République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieure et de la recherche scientifique

N Attribué par la bibliothèque

Année Univ.: 2015/2016

Etude d'une classe de problèmes aux limites quasilinéaire

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique

Université Dr Tahar Moulay - Saïda

Discipline : MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse géométrie et application

par

Lahcine **M**.Abdelhadi [1]

Sous la direction de

Dr G. Djellouli

Soutenue le Juin 2016 devant le jury composé de

M. H.Dida	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Président
M. G.Djellouli	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Rapporteur
M. K.Djerfi	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur
M. N.Bekkouche	Université Dr Tahar Moulay - Saïda	Examinateur

1. e-mail : lahcine93@hotmail.fr

Dedicace

Je dédie ce mémoire
A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiances, leur soutien, leurs sacrices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.
A mes soeurs ainsi qu'à mon chère frère pour leur tendresse, leur complicité et leur présence malgré la distance qui nous sépare.
A mes tante Zineb et Djemaa pour toute l'affection qu'ils m'ont donnée et pour leurs précieux encouragements.
A toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

Remerciements

Avec l'aide de dieu tout puissant, on a pu achever ce modeste travail.
Je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire. Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Djellouli, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Mes remerciements s'adressent également à ma chere collegue (AMIE) Nadia Ikhlef, pour sa génèrosité et la grande patience. J'exprime ma gratitude à tous les jurés rencontrés lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à mes questions avec gentillesse. Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adressé mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction

L'objet dans ce mémoire consiste à étudier l'existence et la multiplicité des solutions positives des problèmes aux limites de la forme

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = g\left(u\right) \text{ dans }]0,1[\,, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Plusieurs auteurs se sont intéressés au problème (0.1) incluant les dimensions supérieures sous plusieurs hypothèses. Rappelons-nous certains d'entre eux.
Dans [4], I. Addou considère le problème aux limites.

$$\left\{ \begin{array}{c} -u'' = u^2 - \lambda \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\} \tag{0.2}$$

ou $\lambda \in \mathbb{R}$.

En utilisant la méthode de quadrature, on obtient une description complète de l'ensemble des solutions du problème (0.2).
Dans [9], ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' = g(u) - \lambda \text{ dans }]0,1[\\ \qquad u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{s\to-\infty} g'(s) < +\infty$ et $\lim\limits_{s\to+\infty} g'(s) = +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

En utilisant des méthodes variationnelles, ils montrent que, pour toute $k \in \mathbb{N}$, ils existes des $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_k$, le problème (0.3) a au moin k solutions distinctes.

Avant le document mentionné ci-dessus, C. Scovel [10] a obtenu les mêmes résultats que B. Ruf and S. Solimini [9] dans le cas particulier où $g(u) = 6u^2$. Il a prouvé que pour tout entier $k \geq 1$, il existe des $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_k$ le problème $(0,3)$ admit au moin k solutions distinctes.
Dans [7], ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k - \lambda \text{ dans } B \\ \qquad u > 0 \text{ dans } B \\ \qquad u = 0 \text{ sur } \partial B \end{cases} \tag{0.4}$$

où B est la boule unité de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, et $\lambda > 0$. Ils ont prouvé que si $1 < k < \frac{n+2}{n-2}$, alors il existe $\lambda_* > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_*$,le problème (0.4) n'a pas des solutions et il a au moins une solution pour $\lambda \leq \lambda_*$.

Dans [6], I. Addou & A. Benmezai, ont considéré le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^k - \lambda h \text{ dans } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ dans } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.5}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec μ^2. borné, $1 < k < 2^* - 1$, ou $2^* = \frac{2n}{n-2}$ si $n > 2$ et $2^* = +\infty$ si $n = 1, 2$ et h est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

Sous l'hypothèse générale sur h, il montre qu'il existe $\lambda_* > 0$, de telle sorte que problème n'a pas des solution $\lambda > \lambda^*$.

Dans [11], S. M. Bouguima considère le problème au limite :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) - \lambda h \text{ dans } \Omega \\ \quad u > 0 \text{ dans } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.6}$$

où Ω est un domain borné dans $\mathbb{R}^n$ à bord lisse et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue tel que $f(0) = 0, u \longmapsto \dfrac{f(u)}{u}$ est croissant et $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u} = +\infty$ et $\lambda > 0$.

Sous l'hypothèse générale sur h, il montre que, si λ est assez grande, alors le problème (0.6) n'a pas de solution.

Dans [1], I. Addou a étudié le problème (0.6) avec $f(u) = |u|^p$ et $\mu \in \mathbb{R}$. En utilisant l'analyse de l'application temps, ils déterminent une limite inférieure pour le nombre de solutions et établi leurs propriétés nodales.

Dans [12],Y. B. Deng considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda(u^q - 1) \text{ dans } \Omega \\ \quad u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.7}$$

où $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, Ω est un sous-ensemble connexe et borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière $\partial\Omega$ de classe $C^{1,\alpha}, \alpha > 0$ et $0 < p - 1 < q < p^* - 1$, avec $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ si $1 < p < n$, et $p^* = +\infty$, si $p \geq n$.

En utilisant la méthode de fibrage, ils prouvent que le problème (0.7) admet une solution non-triviale et non-négative pour tout $\lambda > 0$.

Maintenant, nous posons la question suivante :
Est-ce que les résultats concernant les solutions positives dans [1] restent valables si l'on remplace la fonction $u \to |u|^p$ par une fonction plus générale $p-$convexe.

Le but de ce mémoire est de donner une réponse à la question citée ci-dessus.

Ce mémoire est organisée comme suit

Dans le premier chapitre, on décrit la méthode de quadrature qui va nous permettre de détecter les solutions positives des problèmes aux limites du type (0.1)

Le chapitre deux est consacré à l'existence et la multiplicité des solutions positives du problèmes aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = f\left(u\right) + \mu \text{ dans } \left]0,1\right[, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu < 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction $p-$convexe c'est-à-dire

$$\forall p > 1,\ \forall u > 0,\ (p-2)\, f'\left(u\right) - uf''\left(u\right) < 0.$$

satisfaisant des certaines conditions.

Dans le trosième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = au^{p-1} - bu^{2p-2} + \mu \text{ dans } \left]0,1\right[, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = |y|^{p-2}\,y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $\mu > 0$.

Dans le quatrième chapitre nous donnons quelques exemples pour illustrer nos résultats des chapitre précédents.

Chapitre 1

Méthode de quadrature

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'établir une méthode de quadrature qui va nous permettre d'étudier les solutions positives des problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = g\left(u\right) \text{ dans } \left]0,1\right[, \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\varphi_p\left(y\right) = \left|y\right|^{p-2}y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$ et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Ce chapitre est divisé en trois parties. Dans la première partie on donne des résultats concernant la régularité des solutions positives du problèmes $(1,1)$. Dans la deuxième partié on donne une condition suffisante d'existence de solutions positives du problèmes $(1,1)$, et dans la troisième partie on donne un exemple d'application.

1.2 Régularité des solutions

Définition 1.2.1. *En tend par solution positive du problème* $(1,1)$ *toute fonction* $u \in C^1\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ *tel que :*
$i)$ $\varphi_p \circ u'$ *est de classe* $C^1\left(\left[0,1\right]\right)$.
$ii)$ u *est vérifie le problème* (1.1),
$iii)$ $u\left(x\right) \geq 0$, *pour tout* $x \in \left[0.1\right]$.

Lemme 1.2.1. *Soit u une solution du problème $(1,1)$, alors :*
$i)$ u est de classe $C^2([0,1])$ si $1 < p \leq 2$,
$ii)$ u est de classe $C^2([0,1]) \diagdown Z$ si $p > 2$,
où

$$Z = \left\{ u \in C^1([0,1]) \diagup u'(x) = 0 \text{ et } x \in [0,1] \right\}.$$

Démonstration. Soit u une solution du problème $(1,1)$, alors u et $\varphi_{p'}(u')$ sont de classe $C^1([0;1])$: D'autre part on a :

$$u'(x) = \varphi_{p'}(\varphi_p(u'))(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

où p'est le conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$i)$ Si $1 < p \leq 2$, alors $p' \geq 2$ et par suite $\varphi_{p'}$ est de classe $C^1(\mathbb{R})$ donc u est de classe $C^2([0;1])$.
$ii)$ Si $p > 2$, alors $1 < p' < 2$ et dans ce cas $\varphi_{p'}$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^*)$ et $\varphi_{p'}$ n'est pas dérivable au point 0 et comme

$$u'(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi_p(u'(x)) = 0$$

on obtient que u est de classe $C^2([0;1]) \backslash Z$. □

1.3 Condition suffisante d'existence de solutions positives

On veut répondre à la question suivante : Sous quelle condition u une solution positive du problème (1.1)?

Avant de répondre à cette question, on a besoin de quelques notations.
On note par

$$S^+ = \left\{ u \in C^1([0,1]) \text{ tq } u > 0 \text{ dans } (0,1),\, u(0) = u(1) = 0 \text{ et } u'(0) = E \geq 0 \right\}.$$

Définition 1.3.1. *Soit A_+ le sous ensemble de S^+ constitué par les fonctions u satisfaisant :*
$i)$ $u'(0) = E > 0$,

ii) u est symétique par rapport à $\frac{1}{2}$,

iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $]0,1[$.

On note par B_+ le sous ensemble de S^+ constitué par les fonctions u satisfaisant à

i) $u'(0)=0$,

ii) u est symétique par rapport à $\frac{1}{2}$,

iii) La dérivée de u s'annule une et une seule fois dans $]0,1[$

On note aussi par $S_+(p,E)$ le premier zéro positif de l'équation

$$E^p - p'G(u) = 0.$$

où $G(u) = \int_0^u g(s)\,ds$.

Maintenant on définit pour tout $E \geq 0$ et $p > 1$ l'application temps T_+ par

$$T_+(p,E) = \int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'G(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On note par

$$D^+ = \{E \geq 0 \diagup T_+(p,E) < +\infty\}$$

et

$$\lambda_1(p) = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^p$$

où $\lambda_1(p)$ est la première valeur propre de l'opérateur $p-$Laplacien

Alors on a le résultat suivant

Théorème 1.3.1. *i) Le problème $(1,1)$ admet une solution dans A_+si et seulement si, il existe $E > 0$ telle que $E \in D^+$ et $T_+(p,E) = \frac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.*

ii) Le problème $(1,1)$ admet une solution dans B_+ si et seulement si $T_+(p,0) = \frac{1}{2}$ et dans ce cas la solution est unique.

