α : l'approximation de Yosida de l'opérateur A .

H : espace de Hilbert.

F^\perp : l'ensemble orthogonal de l'ensemble F .

\bar{F} : l'ensemble fermeture de l'ensemble F .

$\delta(H)$: l'ensemble des opérateurs auto-adjoint définis sur l'espace de Hilbert.

$S(t)$: semi-groupe.

$\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A .

$\sigma(A)$: spectre de A .

λ : valeur propre de l'opérateur A .

(\cdot, \cdot) : produit scalaire.

$\|\cdot\|$: une norme.

$L(H)$: l'ensemble des opérateurs linéaire définis sur H .

u' : la dérivée de u par rapport à t .

INTRODUCTION

La notion d'un problème mathématique mal-posé a apparut dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations" [14], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. La perte d'une des propriétés définit un problème dit mal-posé. C'était une étape pour la classification des modèles mathématiques de problèmes de physique associés à des équations différentielles.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien été adaptés pour les solutions des problèmes bien-posés, cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés peuvent avoir solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, Morozov, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Pour plus de détails du traitement des problèmes mal-posés, on réfère à deux excellents livres de D. Colton, H.W. Engl, A.K. Louis [9] et de H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer [13].

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le problème mal-posé de Cauchy, on cite "la méthode de quasi-solution" de Tikhonov 1977 [20], "la méthode de quasi-réversibilité" par Lattès et Lions en 1967 [18], "la méthode de la convexité logarithmique" développée par John (1960). Agmon, Nirenberg (1963), Miller (1973), Payne (1973), Carraso (1999) [2], [6], "les procédures itératives" par Kozlov et Maz'ya 1990 [7] "la méthode quasi-valeur aux limites" par Clark et Oppenheimer 1995 [4], [8]; et "la technique des semi-groupes C-régularisés" par Mel'nikova, 2002 [5].

L'objet de ce mémoire, concerne l'étude d'une classe de problèmes non standards, décrits par des équations différentielles ; en particulier, un problème parabolique abstrait à valeur finale, pour une équation différentielle non homogène du premier ordre et à coefficient opératoire auto-adjoint positif, non borné. Ce problème est mal posé. Par la méthode des quasi-valeurs aux limites, on perturbe la donnée finale pour for-

mer une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. On montre que le problème approché est bien posé et que, sa solution converge si le problème initial admet une solution classique. On obtient aussi, une estimation de la solution du problème approché, ainsi que la convergence des solutions approchées et l'estimation de l'erreur de convergence.

Ce mémoire est composée de quatre chapitres.

premier chapitre on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert, éléments de la théorie des opérateurs et les semigroupes).

Dans le *deuxième chapitre*, nous introduirons la notion fondamentale de problème mal posé, qui est caractéristique des problèmes inverses. est consacré pour la définition d'un problème mal-posé, nous donnerons plusieurs exemples de problèmes inverses, provenant de plusieurs domaines de la physique.

Au *chapitre trois*, nous aborderons l'étude des techniques et méthodes de résolutions pour les problèmes mal posés. On présente brièvement le principe de trois méthodes : la méthode de Tikhonov, le "discrepancy principle" de Morozov et la méthode de quazi-reversibilité et ce pour les problème linéaire.

Dans le *chapitre quatre*, on étudie un problème inverse de Cauchy qui modélise un certain nombre de phénomènes physiques par une équation parabolique non homogène avec condition finale.

Le problème étudié est le suivant :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f, \\ u(T) = g \end{cases} \quad 0 \leq t < T \quad (FVP)$$

avec $u \in C^1([0; T]; H)$, $f \in C^1([0; T]; H)$, g appartenant à un espace de Hilbert H et $-A$ le générateur infinitésimal d'un C_0 semigroupe $S(t) : (S(t) = e^{-At})$: Le problème est mal posé.

Dans ce contexte, beaucoup d'approches ont été faites pour le cas homogène [5]. Pour l'étude du cas non homogène, on note Lattés et Lions [18], qui utilisent la méthode de quasi-réversibilité, puis de Hetrick et Hughes [12], ensuite de Dang Duc Trong et Nguyen Huy Tuan [21] utilisant la quasi-réversibilité stabilisée, et S. Djezzar [6] avec la méthode des quasi-valeurs aux limites.

Dans ce travail, on utilise cette dernière méthode (quasi-boundary value method) pour le traitement de la classe de problèmes non homogènes sous considération.

On s'intéresse à l'existence de la solution du problème (*FVP*). On établie des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème approché, ainsi que la dépendance continue par rapport aux données.

nous établissons des résultats de la convergence de la solution régularisée, ainsi que l'estimation de l'erreur obtenue.

Chapitre 1

RAPPEL SUR LES OPÉRATEURS ET LES SEMIGROUPES

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les théories des opérateurs et des semigroupes et on finira avec le théorème de Hill Yoshida.

1.1 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Soient H et G deux espaces de Hilbert.

1.1.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire

Définition 1.1.1. *Un opérateur linéaire $A : H \rightarrow G$, est continu si :*

$$\exists M > 0, \forall u \in H, \|Au\| \leq M \|u\|$$

le plus petit nombre M , s'appelle la norme de l'opérateur A :

$$\|A\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Définition 1.1.2. *On dit que l'opérateur $A : H \rightarrow G$, est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$, un ensemble borné dans l'espace G .*

Définition 1.1.3. Un opérateur A^* défini sur $D(A^*) \subset G^*$ à valeur dans H^* ; tel que

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*) : \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

est appelé l'adjoint de A et vérifie de plus : $(A^*)^* = A$ et $\|A^*\| = \|A\|$.

Proposition 1.1.1. Soit $A : H \rightarrow G$; un opérateur linéaire et A^* son adjoint. On a les relations suivantes :

- i) $\ker A^* = (\text{Im} A)^\perp$
- ii) $(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im} A^*}$

1.1.2 Opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert

Définition 1.1.4. On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $A = A^*$ c'est-à-dire :

$$\forall u, v \in H, \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$$

Si l'opérateur A est auto-adjoint, alors on a : $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle Au, u \rangle|$

Définition 1.1.5. Un opérateur $A : X \rightarrow Y$; est dit compact si toute suite bornée (f_n) de $D(A)$ contiennent une sous-suite (f_{n_k}) pour laquelle (Af_{n_k}) est convergente et ça c'est équivalent à : l'image d'un ensemble borné par l'opérateur A est un ensemble relativement compact.

Proposition 1.1.2. Tout opérateur de rang fini est compact.

Définition 1.1.6. (Schauder) Soit $A \in \mathcal{L}(X; Y)$; où Y est complet. L'opérateur A est compact si et seulement si son adjoint A^* est compact.

Théorème 1.1.1. (Théorème de Riesz), L'identité d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si cet espace est de dimension finie.

1.1.3 Spèctre d'un opérateur linéaire

Soit A un opérateur linéaire défini de X dans Y tel que $D(A) = X$:

Définition 1.1.7. On dit que le point λ est un point régulier de A si l'opérateur $(A - \lambda I)$ est inversible, i.e : $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Définition 1.1.8. L'ensemble des points réguliers de l'opérateur A est appelé ensemble résolvant de A et noté par $\rho(A)$ tel que :

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} / (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et borné} \}$$

- Si $\lambda \in \rho(A)$; L'opérateur linéaire et borné $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelé résolvante de A .

- Le spectre $\sigma(A)$ et le complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe i.e $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

- On dit que λ est valeur propre, et on note $\lambda \in VP(A)$ si $\ker(A - \lambda I) \neq 0$

Remarque 1.1.1. Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$: En général, l'inclusion est stricte : Il peut exister λ tel que :

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \text{Im}(A - \lambda I) \neq X$$

(Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre)

Remarque 1.1.2. . Si $\dim X < \infty$ alors $\sigma(A) = VP(A)$.

Proposition 1.1.3. Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

Proposition 1.1.4. Si A est un opérateur linéaire et borné, alors : $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Théorème 1.1.2. Soit A un opérateur auto-adjoint et compact dans un espace de Hilbert complexe X Alors : i) A possède au moins une valeur propre non-nulle si $A \neq 0$:

ii) Les valeurs propres de A sont toutes réelles et contenues dans $[m; M]$, où

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

iii) M est la plus grande valeur propre de A si $M \neq 0$; m est la plus petite valeur propre de A si $m \neq 0$:

1.1.4 Opérateurs non-bornés dans un espace de Hilbert

Dans cette section X est un espace de Hilbert séparable sur \mathbb{C} . On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, qui, par convention, est antilinéaire par rapport à la seconde variable.

Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.9. *Un opérateur sur X (ou opérateur non-borné) est la donnée d'un sous espace vectoriel D de X , et d'une application linéaire $A : D \rightarrow X$. L'espace D est le domaine de l'opérateur A . On le note (D, A) et l'on parle de l'opérateur A , de domaine $D(A) = D$. Si $D' \subset D$ et $Au = A'u$ pour tout $u \in D'$, on dit que (D, A) est une extension de (D', A') , ce que l'on note $(D', A') \subset (D, A)$.*

Opérateurs fermés

Le théorème du graphe fermé affirme qu'un opérateur fermé de domaine H est borné. Rappelons la

Définition 1.1.10. *Soit (D, A) un opérateur, et $G(A) = \{(x, Ax), x \in D\}$ son graphe. On dit que (D, A) est fermé si $G(A)$ est fermée.*

Définition 1.1.11. *i). fermé lorsque G est un sous-espace fermé de $H \times H$.
ii). fermable si \overline{G} est un graphe, i.e.*

$$(x, y) \in \overline{G}, (x, y') \in G' \Rightarrow y = y'.$$

On note alors $(\overline{D}, \overline{A})$ l'opérateur dont le graphe est \overline{G} . C'est une extension de (D, A) . La linéarité de A donne un critère simple pour montrer qu'un opérateur est fermable : il suffit de vérifier que si $(0, y) \in G$, alors $y = 0$.

Opérateurs symétriques et autoadjoints

Définition 1.1.12. *On dit qu'un opérateur (D, A) est symétrique lorsque*

$$\forall u, v \in D, \langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

Définition 1.1.13. *On dit qu'un opérateur (forcément symétrique et fermé) (D, A) est auto-adjoint lorsque $(D^*, A^*) = (D, A)$.*

Pour les opérateurs symétriques qui ne sont pas fermés.

Définition 1.1.14. *On dit qu'un opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint lorsque $(\overline{D}, \overline{A})$ est auto-adjoint.*

Lemme 1.1.1. *Si l'opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Proposition 1.1.5. *Soit (D, A) un opérateur symétrique. S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(A + \lambda)$ et $\text{Im}(A + \overline{\lambda})$ sont denses dans H , alors A est essentiellement auto-adjoint.*

Lemme 1.1.2. *Soit (D, A) un opérateur fermé, et $R(A)$ sa résolvante. On a les propriétés suivantes :*

- Lemme 1.1.3.** *i). $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$, et $\overline{R(A)} = R(A^*)$,
 ii). Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.
 iii). Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A)$.*

Proposition 1.1.6. *L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{C} , et R_A est une application holomorphe, par exemple dans le sens où, pour tout $u, v \in H$, $\lambda \mapsto \langle R_\lambda(A)u, v \rangle$ est holomorphe. Enfin pour $\lambda \in \rho(A)$ on a*

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \|R_\lambda(A)\|.$$

On déduit de l'estimation ci-dessus le critère suivant :

Proposition 1.1.7. *Soit (D, A) un opérateur fermé. $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de A s'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de D telle que $\|\psi_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda)\psi_n\| \rightarrow 0$. La réciproque est vraie si λ est un point du bord du spectre.*

Cas des opérateurs autoadjoints

On remarque d'abord que le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint est toujours vide. En effet si $\ker(A - \lambda I) = \ker(A^* - \lambda I) = \{0\}$, alors $(\text{Im}(A - \lambda))^\perp = \{0\}$. On a aussi la

Proposition 1.1.8. *Soit (D, A) un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

On a donc le critère suivant

Proposition 1.1.9. *Soit (D, A) un opérateur auto-adjoint. $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de A si et seulement si il existe une suite (ψ_n) de D telle que $\|\psi_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda)\psi_n\| \rightarrow 0$.*

1.2 Rappel sur les semi-groupes

Dans cette section on présente quelques définitions et théorèmes venus de la théorie des semi-groupes qui doit son origine à l'étude des équations différentielles ordinaires en dimension finie.

