République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Saïda

Faculté des Sciences

Mémoire de Master

Spécialité

Mathématiques

Option

Equations Différentielles

Sujet

Etude de quelques classes d'équations différentielles partielles fonctionnelles

Présenté par

Semir Zohra

Soutenu le : ../06/2015

Jury :

Président :

Encadreur : Saïd Abbas, M.C.A à l'université de Saïda, Algérie

Examinateur :

REMERCIEMENTS

Si nous sommes arrivés jusque là, c'est grace à mon Dieu qui ma donné la force et la patience afin de suivre mes études et de pouvoir achever ce modeste travail.

Ce travail n'a pas pu étre concrétisé sans l'aide généreuse de mon encadreur Dr. Saïd Abbas je le remercie beaucoup et je dois exprimer ma gratitude et ma reconnaissance pour leur aide apprécaible et leur sacrifice de son temps, ainsi pour ses précieux et sa grand patience.

Je remercie le membre du jury pour amabilité de juger mon travail.

Je remercie tous les professeurs des départements de mathématique, et en particulier qui ma suivis durant mon cours.

Enfin , je remercie tous ceux ma aidé de prés ou de loin, et contribuer à la réalisation de ce travail.
Je suis également très reconnaissante envers ma famille qui s'est constamment préoccupée de m'a scolarité et soutenu pendant toutes mes études universitaires.

Table des matières

Introduction

En analyse, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy. Dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$*, la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue* y*, et prendra la forme d'une équation* $y(t_0) = y_0$*. Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz exigent une certaine régularité de la fonction* f*.*

Sous des conditions de régularité d'une fonction définissant une équation, le théorème dit de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité d'une solution répondant à une condition initiale dite de Cauchy et l'existence d'une solution maximale. Ce théorème s'exprime de manière plus ou moins forte. Sous une forme plus élaborée, ce théorème assure que la solution varie continûment si la condition initiale est modifiée, et il en est de même si la fonction définissant l'équation dépend continûment d'un paramètre. Si l'équation est définie par une fonction de classe C^p*,* *la solution est de classe C^{p+1}. Ce théorème peut encore être généralisé au cas où l'équation différentielle n'est plus à valeurs dans un espace vectoriel, mais dans une variété différentielle. Une première version est démontrée par A. L. Cauchy durant la première moitié du 19 ème siècle, à l'aide d'une technique d'approximation découverte par Leonhard Euler au siècle précédent. Rudolf Lipschitz généralise l'énoncé en élargissant un peu la classe des équations qui s'y rapportent. Le théorème n'en reste pas moins uniquement un résultat d'existence locale. C'est à la fin de ce siècle que les techniques de démonstration, ainsi que l'énoncé du théorème, sont profondément modifiés. À la suite des travaux de Lazarus Fuchs, les mathématiciens Émile Picard, Paul Painlevé et Henri Poincaré développent une version moderne de l'analyse des équations différentielles. Cette vision permet d'apporter des éléments de réponse sur les solutions maximales, l'unicité et la régularité de la solution. Une version relativement moderne est publiée en 1894 par Ernst Lindelöf. Le théorème se démontre maintenant généralement à l'aide d'un théorème du point fixe et d'une approche topologique, classique en analyse fonctionnelle.*

Il y a eu un développement significatif dans les techniques du calcul différentielle dans l'étude des équations différentielles fonctionnelles, quelques contributions récentes peuvent être vues dans les ouvrages de Abbas et al. [2] et les articles de Abbas and Benchohra [1] et Byszewski [5, 6].

Ce mémoire consiste à étudier l'existence et l'unicité des solutions de quelques classes d'équations différentielles fonctionnelles. Nos résultats sont interprétés comme éclairage des résultats précédents de Dawidowski et Kubiaczyk [7], Kamont [11], Kamont et Kropielnicka [12] obtenus pour les équations différentielles classiques. Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe

(Le principe de contraction de Banach, l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder et le théorème de Burton-Kirk pour la somme de deux opérateurs).

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans le premier Chapitre, nous présentons des notations, des définitions et certaines lemmes préliminaires et théorèmes de point fixe.

Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes de Cauchy pour les d'équations différentielles ordinaires. Nous utilisons la théorie du point fixe pour montrer l'existence des solutions de ces problèmes.

Le troisième Chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions de quelques problèmes classes d'équations différentielles fonctionnelles partielles et perturbées. On obtient des résultats d'existence et d'unicité pout le problème de Cauchy avec condition locale

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \ \ si \ (t,x) \in \Delta := [0,a] \times [0,b], \tag{1}$$

$$u(0,x) = \Phi(x); \ \ x \in [0,b], \tag{2}$$

où $f : \Delta \to \mathbb{E}$ *une fonction donnée, et* $\Phi \in C([0,b])$*. Ensuite on donnera des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy avec condition non locale suivant :*

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)); \ \ si \ (t,x) \in \Delta, \tag{3}$$

$$u(0,x) = Q(u) + \Phi(x);\ \ x \in [0,b], \tag{4}$$

ou' $Q : C(\Delta, E) \to E$ une fonction donnée.

Et on va étudier le problème de Cauchy pour des équations differentielles perturbées ; d'abord on donnera des résultats d'existence avec condition locale, c'est le problème suivant :

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)),\ \ si\ (t,x) \in \Delta := [0,a] \times [0,b], \tag{5}$$

$$u(0,x) = \psi(x);\ \ x \in [0,b], \tag{6}$$

où $f, g : \Delta \times E \to E$ des fonctions données, $\psi \in C(\Delta, E)$.