Démonstration. Montrons d'abord que pour tout $p > 1$, $E > 0$, l'intégrale $\int_0^{S_+(p,E)} \dfrac{du}{[E^p - p'G(u)]^{\frac{1}{p}}}$ est uniformément convergente.

On a

$$T_+(p,E) = \int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{[E^p - p'G(u)]^{\frac{1}{p}}}$$

Comme $S_+(p,E)$ est un zéro de l'équation

$$E^p - p'G(u) = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} T_+(p,E) &= p'^{-\frac{1}{p}} \int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{[G(S_+(p,E)) - G(u)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= p'^{-\frac{1}{p}} S_+(p,E) \int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{[G(S_+(p,E)) - G(S_+(p,E)t)]^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

Posons $s = s_+(p;E)$ et appliquons le théorème des accroissements finis à la fonction

$$\varphi(E,v) := G(S_+(p,E)) - G(S_+(p,E)v)$$

dans l'intervalle $[t;1]$ pour tout $v \in]0;1[$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi(E,t) &= (1-t)S_+(p,E)g(S_+(p,E)c) \qquad \text{pour } c \in (t,1) \\ &\geq (1-t)\alpha g(\alpha c) \qquad \text{avec} \qquad \alpha = S_+(p,E) \end{aligned}$$

par suit on a :

$$T_+(p,E) \leq \frac{1}{[\alpha g(\alpha c)]^{\frac{1}{p}}} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{p}}}$$

comme $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{\frac{1}{p}}}$ est convergente, il résulte que $T_+(p;E)$ est uniformément convergente.

i) Soit u une solution positive du problème (1.1). Alors $u' > 0$ dans $[0, \frac{1}{2}[$, $u' < 0$ dans $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et $u'(\frac{1}{2}) = 0$ on a

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(u'))' &= g(u(x)) \\ -((p-1)u''(x)(u'(x))^{p-2} &= g(u(x)) \\ -((p-1)u''(x)(u'(x))^{p-1} &= g(u(x))u'(x) \\ -\int_0^x ((p-1)u''(t)(u'(t))^{p-1}dt &= \int_0^x g(u(t))u'(t)dt \\ -\frac{(p-1)}{p}[u'(x)]^p &= \int_0^u g(s)ds \\ [u'(x)]^p - [u'(0)]^p &= -p'G(u) \\ u'(x) &= [(u'(0))^p - p'G(u(x))]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$u'(x) = [(u'(0))^p - p'G(u(x))]^{\frac{1}{p}} \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

par suite

$$\frac{u'(x)}{[(u'(0))^p - p'G(u(x))]^{\frac{1}{p}}} = 1, \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

Donc

$$\int_0^{u(x)} \frac{dt}{[(u'(0))^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}} = x, \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

on fait tendre x vers $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\int_0^{u(\frac{1}{2})} \frac{dt}{[(u'(0))^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{2}$$

Comme $u'(0) = E$ et $u(\frac{1}{2}) = S_+(p, E)$, on a

$$\int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{[(E^p - p'G(u)]^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$T_+(p, E) = \frac{1}{2}$$

ou

$$T_+(p, E) = \int_0^{S_+(p,E)} \frac{du}{[(E^p - p'G(u)]^{\frac{1}{p}}}$$

Maintenant montrons que la condition $T_+(p; E) = \frac{1}{2}$ est une condition suffisante d'existence d'une solution positive de $(1, 1)$.

Supposons qu'il existe $E_* > 0$ tel que

$$T_+(p, E_*) = \frac{1}{2}$$

On définit la fonction k_+ sur $[0; S_+(p; E_*)]$ par

$$k_+(p, E) = \int_0^u \frac{dt}{[(E^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}}$$

Donc $k_+(S_+(p; E)) = T_+(p; E_*)$ et $0 \leq k_+(u) \leq T^+(p; E_*)$, pour tout $u \in [0, S_+(p, E_*)]$. Alors k_+ est un difféomorphisme croissant de $[0; S_+(p; E)[$ dans $[0; T_+(p; E)[$ car

$$k'_+(p, E) = \frac{dt}{[(E^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}} > 0 \text{ pour tout } u \in [0, S_+(p, E_*))]$$

Soit u_+ la fonction inverse de k_+ définié par

$$u_+(x) = k_+^{-1}(x) \in [0, S_+(p, E_*)], \text{ pour tout } x \text{ dans } [0, \frac{1}{2}]$$

on définit la fonction u dans $[0; 1]$ par

$$\begin{cases} u_+(x) \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ u_+(1-x) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

On montre que u est une solution positive du problème $(1, 1)$ et satisfait

$$u'(0) = E_*, \ \max u(x) = u(\frac{1}{2}) = S_+(p, E_*)$$

Supposons maintenant que v est une autre solution positive du problème (1.1) satisfait

$$v'(0) = E_*, \ \max v(x) = v(\frac{1}{2}))$$

donc on a

$$x = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{[(E)^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}} = \int_0^{v(x)} \frac{dt}{[(E)^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}}, \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

par suite

$$\int_{v(x)}^{u(x)} \frac{dt}{[(E)^p - p'G(t)]^{\frac{1}{p}}} = 0, \text{ pour tout } x \in [0, \frac{1}{2}]$$

d''ou

$$u = v \text{ dans } [0, \frac{1}{2}]$$

$ii)$ La preuve est similaire à $i)$. □

Exemple 1.3.1. *On considèré le problème aux limite suivant*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda \varphi_p\left(u\right) \ \ dans \ \ (0, 1), \\ u\left(0\right) = u\left(1\right) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où λ est réel strictement positif

Le problème $(1, 2)$ admet une solution positive dans A_+, si et seulement si

$$\lambda = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p \sin \frac{\pi}{p}}\right)^p$$

.

Démonstration. On pose $g(u) = \lambda\varphi_p(u)$ .Alors

$$G(u) = \int_0^u g(t)\,dt = \frac{\lambda}{p}u^p.$$

Pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$, l'équation

$$E^p - \frac{\lambda}{p-1}u^p = 0 \text{ admet une unique solution positive}$$

$$S_+(p{,}\lambda{,}E) = \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} E.$$

On définit pour tout $p > 1$, $\lambda > 0$ et $E > 0$ l'application temps T_+ par

$$\begin{aligned} T_+(p{,}\lambda{,}E) &= \int_0^{S_+(p,\lambda,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'G(u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^{\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} E.} \frac{du}{\left[E^p - \frac{\lambda}{p-1}u^p\right]^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

On pose $u = \left(\frac{p-1}{\lambda}\right) tE$, on obtient

$$\begin{aligned} T_+(p{,}\lambda{,}E) &= \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dv}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}. \\ &= \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{p}\beta\left(\frac{1}{p}{,}1-\frac{1}{p}\right) \text{ où } \beta \text{ est la fonction béta d'Euler.} \\ &= \left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right). \end{aligned}$$

D'aprés le théorème (1.1) une condition nécessaire et suffisante pour que le problème $(1,2)$ admet une solution positive est

$$T_+(p{,}\lambda{,}E) = \frac{1}{2},$$

ce qui équivalant à

$$\left(\frac{p-1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right) = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$\lambda = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^p = \lambda_1(p)\ ,$$

où $\lambda_1(p)$ est la première valeur propre de l'opérateur $p-$Laplacien. $\square$

Chapitre 2

Sur le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilineaires $(\mu < 0)$

2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité des solutions positives du problème aux limites quasilinéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} -(\varphi_p(u'))' = f(u) + \mu \ \text{ dans } \ (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

ou $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $\mu < 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction $p-$convexe.

2.2 Résultat principal

On considère le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{c} -(\varphi_p(u'))' = f(u) + \mu \text{ dans } \ ]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y,\ y \in \mathbb{R},\ p > 1,\ \mu < 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfait les conditions suivantes :

$(H1)$ $f \in C(\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}_+^*)$.

$(H2)$ $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = a$, ou $a \in \mathbb{R}_+$.

$(H3)$ $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = b$, ou $b \in]0, +\infty]$.

$(H4)$ $\lim\limits_{u \to 0^+} u f'(u) = 0$.

$(H5)$ $\forall p > 1, \forall u > 0,\ (p-2)f'(u) - uf"(u) < 0$.

Remarque 2.2.1. *La fonction f satisfaisant l'hypothèse $(H5)$ est appelée p-convexe.*

Pour exprimer notre résultat, On définie :

Définition 2.2.1.

$$S^+ = \left\{u \in C^1([0,1]);\ u > 0 \text{ dans } (0,1),\ u(0) = u(1) = 0 \text{ et } u'(0) > 0\right\}$$

Soit A_+ le sous-ensemble de S^+ composé par les fonctions u satisfaisantes :

- *u est symétrie en $\frac{1}{2}$.*
- *La dérivée de u s'annule une seule fois dans $]0,1[$.*

  Soit B_+ le sous-ensemble de $C^1([0,1])$ composé par les fonctions u satisfaisantes :
- *$u > 0$ dans $(0,1)$ et $u(0) = u(1) = u'(0) = 0$.*
- *u est symétrie en $\frac{1}{2}$.*
- *La dérivée de u s'annule une seule fois dans $]0,1[$.*

On note par $\lambda_1(p)$ la première valeur propre du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = \lambda \varphi_p(u) \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

on a

$$\lambda_1(p) = (p-1)\left(2\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}}\right)^p = (p-1)\left(\frac{2\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}}\right)^p$$

Le résultat principal est.

Théorème 2.2.1. *On suppose que $p > 1$, $\mu < 0$ et f satisfait $(H1) - (H5)$.*

A) Si l'une des conditions suivantes est satisfait :

i) $a < b \leq \lambda_1(p), ou$

ii) $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) \leq a < b.$

Alors pour tout $\mu < 0$, le problème (2.8) n'admet pas des solutions positives.