1.2.1 Définitions

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.2.1. *On dit que la famille d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe (fortement continu) si :*

Définition 1.2.2. *i) $\forall t \geq 0, S(t) \in L(X)$*

ii) $S(0) = Id_{L(X)}$

iii) $\forall (s, t) \geq 0, S(s + t) = S(s) \circ S(t)$

iv) $\forall x \in X, \lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$

Définition 1.2.3. *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur non-borné $A : D(A) \subset X \rightarrow X$; défini par :*

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}$$

Remarque 1.2.1. *Dans le cas où $D(A) = X$ et $A \in L(X)$, la famille d'opérateurs $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal A , c'est pourquoi on note abusivement $S(t) = e^{-tA}$:*

Définition 1.2.4. *Le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est dit de contraction si :*

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

1.2.2 Propriétés des semi-groupes de contraction

Théorème 1.2.1. *soient X un espace de Banach, $(S(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe de contraction sur X et A son générateur infinitésimal, alors :*

- i) $\forall x \in X : t \rightarrow S(t)x \in C^0(\mathbb{R}^+, x)$.*
- ii) $\forall x \in X, \forall t \geq 0, S(t)x \in D(A), S(t)x \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ et vérifie $x'(t) = Ax(t)$*
- iii) A est fermé de domaine dense.*

Théorème 1.2.2. (caractérisation des générateurs infinitésimaux) *Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur non-borné sur X ; On a l'équivalence : i) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.*

ii) $D(A)$ est dense et pour toute condition initiale $x_0 \in D(A)$, il exist une unique solution $x(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

De plus sous cette hypothèse la solution $x(t)$ est à valeurs dans $D(A)$ et vérifie $\|x(t)\|_X \leq \|x_0\|_X$, ainsi que $\|Ax(t)\|_X \leq \|Ax_0\|_X$

1.2.3 Théorème de Hille-Yosida

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 1.2.5. *L'opérateur linéaire non-borné $A : D(A) \subset H \rightarrow H$; est monotone si :*

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in D(A)$$

et il est maximal monotone si de plus $\text{Im}(I + A) = H$, i.e :

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A) : u + Au = f$$

Théorème 1.2.3. (Hille-Yosida) : Soit A un opérateur maximal monotone défini sur un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+, H) \cap C(\mathbb{R}^+, D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du(t)}{dt} \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0$$

Remarque 1.2.2. L'intérêt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

on se ramène à vérifier que A est maximal monotone.

Chapitre 2

Problème bien et mal posé.

Définitions et exemples

2.1 Introduction

Un grand nombre de problèmes réels en sciences expérimentales consiste à déterminer une grandeur non directement observable $x(t)$ à partir d'un ensemble fini de mesures d'une grandeur observée $y(u)$ dépendant de paramètres α selon le modèle $A(y(u), x(t), \alpha) = 0$. Parfois le modèle est explicite : $y(u) = A(x(t), \alpha)$. Nous pouvons dire que

- connaissant A, α, x , le calcul de y est un problème direct.
- connaissant A, α, y , le calcul de x est un problème inverse.
- connaissant A, x, y , le calcul de α est un problème inverse d'identifications de paramètres.
- connaissant A, y , le calcul de α et x est un problème inverse aveugle.

Ces problèmes étant sensibles à la présence d'incertitudes au niveau du modèle et des mesures, il est plus réaliste d'écrire $A(y, x, \alpha, e) = 0$ où e représente les erreurs communément appelé bruit. Pour un modèle explicite, on peut faire l'hypothèse que les erreurs interviennent à la sortie et si les erreurs sont additives, on a $y = A(x, \alpha) + e$. Si A est un opérateur linéaire, la relation peut s'écrire soit comme $y = Ax + e$ où A est une matrice dans le cas discret, soit comme une intégrale de Fredholm dite

de première espèce $y(u) = \int K(t, u)x(t)dr + e(u)$ où $K(t, u)$ est appelé noyau de Green ou fonction instrumentale dans le cas continu. Cette intégrale se discrétise, par quadrature par exemple, en $y = Ax + e$ où A est une matrice.

Nous présentons dans ce chapitre quelques exemples "concrets" de problèmes inverses, tels qu'ils interviennent dans les sciences de l'ingénieur. Du point de vue mathématique, ces problèmes se répartissent en deux grands groupes. D'une part, il y a les problèmes linéaires qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret. Le recours à l'analyse fonctionnelle et à l'algèbre linéaire permet d'obtenir des résultats précis et des algorithmes efficaces. D'autre part, il y a les problèmes non-linéaires, qui sont le plus souvent des questions d'estimation de paramètres dans des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Les problèmes non-linéaires peuvent se diviser en deux catégories selon que le paramètre que l'on cherche à estimer est un vecteur ou une fonction. Les problèmes non-linéaires sont plus difficiles, et il existe moins de résultats généraux. Cette liste est loin d'être exhaustive (voir les références). Cette dernière partie ne fait pas l'objet de notre étude.

2.2 Définition mathématique d'un problème inverse au sens de Hadamard

Pour comprendre et maîtriser un phénomène physique, l'usage veut que nous relations les paramètres x qui caractérisent le phénomène aux informations mesurables y qui en résultent à partir d'un modèle, que l'on note A . Cette relation entre les grandeurs d'entrée et sortie d'un modèle peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Ax = y \tag{2.1}$$

où $A \in \mathcal{L}(X; Y)$, ($X; Y$ deux espaces de Hilbert) peut s'exprimer sous de nombreuses formes, comme par exemple un système linéaire ou non linéaire d'équations différentielles ordinaires (*ODE*) ou equation intégrable ou equation aux dérivée partielle (*EDP*).

2.2 Définition mathématique d'un problème inverse au sens de Hadamard

Nous allons maintenant nous intéresser à une définition mathématique plus précise proposée par Hadamard [14] et permettant de mieux cerner les difficultés inhérentes à la résolution de ce type de problèmes.

En 1923, Hadamard a introduit la notion de problème bien posé. Il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe
- la solution est unique
- la solution dépend continûment des données.

Les problèmes mathématiques peuvent être répartis en deux classes distinctes : les problèmes dits bien posés et les problèmes dits mal posés.

Définition 2.2.1. *On dit qu'un problème est bien posé au sens de Hadamard, si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

Définition 2.2.2. *i) Existence d'une solution,*

$$\forall y \in Y, \text{ il existe une solution } x \in X \text{ telle que } Ax = y$$

ii) Unicité de la solution,

$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ si } Ax_1 = Ax_2 = y \text{ alors } x_1 = x_2$$

iii) Stabilité de la solution par rapport aux données y : La solution x dépend continûment de y ;

$$\text{i.e., } \forall (x_n) \subset X \text{ t.q. } y_n = Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y = Ax \text{ alors } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Remarque 2.2.1. *Par opposition, les problèmes mal posés au sens de Hadamard ne remplissent pas au moins l'une des trois conditions précédentes.*

Remarque 2.2.2. *Par la suite nous qualifierons de problème inverse, un problème mal posé au sens d'Hadamard.*

Définition 2.2.3. *Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit mal posé.*

Analysons les trois conditions d'un problème bien posé dans le cas des problèmes inverses. Que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. Après tout, ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, les problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voire les trois ensemble. Cela n'est pas surprenant pour plusieurs raisons.

– Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.

– Si une solution existe, il est parfaitement concevable (et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux mêmes observations.

– Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une grande difficulté. Il est habituellement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution, par exemple, dans le cas d'un système linéaire surdéterminé $Ax = b$, en redéfinissant le problème avec moins d'équations ou en cherchant la solution au sens des moindres carrés (i.e. x tel que $\|Ax - b\|^2$ soit la plus petite).

– La non-unicité est un problème un peu plus sérieux. Si un problème a plusieurs solutions, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires (une information a priori).

– La question la plus difficile est, sans aucun doute, celle de la stabilité : si l'on change légèrement les données (conditions initiales, conditions aux limites, coefficients, la géométrie du domaine, et les éventuelles variations en temps de ces derniers) la solution varie-t-elle peu ou beaucoup ? C'est-à-dire, varie-t-elle continûment en fonction des données ? Il y a des problèmes où, une petite différence dans les paramètres entraîne un comportement totalement différent de la solution (cas des phénomènes dits "chaotiques").

- Pour les équations intégrables de première espèce, si A est compact et $\text{Im}(A)$ non fermé alors, le problème est mal posé.

2.3 Exemples

On présente ici quelques exemples simples de problèmes mal-posés. Pour d'autres exemples bien détaillés, on conseille de voir les deux célèbres livres de H. W. Engl M. Hanke et A. Neubauer [13] et A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin [21]

2.3.1 Résolution du système linéaire $Ax = b$

Conditionnement d'un système linéaire

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On cherche à étudier l'influence des erreurs d'arrondi de la matrice A et du vecteur b sur la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système $Ax = b$

Exemple 2.3.1. *On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$, où A est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Si b est le vecteur $b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$ alors la solution est $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2.3.2. *On considère les perturbations suivantes :*

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}$$

et

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}$$

la solution de $Ay = b + \Delta b$, est

$$y = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Delta x = y - x = \begin{pmatrix} 0,82 \\ -1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

la solution de $(A + \Delta A)x = b$ est

$$z = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Delta x = z - x = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Solution fort différente de la précédente. Une petite perturbation de A entraîne une grande perturbation de x . Ce problème est donc mal posé car la troisième condition n'est pas satisfaite.

Dans ce cas-ci, on dit que la matrice A est mal conditionnée. On remarque que, dans les deux cas, l'erreur relative sur les coefficients des données (A ou b) est amplifiée par la même constante qui ne dépend que de la matrice A . On appelle conditionnement de la matrice A inversible, le nombre $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Autrement dit, de très petites variations sur b ont conduit à des grandes variations sur x . De façon précise, si A est une matrice, son conditionnement $\text{cond}(A)$ est grand entraîne que le système est mal conditionné et donc le problème est mal posé. Dans l'exemple précédent, on trouve $\text{cond}(A) = 578$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4 i.e. ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement b . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de x

Remarque 2.3.1. *Afin de savoir si la matrice d'un système est bien conditionnée, la notion de conditionnement d'une matrice a été introduite. Le conditionnement d'une matrice A est définie comme $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Il y a différents conditionnements en fonction de la norme matricielle choisie. Le conditionnement habituel est le conditionnement associé à la norme euclidienne. On peut montrer qu'il vaut le rapport de la plus grande valeur singulière de la matrice A sur sa plus petite valeur singulière. Pour rappel, les valeurs singulières d'une matrice A sont les racines carrées des valeurs propres de $A^T A$. Si A est symétrique semi-définie positive, les valeurs singulières et valeurs propres sont égales.*

2.3.2 Calcul de la série de Fourier à coefficients approchés dans la métrique de l_2

Exemple 2.3.3. *Considérons la série de Fourier :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

et supposons que chaque coefficients a_n soit entaché d'une erreur $\frac{\epsilon}{n}$ (à l'exception de a_0 évidemment); nous écrivons donc :

$$c_n = a_n + \frac{\epsilon}{n}; \quad \text{et} \quad c_0 = a_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon > 0$$

La fonction $f(x)$ est donc remplacée par la fonction $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx)$$

En supposant que f et g sont continues et bornées pour appliquer la norme (1) dans l_2 .

Exemple 2.3.4. Dans la métrique de l_2 ; les coefficients diffrèrent de la quantité :

$$\|c_n - a_n\| = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n - a_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\epsilon\pi}{\sqrt{6}} = \epsilon_1 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

D'autre part, si la distance entre $f(x)$ et $g(x)$ est donnée par la norme de la convergence uniforme, nous avons :

$$\sup |g(x) - f(x)| = \sup \left| \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} \right| = |\epsilon| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Cette quantité peut être aussi grande que l'on veut.

Ainsi, si l'écart de la somme de la série est pris dans la métrique de $C[a, b]$, la sommation de la série de Fourier n'est pas stable. Si on choisi la norme de la convergence

en moyenne quadratique, le problème devient bien posé; en effet :

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_{L^2[0,\pi]} &= \left\{ \int_0^\pi |g(x) - f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
\left\{ \int_0^\pi |g(x) - f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} &= \left\{ \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{\cos(nx)}{n} \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \epsilon \left\{ \int_0^\pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (c_n - a_n)^2 \frac{1 + \cos(2nx)}{2} \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \epsilon_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.2. Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important comme le montre l'exemple ci-dessus. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis. Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espaces (et des topologies) dans lesquels « vivent » les données et la solution.

2.3.3 Les équations intégrales de première espèce de Fredholm et Voltera

Les équations de première espèce, aux quelles nous concentrerons notre attention, conduisent à des problèmes mal posés. En revanche, celles de seconde espèce ont, en général, une solution unique (cela relève de l'alternative de Fredholm)

Si $Au = \int_a^b K(x; y)u(y)dy$ ou $Vu = \int_a^x K(x; y)u(y)dy$, et $K(x; y)$ est un noyau continu sur $D = [a; b] \times [a; b]$; alors les opérateurs A et V sont compacts sur $H = L^2[a; b]$:

Ces opérateurs n'admettent pas d'inverses bornés sur H , c'est pour ça les problèmes $Au = f$ et $Vu = f$, sont mal-posés.

L'équation de Fredholm de première espèce

Exemple 2.3.5. *Considérons l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\int_a^b K(x;t)z(t)dt = u(x) \text{ pour } x \in]c;d [$$

Expression dans laquelle $z(t)$ est une fonction inconnue de l'espace Y des fonctions continues sur $]c;d [$ et $u(x)$ est une fonction connue de l'espace X . Mentionnons au passage que l'équation de convolution est un cas particulier de cette équation fonctionnelle $K(x;t)$ devenant $K(x; -t)$ ajoutons une hypothèse supplémentaire sur le noyau $K(x;t)$ qui est connu : c'est une fonction continue en x qui possède une dérivée partielle $\partial K(x;t)/\partial x$ également continue.