Ensuite on donnera des résultats d'existence pour le problème de Cauchy suivant, avec condition non locale :

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)),\quad si\ \ (t,x) \in \Delta, \tag{7}$$

$$u(0,x) = \psi(x) + Q(u);\ \ x \in [0,b], \tag{8}$$

où f, g, ψ sont comme dans le problème.

On achève ce mémoire par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, des définitions et certaines lemmes préliminaires qui seront utilisées dans le reste de ce mémoire.

1.1 Définitions et Notations

Définition 1.1.1. *On appelle espace de Banach* $(E, \|.\|_E)$ *tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduit de la norme.*

Soient $J := [0, a];\ a > 0$ *et* $(E, \|.\|_E)$ *un espase de Banach. On note* $C(J, E)$ *l'espace de Banach des fonctions continues de* J *dans* E *avec la norme*

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in J} \|u(t)\|_E.$$

Définition 1.1.2. *Soit* E *une famille d'application* $X \to Y$ *où* X *est un espace topologique et* Y *un espace métirque. On dit que* E *est équicontinue si, pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout* $x \in X$ *il existe un voisinage* V_x *de* x *dans* X *tel que* $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ *pour tout* $f \in E$ *et tout* $y \in V_x$.

Définition 1.1.3. *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach et $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une fonction.*

• *f est dite compacte si l'image $f(\mathbb{E})$ est relativement compacte dans $\mathbb{F}$.*

• *f est dite compelètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de $\mathbb{E}$ est relativement compacte dans $\mathbb{F}$.*

1.2 Convexité

Définition 1.2.1. *Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel réel et $x, y \in \mathbb{E}$.*

On appelle segment fermé joignant les points x et y dans $\mathbb{E}$, l'ensemble donné par :

$$\{\alpha x + \beta y, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1\}.$$

Un segment privé de ses extrémités x et y s'appelle segment ouvert.

Un ensemble $M \subset \mathbb{E}$ est dit convexe, si pour tout couple de points x, $y \in M$, le segment joigmant ces points est contenu dans M.

Un élément x est dite combinaison convexe d'éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ de $\mathbb{E}$ si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Proposition 1.2.1. *L'intersection de toute famille d'ensembles convexes est un ensemble convexe.*

On définit l'enveloppe convexe d'un ensemble A par

$$co(A) = \bigcap_{A \in H,\, H\ convexe} H.$$

$co(A)$ est le plus petit convexe qui contient A.

1.3 Compacité

Définition 1.3.1. *Soient A une partie d'un ensemble $\mathbb{E}$. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathbb{E}$ vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Définition 1.3.2. *Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace normé.*

On dit que $\mathbb{E}$ est relalivement compact si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouverement fini de $\mathbb{E}$ par des parties de $\mathbb{E}$ dont le diamètre est inférieur à ϵ.

Corollaire 1.3.1. *Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un e.v.n.sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimonsion fini.*

Les partie relativement compacts de $\mathbb{E}$ sont les parties bornées.

Définition 1.3.3. *Un espace normé $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.*

Une partie A d'un espace normé $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est dit compacte si le sous-espace normé $(A, \|.\|_A)$ est compact.

Définition 1.3.4. *soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces de Banach.*

Un opérateur

$$N : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$$

$N(M)$ est dit compact si pour tout sous-ensemble M borné de $\mathbb{E}$ l'image $N(M)$ est relativement compact, ou encore $\overline{N(M)}$ est compacte.

Définition 1.3.5. *On dit qu'un espace E est compact si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini.*

Théorème 1.3.1. *Soient X et Y deux espaces topologiques avec Y séparé et*

$$f : X \to Y$$

une application continue. On a :

• *L'image par f de toute partie compacte de X est une partie compacte de Y.*

• *Si X est compact, alors l'image par f de toute partie fermée de X est une partie fermée de Y.*

Théorème 1.3.2. *Soit $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un e.v.n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension fini. Alors les parties compactes de $\mathbb{E}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{E}$.*

Définition 1.3.6. *Une famille Φ de fonctions ϕ définies sur un intervalle $[a, b]$, est dite uniformément bornée s'il existe une constante k telle que :*

$$\|\phi\| < k; \quad \forall x \in [a, b]$$

Théorème 1.3.3. *(Théorème de Heine)*

$(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace normé compact et $(\mathbb{F}, \|.\|')$ un espace normé. Toute application $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ continue est uniformément continue.

Proposition 1.3.1. *L'image réciproque d'un ensemble compact par une application continue n'est pas nécessairement compact.*

1.4 Lemmes Préliminaires

Lemme 1.4.1. *Soit $f \in C(J,E)$. Une fonction $u \in C(J,E)$ telle que sa dérivée $\frac{d}{dt}$ existe et est intégrable sur J est une solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = f(t); \quad t \in J, \\ u(t_0) = u_0; \quad t_0 \in J,\ u_0 \in \mathbb{E}, \end{cases} \tag{1.1}$$

si et seulement si $u(t)$ vérifie

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds;\ t \in J. \tag{1.2}$$

Preuve : *Soit $u(t)$ une solution du problème* (1.1).

Alors ;

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t),$$

d'où nous obtenons ;

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}u(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Depuis

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}u(s)ds = u(t) - u(t_0),$$

Il s'ensuit

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds.$$

Maintenant si $u(t)$ vérifie (1.2). *Il est claire que $u(t)$ vérifie*

$$u(t_0) = u_0 \quad et \quad \frac{d}{dt}u(t) = f(t);\ t \in J.$$

Posons $\Delta = [0,a] \times [0,b]$, $\quad D_t w(t,x) := \frac{\partial}{\partial t} w(t,x);\quad (t,x) \in \Delta$.