B) Si l'une des conditions suivantes est satisfait :

i) $a \leq \lambda_1(p) < b \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), \quad ou$

ii) $\lambda_1(p) < a < b \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p).$

Alors pour tout $\mu < 0$, le problème (2.8) admet une unique solution et il appartient a A_+.

C) si $a < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) < b$, alors il existe $\mu_*(p, a, b) < 0$ tel que :

- *Si $\mu < \mu_*(p, a, b)$, le problème (2.8) n'admet pas des solutions positives.*
- *Si $\mu = \mu_*(p, a, b)$, le problème (2.8) admet une unique solution positive et elle appartient a B_+.*
- *Si $\mu > \mu_*(p, a, b)$, le problème (2.8) admet une unique solution et elle appartient a A_+.*

2.3 L'approche de l'application-temps

Dans cette section, nous présentons l'approche de l'application-temps bien connu (voir [1], [2] , [3] , [4] , [5]).

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = g(u) \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Définition 2.3.1. *On définie $G(s) = \int_0^S g(t)dt$*

$\forall E \geq 0$ et $p > 1$, soit

$$X_+(p, E) = \left\{ s > 0;\ E^p - \frac{p}{p-1} G(\zeta) > 0, \forall \zeta,\ 0 < \zeta < s \right\}$$

et

$$S_+(p, E) = \begin{cases} 0 & si \quad X + (p, E) = \emptyset \\ \sup X + (p, E) & sinon \end{cases}$$

soit

$$D = \{E \geq 0;\ 0 < S_+(p, E) < +\infty \ \textit{et}\ g(S_+(p, E)) > 0\}$$

et on définie l'application-temps suivante :

$$T_+(p, E) = \int_0^{S+(p,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1} G(u)\right]^{-\frac{1}{p}} du$$

Nous affirmons maintenant ce qui suit le théorème bien connu sans preuve (Voir par exemple [5]).

Théorème 2.3.1. *supposons que* $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $E \geq 0$ *et* $p > 1$ *alors :*

— *Le problème* (2.3) *admet une solution* $u \in A_+$ *satisfaisant* $u'(0) = E$ *si et seulement si* $E \in D \cap (0, +\infty)$ *et* $T_+(p, E) = \frac{1}{2}$, *dans ce cas la solution est unique et son norme-sup est égal à* $S_+(p, E)$.

— *Le problème* (2.3) *admet une solution* $u \in B_+$*si et seulement si* $0 \in D$ *et* $T_+(p, 0) = \frac{1}{2}$, *dans ce cas la solution est unique et son norme-sub est égal à* $S_+(p, 0)$.

2.4 Lemmes préliminaires

Lemme 2.4.1. *Considèrons l'equation dans* $s \in \mathbb{R}_+$

$$E^p - \frac{p}{p-1}(F(s) + \mu s) = 0 \tag{2.4}$$

où $F(s) = \int_0^S f(t)dt$, $p > 1$, $\mu < 0$ *et* $E \geq 0$.

Alors pour tout $E \geq 0$, *l'equation* (2.4)*admet une unique solution positive* $S_+(p, \mu, E)$. *De plus cette solution vérifie les relations suivantes*

i) $\forall\ E > 0,\ S_+(p, \mu, E) > g^{-1}(-\mu) := S_+(p, \mu)$ *où* $g(t) = \frac{F(t)}{t}$.

ii) $\lim_{E \to +\infty} S_+(p, \mu, E) = +\infty$.

iii) La fonction $E \mapsto S_+(p, \mu, E)$ *est de classe* C^1*dans* $]0, +\infty[$ *et on a*

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p, \mu, E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{f(S_+(p, \mu, E)) + \mu} > 0, \forall p > 1, \forall \mu < 0 \ \textit{et}\ \forall E > 0.$$

iv) $\lim_{E \to 0^+} S_+(p, \mu, E) = S_+(p, \mu, 0)$

Démonstration. 1) Si $E = 0$, on a

$$F(s) + \mu s = 0.$$

L'étude des variations de la fonction $s \to F(s) + \mu s$, montre que l'équation (2.3) admet une unique solution positive qu'on note par $S_+(p,\mu) := g^{-1}(-\mu)$ *où* $g(t) = \frac{F(t)}{t}$

· Supposons maintenant que $E > 0$, pour tout $p > 1$ et $\mu < 0$, considérons la fonction Ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$s \to \Psi(p,\mu,E,s) = E^P - p'(F(s) + \mu s).$$

On a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(p,\mu,E,s) = -p'(f(s) + \mu).$$

Comme la fonction $s \to f(s) + \mu$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}_+^*$, de plus elle est continue, alors l'équation $f(s) + \mu = 0$ admet une unique solution positive qu'on note par s_*. Alors la fonction $s \to \Psi(p,\mu,E,s)$ est strictement croissante dans $]0, s_*[$ et strictement décroissante dans $]s_*, +\infty[$, donc l'équation en s, $\Psi(p,\mu,E,s) = 0$ admet une unique solution positive qu'on note par $s_* = S_+(p,\mu,E)$ et elle vérifie

$$\forall\ E > 0, S_+(p,\mu,E) > g^{-1}(-\mu) := S_+(p,\mu).$$

2) Supposons que $\lim\limits_{E\to+\infty} S_+(p,\mu,E) = l < +\infty$
Pour tout $E > 0$, $p > 1$ et $\mu < 0$ on a

$$E^P - p'(F(S_+(p,\mu,E))) + \mu S_+(p,\mu,E) = 0, \tag{2.5}$$

c'est-à- dire

$$E^P = p'(F(S_+(p,\mu,E)) + \mu S_+(p,\mu,E)). \tag{2.6}$$

Par passage à la limite quand E tend vers $+\infty$ dans $(2,6)$, on obtient que

$$+\infty = p'(F(l) + \mu l) < +\infty,$$

contradiction et par suite $\lim\limits_{E\to+\infty} S_+(p,\mu,E) = +\infty$.

3) En dérivant l'équation (2.4) par rapport à E, on obtient la relation suivante

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p,\mu,E) = \frac{(p-1)\,E^{p-1}}{f\left(S_+(p,\mu,E)\right)+\mu} > 0,\ \forall p>1,\ \forall \mu<0 \text{ et } \forall E>0.$$

Maintenant, nous sommes prêts, pour tout $p>1$, $\mu<0$ et $E\geq 0$, pour calculer $X_+(p,\mu,E)$. En effet :

$$X_+(p,\mu,E) =]0, S_+(p,\mu,E)[$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} D &= \{E\geq 0,\ 0<S_+(p,\mu,E)<+\infty \ \text{ et } f(S_+(p,\mu,E))+\mu>0\} \\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

D'après le lemme(2.4.1), on a

$$\lim_{E\to 0^+} S_+(p,\mu,E) = S_+(p,\mu,0) \tag{2.7}$$

$$\lim_{E\to +\infty} S_+(p,\mu,E) = +\infty \tag{2.8}$$

et

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p,\mu,E) = \frac{(p-1)E^{p-1}}{f(S_+(p,\mu,E))+\mu} > 0, \forall p>1, \forall \mu<0 \text{ et } \forall E>0. \tag{2.9}$$

□

Définition 2.4.1. *Maintenant on définit pour tout $p>1$, $\mu<0$ et $E>0$, l'application temps T_+ par*

$$T_+(p,\mu,E) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(F(u)+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

et on définit pour tout $p>1$ et $\mu<0$, l'application h_+ par

$$h_+(p,\mu) = \int_0^{S_+(p,\mu)} \frac{du}{\left[-p'\left(F(u)+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}, \tag{2.10}$$

où $\quad S_+(p,\mu) = S_+(p,\mu,0)$.

Lemme 2.4.2. *Pour toute $p>1$ et $\mu<0$, on a :*

i) $\lim\limits_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) = h_+(p,\mu)$

$$ii) \lim_{E\to+\infty} T_+(p,\mu,E) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_1(p)}{b}\right)^{\frac{1}{p}} & si\ b \in \mathbb{R}_+^* \\ 0\ si\ \ b = +\infty \end{cases}.$$

iii) La fonction $E \longmapsto T_+(p,\mu,E)$ *est strictement décroissante on* $]0,+\infty[$.

Démonstration. soit $p > 1$ et $\mu < 0$ on a :

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) &= \lim_{E\to 0^+} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \left[E^p - \frac{p}{p-1}(F(u)+\mu u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\
&= \lim_{E\to 0^+} \int_0^1 S_+(p,\mu,E)\left[E^p - \frac{p}{p-1}(F(S_+(p,\mu,E)t) + \mu S_+(p,\mu,E)t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^1 S_+(p,\mu)\left[-\frac{p}{p-1}(F(S_+(p,\mu)t) + \mu S_+(p,\mu)t)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \int_0^{S_+(p,\mu)} \left[-\frac{p}{p-1}(F(u)+\mu u)\right]^{-\frac{1}{p}} du \\
&= h_+(p,\mu)
\end{aligned}$$

On distingue deux cas :

Cas $b \in \mathbb{R}_+^*$

Comme $S_+(p,\mu,E)$ est une zéro de l'equation $(2,10)$, il résulte que

$$T_+(p,\mu,E) = (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[F(S_+(p,\mu,E)) + \mu S_+(p,\mu,E) - F(u) - \mu u\right]^{\frac{1}{p}}}$$

En faisant le changement de variable $u = S_+(p,\mu,E)\,t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &= (p')^{-\frac{1}{p}} \times \\
&\times \int_0^1 \left[\frac{(F(S_+(p,\mu,E)) + \mu S_+(p,\mu,E) - F(S_+(p,\mu,E)t) - S_+(p,\mu,E)t}{S_+^p(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Réécrivons $(2,11)$

$$T_+(p,\mu,E) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{(F(S_+(p,\mu,E))}{S_+^p(p,\mu,E)} - \frac{F(S_+(p,\mu,E)t)}{S_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$

Comme $\lim_{E\to+\infty} S_+(p,\mu,E) = +\infty$ alors

$$\lim_{E\to+\infty} T+(p,\mu,E) = \lim_{S_+(p,\mu,E)\to+\infty} \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{(F(S_+(p,\mu,E))}{S_+^p(p,E)} - \frac{F(S_+(p,\mu,E)t)}{S_+^p(p,\mu,E)} + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-}$$