Exemple 2.3.6. *Montrons que le problème est mal-posé. Supposons que pour un second membre $u_1(x)$; nous connaissons une solution exacte $z_1(t)$; on peut alors écrire :*

$$\int_a^b K(x;t)z_1(t)dt = u_1(x)$$

Maintenant supposons que l'on connaisse un second membre approché peu différent de $u_1(x)$ dans la métrique L^2 ; et on se propose de rechercher une solution voisine de $z_1(t)$:

Considérons dans L^2 ; la solution

$$z_2(t) = z_1(t) + \Gamma \sin(\omega t)$$

Elle est solution de l'équation :

$$\Gamma \int_a^b K(x;t) \sin(\omega t) + u_1(x) = u_2(x)$$

Dans une métrique quadratique μ_n (X est l'espace des fonctions carrés sommables

L^2), cette expression permet de calculer la norme de $\|u_1 - u_2\|$:

$$\begin{aligned}\mu_n(u_1; u_2) &= \left\{ \int_a^b |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b K(x; t) \sin(\omega t) dt \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Prenant $\omega \gg |\Gamma|$; on peut trouver un $K(x; t)$ où, l'intégrale converge avec ω au dénominateur. Cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Calculons maintenant la norme $\|z_1 - z_2\|$ des solutions correspondantes, dans la même métrique :

$$\begin{aligned}\mu_u(z_1; z_2) &= \left\{ \left[\int_a^b |z_1(t) - z_2(t)| \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \sin^2(\omega t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\int_a^b \frac{1}{2} dt - \int_a^b \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} + \frac{\sin(2\omega b)}{4\omega} - \frac{\sin(2\omega a)}{4\omega} \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

utilisant le fait que

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

alors,

$$\mu_u(z_1; z_2) = |\Gamma| \left[\frac{(b-a)}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin[\omega(b-a)] \cos[\omega(b+a)] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

On voit sans peine qu'on peut choisir les nombres ω et Γ tels que pour les écarts aussi petits que l'on veut de $u_1(x)$ et $u_2(x)$; l'écart des solutions respectives calculé par la formule(2.2) soit arbitrairement grand.

Si l'on se propose d'évaluer l'écart des solutions dans la métrique z de la convergence uniforme (Y peut être pris égal a L^∞) :

$$\mu_z(z_1; z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| \quad \text{pour } t \in]a; b[$$

On calcule alors,

$$\mu_z(z_1; z_2) = \sup |z_1(t) - z_2(t)| = \sup |\Gamma \sin(\omega t)| = \Gamma \text{ pour } t \in]a; b[$$

Choisissant ω et Γ tels que pour que les écarts de $u_1(x)$ et $u_2(x)$ soient aussi petits que l'on veut, l'écart des solutions peut être arbitrairement grand.

Remarque 2.3.3. Ici le problème n'a pas été modifié par le choix de la norme.

Beaucoup de problèmes inverses et certains des exemples conduisent à des équations intégrales de première espèce avec les noyaux continus ou faiblement singuliers. Ces opérateurs intégraux sont compacts par rapport à toute topologie convenable.

Exemple 2.3.7. L'équation intégrale

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds = (e^{t+1} - 1)/(t + 1), \quad 0 < t < 1$$

est uniquement résoluble par $x = \exp(t)$. Nous approchons l'intégrale par la méthode de trapéze

$$\int_0^1 e^{ts} x(s) ds \approx h \left(\frac{1}{2} x(0) + \frac{1}{2} e^t x(1) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jht} x(jh) \right)$$

avec $h := 1/n$. Pour $t = ih$, on obtient le système linéaire

$$h \left(\frac{1}{2} x_0 + \frac{1}{2} e^{jht} x_n \right) + \sum_{j=1}^{n-1} e^{jih^2} x_j = y(ih), \quad i = 0, \dots, n$$

Alors x_i devrait être une approximation de $x(ih)$. Le tableau ci-dessous présente l'erreur entre la solution exacte $x(t)$ et la solution approchée x_i pour $t = 0, 025, 0, 5, 0, 75$ et 1. Ici, i est choisi tel que $ih = t$.

t	$n = 4$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0	0,44	-3,08	1,08	-38,21
0,25	-0,67	-38,16	-25,17	50,91
0,5	0,95	-75,44	31,24	-116,45
0,75	-1,02	-22,15	20,03	103,45
1	1,09	-0,16	-4,23	-126,87

On voit que les approximations ont rien à voir avec la solution exacte et devenir encore pire pour les schémas de discrétisation plus fines.

2.3.4 Différentiation et intégration

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel de penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à le considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le prototype du problème posé, comme nous allons le voir :

Exemple 2.3.8. *Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A défini par*

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire et continu de $L^2(0,1)$ dans lui-même. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel

$$\text{Im}A = \{f \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$$

où $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation $Af = g$ est équivalente à $f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$. L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0,1)$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1(0,1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0,1)$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.3.9. *Considérons une fonction $g \in C^1([0,1])$ donnée, et $n \in \mathbb{N}$. Soit*

$$g_n(x) = g(x) + \frac{1}{n} \sin(n^2x)$$

Alors

$$f_n(x) = g'_n(x) = g'(x) + n \cos(n^2x) = f'(x) + n \cos(n^2x)$$

De simples calculs montrent que

$$\|g - g_n\|_2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors que

$$\|f' - f'_n\|_2 = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \sin(2n^2) \right)^{\frac{1}{2}} = O(n)$$

Ainsi, la différence entre f' et f'_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g et g_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu.

L'instabilité de l'inverse est typique des problèmes mal posés. Une petite perturbation sur les données (ici g) peut avoir une influence arbitrairement grande sur le résultat (ici f').

Une seconde classe de problèmes inverses est l'estimation de paramètres dans les équations différentielles. Nous allons en voir un exemple très simple.

Exemple 2.3.10. On considère le problème elliptique en dimension 1 :

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' = f(x), & \text{pour } x \in]-1; 1[\\ u(-1) = u(1) = 0., \end{cases}$$

Dans cet exemple, nous prendrons $a(x) = x^2 + 1$, et la solution $u(x) = \frac{(1-x^2)}{2}$, ce qui donne $f(x) = 3x^2 + 1$.

Exemple 2.3.11. Le problème direct consiste à calculer u , étant donnés a et f . Pour le problème inverse, nous considérerons que f est connue, et nous chercherons à retrouver le coefficient a à partir d'une mesure de u . Pour cet exemple, volontairement simplifié nous supposerons que l'on mesure u en tout point de l'intervalle $] - 1; 1[$, ce qui est bien évidemment irréaliste. Nous allons voir que même dans cette situation optimiste, nous sommes susceptibles de rencontrer des difficultés.

En intégrant l'équation du problème, et en divisant par u' nous obtenons l'expression suivante pour a (en supposant que u' ne s'annule pas, ce qui est faux sur notre exemple) :

$$a(x) = \frac{C}{u'(x)} + \frac{1}{u'(x)} \int_0^x f(\xi)d\xi = \frac{C}{x} + x^2 + 1,$$

pour $x \neq 0$, et où C est une constante d'intégration.

Nous voyons que, même dans ce cas particulier, a n'est pas déterminé par les données, c'est-à-dire u . Bien entendu dans ce cas, il est clair que la bonne solution correspond à $C = 0$, puisque c'est la seule valeur pour laquelle a est borné. Pour pouvoir discriminer parmi les différentes solutions possibles, nous avons du faire appel à une

information supplémentaire (on parle généralement d'information a priori). Il y a dans ce problème deux sources d'instabilité : tout d'abord l'équation fait intervenir u' , et nous venons de voir que le passage de u à u' est source d'instabilité. Il s'agit l' à d'un phénomène commun aux problèmes linéaires et non-linéaires. Par contre, la division par u' montre une instabilité spécifique des problèmes non linéaires. Si u' s'annule, la division est impossible. Si u' est simplement petit, la division sera cause d'instabilité.

Même numériquement on rencontre pas mal de problèmes dû au stabilité.

Exemple 2.3.12. *Considérons l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} u'(x) = u(x) - 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Cette équation admet comme solution

$$u(x) = e^x - 1$$

Si la condition initiale est donnée par $u(0) = \epsilon$, la solution est alors :

$$v(x) = (1 + \epsilon)e^x - 1 :$$

De sorte que la différence s'écrit :

$$v(x) - u(x) = \epsilon e^x$$

Si x varie dans l'intervalle $[0; \dots; 30]$, on a

$$v(30) - u(30) = \epsilon e^{30} \simeq 10^{13} :$$

Si la précision des calculs est de 10^{10} ; le problème est numériquement mal posé, bien que mathématiquement bien posé.

2.3.5 Problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace

Exemple 2.3.13. *Considérons le problème de Cauchy qui consiste à trouver la solution de l'équation*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x; y) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x; y) = 0 \\ u(x; 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty$$

avec $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions connues. Si l'on pose

$$f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{n} \sin nx;$$

le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u_1(x; y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny); \quad \text{pour } a > 0 :$$

Si l'on prend

$$f_2(x) = \varphi_2(x) = 0;$$

le problème de Cauchy a pour solution la fonction

$$u_2(x; y) = 0$$

Évaluant les écarts des données initiales et des solutions dans la métrique de $C[a, b]$, on a :

$$\|f_1 - f_2\|_\infty = \sup_x |f_1(x) - f_2(x)| = 0;$$

et

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty = \sup_x |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{n}$$

La dernière quantité peut être rendue aussi petite que l'on veut lorsque a est assez grand. Or, l'écart des solutions

$$\|u_1 - u_2\|_\infty = \sup_x |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \sup_x \left| \frac{1}{n^2} \sin(nx) \operatorname{sh}(ny) \right| = \frac{1}{n^2} \operatorname{sh}(ny)$$

pour tout $y > 0$ fixé, peut être arbitrairement grand quand a prend des valeurs suffisamment élevées.

Exemple 2.3.14. On voit qu'une petite perturbation des conditions initiales entraîne une perturbation aussi grande que l'on veut de la solution du problème de Cauchy, et ce dans un voisinage arbitrairement petit de la ligne des données initiales. Ce problème n'est pas stable et, donc, doit être considéré comme mal posé.

Equation rétrograde de la chaleur.

Nous voulons trouver la propagation de la température ultérieure, sachant la propagation de température initiale, est un problème mal posé.

Exemple 2.3.15. *Changeons le signe dans l'équation aux dérivées partielles :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} + \Delta u(x;t) &= 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d; t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x;0) &= v(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d :\end{aligned}$$

Par exemple, si $d = 1$ et $v(x) = n^{-1} \sin(nx)$; où n est un entier naturel positif, alors la solution est :

$$u(x;t) = n^{-1} e^{n^2 t} \sin(nx);$$

Alors après calculs des normes dans $C(\mathbb{R})$ on conclut que

$$\begin{aligned}\|v\|_c &= n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|u\|_c &= n^{-1} e^{n^2 t} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\end{aligned}$$

Donc trouver la propagation de température à un temps final est un problème mal posé.

conclusion 2.3.1. *Les incertitudes inhérentes aux problèmes inverses ont diverses origines :*

- les données (mesures) sont souvent expérimentales, et peuvent donc contenir des erreurs de mesure,
- le nombre de données mesurées est fini, même si le modèle mathématique les décrivant est constitué de fonctions,
- l'algorithme d'inversion peut créer une altération des données (exemple : interpolation pour discrétiser un modèle continu),
- le modèle employé peut être une version simplifiée (hypothèses simplificatrices) du modèle complet décrivant le phénomène physique considéré. D'autre part, certains paramètres du modèle ne sont connus qu'expérimentalement (exemple : constantes physiques d'un milieu), et donc de façon approximative.

Ainsi, toutes ces incertitudes altèrent les données et impliquent que la solution recherchée d'un problème inverse ne peut être une solution exacte. En effet, nous obtiendrons à l'issue de la résolution une solution x s'approchant au mieux, c'est-à-dire à ϵ près, de la solution exacte permettant de modéliser les données y réelles (et non mesurées). Par extension, cela met également en évidence le fait que toute solution x s'approchant à ϵ près de la solution idéale est une solution possible au problème inverse posé. Finalement, quelle que soit la méthode de résolution que l'on choisit, un problème inverse peut n'avoir aucune solution au sens strict, mais beaucoup de solutions à ϵ près. Cela signifie qu'il faudra parfois tenir compte de critères permettant de discriminer les solutions entre elles afin de ne garder que celle répondant au mieux à l'objectif de précision que l'on s'est fixé.

Chapitre 3

Méthodes de régularisation

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à une étude systématique des stratégies de régularisation pour la résolution $Ax = y$. En particulier, nous souhaitons étudier dans quelles conditions elles sont optimales ; qui est, du même ordre asymptotique que le bruit. Nous introduisons le concept général de regularization. Nous étudions la méthode de Tikhonov et de Morozov comme deux des stratégies de régularisation plus importants. Le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta)$, on choisit a priori ; qui est, avant de commencer à calculer la solution régularisée. Nous voyons que le optimal paramètre de régularisation α dépend des limites de la solution exacte ; ils ne sont pas connus à l'avance. Par conséquent, il est avantageux d'étudier les stratégies pour le choix de α qui dépend de l'algorithme numérique et sont réalisés au cours de l'algorithme (*a posteriori*).

Chacun d'entre eux sont motivés par l'idée qu'il est certainement suffisante pour calculer une solution approximation $x^{\alpha,\delta}$ de la solution x telle que la norme $\|Ax^{\alpha,\delta} - y^\delta\|$ est du même ordre que l'erreur de perturbation δ du côté droite. La stratégie classique dûe de Morozov, détermine α par la résolution d'une équation scalaire non linéaire. Pour résoudre cette équation, nous avons encore besoin d'un algorithme numérique tel que le "falsi regula" ou la méthode de Newton.