Lemme 1.4.2. *Soit $g \in C(\Delta, \mathbb{E})$. Une fonction $w \in C(\Delta, E)$ telle que sa dérivée $D_t w(t,x)$ existe et est intégrable sur Δ est une solution du problème*

$$\begin{cases} D_t w(t,x) = g(t,x);\ (t,x) \in \Delta, \\ w(t_0,x) = w_0(x);\ (t_0,x) \in \Delta, \qquad w_0 \in C([0,b], \mathbb{E}), \end{cases} \tag{1.3}$$

Si et seulement si $w(t,x)$ vérifie

$$w(t,x) = w_0(x) + \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds;\ (t,x) \in \Delta. \tag{1.4}$$

Preuve : *Soit $w(t,x)$ une solution du problème* (2.1). *Alors,*

$$D_t w(t,x) = g(t,x).$$

D'où nous obtenons

$$\int_{t_0}^{t} D_s w(s,x)ds = \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds.$$

Depuis

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} w(s,x)ds = w(t,x) - w(t_0,x),$$

Il s'ensuit

$$w(t,x) = w_0(x) + \int_{t_0}^{t} g(s,x)ds.$$

Maintenant si $w(t,x)$ vérifie (2.2). *il est claire que $w(t,x)$ vérifie*

$$w(t_0,x) = w_0(x) \ \ \text{et} \ \ \frac{\partial}{\partial t} w(t,x) = g(t,x);\ t \in \Delta.$$

Théorème 1.4.1. *(Théorème de point fixe de Banach) [8]*
Soit (F, d) un espace métrique complet et $f : F \to F$ une application strictement contractante i.e. Il existe $0 < c < 1$ telle que, pour tout $u, v \in F$, $d(f(u), f(v)) < cd(u, v)$. Alors il existe un unique point fixe u_0 i.e., $f(u_0) = u_0$.

Théorème 1.4.2. *(Théorème de Schauder)*
Soit E un espace de Banach, M un convexe, fermé et borné de E, et $N : M \to M$ un opérateur continu et compact. Alors N admet au moins un point fixe dans M.

Théorème 1.4.3. *(Alternative non linéaire de type Leray-Schauder) [8]*
Soit X un espace de Banach, $D \in \mathcal{P}_{cv}(X)$. U un ouvert de D et $0 \in U$. Supposons que $N : \overline{U} \to D$ est un opérateur continu et compact.

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,

$(S1)$ *N admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou*

$(S2)$ *Il existe $\nu \in (0, 1)$ et $u \in \partial U$ avec $u = \nu\ N(u)$.*

Théorème 1.4.4. *(Théorème de Burton-Kirk) [3]*
Soit X un espace de Banach, et $A, B : X \to X$ deux fonctions vérifient :

(i) A est une contraction, et

(ii) B est complètement continue.

Alors une seule des propositions suivantes est satisfaite,

(S1) l'operateur équation $u = A(u) + B(u)$ a une solution, ou

(S2) l'ensemble $\mathcal{E} = \{u \in X : u = \nu A(\frac{u}{\nu}) + \nu B(u),\ \nu \in (0, 1)\}$ n'est pas borné.

Lemme 1.4.3. *(Lemme d'Arséla-Ascoli)[4]*
Une partie $N \subset C(J, E)$ est relativement compacte (i.e : $\bar{N}$ est compact) si et

seulement si :

- N *est uniformément bornée.*
- N *est équicontinue.*

Lemme 1.4.4. ***(Lemme de Gronwall)*** *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur un intervalle* $[a, b]$ *satisfaisant :*

$$f(t) \leq K + \int_a^t f(s)g(s)ds.$$

pour un certain $K \geq 0$ *;Alors*

$$f(t) \leq K \exp(\int_a^t g(s)ds)$$

Preuve du lemme :

Considérons les fonctions :

$$\begin{aligned} F(t) &= K + \textstyle\int_a^t f(s)g(s)ds \\ G(t) &= \textstyle\int_a^t g(s)ds \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{cases} F(a) = K. \\ G(a) = 0. \\ F'(t) = f(t) \cdot g(t). \\ G'(t) = g(t). \end{cases} \tag{1.5}$$

De (i) *on déduit :*

$$\begin{aligned} F'(t) &= f(t) \cdot g(t) \\ F'(t) &\leq F(t) \cdot G'(t). \end{aligned}$$

Où bien :

$$F'(t) - F(t) \cdot G'(t) \leq 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}[F(t)e^{-G(t)}] &= F'(t)e^{-G(t)} - F(t)G'(t)e^{-G(t)} \\
&= [F'(t) - F(t)G'(t)]e^{-G(t)} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

En intégrant entre 0 *et* a *; on obtient :*

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_a^t \tfrac{d}{dt}[F(t)e^{-G(t)}]ds &\leq 0 \\
F(t)e^{-G(t)} - F(a)e^{-G(a)} &\leq 0 \\
F(a)e^{-G(a)} - K &\leq 0 \\
F(t)e^{-G(t)} &\leq K \\
F(t) &\leq K \cdot e^{G(t)}.
\end{aligned}$$

Or :

$$f(t) \leq F(t)$$

D'où :

$$f(t) \leq K \cdot e^{G(t)}$$

En remplaçant G, *par*

$$G(t) = \int_a^t g(s)ds.$$

Dans la suite nous ferons usage du lemme suivant :

Lemme 1.4.5. *(Lemme de Gronwall) [9] Soit la fonction* $\upsilon : J \to [0, \infty)$ *et* $\omega(t)$ *une fonction non négative et localement intégrable sur* J. *S'il existe une constante*

$c > 0$ telle que

$$\upsilon(t) \leq \omega(t) + c\int_0^t \upsilon(s)ds,$$

alors, il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\upsilon(t) \leq \omega(t) + \delta c\int_0^t \omega(s)ds,$$

pour tous $t \in J$.