Par l'hypothèse $(H3)$ et en utilisant la règle de l'Hopital, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to+\infty} T_+(p,\mu,E) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{b}{p}-\frac{b}{p}t^p\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[1-t^p\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{p\sin\frac{\pi}{p}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1(p)}{b}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Cas $b = +\infty$

d'après l'hypothèse $(H3)$, on a :

$$\lim_{u\to=\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$$

alors pour tout $A_1 > 0$, il existe $A_2 > 0$ tel que

$$f(u) > A_1 u^{p-1,}\ pour\ tout\ u > A_2 \tag{2.12}$$

Soit $t \in \left]0,1\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{F(S_+(p,\mu,E)) - F(S_+(p,\mu,E)\,t)}{S_+^p(p,\mu,E)} &= \frac{\int\limits_{S_+(p,\mu,E)t}^{S_+(p,\mu,E)} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu,E)} \\
&= \int_t^1 \frac{f(S_+(p,\mu,E)\,\tau)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)} d\tau.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{F(S_+(p,\mu,E)) - F(S_+(p,\mu,E)\,t)}{S_+^p(p,\mu,E)} &> A_1 \int_0^1 \tau^{p-1} d\tau, \text{ pour tout } S_+(p,\mu,E) > A_2 \\
&= \frac{A_1}{p}(1-t^p).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $S_+(p,\mu,E) > A_2$, on a

$$\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &\le \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{A_1}{p}(1-t^p) + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{-\frac{1}{p}} dt \\
&\le \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \left[\frac{A_1}{p}(1-t^p) + \frac{\mu(1-t)}{A_2^{p-1}}\right]^{-\frac{1}{p}} dt
\end{aligned}$$

Faisant tendre A_1 vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{E\to+\infty} T_+(p,\mu,E) = 0$$

$iii)$ On a

$$\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &= \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(F(u)+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{-\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{S_+(p,\mu,E)}{\left[F\left(S_+(p,\mu,E)\right) + \mu S_+(p,\mu,E) - F\left(S_+(p,\mu,E)\,t\right) - \mu S_+(p,\mu,E)\,t\right]^{\frac{1}{p}}} du
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,\mu,E) &= \frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\partial S_+}{\partial E}(p,\mu,E) \times \\
&\times \int_0^1 \frac{H\left(\mu, S_+(p,\mu,E)\right) - H\left(\mu, S_+(p,\mu,E)\,t\right)}{\left[F\left(S_+(p,\mu,E)\right) + \mu S_+(p,\mu,E) - F\left(S_+(p,\mu,E)\,t\right) - \mu S_+(p,\mu,E)\,t\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt
\end{aligned} \tag{2.13}$$

où

$$H(\mu,u) = pF(u) - uf(u) + (p-1)\mu u$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) = (p-1)f(u) - uf'(u) + (p-1)\mu$$

D'après les hypothèses $(H1), (H2)$ et $(H4)$, il résulte que :

$$\lim_{u\to0^+} \frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) = (p-1)\mu < 0 \tag{2.14}$$

et par l'hypothèse $(H5)$, on a :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u}(\mu,u) = (p-2)\,f(u) - uf''(u) < 0 \tag{2.15}$$

alors d'après (2.14) et (2.15), il rèsulte que :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\mu,u) < 0, pour\ tout\ \mu < 0, et\ u > 0$$

Comme H est strictement décroissante par rapport à u, il résulte que

$$H(\mu, S_+(p,\mu,E)) - H(\mu, S_+(p,\mu,E)t) < 0,\ \ pour\ tout\ \mu < 0\ et\ t \in]0,1[$$

Comme $\frac{\partial S_+}{\partial E}(p, \mu, E) > 0$, alors on obtient que

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p, \mu, E) < 0, \text{ pour tout } p > 1, \mu < 0 \text{ et } E > 0$$

□

Lemme 2.4.3. *pour tout $p > 1$, on a*

i) $\lim_{\mu \to -\infty} S_+(p, \mu) = +\infty$.

ii) $\lim_{\mu \to 0^-} S_+(p, \mu) = 0^+$.

iii) $\frac{\partial S_+}{\partial \mu}(p, \mu) = -\frac{S_+(p, \mu)}{f(S_+(p, \mu)) + \mu}$.

Démonstration. i) On a

$$F(S_+(p, \mu)) + \mu S_+(p, \mu) = 0,$$

c'est -à-dire

$$\frac{F(S_+(p, \mu))}{S_+(p, \mu)} = -\mu.$$

Quand μ tend vers $-\infty$, $\frac{F(S_+(p, \mu))}{S_+(p, \mu)}$ tend vers $+\infty$ et par l'hypothèse $(H3)$, on obtient que

$$\lim_{\mu \to -\infty} S_+(p, \mu) = +\infty.$$

ii) On a

$$F(S_+(p, \mu)) + \mu S_+(p, \mu) = 0.$$

Quand μ tend vers 0^-, $S_+(p, \mu)$ tend vers le zéro de l'équation $F(u) = 0$.
Comme $u = 0$ est l'unique zéro de l'équation $F(u) = 0$, on obtient que

$$\lim_{\mu \to 0^-} S_+(p, \mu) = 0^+.$$

iii) On a

$$F(S_+(p, \mu)) + \mu S_+(p, \mu) = 0.$$

En dérivant cette dernière équation par rapport à μ, on obtient que

$$\frac{\partial S_+}{\partial \mu}(p, \mu) = -\frac{S_+(p, \mu)}{f(S_+(p, \mu)) + \mu}.$$

□

Lemme 2.4.4. *Pour tout $p > 1$, on a*

i) $$\lim_{\mu\to-\infty} h_+(p,\mu) = \begin{cases} \dfrac{p}{2(p-1)}\left(\dfrac{\lambda_1(p)}{b}\right)^{\frac{1}{p}} & si\ b \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ b = +\infty. \end{cases}$$

ii) $$\lim_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) = \begin{cases} +\infty & si\ a = 0 \\ \dfrac{p}{2(p-1)}\left(\dfrac{\lambda_1(p)}{a}\right)^{\frac{1}{p}} & si\ a \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

iii) La fonction $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

Démonstration. $i)$ on distingue deux cas :

Cas $b \in \mathbb{R}_+^*$

On a

$$h_+(p,\mu) = \int_0^{S_+(p,\mu)} \frac{du}{\left[-p'\left(F(u)+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

En faisant le changement de variable $u = S_+(p,\mu)\,t$, on obtient

$$h_+(p,\mu) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{S_+(p,\mu)}{\left[-F\left(S_+(p,\mu)\,t\right) - \mu S_+(p,\mu)\,t\right]^{\frac{1}{p}}} dt$$

Comme

$$F\left(S_+(p,\mu)\right) + \mu S_+(p,\mu) = 0,$$

il résulte que

$$\begin{aligned} h_+(p,\mu) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{tF(S_+(p,\mu))}{S_+^p(p,\mu)} - \frac{F(S_+(p,\mu)t)}{S_+^p(p,\mu)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\ h_+(p,\mu) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{tF(S_+(p,\mu))}{S_+^p(p,\mu)} - \frac{F(S_+(p,\mu)t)t^p}{(S(p,\mu)t)^p}\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse $(H3)$, et en utilisant la règle de l'Hôspital, on obtient

$$h_+(p,\mu) = \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F(S_+(p,\mu)t)}{(S_+(p,\mu)t)^p}t^p - \frac{F(S_+(p,\mu)))}{S_+^p(p,\mu)}t\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt \tag{2.16}$$

Maintenant, par l'assertion $ii)$ du lemme (2.4.3), nous avons :

$$\lim_{\mu\to-\infty} h_+(p,\mu) = \lim_{S+(p,\mu)\to+\infty} \int_0^1 \left[-\frac{p}{p-1}\left(\frac{F(S_+(p,\mu)t)}{(S_+(p,\mu)t)^p}t^p - \frac{F(S_+(p,\mu)))}{S_+^p(p,\mu)}t\right)\right]^{-\frac{1}{p}} dt$$

Puis, à partir $(H3)$ et en utilisant la règle de l'Hopital, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu \to -\infty} h_+(p,\mu) &= \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{b}{p}t - \frac{b}{p}t^p\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{(t-t^p)} \\
&= \left(\frac{p-1}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi}{(p-1)\sin\frac{\pi}{p}} \\
&= \frac{p}{2(p-1)} \left(\frac{\lambda_1(p)}{b}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Cas : $b = +\infty$

D'après l'hypothèse $(H3)$, on a

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$$

Alors pour tout $A_1 > 0$, il existe $A_2 > 0$, tels que

$$f(u) > A_1 u^{p-1}, \text{ pour tout } u > A_2$$

Soit $t \in]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{F(S_+(p,\mu))\,t - F(S_+(p,\mu)\,t)}{S_+^p(p,\mu)} &= \frac{t\int_0^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du - \int_0^{tS_+(p,\mu)} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&< \frac{\int_0^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du - \int_0^{tS_+(p,\mu)} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&= \frac{\int_{tS_+(p,\mu)}^{S_+(p,\mu)} f(u)\,du}{S_+^p(p,\mu)} \\
&= \int_t^1 \frac{f(S_+(p,\mu)\,\tau)}{S_+^{p-1}(p,\mu)} d\tau \\
&> A_1 \int_t^1 \tau^{p-1} d\tau, \text{ pour tout } S_+(p,\mu) > A_2 \\
&= \frac{A_1}{p}(1-t^p).
\end{aligned}$$

Donc pour tout $S_+(p,\mu) > A_2$, on a

$$\begin{aligned} h_+(p,\mu) &\leq \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{A_1}{p}\left(1-t^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &\leq \left(\frac{p-1}{A_1}\right)^{\frac{1}{P}} \int_0^1 \frac{dt}{\left(1-t^p\right)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Faisant tendre A_1vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{\mu\to-\infty} h_+(p,\mu) = 0.$$