Les choix de α sont faites implicitement en arrêtant l'algorithme dès que le

$\|Ax^{\alpha,\delta} - y^\delta\|$ est inférieure à $\epsilon\delta$. Ici, $\epsilon > 1$ est un paramètre donné.

Le principe de discrepancy de Morozov est facile à étudier théoriquement parce qu'ils peuvent être formulés sous forme de méthodes de régularisation linéaires.

On termine par une méthode dite de quasi-reversibilité qui sera utile pour le dernier chapitre. Pour une lecture plus approfondie on propose de voir le livre de R. Lattès, J. L. Lions [18] et le livre de Kirsch [16].

3.2 Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses linéaires

Dans cette partie, A désigne un opérateur linéaire continu d'un espace de Hilbert X dans un espace de Hilbert Y , et nous supposons que ce problème est mal posé. Notre but est de «résoudre» l'équation perturbée

$$Ax^\delta = y^\delta \tag{3.1}$$

En général, (3.1) ne soit pas résoluble parce que nous ne pouvons pas supposer que les données mesurées y^δ sont dans $\text{Im}(A)$. Par conséquent, le mieux qu'on puisse espérer est de déterminer une solution approximative $x^\delta \in X$ à la solution exacte x . Une exigence supplémentaire est que la solution approximative x^δ doit dépendre continuellement sur la données y^δ . En d'autres termes, notre but est de construire une approximation appropriée bornée $A : X \rightarrow Y$ du (non borné) opérateur inverse $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow X$. Afin de résoudre ce problème on a besoin de quelques propriétés

3.2.1 Propriétés mathématiques des problèmes de moindres carrés

Étant donné $\hat{y} \in Y$, nous cherchons $\hat{x} \in X$ solution de :

$$A\hat{x} = \hat{y}. \tag{3.2}$$

Revenons dans ce cas particulier sur la discussion du *chapitre deux* concernant les problèmes bien et mal posés

- l'opérateur A peut ne pas être surjectif ;
- il peut ne pas être injectif ;
- si un inverse existe, il peut ne pas être continu.

Comme nous l'avons déjà dit, la première difficulté n'est pas sérieuse : il suffit \hat{y} de se restreindre à $\text{Im}A$. La seconde est plus gênante : il faut pouvoir sélectionner, parmi plusieurs solutions, celle qui est appropriée au problème. La dernière, fondamentale pour les applications, est liée au caractère fermé ou non de $\text{Im}A$:

Théorème 3.2.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X et Y deux espaces de Hilbert. Supposons que A soit injectif, et notons $A^{-1} : \text{Im}A \rightarrow X$ l'inverse de A . On a :*

$$\text{Im}A \text{ fermé} \iff A^{-1} \text{ est continu.}$$

Démonstration. \Rightarrow Dans ce cas $W = \text{Im}A$ est un espace de Hilbert (il est immédiat que W est un espace préhilbertien, et il est complet parce qu'il est fermé). L'opérateur $\tilde{A} : X \rightarrow W$, $\tilde{A}u = Au$ pour $u \in X$ est un opérateur linéaire continu et bijectif. Une conséquence classique du théorème de l'application ouverte est que \tilde{A}^{-1} est continu. Il en est donc de même pour A^{-1} .

\Leftarrow Puisque A^{-1} est continu, et que $X = \text{Im}A^{-1}$ est fermé, $\text{Im}A = (A^{-1})^{-1}(E)$ est fermé dans Y . □

L'opérateur pourra ou non être injectif, mais la situation générale sera que $\text{Im}A$ n'est pas pas fermée (Si A est compact, A n'a pas d'inverse continu, et dans ce cas $\text{Im}A$ ne sera pas fermé).

Le problème (3.2) n'a de solution que pour les seconds membres dans l'image de A . Comme nous venons de le voir, cette condition peut-être trop restrictive. Nous reviendrons sur ce point après introduit la décomposition en valeurs singulières, avec la condition de Picard. Nous cherchons donc une autre formulation du problème original, qui permette d'étendre la notion de solution à un sous-espace plus grand. Nous proposons une formulation comme un problème de moindres carrés : nous remplaçons donc (3.2) par :

$$\min_{x \in X} \frac{1}{2} \|Ax - \hat{y}\|^2$$

Nous allons voir que ce problème est équivalent à une équation linéaire, mais pour un opérateur différent de A .

Lemme 3.2.1. *Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, X, Y deux espaces de Hilbert, et soit $\hat{y} \in Y$. Un élément $\hat{x} \in X$ est une solution de (3.2) si et seulement si $\hat{x} \in X$ résout l'équation normale*

$$A^*A\hat{x} = A^*\hat{y} \quad (3.3)$$

où, $A^* : Y \rightarrow X$ désigne l'adjoint de A .

Démonstration. Une application simple du théorème binomial donne

$$\begin{aligned} \|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 &= \langle Ax - y, Ax - y \rangle - \|A\hat{x} - y\|^2 \\ &= \langle A(x - \hat{x}) + A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) + A\hat{x} - y \rangle - \|A\hat{x} - y\|^2 \\ &= \|A(x - \hat{x})\|^2 + \langle A(x - \hat{x}), A\hat{x} - y \rangle + \langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle \\ &\quad + \|A(x - \hat{x})\|^2 - \|A(x - \hat{x})\|^2 \\ &= \|A(x - \hat{x})\|^2 + \langle A(x - \hat{x}), A\hat{x} - y \rangle + \langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle \\ &= \|A(x - \hat{x})\|^2 + \overline{\langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle} + \langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle \\ &= \|A(x - \hat{x})\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle \\ &= \|A(x - \hat{x})\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A^*(A\hat{x} - y), (x - \hat{x}) \rangle \quad \forall x, \hat{x} \in X \end{aligned}$$

1. Si \hat{x} satisfie $A^*A\hat{x} = A^*y$, alors $2\operatorname{Re} \langle A^*(A\hat{x} - y), (x - \hat{x}) \rangle = 0$ et $\|Ax - y\|^2 - \|A\hat{x} - y\|^2 = \|A(x - \hat{x})\|^2 \geq 0$; donc \hat{x} minimise $\|Ax - y\|$.

2. Si, d'autre part, \hat{x} minimise $\|Ax - y\|$ nous substituons $x = \hat{x} + tz$, $z \in X$ et $t > 0$ alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A(x - \hat{x})\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, A(x - \hat{x}) \rangle \\ &= \|A(tz)\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, A(tz) \rangle \\ &= t^2 \|Az\|^2 + 2t\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, Az \rangle \end{aligned}$$

Divison par t et passer à la limite quand $t \rightarrow 0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} 0 &\leq t \|Az\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, Az \rangle \\ 0 &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \{t \|Az\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, Az \rangle\} \\ &= 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, Az \rangle \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in X$

$$0 \leq 2\operatorname{Re} \langle A\hat{x} - y, Az \rangle = 2\operatorname{Re} \langle A^*(A\hat{x} - y), z \rangle$$

en particulier pour

$$z = -A^*(A\hat{x} - y)$$

alors

$$0 \leq -\operatorname{Re} \langle A^*(A\hat{x} - y), A^*(A\hat{x} - y) \rangle = -\|A^*(A\hat{x} - y)\|^2$$

ce qui signifie \hat{x} résout l'équation normale $A^*(A\hat{x} - y) = 0$. □

Remarque 3.2.1. L'équation normale (3.3) se réécrit :

$$A^*(A\hat{x} - y) = 0.$$

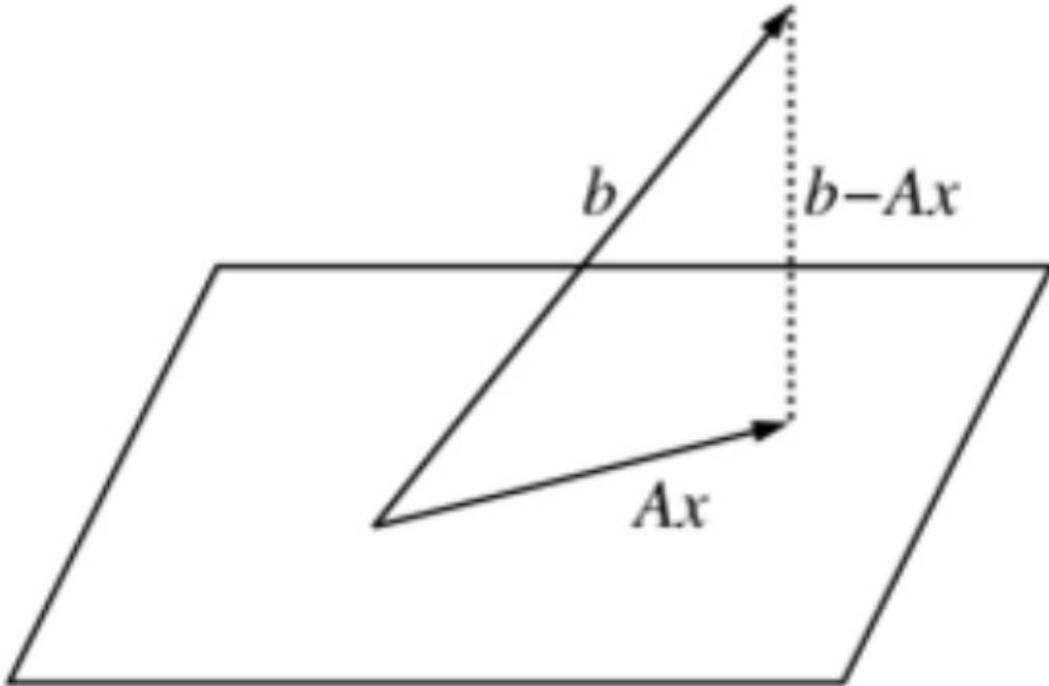


Figure 1 : Illustration géométrique des moindres carrés

Remarque 3.2.2. ce qui exprime simplement que le résidu $\hat{y} - A\hat{x}$ est dans le noyau de A^* , c'est-à-dire orthogonal à (la fermeture de) l'image de A . Ceci conduit à l'illustration géométrique bien connue :

Remarque 3.2.3. *La solution du problème de moindres carrés est telle que Ax est la projection de \widehat{y} sur l'image de A .*

Notons que nous n'avons pour l'instant évoqué ni l'existence, ni l'unicité, pour les solutions de (3.2) (ou de (3.3)). Nous avons simplement montré l'équivalence des deux problèmes. L'unicité est évidemment liée à l'injectivité de A , comme le précise le résultat suivant.

Lemme 3.2.2. *La solution du problème (3.2) est unique si, et seulement si, l'opérateur A est injectif.*

Démonstration. Notons tout d'abord que $\ker A^*A = \ker A$. Un sens est évident. Pour l'autre, nous avons :

$$A^*Ax = 0 \Rightarrow (A^*Ax, x) = 0 \Rightarrow \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

Par conséquent, A et A^*A sont injectifs en même temps, ce qui donne le résultat. \square

En ce qui concerne l'existence, on a le résultat suivant :

Proposition 3.2.1. *i) L'équation (3.3) admet une solution si et seulement si $\widehat{y} \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$.*

ii) Si $\widehat{y} \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$, l'ensemble S des solutions de (3.3) est un convexe fermé non vide de X .

Démonstration. *i)* Soit $x \in X$ une solution de (3.3). On a donc $Ax - \widehat{y} \in \ker A^* = \overline{\text{Im}A}^\perp = (\text{Im}A)^\perp$. Donc $\widehat{y} = Ax + (\widehat{y} - Ax) \in \text{Im}A \oplus (\text{Im}A)^\perp$.

Inversement, soit $\widehat{y} = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in \text{Im}A$, $y_2 \in (\text{Im}A)^\perp$. Il existe donc $x \in X$, tel que $Ax = y_1$. Évidemment $A^*Ax = A^*y_1$. Mais, toujours parce que $(\text{Im}A)^\perp = \ker A^*$, $A^*y_2 = 0$, c'est-à-dire que $A^*\widehat{y} = A^*y_1 = A^*Ax$, et \widehat{y} est une solution de (3.3).

ii) L'ensemble des solutions est non-vidé d'après le point *i)*. C'est un espace affine, c'est donc en particulier un convexe, et il est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{A^*\widehat{y}\}$ par l'opérateur continu A^*A . Ceci prouve que $S = x_0 + \ker A$, où x_0 est une solution quelconque de (3.3). \square

Lemme 3.2.3. *Le sous-espace $\text{Im}A + \text{Im}A^\perp$ est dense dans Y .*

Démonstration. Si $x \in (\text{Im}A + \text{Im}A^\perp)^\perp$, alors, pour tous $z \in \text{Im}A$ et $y \in \text{Im}A^\perp$, on a $(x, y + z) = 0$. En choisissant d'abord $y = 0$, on obtient $x \in \text{Im}A^\perp$, puis en choisissant $z = 0$, on obtient $x \in \text{Im}A^{\perp\perp} = \text{Im}A$. Autrement dit, $(\text{Im}A + \text{Im}A^\perp)^\perp = \text{Im}A \cap \text{Im}A^\perp = \{0\}$, ce qui est équivalent à la densité cherchée. \square

On a donc bien réussi à étendre la notion de solution à un sous-espace dense dans Y , ce qui est "presqu'aussi bien" que de l'étendre à Y tout entier.