Chapitre 2

Le Problème de Cauchy pour les Equations Différentielles Ordinaires

Dans ce chapitre, nous présenterons des résultats d'existence et unicité des solutions du problème de Cauchy pour certaines classe s d'équations différentielles ordinaires fonctionnelles du premier ordre,

2.1 Equations Différentielles Ordinaires

2.1.1 Problème de Cauchy

Une équation différentielle ordinaire sous sa forme axplicite ou normale se présente sous la forme suivante :

$$u'(t) = f(t, u(t)) \tag{2.1}$$

Où

$$f : D \to \mathbb{E}$$

D est un domaine de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$

Définition 2.1.1. *Une fonction $u \in C^1(I, \mathbb{E})$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est dite solution de l'équation différentielle* (2.1) *si et seulement si :*

1. $(t, u(t)) \in D, \forall t \in I$
2. $u'(t) = f(t, u(t)), \forall t \in I$

Etant donné un point $(t_0, u_0) \in D$, le problème de Cauchy consiste à la recherche de la solution x de (2.1) *qui vérifie la condition initial :*

$$u_0(t_0) = u_0. \tag{2.2}$$

2.1.2 Equations intégrales

Définition 2.1.2. *Soit l'opérateur intégrale N donnée par :*

$$\begin{array}{rccc} N : & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & u & \longmapsto & Nu \end{array}$$

Définie par :

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds; \qquad \forall t \in J$$

Chercher les solutions du problème $(2.1) - (2.2)$ *revient à chercher les points fixes de l'opérateur N.*

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds; \qquad \forall t \in J$$

$u(t)$ solution de $(1)-(2) \Leftrightarrow N(u)=u$ (u un point fixe de N.)

Théorème 2.1.1. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz)*
On suppose que f est k-Lipschitzienne, et $t_0 \in I$. Alors, étant donné $u_0 \in E$, il existe une unique solution $u \in C^1(I,E)$ de l'équation différentielle $u' = f(t,u)$ telle que $u(t_0) = u_0$.

Démonstration : *La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz que nous proposons utilise la méthode d'approximations successives de E.Picard, et s'appuie sur le théorème du point fixe de Banach.*
Considérons l'espace $F := C(I,E)$ des fonctions continues $u : I \to E$ muni de la norme uniforme $\|u\|_F = \sup_{t\in I} \|u(t)\|_E$, ce qui en fait un espace de Banach.
On montre dans un premier temps l'existence d'une unique solution sur un intervalle $[t_0,\tau]$; $\tau > t_0$ avec $k\tau < 1$. Pour cela, on considère l'application $N : F \to F$ définie par

$$(Nu)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds.$$

Comme $N(u)$ est une primitive d'une fonction continue, $N(u)$ est de classe C^1 de dérivée $f(t,u(t))$. Donc si u est un point fixe de N, alors u satisfait notre équation différentielle.
Montrons donc que N est contractante : on se fixe $t \in [t_0,\tau]$ et $u_1, u_2 \in F$. Alors

$$\|N(u_1) - N(u_2)\|_F \leq k\tau\|u_1 - u_2\|_F.$$

On vient donc de montrer l'existence et l'unicité d'une solution sur $[t_0,\tau]$. Comme $u(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} f(s,u(s))ds$ est bien définie, on peut maintenant résoudre l'équation sur

$[\tau, 2\tau]$ avec $u(\tau)$ comme condition initiale, et ainsi de suite.

2.1.3 Application du Théorème de Banach

Notre résultat principal de cette subsection est basée sur le théorème de contraction de Banach. L'existence, ainsi que l'uncité de la solution du problème (2.1)-(2.2) sont assuré par le théorème qui suit.

Supposons que f est continue ansi que sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial u} := f_u$.

Comme D est férmé borné de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$, il existe alors $\delta > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\delta = \sup_{(t,u)\in D} |f(t,u)|,$$

et

$$\beta = \sup_{(t,u)\in D} |f_u(t,u)|$$

De plus la fonction f est β. Lipschitzienne en u unformément par rapport à $t \in I$. En effet, en utilisant le théorème des accroiements finis il existe $\omega(t)$ tel que

$$f(t,u(t)) - f(t,v(t)) = f_u(t,\omega(t))[u(t) - v(t)]$$

D'où

$$|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq \beta \cdot |u(t) - v(t)|$$

Théorème 2.1.2. *Le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) admet un unique solution $u(t)$ définie sur un certain intervalle $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ pourvu que h est choisi* *tel que :*

$$h \leq \min\{r, \frac{r}{\delta}, \frac{1}{\beta}\}$$

Preuve :

Montrons que l'opérateur N vérifie les conditions du théorème de contraction de Banach, La preuve est donnée en deux étapes.

Etap(1) :

On montre que N on voie M dans M, c'est à dire : $\forall u \in M; \quad Nu \in M.$

Soit $u \in M$; pour $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
Nu(t) &= u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds, \\
Nu(t) - u_0 &= \int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds, \\
|Nu(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,u(s))|ds. \\
\sup_{t\in I} |Nu(t) - u_0| &\leq \int_{t_0}^{t} \sup_{t\in I} |f(s,u(s))|ds, \\
&\leq \delta|t - t_0|, \\
&\leq h \cdot \delta, \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Par suite $d(Nu, u_0) \leq r.$

D'où :$Nu \in M.$

Etap(2) :

N est une contraction. Soient u et v $\in M$.

Pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
(Nu)(t)-(Nv)(t) &= u_0+\textstyle\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds)-u_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds,\\
&= \textstyle\int_{t_0}^{t}(f(s,x(s))ds)-f(s,y(s)))ds,\\
|Nu(t)-Nv(t)| &\leq \textstyle\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s))ds)-f(s,y(s))|ds,\\
|Nu(t)-Nv(t)| &\leq \beta\cdot h\sup_{t\in I}|x(t)-y(t)|.
\end{aligned}$$

Par suite :

$$d(Nx,Ny)\leq \beta\cdot h\cdot d(x,y).$$

N est une contraction car $\beta.h<1$.
Par suite N admet un unique point fixe u, qui correspond à l'unique solution $u(t)$ de l'équation différentielle (2.1) vérifiant la condition initiale (2.2)

Exemple

Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases}\frac{du(t)}{dt}=2tu^2,\\ u(t_0)=u_0\end{cases}\tag{2.3}$$

(t_0,u_0) donné :

Ici :

$$f(t,u)=2t\cdot u^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)=4t\cdot u.$$

f et $\frac{\partial f}{\partial u}$ sont continues donc le théorème d'existence et d'unicité s'applique ; il existe alors une unique solution $u(t)$ définie un certain intervalle I.

Donc notre cas on peut définie explicitement la solution du problème.

$$\frac{du}{dt} = 2t \cdot u^2 \Rightarrow \frac{du}{u^2} = 2t \cdot dt,$$

$$u(t) = \frac{1}{\lambda - t^2}$$

Où :λ *est une canstante réelle.*

On détarmine λ *en utilisant la condition initiale* $u(t_0) = u_0$.

$$u(t_0) = u_0 \Rightarrow u_0 \frac{1}{\lambda - t_0^2},$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{u^2} + t_0^2.$$

Donc :

$$u(t) = \frac{u_0}{1 + u_0(t_0^2 - t^2)}$$

On remarque que $u(t)$ *dépond d'une certaine munière de* t, t_0 *et* u_0. *C'est à dire :*$u(t, t_0, u_0)$.

2.1.4 Application du Théorème de Schauder

Dans cette subsection on utilise le Théorème de Schauder pour montrer l'existence d'au moins une solution au problème de Cauchy $(2.1)-(2.2)$. *Ici on suppose que la fonction* f *est seulement continue mais non lipschitzienne, l'uncité de la solution n'est pas assurée.*

Notre résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.1.3. *Le problème de Cauchy* $(2.1) - (2.2)$ *admet au moins une* *solution* $u(t)$ *définie sur un certain intervalle* $I = [t_0 - h, t_0 + h]$ *pour vu que* h *est choisi tel que*

$$h \leq \min\{r, \frac{r}{\beta}\}$$

Preuve :

Montrons que l'opérateur N *vérifie les conditions du théorème de contraction de Banach, La preuve est donnée en qualques étapes.*

Etap(1). *L'ensemble* M *est convexe.*

En effet.

Soient u *et* $\tilde{u}$ *deux éléments de* M.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *avec*

$$\alpha + \beta = 1.$$

$$\begin{aligned}
\|\alpha u + \beta \tilde{u} - u_0\| &= \|\alpha u + \beta \tilde{u} - (\alpha + \beta) u_0\| \\
&= \|\alpha(u - u_0) + \beta(\tilde{u} - u_0)\| \\
&\leq \|\alpha(u - u_0)\| + \|\beta(\tilde{u} - u_0)\| \\
&\leq \alpha r + \beta r \\
&\leq (\alpha + \beta) r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|\alpha u + \beta \tilde{u}\| \in M,$$

Et M *est alors convexe.*

Etap(2). *Montrons que* N *envoie* M *dans* M *i.e.* $N(M) \subset M$.

Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{E}$,

$$S = \overline{B(t_0, r)} \times \overline{B(u_0, r)}.$$

S est un ensemble fermé et borné, donc compact. Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\|f(t,x)\| &\leq \delta, \quad (t,x) \in S \\
\|N(u) - u_0\| &\leq |\textstyle\int_{t_0}^{t} f(s,u(s))ds| \\
&\leq \textstyle\int_{t_0}^{t} |f(s,u(s))|ds \\
&\leq \delta|t - t_0| \\
&\leq \delta h \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Etap(3). *N est continue.*

Comme f est continue sur le compact S, elle est alors uniformément continue sur S.

Donc pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|f(t,u) - f(t,\tilde{u})| \leq \epsilon, \quad si\ \|u - \tilde{u}\| < \eta.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|N(u) - N(\tilde{u})\| &\leq \sup_{t\in I} |\textstyle\int_{t_0}^{t}[f(s,u(s)) - f(s,\tilde{u}(s))]ds| \\
&\leq \sup_{t\in I} \textstyle\int_{t_0}^{t} |[f(s,u(s)) - f(s,\tilde{u}(s))]|ds \\
&\leq \epsilon h \\
&= \epsilon'
\end{aligned}$$

D'où la continuité de N.

Etap(4). *$N(M)$ est équicontinu.*

Soit u un élément arbitraire dans M. Pour tout $\tau_1, \tau_2 \in I$, ona :

$$\begin{aligned}
\|Nu(\tau_1) - Nu(\tau_2)\| &= |\int_{t_0}^{\tau_1} f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{\tau_2} f(s,u(s))ds| \\
&= |\int_{t_0}^{\tau_1} f(s,u(s))ds + \int_{\tau_2}^{t_0} f(s,u(s))ds| \\
&\leq |\int_{\tau_2}^{\tau_1} f(s,u(s))ds| \\
&\leq \delta|\tau_1 - \tau_2|.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|Nu(\tau_1) - Nu(\tau_2)\| < \epsilon, \quad si|\tau_1 - \tau_2| < \eta = \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Maintenant, d'après le théorème d'Ascoli-Arzela $N(M)$ est relativement compact. Des étapes précédentes, on en déduit que l'opérateur N est compact.