$ii)$ La preuve est similaire à $i)$

$iii)$ On a

$$\begin{aligned} h_+(p,\mu) &= \int_0^{S_+(p,\mu)} \frac{du}{\left[-p'\left(F(u)+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{S_+(p,\mu)}{\left[tF\left(S_+(p,\mu)\right) - F\left(S_+(p,\mu)\,t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{\partial h_+}{\partial\mu}(p,\mu) = (p')^{\frac{-1}{p}} \frac{\partial S_+}{\partial\mu}(p,\mu) \times \int_0^1 \frac{L\left(t,S_+(p,\mu)\right)}{p\left[tF\left(S_+(p,\mu)\right) - F\left(S_+(p,\mu)\,t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}} dt \quad (2.17)$$

où

$$L\left(t,S_+(p,\mu)\right) := t\left[pF\left(S_+(p,\mu)\right) - S_+(p,\mu)\,f\left(S_+(p,\mu)\right)\right] - \left[pF\left(S_+(p,\mu)\,t\right) - S_+(p,\mu)\,tf\left(S_+(p,\mu)\,t\right)\right].$$

On a

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\left(t,S_+(p,\mu)\right) = -S_+^2(p,\mu)\left[(p-2)\,f'\left(S_+(p,\mu)\,t\right) - S_+(p,\mu)\,tf''\left(S_+(p,\mu)\,t\right)\right].$$

Par l'hypothèse $(H5)$, il suit que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\left(t,S_+(p,\mu)\right) > 0, \text{ pour tout } t \in \left]0,1\right[$$

Puisque

$$L\left(0,S_+(p,\mu)\right) = L\left(1,S_+(p,\mu)\right) = 0.$$

On obtient

$$L\left(t, S_{+}\left(p, \mu\right)\right) < 0, \text{ pour tout } t \in \left]0, 1\right[$$

Comme

$$\frac{\partial S_{+}}{\partial \mu}\left(p, \mu\right) < 0$$

il résulte que

$$\frac{\partial h_{+}}{\partial \mu}\left(p, \mu\right) > 0, \text{ pour tout } p > 1 \text{ et } \mu < 0.$$

□

2.5 Preuve du théorème principal

Démonstration. **Assertion (A)**

i) Supposons que $a < b \leq \lambda_1(p)$.

D'après le lemme(2.4.2) on a

— $\lim\limits_{E \to 0^{+}} T_{+}\left(p, \mu, E\right) = h_{+}\left(p, \mu\right).$

— $\lim\limits_{E \to +\infty} T_{+}\left(p, \mu, E\right) \geq \frac{1}{2}.$

— La fonction $E \mapsto T_{+}\left(p, \mu, E\right)$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

— Alors l'équation de la variable E, $T_{+}\left(p, \mu, E\right) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution positive.

— Ainsi par le théorème (2.3.1), il résulte que le problème (2.2) n'admet aucune solutioin positive pour tout $\mu < 0$.

ii) Supposons que $\left(\frac{p}{p-1}\right)^{p} \lambda_1(p) \leq a < b$.

D'après le lemme(2.4.2)on a

— $\lim\limits_{E \to 0^{+}} T_{+}\left(p, \mu, E\right) = h_{+}\left(p, \mu\right).$

— $\lim\limits_{E \to +\infty} T_{+}\left(p, \mu, E\right) < \frac{1}{2}.$

— La fonction $E \mapsto T_{+}\left(p, \mu, E\right)$ est strictement décroissante $[0, +\infty[$.

— Alors l'équation de la variable E, $T_{+}\left(p, \mu, E\right) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $[0, +\infty[$ si et seulement si $h_{+}\left(p, \mu\right) \geq \frac{1}{2}$.

Et par le lemme(2.4.4)on a

— $\lim\limits_{\mu \to -\infty} h_{+}\left(p, \mu\right) < \frac{1}{2}.$

— $\lim\limits_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) \leq \dfrac{1}{2}$.
— La fonction $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.
— Alors il n'existe pas un réel $\mu < 0$ tel que $h_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.
— Ainsi par le théorème (2.3.1), il résulte que le problème(2.2) n'admet aucune solution positive.

Assertion (B)

$i)$ Supposons que $a \leq \lambda_1(p) < b \leq \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)$.

Par le lemme (2.4.2) en déduit que l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution dans $]0,+\infty[$ si et seulement si $h_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme (2.4.4) on a :

— $\lim\limits_{\mu\to -\infty} h_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.
— $\lim\limits_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) > \dfrac{1}{2}$.
— La fonction $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution positive dans $]0,+\infty[$ pour tout $\mu < 0$.

Ainsi par le théorème(2.3.1), il résulte que le problème(2.2) admet une unique solution positive et que cette solution est dans A_+.

$ii)$ est similaire que $i)$.

Assertion (C)

Supposons que $a < \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) < b$.

Par le lemme (2.4.2) l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution dans $]0,+\infty[$ si et seulement si $h_+(p,\mu) \geq \dfrac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme(2.4.4) on a

— $\lim\limits_{\mu\to -\infty} h_+(p,\mu) < \dfrac{1}{2}$.
— $\lim\limits_{\mu\to 0^-} h_+(p,\mu) > \dfrac{1}{2}$.
— La fonction $\mu \mapsto h_+(p,\mu)$ est strictement croissante sur $]-\infty,0[$.

Alors il est existe un unique réel $\mu_*(p,a,b) < 0$ tel que :

— $h_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$, pour tout $\mu < \mu_*(p,a,b)$.

— $h_+(p,\mu_*(p,a,b)) = \frac{1}{2}$.

— $h_+(p,\mu) > \frac{1}{2}$, pour tout $\mu > \mu_*(p,a,b)$.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0,+\infty[$.

si et seulement si $\mu \geq \mu_*(p,a,b)$. Ainsi par le thèoreme(2.3.1), il résulte que

— Si $\mu < \mu_*(p,a,b)$, le problème (2.8) n'admet aucune solution positive.

— Si $\mu = \mu_*(p,a,b)$, le problème (2.8) admet une unique solution positive de plus elle est dans B_+.

— Si $\mu > \mu_*(p,a,b)$, le problème (2.2) admet exactement une unique solution positive de plus elle est dans A_+.

$\square$

Chapitre 3

Sur le nombre exact des solutions positives pour une classe de problèmes aux limites quasilineaires $(\mu > 0)$

Dans ce chapitre on étudions l'existence et la multiplicité des solutions positives du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -(\varphi_p(u'))' = au^{p-1} - bu^{2p-2} + \mu \text{ dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $y \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $a > 0$, $b > 0$ et $\mu > 0$.

Le plan du chapitre est le suivant. Premièrement on énonce les résultats principaux de ce chapitre. Deuxièment on donne quelques résultats préliminaires et en fin on démontre les résultats principaux de ce chapitre.

3.1 Théorème principal

Théorème 3.1.1. *On suppose que $a > 0$ et $b > 0$. Alors on a les résultats suivants*

(A) Si $1 < p \leq 2$, alors pour tout $\mu > 0$, le problème (3.1) *admet une unique solution positive appartient à A_+.*

(B) Si $p > 2$ *et* $a > \left(\frac{p-1}{P}\right)(2k(p))^p$*, où*

$$k(p) = \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p) - \frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}} \text{ converge pour tout } p > 2.$$

Alors le problème (3.1) *n'admet aucune solution positive.*

(C) Si $p > 2$ *et* $a \leq \left(\frac{p-1}{P}\right)(2k(p))^p$*, alors il existe un réel* $\mu_* > 0$ *tel que*

i) Si $\mu > \mu_*$*, le problème* (3.1) *n'admet aucune solution positive.*

ii) Si $\mu = \mu_*$*, le problème* (3.1) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.

iii) Si $\mu < \mu_*$*, le problème* (3.1) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* A_+.

On a besoin de quelques lemmes avant de démontrer ce théorème

3.2 Lemmes préliminaires

Lemme 3.2.1. *Considérons l'équation en* $s > 0$

$$E^p - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} + \mu s\right) = 0, \tag{3.2}$$

où $p > 1$, $E > 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $a > 0$, $b > 0$ *et* $\mu > 0$ *sont des paramètres réels positifs. Alors il existe un réel positif*

$$E_*(p,\mu) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + \mu\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}} \text{ avec } \alpha = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b\mu}}{2b}\right)^{\dfrac{1}{p-1}}$$

tel que

i) Si $E > E_*(p,\mu)$*, l'équation* (3.2) *n'admet aucune solution positve.*

ii) Si $E = E_*(p,\mu)$*, l'équation* (3.2) *admet une unique solution positve* $S_+(p,\mu,E_*) = \alpha$.

iii) Si $E < E_*(p,\mu)$*, l'équation* (3.2) *admet une solution positve* $S_+ = S_+(p,\mu,E)$ $\in]0,\alpha[$.

De plus

1) La fonction $E \to S_+(p,\mu,E)$ *est de classe* C^1 *dans* $]0, E_*(p,\mu)[$ *et on a*

$$\frac{\partial S_+}{\partial E}(p,\mu,E) = \frac{(p-1)\ E^{p-1}}{a\ S_+^{p-1}(p,\mu,E) - b\ S_+^{2p-2}(p,\mu,E) + \mu} > 0,\ \forall E \in \left]0, E_*(p,\mu)\right[.$$

2) $\lim\limits_{E\to 0^+} S_+(p,\mu,E) = 0^+$.

3) $\lim\limits_{E\to E_*} S_+(p,\mu,E) = \alpha$.