Remarque 3.2.4. *Notons que, dans le cas général, la condition $\hat{y} \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ est non-triviale. En effet, le théorème de projection dit seulement $Y = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$, ce qui est différent si $\text{Im}A$ n'est pas fermée.*

On retrouve encore ici l'importance de cette condition. Dans ce cas, et seulement dans ce cas, le problème (3.3), et donc (3.2), admet toujours une solution.

En dimension finie, cette condition est bien entendu automatiquement vérifiée (tout sous-espace est fermé). Nous retrouverons ce résultat à la proposition (3.2.2).

Lemme 3.2.4. *Si $\hat{y} \in \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$, le problème (3.2) admet une unique solution de norme minimale.*

Nous noterons \hat{x} cette solution particulière.

Remarque 3.2.5. *Il est facile de voir que \hat{x} dépend linéairement de \hat{y} (par exemple à cause de l'équation normale). L'opérateur linéaire $A^\dagger : \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp \rightarrow X$ défini par $A^\dagger \hat{y} = \hat{x}$ s'appelle le pseudo-inverse de A . On peut démontrer (voir par exemple [25]) qu'il n'est continu que si $\text{Im}A$ est fermé.*

Proposition 3.2.2. *Quand X et Y sont deux espaces de dimension finie, le problème de moindres carrés admet toujours au moins une solution.*

Cette solution est unique si, et seulement si, A est de rang maximal (de rang n si le problème est sur-déterminé).

Proposition 3.2.3. *Sous l'hypothèse que A est de rang n , la matrice des équations normales $A^t A$ est définie positive.*

3.2.2 Équations normales

Comme nous l'avons vu au chapitre (équation (3.3)), la solution d'un problème de moindres carrés se ramène, en théorie du moins, à la résolution d'un système linéaire pour la matrice $A^t A$ (dite matrice des équation normales) :

$$A^t A x = A^t y \quad (3.4)$$

Nous avons vu également le lemme (3.2.4) que, sous l'hypothèse que A est rang n , la matrice $A^t A$ est définie positive. Cette matrice est de taille n par n , et les équations normales représentent une "compression" d'information, puisque $n \leq m$. Le système (3.4) peut donc (toujours en théorie) être résolu par la factorisation de Cholesky. Nous rappelons cette méthode bien connue :

Proposition 3.2.4. *Soit C une matrice symétrique et définie positive. Il existe une unique matrice Q triangulaire supérieure, à éléments diagonaux strictement positifs, telle que*

$$C = Q^t Q \quad (3.5)$$

Nous allons présenter dans la section suivante la méthode de Tikhonov pour approcher les problèmes inverses.

3.2.3 La méthode de Tikhonov

Le principe de la méthode de Tikhonov [20] pour résoudre le problème inverse mal posé $Ax = y$ est de choisir comme solution l'élément $x^\alpha \in X$ qui minimise la quantité

$$J_\alpha = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \quad (3.6)$$

Nous allons voir que ce problème admet une solution unique, qui dépend continûment de y , et qui converge, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, vers la solution la plus proche de x de (3.2). Évidemment, si α est choisi trop petit, (3.6) sera proche de (3.2), donc mal posé, alors que si α est trop grand (3.6) ne sert qu'à forcer x^α à être proche de x . Le choix "optimal" de α est donc délicat.

Nous voyons donc bien la nécessité d'adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit présent dans les données.

Stratégie de régularisation

Définition 3.2.1. Une stratégie de régularisation est une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha Ax - x\| = 0, \quad \forall x \in X \quad (3.7)$$

i.e. l'opérateur $R_\alpha A$ converge simplement vers l'identité I .

Théorème 3.2.2. Soit R_α une stratégie de régularisation pour l'opérateur compact $A : X \rightarrow Y$, avec $\dim X = +\infty$. Alors la famille d'opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés : il existe une suite $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0$ et

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_j}\| = \infty$$

i.e il n'y a pas de convergence de $R_\alpha A$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

Démonstration. i) Supposons, au contraire, qu'il existe $c > 0$ tel que, $\|R_\alpha\| \leq c$ pour tout $\alpha > 0$. Alors $\forall y \in \text{Im}(X) \subset Y$ on a

$$\begin{aligned} \|A^{-1}y\| &= \|R_\alpha y - R_\alpha y + A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}y - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y\| \\ &\leq \|x - R_\alpha Ax\| + \|R_\alpha\| \|y\| \leq \|x - R_\alpha Ax\| + c \|y\| \end{aligned}$$

Passons à la limite quand $\alpha \rightarrow 0$ on en déduit que $\|A^{-1}y\| \leq c \|y\|$ pour tout $y \in \text{Im}(A)$, puisque par définition $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha Ax - x\| = 0$. Cela implique $\|A^{-1}\| \leq c$ donc A^{-1} est borné ce qui implique que $I = A^{-1}A : X \rightarrow X$ est compact, contradiction avec le fait que $\dim X = +\infty$ (*Théorème de Riesz* [])

ii) Supposons que $R_\alpha A \rightarrow I$ dans $\mathcal{L}(X, X)$. A partir de la compacité et $R_\alpha A$ et le (*théorème [A.32]*), nous concluons que I est aussi compact, ce qui à nouveau impliquerait que $\dim X < \infty$. □

3.2.4 Estimation de la solution approchée

La donnée initiale $y \in Y$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y^δ la donnée perturbée de y où le nombre $\delta > 0$ est le niveau de bruit, i.e.

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta \quad (3.8)$$

Soit $x^{\alpha,\delta} := R_\alpha y^\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Ax = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée.

Proposition 3.2.5. *Supposons que $\|y - y^\delta\| \leq \delta$. Alors,*

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|$$

Démonstration. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $\|x^{\alpha,\delta} - x\|$ on obtient :

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha,\delta} - x\| &= \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y + R_\alpha y - x\| \leq \|R_\alpha y^\delta - R_\alpha y\| + \|R_\alpha y - x\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \|y^\delta - y\| + \|R_\alpha Ax - x\| \end{aligned}$$

et ainsi

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\| \quad (3.9)$$

Ceci est notre estimation fondamentale, que nous utilisons souvent dans ce qui suit. \square

Choix du paramètre de régularisation

L'estimation (3.9) montre que, l'erreur se compose de deux termes :

- Un premier terme due aux erreurs sur les données, multiplié par un nombre de conditionnement, qui tend vers l'infini lorsque $\alpha \rightarrow 0$ (i.e. $\|R_\alpha\| \rightarrow \infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$).
- Il ne faut donc pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande.
- Un second terme due à l'approximation de la solution exacte, et qui tend vers 0 avec α (i.e. $\|R_\alpha Ax - x\| \rightarrow 0$ quand $\alpha \rightarrow 0$);

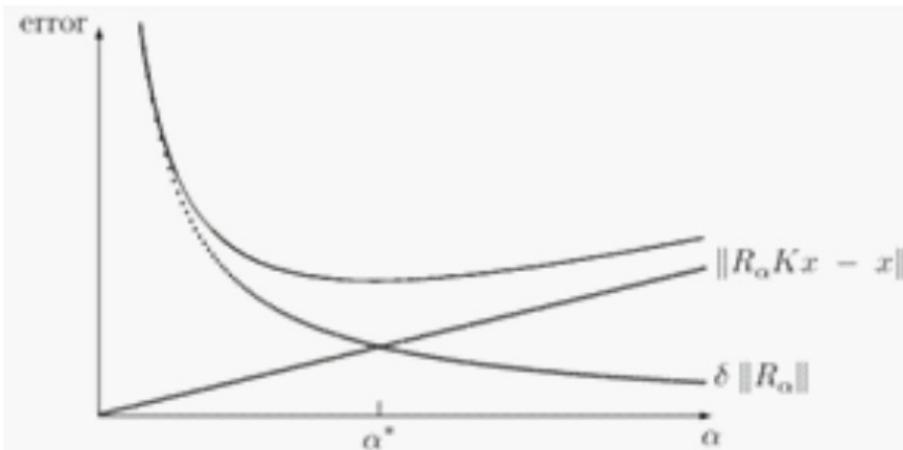


Figure 2 : Comportement de l'erreur totale

Nous voyons donc bien la nécessité d'adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit présent dans les données. Une telle stratégie de régularisation peut se concevoir de deux façons :

- Si l'on possède une estimation du niveau de bruit, on peut en déduire comment il faut choisir α pour obtenir la convergence de $x^{\alpha, \delta}$ vers x . C'est ce que nous faisons au théorème suivant. Une telle stratégie s'appelle une stratégie de régularisation *a priori*. Elle suppose que l'on sache estimer le bruit présent dans les données, ce qui n'est pas forcément possible ;
- L'autre stratégie, appelée *a posteriori*, consiste à estimer au cours du calcul la valeur convenable du paramètre, en utilisant uniquement les données disponibles. De telles stratégies existent [15].

Dans le théorème (3.2.2), nous avons laissé α tendre vers 0 indépendamment de δ , et nous avons vu qu'une telle stratégie (ou plutôt absence de stratégie) ne permettait pas la convergence de la solution régularisée vers la "vraie" solution. Nous allons donc adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit. Pour cela, nous allons faire tendre le niveau de bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution x .

Nous avons besoin d'une stratégie pour choisir $\alpha = \alpha(\delta)$ dépendant de δ afin de garder l'erreur totale aussi faible que possible. Cela signifie que nous tenons à minimiser

$$\delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|.$$

La procédure est la même dans chaque situation concrète : Il faut estimer la quantité $\|R_\alpha\|$ et $\|R_\alpha Ax - x\|$ en termes de α , et alors minimiser cette borne supérieure par rapport à α .

Définition 3.2.2. Une stratégie de régularisation $\alpha \mapsto \alpha(\delta)$ est appelé admissible si

pour tout $x \in X$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|y - y^\delta\| \leq \delta} \|R_{\alpha(\delta)} y^\delta - x\| = 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Méthode de Tikhonov

En conséquence du lemme (3.2.1) que nous devrions soit modifier la fonctionnelle $\|Ax - y\|$ ou de réécrire $A^*A\hat{x} = A^*y$ de telle sorte que l'opérateur est plus compact. Les deux idées mènent au (régularisé) problème de minimisation suivant :

$$J_\alpha(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \quad \text{pour } x \in X$$

J_α est appelé la fonctionnelle de Tikhonov. On a le résultat suivant [36], [38].

Proposition 3.2.6. *Le problème (3.6) est équivalent à :*

$$(A^*A + \alpha I)x = A^*y \quad (3.11)$$

Ce problème (et donc (3.6)) admet une solution unique, qui dépend continûment de y .

Démonstration. En effet, (3.11) n'est autre que l'équation normale pour (3.6).

En ce qui concerne l'existence et l'unicité de solutions à (3.11), notons que

$$\langle (A^*A + \alpha I)x, x \rangle = \|Ax\|^2 + \alpha \|x\|^2 \geq \alpha \|x\|^2$$

On applique alors le lemme de Lax-Milgram. D'après le théorème de l'application ouverte A.2, l'opérateur $A^*A + \alpha I$, continu et bijectif, a un inverse continu. En fait, nous pouvons obtenir une estimation explicite en prenant le produit scalaire de l'équation (3.11) avec x , il vient :

$$\|Ax\|^2 + \alpha \|x\|^2 \leq \|A^*y\| \|x\|$$

c'est-à-dire :

$$\|x^\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha} \|A^*y\| \quad (3.12)$$

□

Remarque 3.2.6. *L'estimation (3.12) "explose" quand $\alpha \rightarrow 0$. Ceci est normal, puisque la solution x de (4.2) ne dépend pas de façon continue de y .*

Nous voulons maintenant aborder la question de savoir dans quelle mesure la méthode de Tikhonov a bien régularisé le problème de départ. Pour cela, il sera naturel de se placer dans le cas d'une donnée bruitée, puisqu'alors nous n'avons pas d'estimation sur l'erreur commise sur la solution. Nous allons montrer que la méthode de Tikhonov donne une telle estimation, même si elle est non optimale y , c'est-à-dire d'une ordre plus faible que l'erreur sur la donnée.

Nous supposons connue une observation "idéale" $y \in \text{Im}A$, et également une suite de mesures bruitées $y^\delta \in Y$, $y^\delta \notin \text{Im}A$, avec $\delta = \|y^\delta - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Le nombre $\|y^\delta - y\| / \|y\|$ est le rapport signal sur bruit. L'hypothèse sous-jacente dans ce paragraphe est que ce rapport tend vers 0, c'est-à-dire que l'on est capable de le réduire arbitrairement, ce qui est évidemment irréaliste.

Considérons tout d'abord la suite de problèmes :

$$\text{Trouver } x^\alpha \in X \text{ réalisant le minimum de } J_\alpha(x)$$

x^α existe et est unique d'après la proposition (3.2.6). Remarquer que nous ne cherchons pas, pour l'instant, à adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit. Pour comprendre comment "fonctionnelle" la méthode de régularisation, cherchons à estimer l'erreur entre la solution du problème bruité et la solution exacte. Pour simplifier, nous ferons l'hypothèse (de régularité) que $x \in \text{Im}A^*$.