En utilisant le théorème de point fixe de Schauder, l'opérateur N admet au moins un point fixe qui correspond à une solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2).

Chapitre 3

Le Problème de Cauchy pour les Equations Différentielles Partielles Fonctionnelles

Dans ce chapitre, nous présenterons des résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles partielles fonctionnelles, perturbées et celles de type neutre.

3.1 Equation Différentielles partielles Fonctionnelles

3.1.1 Introduction

Dans cette section,est consacré à l'étude d'existence et d'unicité des solution du problème de Cauchy pour certaines classes d'équations différentielles partielles du premier ordre avec une condition locale et non-locale.

3.1.2 Problème de Cauchy avec une condition locale :

Soit le problème suivant :

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)), \ \text{si } (t,x) \in \Delta := [0,a] \times [0,b], \tag{3.1}$$

$$u(0,x) = \Phi(x); \ x \in [0,b], \tag{3.2}$$

Où $f : \Delta \to \mathbb{E}$ *une fonction donnée, et* $\Phi \in C([0,b])$.

Définition 3.1.1. *Une fonction* $u \in C$ *est dite solution du (3.1)-(3.2) si* u *satisfait l'équations (3.1) dans* Δ *et la condition locale (3.2) dans* $[0,b]$.

Théorème 3.1.1. *Nous présentons les hypothèses suivantes :*

(H_{01}) *La fonction* $f : \Delta \times E \to E$ *est continue,*

(H_{02}) *Il existe* $m > 0$ *telle que pour* $(t,x) \in \Delta$

$$\|f(t,x,u) - f(t,x,v)\|_E \leq m\|u - v\|_E, \quad \text{pour } \ u, \ v \in E.$$

Si

$$am < 1, \tag{3.3}$$

Alors le problème (3.1)-(3.2) possède une unique solution sur Δ.

Démonstration : *Considérons l'opérateur* $N : C(\Delta) \to C(\Delta)$,

$$(Nu)(t,x) = \Phi(x) + \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds; \ (t,x) \in \Delta. \tag{3.4}$$

Alors le problème de trouver les solutions du problème (3.1)-(3.2) est réduite à *trouver les solutions de l'équation*

$$(Nu)(t,x) = u(t,x);\ (t,x) \in \Delta.$$

Nous allons montrer que l'opérateur N satisfait les conditions du théorème de Cauchy pour les contractions.

Soient $u, v \in C(\Delta)$.

Alors, pour $(t,x) \in \Delta$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|(Nu)(t,x) - (Nv)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t \|f(s,,x,u(s,x)) - f(s,x,v(s,x))\|_E ds \\
&\leq \int_0^t m\|u-v\|_\infty ds \\
&\leq m\|u-v\|_\infty \int_0^a ds \\
&= am\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\|N(u) - N(v)\|_\infty \leq am\|u-v\|_\infty.$$

d'après (3.3) nous concluons que N est une contraction, d'où N à un point fixe unique d'après le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.1.2. *Supposons que (H_1) et l'hypothèse suivante est vérifiée :*

(H_3) *Il existe $q \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ telle que*

$$\|f(t,x,u)\|_E \leq q(t,x)\|u\|_\infty,$$

pour $(t,x) \in \Delta$ et $u \in C(\Delta)$. Alors le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une *solution sur* $[0,a]\times[0,b]$.

Démonstration : *Considérons l'opérateur* N *défini dans (3.4). Nous allons montrer que l'opérateur* N *est continue et complètement continue.*

Etape 1 : *N est continu.*

Soit la suite $\{u_n\}$ *telle que* $u_n \to u$ *dans* C.

Soit $\eta > 0$ *telle que* $\|u_n\|_\infty \leq \eta$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\|(Nu_n)(t,x)-(Nu)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t \|f(s,x,u_n(s,x))-f(s,x,u(s,x))\|_E ds \\
&\leq \int_0^a \sup_{(s,x)\in\Delta} \|f(s,x,u_n(s,x))-f(s,x,u(s,x))\|_E ds \\
&\leq a\|f(.,.,u_n(.,.))-f(.,.,u(.,.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

D'après la continuité de la fonction f, *on obtient*

$$\|N(u_n)-N(u)\|_\infty \to 0 \ quandn \to \infty.$$

Etape 2 : *N tronsforme les parties bornées dans des parties bornées dans C.*

Pour $\eta^* > 0$, *il existe une constante* $\widetilde{\ell}$ *telle que pour*

$$u \in B_{\eta^*} = \{u \in C : \|u\|_\infty \leq \eta^*\},$$

on obtient $\|N(u)\|_\infty \leq \widetilde{\ell}$.

Par (H_3) on a pour $(t,x) \in \Delta$, on a

$$\begin{aligned}
\|(Nu)(t,x)\|_E &\leq \|\Phi(x)\|_E + \int_0^t \|f(s,x,u(s,x))\|_E ds \\
&\leq \|\Phi(x)\|_E + \int_0^t q(s,x)\|u\|_\infty ds \\
&\leq \|\Phi\|_\infty + a\|q\|_\infty \eta^*. \int_0^a ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|N(u)\|_\infty \leq \|\Phi\|_\infty + a\|q\|_\infty \eta^* := \widetilde{\ell}.$$

Etape 3 *: N transforme les bornées dans des parties equicontinues dans C.*

Soient $t_1, t_2 \in (0,a], x \in (0,b]$, $t_1 < t_2$, et $u \in B_{\eta^*}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|(Nu)(t_2,x) - (Nu)(t_1,x)\|_E &= \| \int_0^{t_2} f(s,x,u(s,x))ds - \int_0^{t_1} f(s,x,u(s,x))ds\|_E \\
&\leq \|q\|_\infty \eta^* \int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leq \|q\|_\infty \eta^* (t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.