Démonstration. Pour tout $p > 1$ et $E > 0$, considérons la fonction

$$s \mapsto \psi(p,\mu,E,s) = E^p - p'\left(\frac{a}{p}s^p - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} + \mu s\right).$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,\mu,E,s) = -p'\left(\frac{a}{p}s^{p-1} - \frac{b}{2p-1}s^{2p-1} + \mu\right).$$

L'équation

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,\mu,E,s) = 0, \text{ admet une unique solution positive } \alpha.$$

De plus

$$\lim_{s\to 0}\psi(p,\mu,E,s) = E^p \text{ et } \lim_{S\to+\infty}\psi(p,\mu,E,s) = +\infty.$$

Alors on a le tableau de variations suivant

s	0	α	$+\infty$
$\frac{\partial \psi}{\partial s}(p,\mu,E,s)$	$-$		$+$
$\psi(p,\mu,E,s)$	$E^p \searrow$	$E^p - p'\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + \mu\alpha\right)$	$\nearrow\ +\infty$

Alors on a

i) Si $E > E_*(p,\mu) = \left[\frac{p}{p-1}\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1} + \mu\alpha\right)\right]^{\frac{1}{p}}$, l'équation (3.2) n'admet aucune solution positve.

ii) Si $E = E_*(p,\mu)$, l'équation (3.2) admet une unique solution positve α.

iii) Si $E < E_*(p,\mu)$, l'équation (3.2) admet dans l'intervalle $]0,\alpha[$ une unique solution positve $S_+ = S_+(p,\mu,E)$ satisfait

$$E^p - \frac{p}{p-1}\left[\frac{a}{p}S_+^p(p,\mu,E) - \frac{b}{2p-1}S_+^{2p-1}(p,s,E) + \mu S_+(p,\mu,E)\right] = 0,\ \forall E \in \left]0, E_*(p,\mu)\right[. \tag{3.3}$$

1) Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, considérons la fonction

$$(E, s) \mapsto \psi (E, s) = E^p - p' \left(\frac{a}{p} s^p - \frac{b}{2p-1} s^{2p-1} + \mu s \right)$$

définie dans $\Omega_+ = (0, E_*) \times (0, \alpha)$, donc $\psi \in C^1 (\Omega_+)$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} (E, s) = -p' \left(a s^{p-1} - b s^{2p-1} + \mu \right) < 0 \text{ dans } \Omega_+.$$

On observe que pour tout $E > 0$ et $\mu > 0$, $S_+ (p, \mu, E)$ appartient à l'intervalle $]0, \alpha[$ et satisfait

$$\psi (E, S_+ (p, \mu, E)) = 0. \tag{3.4}$$

D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction

$$E \mapsto S_+ (p, \mu, E) \text{ est de classe } C^1 \left((0, E_*), \mathbb{R}^+ \right).$$

En dérivant par rapport à E l'égalité (3.3), on obtient

$$\frac{\partial S_+ (p, \mu, E)}{\partial E} = \frac{(p-1) E^{p-1}}{a\ S_+^{p-1} (p, \mu, E) - b S_+^{2p-2} (p, \mu, E) + \mu} > 0, \ \forall p > 1, \forall \mu > 0 \text{ et } \forall E > 0.$$

2) Pour tout $p > 1$ fixé et $\mu > 0$, la fonction définie dans $]0, E_*[$ par : $E \mapsto S_+ (p, \mu, E)$ est strictement croissante et de plus $S_+ (p, \mu, E) \in]0, \alpha[$.
Alors les deux limites :

$$\lim_{E \to 0^+} S_+ (p, \mu, E) = l_0 \text{ et } \lim_{E \to E_*} S_+ (p, \mu, E) = l_* \text{ existent et finies et on a } 0 \leq l_0 < l_* \leq \alpha.$$

Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, la fonction $(E, s) \to \psi (E, s)$ est continue dans $[0, E_* (p, \mu)] \times [0, \alpha]$.
La fonction $E \mapsto S_+ (p, \mu, E)$ est continue dans $[0, E_*]$ et satisfait la relation (3.4). Par passage à la limite quand E tend vers 0^+, on obtient

$$0 = \lim_{E \to 0^+} \psi (E, S_+ (p, \mu, E)) = \psi (0, l_0).$$

Donc l_0 est un zéro appartient à $[0, \alpha]$ de l'équation $\psi (0, s) = 0$.
Résolvons cette dernière équation par rapport à l_0, on obtient que

$$\lim_{E \to 0^+} S_+ (p, \mu, E) = 0^+.$$

Ainsi par passage à la limite dans (3.4) quand E tend vers E_*, on obtient

$$0 = \lim_{E \to E_*} \psi\left(E, S_+\left(p, \mu, E\right)\right) = \psi\left(E_*, l_*\right),$$

donc l_* est un zéro appartient à $[0, \alpha]$ de l'équation $\psi\left(E_*, s\right) = 0$. Résolvons cette dernière équation par rapport à l_*, on obtient que

$$\lim_{E \to E_*} S_+\left(p, \mu, E\right) = \alpha.$$

□

Définition 3.2.1. *Pour tout $p > 1$, $\mu > 0$ et $E > 0$, on définit l'application-temps T_+ par*

$$T_+\left(p, \mu, E\right) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

Lemme 3.2.2. *Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, on a*

1) $\lim_{E \to 0^+} T_+\left(p, \mu, E\right) = 0^+$.

2) $\lim_{E \to E_*} T_+\left(p, \mu, E\right) = \begin{cases} +\infty & si\ 1 < p \leq 2 \\ \left(p'\right)^{\frac{-1}{P}} J_+\left(p, \mu\right) & si\ p > 2. \end{cases}$

où

$$J_+\left(p, \mu\right) = \int_0^{\alpha} \frac{du}{\left[F\left(\alpha\right) - F\left(u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \ \ et\ F\left(u\right) = \int_0^u f\left(t\right) dt = \frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u.$$

Démonstration. Pour tout $p > 1$ et $\mu > 0$, on a

1)

$$T_+\left(p, \mu, E\right) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$= \left(p'\right)^{\frac{-1}{p}} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\ S_+^p\left(p, \mu, E\right) - \frac{b}{2p-1}S_+^{2p-1}\left(p, \mu, E\right) + \mu\ S_+\left(p, \mu, E\right)\right) - \left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u\right)\right.}$$

$$
\begin{aligned}
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{S_+(p,\mu,E) \quad dt}{\left[\left(\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)(1-t^p) - \frac{b}{2p-1} S_+^{2p-1}(p,\mu,E)(1-t^{2p-1}) + \mu\ S_+(p,\mu,E)(1-t)\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1} S_+^{p-1}(p,\mu,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\lim_{E\to 0^+} T_+(p,\mu,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \lim_{E\to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1} S_+^{p-1}(p,\mu,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^1 \lim_{E\to 0^+} \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1} S_+^{p-1}(p,\mu,E)(1-t^{2p-1}) + \frac{\mu(1-t)}{S_+^{p-1}(p,\mu,E)}\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= 0^+.
\end{aligned}
$$

Où bien on a

$$
\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &= \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= S_+(p,\mu,E) \int_0^1 \frac{dt}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)\, t^p - \frac{b}{2p-1} S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\, t^{2p-1} + \mu\ S_+(p,\mu,E)\, t\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{S_+(p,\mu,E)}{E} \int_0^1 \left[1 - p'\left(\frac{\frac{a}{p} S_+^p(p,\mu,E)\, t^p - \frac{b}{2p-1}\ S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\, t^{2p-1} + \mu\ S_+(p,\mu,E)\, t}{E^p}\right)\right]^{\frac{-1}{p}} dt.
$$

Par la règle de l'Hôspital on a

$$
\lim_{E\to 0^+} \frac{S_+(p,\mu,E)}{E} = \lim_{E\to 0^+} S'_+(p,\mu,E) = \lim_{E\to 0^+} \frac{(p-1)\, E^{p-1}}{aS_+^{p-1}(p,\mu,E) - bS_+^{2p-2}(p,\mu,E) + \mu} = 0.
$$

D'autre part, on a

$$
\frac{\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)\, t^p - \frac{b}{2p-1} S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\, t^{2p-1} + \mu\ S_+(p,\mu,E)\, t}{E^p}
$$

$$
= \frac{S_+(p,\mu,E)}{E^p} t \int_0^1 \left[aS_+^{p-1}(p,\mu,E)\, t^{p-1}\tau^{p-1} - bS_+^{2p-2}(p,\mu,E)\, t^{2p-2}\tau^{2p-2} + \mu\right] d\tau.
$$

On a

$$\lim_{E\to 0^+}\left[\frac{\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)\,t^p-\frac{b}{2p-1}S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\,t^{2p-1}+\mu\ S_+(p,\mu,E)\,t}{E^p}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{E\to 0^+}\left(\frac{S_+'(p,\mu,E)}{pE^{p-1}}\right)t\int_0^1\left[aS_+^{p-1}(p,\mu,E)\,t^{p-1}\tau^{p-1}-bS_+^{2p-2}(p,\mu,E)\,t^{2p-2}\tau^{2p-2}+\mu\right]d\tau\\
&= \lim_{E\to 0^+}\frac{(p-1)t}{p\left[aS_+^{p-1}(p,\mu,E)-bS_+^{2p-2}(p,\mu,E)+\mu\right]}\int_0^1\left[aS_+^{p-1}(p,\mu,E)\,(t\tau)^{p-1}-bS_+^{2p-2}(p,\mu,E)\,(t\tau)^{2p-2}+\mu\right]d\tau\\
&= \frac{(p-1)\,t}{p\mu}\int_0^1\mu\ \ d\tau\\
&= \frac{t}{p'}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{E\to 0^+}\left[1-p'\frac{\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)\,t^p-\frac{b}{2p-1}S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\,t^{2p-1}+\mu\ S_+(p,\mu,E)\,t}{E^p}\right]=1-t.$$

Ainsi

$$\lim_{E\to 0^+}\int_0^1\left[1-p'\frac{\frac{a}{p}\ S_+^p(p,\mu,E)\,t^p-\frac{b}{2p-1}S_+^{2p-1}(p,\mu,E)\,t^{2p-1}+\mu S_+(p,\mu,E)\,t}{E^p}\right]^{\frac{-1}{p}}dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{p}}\,dt\\
&= p'.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{E\to 0^+}T_+(p,\mu,E)=0\times p'=0.$$

2)

$$\begin{aligned}
T_+(p,\mu,E) &= \int_0^{S_+(p,\mu,E)}\frac{du}{\left[E^p-p'F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{S_+(p,\mu,E)}\frac{du}{\left[F\left(S_+(p,\mu,E)\right)-F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to E*}T_+(p,\mu,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}}\lim_{E\to E*}\int_0^{S_+(p,\mu,E)}\frac{du}{\left[F\left(S_+(p,\mu,E)\right)-F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&= (p')^{\frac{-1}{p}}\int_0^{\alpha}\frac{du}{\left[F(\alpha)-F(u)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Comme α racine double de l'équation

$$E_*^p - p' F(u) = 0,$$

alors on peut écrire

$$F(\alpha) - F(u) = (\alpha - u)^2 \phi(u) \neq 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\lim_{E \to E*} T_+(p,\mu,E) &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{\alpha} \frac{du}{(\alpha-u)^{\frac{2}{p}} (\phi(u))^{\frac{1}{p}}} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 \leq p \leq 2 \\ (p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) & \text{si } p > 2. \end{cases}\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.3. *L'application $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ est strictement croissante.*