Théorème 3.2.3. *Soit $\alpha > 0$ et $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire borné entre deux espaces de Hilbert. Alors la fonctionnelle de Tikhonov J_α admet un unique minimum en $x^\alpha \in X$. L'élément x^α est la solution de l'équation normale*

$$\alpha x^\alpha - A^* A x^\alpha = A^* y \tag{3.13}$$

Grâce à l'équation((3.13)) nous pouvons définir l'opérateur de régularisation de Tikhonov

$$R_\alpha := (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* : Y \rightarrow X$$

avec

$$x^\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* y = R_\alpha y$$

Démonstration. (x^α existe et est unique d'après la proposition 3.2.6) \square

Il reste à démontrer que cet opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelles conditions le choix de α en fonction du niveau de bruit δ est admissible. C'est l'objet du théorème suivant.

Conditions du choix de paramètre de régularisation α

Théorème 3.2.4. . Soient $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire compact et $\alpha > 0$. L'opérateur $\alpha I + A^*A$ est inversible borné et l'opérateur $R_\alpha : Y \rightarrow X$ défini par (2.15) est une stratégie de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $\|R_\alpha Ax - x\| \leq \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$ et $\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2}$. Tout choix de $\alpha(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0}$

Démonstration. Il reste à montrer que l'opérateur est bien un opérateur de régularisation et sous quelles conditions le choix de α en fonction du niveau de bruit δ est admissible.

De l'identité ci-dessus, il en résulte que $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y = R_\alpha y$, $R_\alpha : Y \rightarrow X$ où $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$. Supposons maintenant que y est donnée par sa δ -rapprochement i.e $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ et on résout l'équation $Ax^\delta = y^\delta$. Ensuite, on obtient :

$$x^{\alpha,\delta} = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y^\delta = R_\alpha y^\delta$$

Par notre estimation fondamentale

$$\|x^{\alpha,\delta} - x\| \leq \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha Ax - x\|$$

où x résout l'équation exacte $Ax = y$. Pour $\|R_\alpha\|$, on obtient, $\|R_\alpha\| = \|(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*\|$. Par décomposition polaire $A = U(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, où U est une isométrie partielle : $\|Uq\| = \|q\|$ pour tout $q \in \ker(U)^\perp$. Donc,

$$\|R_\alpha\| = \left\| (\alpha I + A^*A)^{-1} (A^*A)^{\frac{1}{2}} U \right\| \leq \left\| (\alpha I + A^*A)^{-1} (A^*A)^{\frac{1}{2}} \right\| = \|\varphi(A)\|$$

avec $A = A^*A$. Puisque A est auto-adjoint, le théorème spectral une dérive

$$\|\varphi(A)\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |y(\lambda)| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

avec $\sigma(A) = [0, \|A\|^2]$. Ainsi, $\delta \|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$

Afin d'analyser $\|R_\alpha Ax - x\|$ nous faisons une hypothèse supplémentaire : $x = A^*z \in A^*(Y)$, $z \in Y$ et $\|z\| \leq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
 \|R_\alpha Ax - x\| &= \|(\alpha I + A^*A)^{-1} (A^*A)x - x\| \\
 &= \|(\alpha I + A^*A)^{-1} (A^*A)x - (\alpha I + A^*A)^{-1}(\alpha I + A^*A)x\| \\
 &= \|(\alpha I + A^*A)^{-1} [A^*Ax - A^*Ax - \alpha Ix]\| \\
 &= \|(\alpha I + A^*A)^{-1} [-\alpha Ix]\| \\
 &= \|(\alpha I + A^*A)^{-1} (-\alpha x)\| \\
 &= \alpha \|(\alpha I + A^*A)^{-1} A^*z\| \leq \alpha \|(\alpha I + A^*A)^{-1} A^*\| \|z\| \\
 &\leq \frac{\|z\| \alpha}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\|z\| \sqrt{\alpha}}{2} \\
 &\leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2}
 \end{aligned}$$

Cette inégalité prouve que les opérateurs $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^*$ forme une stratégie de régularisation avec $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|R_\alpha Ax - x\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = 0$. Elle est appelée la méthode de régularisation de Tikhonov. En combinant les estimations pour $\delta \|R_\alpha\|$ et $\|R_\alpha Ax - x\|$ on conclut

$$\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} = E(\alpha).$$

Formellement, on peut maintenant minimiser $E(\alpha)$ afin de trouver la valeur optimale du paramètre de régularisation. □

Remarque 3.2.7. *Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour $\|(A^*)^{-1}x\| \leq 1$ où $\|(A^*A)^{-1}x\| \leq 1$.*

Les valeurs propres de A tendent vers zéro et les valeurs propres de $\alpha I + A^*A$ sont bornées loines de zéro par $\alpha > 0$:

Du théorème précédent, on observe que a été choisit d'une façon à dépendre de et qu'il converge vers zéro quand tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2

Théorème 3.2.5. *Soit $A : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact tel que l'image $\text{Im}(A)$ est dedimension infinie. De plus, soit $x \in X$; et on assume qu'il existe une*

fonction continue $\alpha : [0; +1[\rightarrow [0; +1[$ avec $\alpha(0) = 0$; telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0$$

pour tout $y \in Y$ avec $\|y - y^\delta\| \leq \delta$; où $x^{\alpha(\delta), \delta} \in X$ résoud (3.5) Alors $x = 0$:

Démonstration. La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans le livre de Kirsch [16]. p.39. □

Ce résultat montre que la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution x .

Le choix de α dans le théorème (3.2.4) est mis à priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de x en résolvant le problème des moindres carrés.

Dans la section suivante, nous discutons un choix a posteriori de α par le principe dit de décalage, qui n'utilise pas $\|z\|$.

3.2.5 Méthode de Morozov

On donne ici un exemple de méthode de choix à posteriori du paramètre de régularisation $\alpha(\delta)$. On expose la plus classique de celles-ci, "the discrepancy principle" de Morozov ou le principe de décalage (*DP*) de Morozov [7], [8], [9].

On suppose toujours que l'on dispose d'une donnée bruitée, mais on ne fait plus l'hypothèse que l'on connaît le niveau de bruit δ . Tout ce dont on dispose est la donnée y^δ . Le discrepancy principle propose de chercher la solution x^α comme réalisant le minimum de la fonction coût définie en (3.6), en ajoutant la contrainte

$$\|Ax^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta$$

ce qui fournit une équation liant α à δ .

Une justification heuristique de ce choix est qu'il ne sert à rien de réduire l'erreur en dessous du niveau du bruit.

Commençons par donner quelques propriétés supplémentaires de la solution du problème régularisé. Dans cette proposition δ est fixée, et nous ne ferons pas apparaître explicitement la dépendance par rapport à δ .

D'après Kirsch [27], on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov. Autrement dit *DP* suggère le calcul de $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ de telle sorte que la solution de Tikhonov correspondante :

$$\alpha x^{\alpha, \delta} + A^* A x^{\alpha, \delta} = A^* y^\delta$$

qui est le minimum de la fonctionne

$$J_{\alpha, \delta} = \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

satisfait à l'équation

$$\|Ax^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta \tag{3.14}$$

On note que le choix de α par "the discrepancy principle" guarentie d'une part que l'erreur est δ , d'autre part, α est très petit. L'unicité et l'existence de la solution $\|Ax^{\alpha, \delta} - y^\delta\| = \delta$ est justifiée par le théorème suivant.

Théorème 3.2.6. *Soit $A : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire et compact avec une image dense $\text{Im}(A) \subset Y$. Soit $Ax = y$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^\delta \in Y$ tel que : $\|y^\delta - y\| \leq \delta < \|y^\delta\|$. Soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\|Ax^{\alpha(\delta), \delta} - y^\delta\| = \delta$, pour tout $\delta \in]0, \delta[$. Alors :*

Théorème 3.2.7. a) $x^{\alpha(\delta), \delta} \rightarrow x$ pour $\delta \rightarrow 0$. Donc "the discrepancy principle" est admissible.

b) Soit $x = A^*z \in A^*(Y)$ avec $\|z\| \leq E$, alors $\|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}$.

Démonstration. Puisque $x^{\alpha(\delta), \delta}$ minimise la fonctionnelle de Tikhonov

$$J_{\alpha, \delta} = \|Ax - y^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2$$

nous pouvons conclure que

$$J_{\alpha, \delta} (x^{\alpha(\delta), \delta}) = \delta^2 + \alpha \|x^{\alpha(\delta), \delta}\|^2 \leq J_{\alpha, \delta} (x) = \alpha \|x\|^2 + \|y - y^\delta\|^2 \leq \alpha \|x\|^2 + \delta^2$$

et donc $\|x^{\alpha(\delta), \delta}\| \leq \|x\|$ por tout $\delta > 0$. Cela nous donne l'estimation importante suivante :

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha(\delta), \delta} - x\|^2 &= \langle x^{\alpha(\delta), \delta} - x, x^{\alpha(\delta), \delta} - x \rangle = \|x^{\alpha(\delta), \delta}\|^2 - 2\text{Re} \langle x^{\alpha(\delta), \delta}, x \rangle + \|x\|^2 \\ &\leq 2 [\|x\|^2 - \text{Re} \langle x^{\alpha(\delta), \delta}, x \rangle] = 2\text{Re} \langle x - x^{\alpha(\delta), \delta}, x \rangle \end{aligned}$$

Soit $x = A^*z$, $z \in Y$. Alors

$$\begin{aligned} \|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\|^2 &\leq 2\operatorname{Re} \langle x - x^{\alpha(\delta),\delta}, A^*z \rangle = 2\operatorname{Re} \langle y - Ax^{\alpha(\delta),\delta}, z \rangle \\ &\leq 2\operatorname{Re} \langle y - y^\delta, z \rangle + 2\operatorname{Re} \langle y^\delta - Ax^{\alpha(\delta),\delta}, z \rangle \\ &\leq 2\delta \|z\| + 2\delta \|z\| = 4\delta \|z\| \leq 4\delta E \end{aligned}$$

par conséquent $\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\| \leq 2\sqrt{\delta E}$, ce qu'il fallait démontrer. \square

Remarque 3.2.8. - *Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous la condition*

$$\|z\| = \|(A^*)^{-1}x\| \leq E$$

- *La condition $\|y^\delta\| > \delta$ est raisonnable, car sinon le côté droit est inférieur à δ , et on peut prendre $x_\delta = 0$. Cela montre également que la détermination de α ne peut satisfaire exactement l'équation $\|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| = \delta$.*

Détermination de $\alpha(\delta)$

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone :

$$\varphi(\alpha) = \|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\|^2 - \delta^2$$

pour δ fixé. Ce n'est pas nécessaire de satisfaire l'équation

$$\|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| = \delta$$

exactement, une inclusion de la forme

$$c_1\delta \leq \|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| \leq c_2\delta.$$

Alors, l'équation $\varphi(\alpha) = 0$ est équivalent à $\|Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta\| = \delta$, et elle peut être résolue numériquement par exemple par la méthode de Newton :

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{\varphi(\alpha_j)}{\varphi'(\alpha_j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

la dérivée $\varphi'(\alpha)$ peut être calculée comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha_j) &= [\langle Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta, Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta \rangle - \delta^2]'_\alpha \\ &= \langle A \frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha}, Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta \rangle + \langle Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta, A \frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha} \rangle \\ &= 2\text{Re} \langle A \frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha}, Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta \rangle\end{aligned}$$

Nous calculons maintenant $\frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha}$ en différenciant l'identité

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + A^* A x^{\alpha,\delta} = A^* y^\delta$$

implicitement. Puisque le côté droit ne dépend pas de α , on a

$$x^{\alpha,\delta} + \alpha \frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha} + A^* A \frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha} = 0$$

La résolution de $\frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{dx^{\alpha(\delta),\delta}}{d\alpha} &= -[\alpha I + A^* A]^{-1} x^{\alpha,\delta} = -[\alpha I + A^* A]^{-1} [\alpha I + A^* A]^{-1} A^* y^\delta \\ &= -B^2 A^* y^\delta \text{ avec } B = [\alpha I + A^* A]^{-1}\end{aligned}$$

Substituer cela en $\varphi'(\alpha)$, découle

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= 2\text{Re} \langle -A [\alpha I + A^* A]^{-1} x^{\alpha,\delta}, Ax^{\alpha(\delta),\delta} - y^\delta \rangle \\ &= 2\text{Re} \langle -A [\alpha I + A^* A]^{-1} [\alpha I + A^* A]^{-1} A^* y^\delta, A [\alpha I + A^* A]^{-1} A y^\delta - y^\delta \rangle \\ &= 2\text{Re} \langle -AB^2 A^* y^\delta, (ABA - I) y^\delta \rangle\end{aligned}$$

puisque $A^* = A$. Nous terminons la méthode de Newton quand

$$|\alpha_{j+1} - \alpha_j| < \epsilon \text{ et } |\varphi(\alpha_j)| < \epsilon$$

Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $O(\sqrt{\delta})$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

Théorème 3.2.8. *Soit A un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de décalage. On assume que pour tout $x \in \text{Im}(A^* A)$; $y = Ax \neq 0$ et pour toute suite $\delta_n \rightarrow 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$; tel que :*

$$\|y - y^{\delta_n}\| \leq \delta_n$$

et

$$\|y^{\delta_n}\| > \delta_n$$

pour tout n : La solution de Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n), \delta_n}$ converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$ vers zéro, donc

$$\frac{1}{\delta_n} \|x^n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

alors l'image $\text{Im}(A)$ est de dimension fini.