En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème Arzela-Ascoli, on peut conclure que N est continu et complètement continu.

Etape 4 *: L'estimation apriori.*

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un ouvert $U \subseteq C$ avec $u \neq \nu N(u)$, pour $\nu \in]0,1[$ et $u \in \partial U$. Soit $u \in C$ et $u = \nu N(u)$ pour certain $0 < \nu < 1$.

Ainsi, pour chaque $(t,x) \in \Delta$,

$$u(t,x) = \nu\Phi(x) + \nu \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds.$$

Cela implique d'après (H_3) *que, pour* $(t,x) \in \Delta$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_E &\leq \|\Phi(x)\|_E + \int_0^t q(s,x)\|u(s,x)\|_E ds \\ &\leq \|\Phi\|_\infty + \int_0^t q(s,x)\|u(s,x)\|_E ds.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.4.5, il existe une constante $\delta > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_E &\leq \|\Phi\|_\infty + \delta\|q\|_\infty\|\Phi\|_\infty \int_0^t ds \\ &\leq \|\Phi\|_\infty[1 + \delta a\|q\|_\infty] := M.\end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_\infty \leq M.$$

Posons

$$U = \{u \in C : \|u\|_\infty < M + 1\}.$$

Par le choix de U, *il n'ya pas de* $u \in \partial U$ *tel que* $u = \nu N(u)$, *pour* $\nu \in]0,1[$. *Comme une conséquence de l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder [8], l'opérateur* N *admet un point fixe* u *dans* $\overline{U}$ *qui est une solution de notre problème (3.1)-(3.2) .*

3.1.3 Exemple

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$(D_t u)(t,x) = \frac{1}{e^{t+x+1}(1 + |u(t,x)|)}; \quad si\ (t,x) \in [0,1] \times [0,1], \tag{3.5}$$

$$u(0,x) = x;\ \ x \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{e^{t+x+1}(1+|u(t,x)|)};\ \ (t,x) \in [0,1]\times[0,1].$$

Pour $u,\ v \in \mathbb{R}$ *and* $(t,x) \in [0,1]\times[0,1]$ *on obtient*

$$\|f(t,x,u(t,x)) - f(t,x,v(t,x))\|_E \leq \frac{1}{e}\|u-v\|_\infty.$$

Donc la condition (H_{02}) *est satisfaite avec* $m = \frac{1}{e}$. *De plus la condition (3.3) est satisfaite. En effet* $am = \frac{1}{e} < 1$. *Donc les conditions* (H_{01}) *et* (H_{02}) *sont satisfaites. Donc, le problème (3.16)-(3.17) possède une unique solution sur* $[0,1]\times[0,1]$.

3.1.4 Problème Fonctionnel Non-local :

Soit le problème suivant :

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x));\ \ si\ (t,x) \in \Delta, \tag{3.7}$$

$$u(0,x) = Q(u) + \Phi(x);\ \ x \in [0,b], \tag{3.8}$$

ou' $Q : C(\Delta, E) \to E$ *une fonction donnée.*

Définition 3.1.2. *Une fonction* $u \in C$ *est dite solution du problème (3.7)-(3.8) si* u *vérifie (3.7) dans* Δ *et la condition (3.8) dans* $[0,b]$.

Théorème 3.1.3. *Supposons* $(H_{01}), (H_{02})$ *et la condition suivante sont satisfaites*

(H'_{01}) *Il existe* $\tilde{k} > 0$ *telle que*

$$\|Q(u) - Q(v)\|_E \leq \tilde{k}\|u - v\|_\infty, \text{ pour } u, v \in C(\Delta, E).$$

Si

$$am + \tilde{k} < 1, \tag{3.9}$$

alors, le problème (3.7)-(3.8) admet au moins une solution sur $[0, a] \times [0, b]$.

Démonstration : *Considérons l'opérateur* $\bar{N} : C(\Delta) \to C(\Delta)$

Définie par :

$$(\bar{N}u)(t, x) = Q(u) + \Phi(x) + \int_0^t f(s, x, u(s, x))ds; \qquad (t, x) \in \Delta. \tag{3.10}$$

Alors le problème de trouver les solutions du problème (3.7)-(3.8) est réduite à trouver les solutions de l'équation

$$(\bar{N}u)(t, x) = u(t, x); \ (t, x) \in \Delta.$$

Nous allons montrer que l'opérateur $\bar{N}$ *satisfait les conditions du théorème de Banach pour les contractions.*

Soit $u, v \in C$.

Alors, pour $(t,x) \in \Delta$, *alors*

$$\begin{aligned}
\|(\bar{N}u)(t,x) - (\bar{N}v)(t,x)\|_E &\leq \|Q(u) - Q(v)\|_E \\
&+ \int_0^t \|f(s,,x,u(s,x)) - f(s,x,v(s,x))\|_E ds \\
&\leq \|Q(u) - Q(v)\|_E + \int_0^t K\|u - v\|_\infty ds \\
&\leq \tilde{k}\|u - v\|_\infty + m\|u - v\|_\infty \int_0^a ds \\
&= (\tilde{k} + am)\|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\|\bar{N}(u) - \bar{N}(v)\|_\infty \leq (\tilde{k} + am)\|u - v\|_\infty.$$

D'après (3.9), l'opérateur $\bar{N}$ *est contractif, d'où* $\bar{N}$ *admet un point fixe unique d'après le principe de contraction de Banach.*

Théorème 3.1.4. *Supposons* $(H_{01}), (H_{03})$ *et la condition suivante*

(H'_{03}) *Il existe* $\tilde{d} > 0$ *telle que*

$$\|Q(u)\|_\infty \leq \tilde{d}(1 + \|u\|_\infty), \ \textit{pour } u \in C(J,E).$$

Alors, il existe une solution du problème (3.7)-(3.8) sur $[0,a] \times [0,b]$.