Démonstration. On a

$$T_+(p,\mu,E) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[E^p - p'\left(\frac{a}{p}u^p - \frac{b}{2p-1}u^{2p-1} + \mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}$$

$$\begin{aligned} &= (p')^{\frac{-1}{p}} \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(S_+^p(p,\mu,E) - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(S_+^{2p-1}(p,\mu,E) - u^{2p-1}\right) + \mu\ \left(S_+(p,\mu,E) - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= (p')^{\frac{-1}{p}}\ \tilde{T}_+(S_+(p,\mu,E)), \end{aligned}$$

où

$$\tilde{T}_+(S_+(p,\mu,E)) = \int_0^{S_+(p,\mu,E)} \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \left(S_+^p(p,\mu,E) - u^p\right) - \frac{b}{2p-1}\left(S_+^{2p-1}(p,\mu,E) - u^{2p-1}\right) + \mu\ \left(S_+(p,\mu,E) - u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.$$

On a

$$\frac{\partial \widetilde{T_+}}{\partial E}(p,\mu,E) = \frac{\partial S_+(p,\mu,E)}{\partial E} \times \frac{d\ \widetilde{T}_+(S_+(p,\mu,E))}{d\ S_+(p,\mu,E)}.$$

Posons $s := \ S_+ (p, \mu, E)$

$$\begin{aligned}
\frac{d\ \tilde{T}_+ (s)}{d\ s} &= \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{du}{\left[\frac{a}{p}\ \ (s^p - u^p) - \frac{b}{2p-1} \left(s^{2p-1} - u^{2p-1}\right) + \mu\ \ (s-u)\right]^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{d}{ds} \int_0^1 \frac{s}{\left[\frac{a}{p} s^p\ \ (1-t^p) - \frac{b}{2p-1} s^{2p-1} \left(1 - t^{2p-1}\right) + \mu s\ \ (1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^s \frac{H(p,\mu,s) - H(p,\mu,u)}{s \left[\frac{a}{p}\ \ (s^p - u^p) - \frac{b}{2p-1} \left(s^{2p-1} - u^{2p-1}\right) + \mu\ \ (s-u)\right]^{\frac{1}{p}}} du,
\end{aligned}$$

où

$$H(p,\mu,u) = (p-1)\left(\frac{b}{2p-1} u^{2p-1} + \mu u\right).$$

On a

$$\frac{\partial H}{\partial u}(p,\mu,u) = (p-1)\left(bu^{2p-1} + \mu\right) > 0, \forall u > 0.$$

Comme H est strictement croissante par rapport à u, il résulte que

$$H(p,\mu,s) - H(p,\mu,u) > 0.$$

Par suite

$$\frac{d\ \tilde{T}_+ (s)}{d\ s} > 0.$$

Comme $\dfrac{\partial S_+}{\partial E}(p,\mu,E) > 0$, on obtient

$$\frac{\partial T_+}{\partial E}(p,\mu,E) > 0,\ \forall p > 1 \text{ et } \forall E > 0.$$

C'est-à-dire l'application $E \mapsto T_+ (p,\mu,E)$ est strictement croissante. $\square$

Lemme 3.2.4. *Pour tout $p > 2$, on a*

(1) $\lim\limits_{\mu \to 0^+} J_+ (p,\mu) = a^{\frac{-1}{p}} k(p)$.

(2) $\lim\limits_{\mu \to +\infty} J_+ (p,\mu) = 0^+$.

(3) L'application $\mu \mapsto J_+ (p,\mu)$ est strictement décroissante.

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned} J_+(p,\mu) &= \int_0^\alpha \frac{du}{[F(\alpha)-F(u)]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^\alpha \frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^p - \frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1}+\mu\alpha\right)-\left(\frac{a}{p}u^p-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p)-\frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1})+\mu\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{\mu\to 0^+} J_+(p,\mu) &= \lim_{\mu\to 0^+}\int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{a}{p}(1-t^p)-\frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}(1-t^{2p-1})+\mu\alpha^{1-p}(1-t)\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}}\int_0^1 \frac{dt}{\left[\frac{1}{p}(1-t^p)-\frac{1}{2p-1}(1-t^{2p-1})\right]^{\frac{1}{p}}} \\ &= a^{\frac{-1}{p}}k(p). \end{aligned}$$

2) On a

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to+\infty}\left[\frac{a}{p}(1-t^p)-\frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\mu\alpha^{1-p}(1-t)\right] \\ =\; &\lim_{\mu\to+\infty}\alpha^{p-1}\left[\frac{\frac{a}{p}(1-t^p)}{\alpha^{p-1}}-\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\mu\alpha^{2-2p}(1-t)\right] \\ =\; &\lim_{\mu\to+\infty}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b\mu}}{2b}\right)\left[-\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\frac{4b^2\mu(1-t)}{\left(a+\sqrt{a^2+4b\mu}\right)^2}\right]. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b\mu}}{2b}\right) = +\infty,$$

et

$$\begin{aligned} &\lim_{\mu\to+\infty}\left[-\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\frac{4b^2\mu(1-t)}{\left(a+\sqrt{a^2+4b\mu}\right)^2}\right] \\ =\; &-\frac{b}{2p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+b(1-t)>0, \text{ pour tout } t\in(0,1). \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left[\frac{a}{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\mu\alpha^{1-p}\left(1-t\right)\right]=+\infty.$$

Par suite

$$\lim_{\mu\to0^{+}}J_{+}\left(p,\mu\right)=0^{+}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
J_{+}\left(p,\mu\right) &= \int_{0}^{\alpha}\frac{du}{\left[\left(\frac{a}{p}\alpha^{p}-\frac{b}{2p-1}\alpha^{2p-1}+\mu\alpha\right)-\left(\frac{a}{p}u^{p}-\frac{b}{2p-1}u^{2p-1}+\mu u\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&= \int_{0}^{1}\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{b}{2p-1}\alpha^{p-1}\left(1-t^{2p-1}\right)+\mu\alpha^{1-p}\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\\
&= \int_{0}^{1}\frac{dt}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)+\frac{2b\mu}{a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{+}}{\partial\mu}\left(p,\mu\right) &= \frac{-1}{p}\int_{0}^{1}\frac{\frac{-b}{(2p-1)\sqrt{a^{2}+4b\mu}}\left(1-t^{2p-1}\right)+\left[\frac{2ab\left(a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}\right)+4b^{2}\mu}{\sqrt{a^{2}+4b\mu}\left(a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}\right)^{2}}\right]\left(1-t\right)}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)+\frac{2b\mu}{a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}}\left(1-t\right)\right]^{\frac{p+1}{p}}}dt\\
&= \frac{b}{p\sqrt{a^{2}+4b\mu}}\int_{0}^{1}\frac{\frac{1}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right)-\left(1-t\right)}{\left[\frac{a}{p}\left(1-t^{p}\right)-\frac{1}{4p-2}\left(a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}\right)\left(1-t^{2p-1}\right)+\frac{2b\mu}{a+\sqrt{a^{2}+4b\mu}}\left(1-t\right)\right]}
\end{aligned}$$

Posons

$$L\left(t,p\right)=\frac{1}{(2p-1)}\left(1-t^{2p-1}\right)-\left(1-t\right).$$

On a

$$\frac{\partial L}{\partial t}\left(t,p\right)=1-t^{2p-2}>0,\text{ pour tout }t\in\left]0,1\right[,$$

Comme

$$L\left(0,p\right)=\frac{2-2p}{2p-1}<0\text{ et }L\left(1,p\right)=0,$$

on obtient que

$$L(t,p) < 0, \text{ pour tout } t \in \left]0,1\right[.$$

Ainsi

$$\frac{\partial J_+}{\partial \mu}(p,\mu) < 0, \text{ pour tout } p > 2 \text{ et } \mu > 0.$$

C'est-à-dire l'application $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante. □

3.3 Preuve du théorème principal

Démonstration. **Assertion (A)**

On suppose que $1 < p \leq 2$ et $a > 0$.

D'après les lemmes(3.2.2) *et* (3.2.3) on a

— $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p,\mu,E) = 0^+$.
— $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p,\mu,E) = +\infty$.
— $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ est strictement croissante.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution positive dans $]0,E_*[$. Par le théorème(2.3.1), il résulte que le problème (3.1) admet une unique solution positive et de plus elle est dans A_+.

Assertion (B)

On suppose que $p > 2$ et $a > \frac{p-1}{p}(2k(p))^p$.

D'après les lemmes(3.2.2) *et* (3.2.3) on a

— $\lim\limits_{E \to 0^+} T_+(p,\mu,E) = 0^+$.
— $\lim\limits_{E \to E_*} T_+(p,\mu,E) = (p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu)$.
— $E \mapsto T_+(p,\mu,E)$ est strictement croissante.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0,E_*[$ si et seulement si $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.

Maintenant par le lemme(3.2.4) on a

— $\lim\limits_{\mu \to 0^+} J_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$.
— $\lim\limits_{\mu \to +\infty} J_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$.
— $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante.

Donc il n'existe pas un réel $\mu > 0$ tel que $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$ et par suite l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ n'admet aucune solution positive.
Ainsi par le théorème(2.3.1), il résulte que le problème (3.1) n'admet aucune solution positive.

Assertion (C)

On suppose que $p > 2$ et $a \leq \frac{p-1}{p}(2k(p))^p$.
D'après les lemmes(3.2.3) *et* (3.2.3) l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0, E_*[$ si et seulement si $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.
Maintenant par le lemme(3.2.4) on a

— $\lim\limits_{\mu\to 0^+} J_+(p,\mu) \geq \frac{1}{2}$.
— $\lim\limits_{\mu\to +\infty} J_+(p,\mu) = 0$.
— $\mu \mapsto J_+(p,\mu)$ est strictement décroissante.

Donc il existe un réel $\mu_* > 0$ tel que

— $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) < \frac{1}{2}$, pour tout $\mu > \mu_*$,
— $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu_*) = \frac{1}{2}$,
— $(p')^{\frac{-1}{P}} J_+(p,\mu) > \frac{1}{2}$, pour tout $\mu < \mu_*$.