L'ordre de convergence obtenu dans la preuve précédente est en $O(\sqrt{\delta})$. On a donc perdu un demi ordre de convergence, et la méthode précédente n'est donc pas optimale.

Pour une valeur de δ donnée, la détermination de α se ramène à la résolution de l'équation (3.14), et nous avons vu que la fonction considérée est monotone. Une première idée est d'utiliser la méthode de Newton, mais en fait il est préférable d'utiliser la formulation alternative suivante due à Hebden : Des efforts énormes sont faits pour modifier le principe de décalage original. Voir [12].

3.2.6 Méthode des quasi-valeurs aux limites (quasi-boundary value method)

Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert H où $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact de contraction dans H . On considère le problème de trouver $u : [0; T] \rightarrow H$ tel que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0; & 0 < t < T \\ u(T) = \phi \end{cases} \quad (F : V : P) \quad (3.15)$$

pour une certaine valeur finale ϕ dans H . Ce problème n'est pas bien-posé seulement si une solution unique existe sur $[0; T]$, elle ne doit pas dépendre continûment de la valeur finale ϕ : Ce type de problèmes a été considéré par plusieurs auteurs utilisant des approches différentes, comme Lattès et Lions [18], Lavrentiev [19], Ils ont approché le problème à valeur finale (3.18) en perturbant l'opérateur A .

3.3 Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses non linéaires 57

Un problème similaire a été traité d'une autre manière voir [1], [8]. En perturbant la condition de la valeur finale, ils approchent le problème (3.18) par :

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = \phi \end{cases} \quad (Q.B.V.P) \quad (3.16)$$

une approche similaire est connue comme la méthode des conditions aux limites auxiliaires et donnée dans [15]. De plus, les conditions standards de la forme

$$\alpha u(0) + u(T) = \phi$$

De tels problèmes sont mal posés, du fait que même si la solution unique existe sur $[0; T]$; elle ne dépendra pas continûment de la valeur finale ϕ

Selon cette méthode, G.Clark et S.Oppenheimer [5], ont approché le problème $(F : V : P)$ par :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0 & 0 < t < T \\ \alpha u(0) + u(T) = \phi \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce qui a permis d'obtenir des estimations explicites, concernant l'ordre de convergence des approximations. L'erreur introduite par de petits changements dans la valeur finale ϕ n'est pas exponentielle mais, de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ sur $[0; T]$: Il montra que ce problème est bien posé pour tout $\alpha > 0$ et que, les approximations u_α sont stables. Il montra aussi, que $u_\alpha(T)$ converge vers ϕ quand α tend vers zéro et, que les valeurs $u_\alpha(t)$ convergent sur $[0; T]$ si et seulement si $(F : V : P)$ admet une solution. Pour les équations paraboliques ont été considérées dans des travaux récents voir [3],[4]. Pour d'autres résultats concernant ce type de problèmes, voir aussi [13]

Cette méthode est celle qui a été appliquée, au *chapitre quatre*, pour régulariser un problème mal posé.

3.3 Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses non linéaires

Parfois la résolution de problèmes inverses amène à la résolution de systèmes non linéaires. Nous présentons donc quelques méthodes pour la résolution de problèmes

non linéaires comme la méthode de Newton-Raphson, la méthode de Gauss-Newton ou la méthode de Levenberg-Marquardt.

3.3.1 La méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson [10] est une généralisation de la méthode de Newton en dimension n .

Considérons un système de n équations différentielles non linéaires à n inconnues tel que :

$$A(x) = 0 \quad (3.18)$$

Une séquence de vecteurs x_0, x_1, \dots, x_n convergeant vers une solution x^* est construite. Si A est continûment dérivable, nous pouvons construire l'approximation de Taylor suivante :

$$A(x_0 + \Delta x) \approx A(x_0) + \nabla A(x_0) \Delta x \quad (3.19)$$

Où le Jacobien a pour expression :

$$\nabla A(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial A_n(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial A_n(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

D'après((3.22)), nous avons l'approximation suivante de la différence entre x_0 et la solution x^* de l'équation ((3.21)) :

$$A(x^*) = 0 \approx A(x_0) + \nabla A(x_0) \Delta x$$

La résolution de l'équation précédente donne Δx :

$$\Delta x \approx (\nabla A(x_0))^{-1} (-A(x_0))$$

que l'on ajoute ensuite à x_0 pour obtenir $x_1 = x_0 + \Delta x$. Ainsi, cette méthode consiste, à partir d'une solution initiale x_0 à calculer une suite de vecteurs x_0, x_1, \dots jusqu'à ce que le calcul converge vers une solution x^* de l'équation ((3.21)). Le point fort de cette méthode et que sa convergence est quadratique, c'est-à-dire que lorsque

3.3 Méthodes de régularisation pour les problèmes inverses non linéaires

nous nous approchons de la solution, le nombre de chiffres significatifs corrects des grandeurs calculées double à chaque itération. Cependant, cette méthode est très sensible à l'initialisation : si celle-ci est trop éloignée du minimum local, la méthode peut ne pas converger. D'autre part, elle n'est pas directement applicable à tous les problèmes inverses, car il peut arriver que nous n'ayons pas autant de données que de paramètres à identifier, il n'y a alors pas de solution exacte au problème $Ax = y$, où A n'est pas carré. Cette méthode est généralement utilisée pour obtenir une solution à des problèmes d'optimisation non linéaires.

Il existe d'autres types de méthodes de résolution de problèmes inverses qui ne seront pas détaillées dans ce manuscrit :

- les techniques de Fourier (*FFT*) : elles sont particulièrement adaptées aux problèmes de convolution et permettent la résolution de problèmes dans les domaines temporel ou fréquentiel lorsque l'application le permet. Pour le lecteur intéressé par le sujet, il existe de nombreux ouvrages traitant des techniques de Fourier, qui traitent de la théorie de Fourier et de quelques applications.

- les approches probabilistes : elles sont également appelées "approches Bayésiennes". La théorie des processus stochastiques fournit une autre méthode de régularisation, consistant en la mise en évidence des informations importantes ressortant des problèmes posés. Il faut ici disposer d'une idée préconçue de la solution recherchée. L'idée est de considérer toutes les grandeurs comme des variables aléatoires afin de représenter toutes les incertitudes. La solution du problème inverse est alors la fonction densité de probabilités associée à l'inconnue A et à la donnée y . Le lecteur intéressé par ces techniques peut se reporter à l'ouvrage [17].

Chapitre 4

REGULARISATION D'UNE CLASSE DE PROBLÈMES MAL POSE NON HOMOGENÈNE

4.1 Introduction

Soit A un opérateur positif (on suppose que $A \geq \mu > 0$) auto-adjoint, linéaire non borné sur un espace de Hilbert séparable H . tel que $-A$ est le générateur d'un C_0 semi-groupe de contraction et compact sur H .

On considère le problème à valeur finale (F.V.P) suivant, qui consiste à trouver $u : [0, T] \rightarrow H$ tel que :

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f & 0 \leq t \leq T \\ u(T) = g \end{cases} \quad (F.V.P) \quad (4.1)$$

Où $f \in C^1([0, T], H)$ et $g \in H$ sont deux fonctions données. On suppose que $0 \in \rho(A)$ et que A^{-1} est compact. Soit $\{\varphi_n\}$ une base orthonormée des vecteurs associée aux valeurs propres $\{\lambda_n\}$ de A . i.e., $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$. On suppose que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

Formellement la solution du (F.V.P) si elle existe, elle s'écrit sous la forme :

$$u(t) = S(t - T)(g - \int_0^T S(T - s)f(s)ds) + \int_0^t S(t - s)f(s)ds \quad (4.2)$$

C'est un problème mal posé du fait que si la solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne dépendra pas nécessairement, continûment de la donnée finale g .

Par la méthode des quasi-valeurs aux limites, on perturbe la donnée finale pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. On montre que le problème approché est bien posé et que, sa solution converge si le problème initial admet une solution classique. On obtient aussi, une estimation de la solution du problème approché, ainsi que la convergence des solutions approchées et l'estimation de l'erreur de convergence.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (F.V.P) \quad (4.3)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$, du (F.V.P) est perturbée pour former une famille de problèmes dépendant d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [5] ; méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle quasi-*boundary value* problème (Q.B.V.P) . Pour d'autres résultats concernant ce type de problèmes, voir aussi [11]. On montre que les problèmes approchés sont bien-posé et que leurs solutions u_α converge si et seulement si le problème original a une solution classique. Enfin, on obtient des résultats de convergence de la solution et de la condition finale.

On note pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $f(t) \in H$ et pour $g \in H$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\varphi_n \quad \text{et} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n\varphi_n$$

4.2 Condition suffisante pour l'existence de la solution du problème mal posé non homogène

Lemme 4.2.1. Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ est dans H , $f \in C^1([0, T] : H)$, tel que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n$, alors, (F.V.P) admet une solution classique si :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t) \quad \text{convergent}$$

Démonstration. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent ; on pose :

$$u(t) = S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t-s) f(s) ds$$

On a donc,

$$\begin{aligned} u'(t) + Au(t) &= -AS(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + f(t) - A \int_0^t S(t-s) f(s) ds \\ &+ AS(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + A \int_0^t S(t-s) f(s) ds = f(t) . \end{aligned}$$

Doù $u(t)$ est une solution de (F.V.P) et $u(t) \in C^1(]0, T[, H)$.

Vérifions que $u(t) \in H$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\lambda_n(T-t)} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right] \varphi_n \right\|^2 \\ \|u(t)\|^2 &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T e^{\lambda_n T} f_n(t) ds \right)^2 \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T \int_0^T e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) ds \\ \|u(t)\|^2 &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t)$ est dans H , donc $u(t)$ existe.
Vérifions que $u(t) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|Au(t)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[e^{\lambda_n(T-t)} (g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds) + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right] \varphi_n \right\|^2 \\ \|Au(t)\|^2 &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n(T-t)} \left[g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \\ \|Au(t)\|^2 &\leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2 + 6T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(s) \right) ds \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ convergent donc, $u(t) \in D(A)$, donc $u(t)$ est solution classique du (F.V.P). □

4.2.1 Le problème approché

On approche le problème à valeur finale (4.1), par le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} u' + Au = f & 0 \leq t \leq T \\ \alpha u(0) + u(T) = g \end{cases} \quad (Q.B.V.P) \quad (4.4)$$

Où, la donnée finale $u(T) = g$; du $(F : V : P)$ est perturbée pour former un problème non local approximatif qui, dépend d'un petit paramètre. Cette méthode est appelée selon [5]; méthode des quasi-valeurs aux limites, et son problème associé s'appelle "quasi boundary value problem" (QBVP).

Définition 4.2.1. Pour tout g de H , $\alpha > 0$; $f \in C^1([0; T]; H)$; on définit $u : [0; T] \rightarrow H$; tel que :

$$u_\alpha(t) = S(t) (\alpha I - S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right] + \int_0^t S(t-s) f(s) ds \quad (4.5)$$

4.2.2 Existence, unicité et stabilité de la solution du problème approché

Théorème 4.2.1. Si $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ est dans H , et $f \in C^1([0, T], H)$ fixé tels que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2$ soient convergentes alors, la fonction $u_\alpha(t)$ est la solution classique du (Q.B.V.P) et elle dépend continûment de g .

Démonstration. Commenons par prouver que $u(t)$ est solution du (Q.B.V.P)

$$u_\alpha(t) = S(t)((\alpha I + S(T))^{-1} [g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds)$$

Donc,

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) + Au_\alpha(t) &= -AS(t)((\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - A \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s)ds + f(t) \\ &\quad + AS(t)((\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + A \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Il est claire que $u_\alpha(t)$ vérifie l'équation

$$\alpha u_\alpha(0) + u_\alpha(T) = g$$

L'unicité

On a :

$$u(T) = S(T)u(0) + \int_0^T S(T-s)f(s)ds$$

Donc :

$$\alpha u(0) + u(T) = \alpha u(0) + S(T)u(0) + \int_0^T S(T-s)f(s)ds = g$$

D'ou

$$u(0) = S(0)(\alpha I + S(T))^{-1} (g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds)$$

Le (Q.B.V.P) devient :

$$\begin{cases} u' + Au = f \\ u(0) = S(0)(\alpha I + S(T))^{-1} (g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds) \end{cases}$$

C'est le problème de Cauchy, il admet la solution unique.