Donc l'équation de la variable E, $T_+(p,\mu,E) = \frac{1}{2}$ admet une solution positive dans $]0, E_*[$ si et seulement si $\mu \leq \mu_*$.
Ainsi par le théorème(2.3.1), il résulte que

— Si $\mu > \mu_*$, le problème (3.1) n'admet aucune solution positive.
— Si $\mu = \mu_*$, le problème (3.1) admet une unique solution positive et de plus elle est B_+.
— Si $\mu < \mu_*$, le problème (3.1) admet une unique solution positive et de plus elle est A_+.

$\square$

Chapitre 4

Applications

L'objet de ce chapitre est l'ulistration des chapitres précédents par quelques exemples en particulier soit :

Exemple 4.0.1. *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = u^p + au^{p-1} + \mu \text{ dans }]0,1[\,, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $p > 1$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y$, $a \geq 0$ *et* $\mu < 0$.
Pour tout $u > 0$, *on pose*

$$f(u) = u^p + au^{p-1}.$$

On a
$f \in C^2\left(\mathbb{R}_+^*\right) \cap C\left(\mathbb{R}_+\right)$.
$\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$.
$\lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} \left(pu^p + a(p-1)u^{p-1}\right) = 0$.
$\forall u > 0$ *et* $\forall p > 1$, $(p-2) f'(u) - uf''(u) = -pu^{p-1} < 0$.
Donc par le théorème (2.2.1), *il résulte que :*

i) Si $a \in \left[0, \left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$, *alors il existe* $\mu_*(p,a) < 0$ *tel que :*

- *S i* $\mu < \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.1) *n'admet aucune solution.*
- *Si* $\mu = \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.1) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.

— *Si* $\mu > \mu_* (p, a)$, *le problème* (4.1) *admet exactement une solution positive et de plus cette solution est dans* A_+.

— *Si* $a \in \left[\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1 (p), +\infty\right[$, *alors pour tout* $\mu < 0$, *le problème* (4.1) *n'admet aucune solution positive.*

Exemple 4.0.2. *Considérons le problème aux limites :*

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p (u')\right)' = \dfrac{2a}{\pi} u^{p-1} \arctan u + a u^{p-1} + \mu \ \textit{dans} \ (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

où $p \geq 2$, $\varphi_p (y) = |y|^{p-2} y$, $a > 0$ *et* $\mu < 0$. *Pour tout* $u \in \mathbb{R}_+^*$, *on pose*

$$f(u) = \frac{2a}{\pi} u^{p-1} \arctan u + a u^{p-1}$$

on a

— $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}_+)$

— $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = a$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{u^{p-1}} = 2a$

— $\lim\limits_{u \to 0^+} u f'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{a u^{p-1} \left[2 (p-1) (1+u^2) \arctan u + 2u + \pi (p-1) (1+u^2)\right]}{\pi (1+u^2)}. = 0$

— $\forall u > 0$ *et* $\forall p \geq 2, (p-2) f'(u) - u f''(u) = \frac{2a}{\pi(1+u^2)}((2-p)u^2 - p) < 0$

Donc par le théorème (2.2.1), *il résulte que :*

(i) Si $a \in \left[0, \frac{\lambda_1(p)}{2}\right[$, *où* $a \in \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), +\infty\right[$ *alors pour tout* $\mu < 0$, *le problème* (4.2) *n'admet aucune solution positive.*

(ii) Si $a \in \left[\frac{\lambda_1(p)}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$ *alors pour tout* $\mu < 0$, *le problème* (4.2) *admet une unique solution positive,,et elle appartient a* A_+.

iii) Si $a \in \left[\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$ *alors il existe un réel* $\mu_*(p,a) < 0$ *tel que :*

Si $\mu < \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.2) *n'admet aucune solution positive.*

Si $\mu = \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.2) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.

Si $\mu > \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.2) *admet exactement une solution positive de plus cette solution est dans* A_+.

Exemple 4.0.3. *Considérons le problème aux limites :*

$$\left\{ \begin{array}{c} -(\varphi_p(u'))' = \exp u - 1 + a u^{p-1} + \mu \ \textit{dans} \ (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\} \tag{4.3}$$

où $1 < p \leq 2,\ \varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y,\ a \geq 0$ *et* $\mu < 0.$

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, *posons :*

$$f(u) = \exp u - 1 + au^{p-1}$$

On a

— $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}_+)$

— $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = \left\{ \begin{array}{c} a \ si\ 1 < p < 2 \\ 1 + a \ si\ p = 2 \end{array} \right\}$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = +\infty$

— $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u(\exp u + a(p-1)u^{p-1}) = 0$

— $\forall u > 0$ *et* $\forall p \leq 2$, *on a* $(p-2)f'(u) - uf''(u) = (p - 2 - u)\exp u < 0$

Donc, le théorème (2.2.1), *il en résulte que :*

i) Si $p = 2$ *et* $a \in [0, 4\pi^2 - 1[$,*alors il existe un réel* $\mu_*(a) < 0$ *tel que :*

Si $\mu < \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.3) *n'admet aucune solution positive.*

Si $\mu = \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.3) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.

Si $\mu > \mu_*(a)$, *le problème* (4.3) *admet exactement une solution positive et de plus elle est dans* A_+.

ii) Si $a \in [4\pi^2 - 1, +\infty[$,*alors pour tout* $\mu < 0$, *le problème* (4.3) *n'admet aucune solution positive.*

iii) Si $p \in]1, 2[$ *et* $a \in \left[0, \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right[$,*alors il existe* $\mu_*(p,a) < 0$ *tel que :*

Si $\mu < \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.3) *n'admet aucune solution positive.*

Si $\mu = \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.3) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.

Si $\mu > \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.3) *admet exactement une solution positive et de plus elle est dans* A_+.

iii) Si $p \in]1, 2[$*et* $a \in \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), +\infty\right[$, *alors pour tout* $\mu < 0$, *le problème* (4.3) *n'admet aucun solution positive.*

Exemple 4.0.4. *Considérons le problème aux limites :*

$$\left\{ \begin{array}{c} -(\varphi_p(u'))' = -\ln(1 + u^{p-1}) + au^{p-1} + \mu \ dans\ (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{array} \right\} \tag{4.4}$$

oū $p > 1$, $\varphi_p(y) = |y|^{p-2}\, y, a \geq 1$ *et* $\mu < 0$. *Pour tout* $u \in \mathbb{R}_+^*$, *posons :*

$$f(u) = -\ln(1 + u^{p-1}) + au^{p-1} + \mu$$

on a

- $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R}_+)$
- $\lim\limits_{u \to 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = a - 1$ *et* $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = a$
- $\lim\limits_{u \to 0^+} uf'(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} u^{p-1}(a - \frac{p-1}{1+u^{p-1}}) = 0$
- $\forall u > 0$ *et* $\forall p \leq 2$, $(p-2)f'(u) - uf''(u) = -\dfrac{(p-1)^2 u^{2p-3}}{(1+u^{p-1})^2} < 0$

Donc, le théorème (2.2.1), *il en résulte que :*
(*i*) *Si* $a \in [1, \lambda_1(p)[$, *où bien* $a \in \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) + 1, +\infty\right[$ *alors pour tout* $\mu < 0$, *le probleme* (4.4) *n'admet aucun solution positive.*
(*ii*) *si* $a \in \left]\lambda_1(p), \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p)\right]$ *alors pour tout* $\mu < 0$, *le probleme* (4.4) *admet une unique solution positive, de plus cette solution est dans* A_+.
iii) *Si* $a \in \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p), \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lambda_1(p) + 1\right[$ *alors il existe un réel* $\mu_*(p,a) < 0$ *tel que :*

- *Si* $\mu < \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.4) *n'admet aucune solution positive,*
- *Si* $\mu = \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.4) *admet une unique solution positive et de plus elle est dans* B_+.
- *Si* $\mu > \mu_*(p,a)$, *le problème* (4.4) *admet une unique solution et elle appartient a* A_+.

Bibliographie

[1] I. Addou, Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic boundary value problems, Electronic journal of differential equations 21 (1999), pp. 1-27.

[2] I. Addou, Exact multiplicity results for quasilinear boundary value problems with cubic-like nonlinearities, Electron. J. Diff. Eqns. 2000, $N^0$01, pp.1-26.

— [3] I. Addou, Multiplicity results for classes of one- dimensional $p-$Laplacian B.V.P. with cubic-like nonlinearities, Electron. J. Diff. Eqns. 2000, $N^0$52, pp. 1-42.

[4] I. Addou, Etude d'une classe de problèmes aux limites avec non linéarités à saut, Thèse de Magister, U.S.T.H.B, (1995), Alger, Algérie.

[5] I. Addou, Sur le nombre de solutions de problèmes aux limites avec nonlinéarités à saut, Thèse de Doctorat d'Etat, Université des sciences et de technologie Houari Boumediènne, Alger, Algérie, 1999.

[6] I. Addou & A. Benmezai, Boundary value problems for the one-dimensional $p-$Laplacian with even superlinearity, Electronic J. Diff. Eqns. 9 (1999), 1-29.

[7] I. Addou & F. Ammar Khodja, Sur le nombre de solutions d'un problèmes aux limites non linéaire, C.R.A.S.Paris, t. 321, Série I, (1995), pp 409-412.

[9] I. Addou & S. M. Bouguima & A. Benmezai et M. Derhab, Exactness results for generalized Ambrosetti-Brezis-Cermi and related one-dimensional elliptic equations, Electronic J. Diff. Eqns. 66 (2000), 1-34.

[10] F.Ammar Khodja, Thèse $3^{ème}$ cycle, Univ. Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1983).

[11] S. M. Bouguima, A quasilinear elliptic problem with a discontinuous nonlinearity, Nonl.Anal. T.M.A. 11 (1995), 1115-1121.

[12] Y. B. Deng, Existence of multiple positive solutions for $-\Delta u = u^{\frac{N+2}{N-2}} + \lambda u + \mu\ f\left(x\right)$, Acta Math. 9 (1993), pp.311-320.

[13] A. C. Lazer & P.J. Mckenna, On a conjecture related to number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem, Proc. Roy .Soc. Edinburgh 95 A (1983), pp. 275-283.