Stabilité

Concernant la dépendance continue de u_α par rapport à g , on a : Pour tout g_1, g_2 de H on a :

$$\begin{aligned} \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| &= \left\| S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_1 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right. \\ &\quad \left. - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g_2 - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\| \\ \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| &= \|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}(g_1 - g_2)\| \\ \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| &= \|S(t)(\alpha I + S(T))^{-1}\| \|g_1 - g_2\| \\ \|u_{\alpha_{g_1}}(t) - u_{\alpha_{g_2}}(t)\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|g_1 - g_2\| \end{aligned}$$

vérifion que $u_\alpha(t) \in D(A)$:

$$\begin{aligned} \|Au_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} (g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds)^2 + \lambda_n^2 \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\lambda_n e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) \left(g_n - \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right) \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda_n^2 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \left(\left(2g_n^2 - \left(2 \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right) + 2\lambda_n^2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s)ds \right)^2 \right) \right] \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\left(g_n^2 - \left(\int_0^T f_n(s)ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_0^T f_n(s)ds \right)^2 \right) \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) \right) ds \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq 4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + 4T \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right) ds + 2T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right) ds \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq \left[4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 + \left(4 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 + 2 \right) T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \|Au_\alpha(t)\|^2 &\leq 2 \left(\alpha \frac{t-T}{T} \right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\alpha \frac{t-T}{T} + \sqrt{2} \right) T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D'où $u_\alpha(t) \in D(A), t \in [0, T]$. □

4.3 Estimation de la solution approchée

Théorème 4.3.1. *Pour tout $g \in H, f \in C^1([0, T]; H), t \in [0, T]$ et $\alpha > 0$, on a :*

Théorème 4.3.2.

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 2\alpha^{\frac{t-T}{T}} \|g\| + T \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) (\|f\|)$$

Démonstration. On note $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$ et $\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right) \right] \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda_n t}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n^2 + \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right)$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + 4T \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|f\|^2 + 2T^2 \|f\|^2$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq \left[4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 \|g\|^2 + \left(4 \left(\alpha^{\frac{t-T}{T}} \right)^2 + 2 \right) T^2 \|f\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u_\alpha(t)\|^2 \leq 2\alpha^{\frac{t-T}{T}} \|g\| + T \left(2\alpha^{\frac{t-T}{T}} + \sqrt{2} \right) \|f\|$$

□

4.3.1 Résultats de convergence

Dans cette section, on va démontrer que la condition finale et la solution du problème perturbé convergent vers la condition finale et la solution du problème original (4.1).

Théorème 4.3.3. *Pour tout $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n$ de H , $f \in C^1([0, T]; H)$, tel que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n$, on a $\|u_\alpha(T) - g\|$ tend vers zéro quand α tend vers zéro, ce qui signifie que, $u_\alpha(T)$ converge vers g dans H .*

Démonstration. $\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \left\| S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds - g \right\|^2$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \left\| S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - (\alpha I + S(T))^{-1}(\alpha I + S(T)) \left[g - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} (S(T) - (\alpha I + S(T))) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \alpha^2 \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 (\alpha + e^{-2\lambda_n t})^{-2} \left[g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s)ds \right]^2$$

Pour un ε fixé, on choisi N_1 et N_2 tels que :

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \sum_{n=N_2}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

Prenant $N = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On a alors,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s)ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \left(\int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s)ds \right)^2 \quad (3.6.8)$$

Donc ;

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s) ds \right)^2 < 2 \sum_{n=N}^{\infty} g_n^2 + 2T \int_0^T \sum_{n=N}^{\infty} f_n^2(s) ds$$

D'ou

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s) ds \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(T) - g\|^2 &= \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s) ds \right)^2 \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-t)} f_n(s) ds \right)^2 \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \sum_{n=1}^N \alpha^2 (\alpha + e^{-\lambda_n T})^{-2} \left(g_n^2 + 2 \left(\int_0^T f_n(s) ds \right)^2 \right)$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < 2\alpha^2 \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}$$

On note par : $I_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$

Soit α tel que :

$$\alpha^2 < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N (e^{2\lambda_n T} g_n^2) + T I_N \right]^{-1}$$

Alors :

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n T} g_n^2 + T I_N \right] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 < \varepsilon$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Théorème 4.3.4. *Pour tout $g \in H$, $f \in C^1([0, T], H)$, tel que :*

Théorème 4.3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e^{2\lambda_n T} f_n^2(t)$ soient convergentes, si le $(F : V : P)$ admet une solution classique alors, la suite $u_\alpha(0)$ converge dans H ; de plus, on aura $u_\alpha(t)$ converge vers $u(t)$ quand α tend vers zéro uniformément en t .

Démonstration. Supposons que, $u(t)$ soit la solution du $(F : V : P)$

$$u(t) = S(t-T) \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-2\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)$$

Comme $u(0)$ est dans H , On choisit pour $\varepsilon > 0$, N tel que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} g_n^2 < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n T} f_n^2 < \frac{\varepsilon}{8T^2}$$

On aura :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

et soient α et γ deux réels strictement positifs, alors :

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 &= \left\| (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right. \\ &\quad \left. - (\gamma I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right\|^2 \end{aligned}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha + e^{-\lambda_n T}} - \frac{1}{\gamma + e^{-\lambda_n T}} \right) \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha)(\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s)ds \right) \right] \varphi_n \right\|^2$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 =$$

$$\sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\ + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[(\gamma - \alpha)^2 (\alpha\gamma + (\alpha + \gamma)e^{-\lambda_n T} + e^{-2\lambda_n T})^{-2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq$$

$$\sum_{n=1}^N \left[(\gamma - \alpha)^2 e^{4\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right] \\ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma - \alpha)^2}{(\alpha + \gamma)^2} e^{2\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2 \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} \left(g_n^2 + T \int_0^T (f_n(s))^2 ds \right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq (\gamma - \alpha)^2 \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds + \frac{\varepsilon}{2}$$

On not $I'_N = \int_0^T \sum_{n=1}^N 2e^{4\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds$

Soit σ tel que :

$$\sigma^2 < \frac{\varepsilon}{4} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} g_n^2(s) + T I'_N \right]^{-1}$$

et $\alpha < \sigma, \gamma < \sigma$, d'où $\gamma - \alpha < \sigma$, et donc :

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq 2\sigma^2 \sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} (g_n^2 + T I'_N) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u_\gamma(0)\|^2 \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{n=1}^N e^{4\lambda_n T} g_n^2(s) + T I'_N \right]^{-1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\{u_\alpha(0)\}$ est donc une suite de Cauchy, donc elle est convergente.

Par conséquent :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left[g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right] - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \right\|$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| S(t) \left[u_0 - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right] \right\|$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\| u_0 - S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \right\|$$

d'où

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u(t) - u_\alpha(t)\| \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \|u_0 - u_\alpha(0)\|$$

qui converge uniformément. Donc,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(t) = u(t)$$

□

4.4 Estimation de l'erreur de convergence de la solution du problème approché

Théorème 4.4.1. *Si g est dans H , $f \in C^1([0, T], H)$, et s'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2$ convergent dans H , alors, $\|u_\alpha(T) - g\|$ converge vers zéro avec l'ordre de $\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$.*

Démonstration. Soit ϵ dans $]0, T]$, tel que : $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} g_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\epsilon \lambda_n T} (f_n(t))^2$ soient finies, et soit k dans $]0; 2]$.

Pour un nombre naturel fixé n , on définit :

$$h_n(\alpha) = \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2}$$

□

Théorème 4.4.2. *Démonstration.*

$$h_n(\alpha) \leq h_n(\alpha_0); \alpha_0 = \frac{ke^{-\lambda_n T}}{2-k}$$

$$h_n(\alpha) \leq \left(\frac{k}{2-k} \right)^k \frac{e^{-k\lambda_n T}}{(\alpha_0 + e^{-\lambda_n T})^2}$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 = \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq$$

$$\alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2-k} \right)_{n=1}^k e^{-k\lambda_n(T-s)} (\alpha_0^2 + e^{-2\lambda_n T} + 2\alpha_0 e^{-\lambda_n T})^{-1} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k)\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right)^2$$

Si on choisit $k = 2 - \varepsilon$, on aura :

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq \alpha^\varepsilon \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 - 2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} \left(2g_n^2 - 2 \left(\int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} f_n(s) ds \right) \right)^2$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 4\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds \right]$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq 48\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{\varepsilon\lambda_n T} g_n^2 + T \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n T} (f_n(s))^2 ds \right) \right]$$

$$\|u_\alpha(T) - g\|^2 \leq C\alpha^\varepsilon \varepsilon^{-2}$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) - S(-T) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) - S(-T) (\alpha I + S(T))^{-1} (\alpha I + S(T)) \left[g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\| = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s) f(s) ds \right) (I - S(-T) (\alpha I + S(T)))$$

$$\begin{aligned} \|u_\alpha(0) - u(0)\| &= -\alpha S(-T)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\ \|u_\alpha(0) - u(0)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n T}}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) \\ \|u_\alpha(0) - u(0)\| &= \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{(\alpha + e^{-\lambda_n T})^2} \left(g_n - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) e^{2\lambda_n T} \\ \|u_\alpha(0) - u(0)\| &\leq \alpha^{2-k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(2-k)\lambda_n T} \left(g_n - \int_0^T S(T-s)f(s)ds \right) e^{2\lambda_n T} \\ \|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 &\leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T \exp(-\lambda_n(T-s))f_n(s)ds \right)^2 \exp(4-k)\lambda_n T \end{aligned}$$

□

Démonstration. Maintenant on choisit $k = 2 - \alpha$,

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n - \int_0^T \exp(-\lambda_n(T-s))f_n(s)ds \right)^2 \exp(2+\epsilon)\lambda_n T$$

donc,

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq \alpha^\epsilon \left(\frac{2}{\epsilon} \right)^2 \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n^2 \exp((2+\epsilon)\lambda_n T) + 2T \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(s))^2 \exp(2+\epsilon)\lambda_n T ds \right) \right]$$

$$\|u_\alpha(0) - u(0)\|^2 \leq C \alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$$

$$\begin{aligned} u_\alpha(t) - u(t) &= S(t)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T (T-s)f(s)ds \right) \\ &\quad - S(t-T) \left[g - \int_0^T (T-s)f(s)ds \right] \end{aligned}$$

$$u_\alpha(t) - u(t) = (\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T (T-s)f(s)ds \right) (S(t) - \alpha S(t-T) - S(t))$$

$$u_\alpha(t) - u(t) = -\alpha S(t-T)(\alpha I + S(T))^{-1} \left(g - \int_0^T (T-s)f(s)ds \right)$$

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 e^{2\lambda_n(T-t)}}{(\alpha + e^{2\lambda_n T})^2} \left(g - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)}(T-s)f(s)ds \right)^2$$

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 \leq \alpha^{2-k} \left(\frac{k}{2-k} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(g - \int_0^T e^{-\lambda_n(T-s)} (T-s) f(s) ds \right)^2 e^{(4-k)\lambda_n T}$$

Posant $k = 2 - \epsilon$, et procédant de la même manière que pour $u_\alpha(0) - u(0)$, on trouve :

$$\|u_\alpha(t) - u(t)\|^2 = C\alpha^\epsilon \epsilon^{-2}$$

□

Références

- [1] M. Ababna, Regularization by nonlocal conditions of the problem of the control of the initial condition for evolution operator-differential equations, Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya 1. Fizika, Matematika, Informatika (1998), no. 2, 60–63, 81 (Russian).
- [2] S. Agmon, L. Nirenberg, Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 121-139.
- [3] K. A. Ames and L. E. Payne, Asymptotic behaviour for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences 8 (1998), no. 1, 187–202.
- [4] K. A. Ames, L. E. Payne, and P.W. Schaefer, Energy and pointwise bounds in some nonstandard parabolic problems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics 134 (2004), no. 1, 1–9.
- [5] K.A. Ames, R.J. Hughes, Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space, Semigroup Forum, Vol. 70 (2005), No 1, 127-145.
- [6] J. Baumeister. Stable Solution of Inverse Problems. Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [7] J. Baumeister, A. Leitao, On iterative methods for solving ill-posed problems modded by partial differential equations, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. 9.1 (2001) 1-17.
- [8] G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, Quasireversibility methods for non-well posed problems, Elect. J. Diff. Eqns., 8 (1994), 1-9.
- [9] D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis, J.R. Mc Laughlin and W. Rundell (editors), (2000) Survey on solution methods for inverse problems, Springer, Wien, New York.
- [10] R. Courant, Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc, 49, pp. 1-23, 1943.

- [11] M. Denche and S. Djezzar, (2006), "A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems" *Boundary- Value Problems* Volume 2006. Article ID 37524, 8 pages.
- [12] H. Engl. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *J. Optim. Theory Appl.*, 52 : 209-215. 1987.
- [13] H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [18] K. O. FRIEDRICHS, Asymptotic Phenomena in Mathematical Physics, *Bull. Amer. Math. Soc.* 616, pp. 485-504, 1955.
- [14] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover. New-York, MR14 :474f. 1952.
- [15] F. JEDRZEJEWSKI, *Introduction aux méthodes numériques*, 2^{eme} édition, Springer-Verlag, ISBN 2-287-25203-7, France 2005, 2006.
- [16] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. (Applied mathematical sciences ; V.120). Springer, New-York. 1996.
- [17] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, *Leningrad Math. J.*, 1 (1990) No. 5, 1207-1228.
- [18] R. Lattès and J. L. Lions, *Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications*, *Travaux et Recherches Mathématiques*, no. 15, Dunod, Paris, 1967.
- [19] M. M. Lavrentiev, *Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics* Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 11, Springer, Berlin, 1967.
- [20] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, V.V. Stepanov, A.G. Yagola, *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [21] J. Von. Neumann, R. Richmyer, A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks, *J.Appl. Phys.*, vol.21, p.232. 1950.
- .