3.2 Equations Différentielles Fonctionnelles Perturbées :

3.2.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions le problème perturbé suivant :

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)), \ \ si \ (t,x) \in \Delta := [0,a] \times [0,b], \quad (3.11)$$

$$u(0,x) = \psi(x); \ x \in [0,b], \quad (3.12)$$

où $f, g : \Delta \times E \to E$ *des fonctions données,* $\psi \in C(\Delta, E)$. *Ensuite, on considère le problème non-local suivant :*

$$(D_t u)(t,x) = f(t,x,u(t,x)) + g(t,x,u(t,x)), \quad si \ \ (t,x) \in \Delta, \quad (3.13)$$

$$u(0,x) = \psi(x) + Q(u); \ x \in [0,b], \quad (3.14)$$

où f, g, ψ *sont comme dans le problème (3.11)-(3.12) et* $Q : C(\Delta, \mathbb{E}) \to \mathbb{E}$ *sont des fonctions continues.*

3.2.2 Existence des Solutions

Nous présentons les hypothèses suivantes :

(H_{01}) *Les fonctions* $f, \ g : \Delta \times E \to E$ *sont continues,*

(H_{02}) *Il existe* $k > 0$ *telle que pour* $(t,x) \in \Delta$

$$\|g(t,x,u) - g(t,x,v)\|_E \leq k\|u - v\|_\infty, \quad pour \ \ u, \ v \in C,$$

(H_{03}) *Il existe* $p, q \in C(\Delta, \mathbb{R}_+)$ *telles que*

$$\|f(t,x,u)\|_E \leq p(t,x) + q(t,x)\|u\|_\infty, \text{ pour } (t,x) \in J \text{ et } u \in C.$$

Théorème 3.2.1. *Supposons que les hypothèses* $(H_{01}) - (H_{03})$ *sont satisfaites. Si*

$$ak < 1, \tag{3.15}$$

alors le problème (3.11)-(3.12) possède au moins une solution sur $[0,a] \times [0,b]$.

Démonstration :

Considérons les opérateurs $F, G : C \to C$ *définis par,*

$$(Fu)(t,x) = \psi(x) + \int_0^t f(s,k,u(s,x))ds; \ (t,x) \in \Delta,$$

et

$$(Gu)(t,x) = \int_0^t g(s,k,u(s,x))ds; \ (t,x) \in \Delta.$$

Alors le problème de trouver les solutions du problème (3.11)-(3.12) est réduite à trouver les solutions de l'équation $N(u)(t,x) + G(u)(t,x) = u(t,x), \ (t,x) \in \Delta.$ *Nous allons montrer que les opérateurs* F *et* G *satisfait toutes les conditions du théorème 1.4.3. La preuve sera donnée en 4 étapes.*

Etape 1 : *F est continu.*

Soit la suite $\{u_n\}$ *telle que* $u_n \to u$ *dans* C.

Soit $\eta > 0$ *telle que* $\|u_n\|_\infty \leq \eta$ *et* $\|u\|_\infty \leq \eta$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\|(Fu_n)(t,x) - (Fu)(t,x)\|_E &\leq \int_0^x \|f(s,x,u_n(s,x)) - f(s,x,u(s,x))\|_E ds \\
&\leq \sup \|f(s,x,u_n(s,x)) - f(s,x,u(s,x))\|_\infty \int_0^a ds \\
&= a\|f(.,.,u_n(.,.)) - f(.,.,u(.,.))\|_\infty.
\end{aligned}$$

Depuis le fait que f *est continue, on obtient alors*

$$\|(Fu_n) - (Fu)\|_\infty \to 0 quand\ n \to \infty.$$

Etape 2 : <u>F *transforme les bornées dans des bornées dans*C.</u>

En effet, pour $\eta^* > 0$, *il existe* $\ell > 0$ *telle que, pour* $u \in B_{\eta^*} = \{u \in C : \|u\|_\infty \leq \eta^*\}$, *nous avons* $\|F(u)\|_\infty \leq \ell$. *D'après* (H_{03}) *on a pour* $(t,x) \in \Delta$,

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t,x)\|_E &\leq \|\psi(x)\|_E + \int_0^t \|f(s,x,u(s,x))\|_E ds \\
&\leq \|\psi\|_\infty + (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*) \int_0^a ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(u)\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty + \|p\|_\infty + a\|q\|_\infty \eta^* := \ell.$$

Etape 3 : <u>F *transforme les bornées dans les équicontinues dans*</u> C.

Soient $(t_1, x), (t_2, x) \in (0,a] \times (0,b]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} *une partie bornée de* C *comme* *dans l'étape 2, et soit* $u \in B_{\eta^*}$. *Alors*

$$\begin{aligned} \|(Fu)(t_2,x)-(Fu)(t_1,x)\|_E &\leq \left\| \int_0^{t_2} f(s,x,u(s,x))ds - \int_0^{t_1} f(s,x,u(s,x))ds \right\|_E \\ &\leq (\|p\|_\infty + \|q\|_\infty \eta^*)(t_2-t_1). \end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, *le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. En conséquence des étapes 1 à 3, d'après le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut conclure que* $F : C \to C$ *est continue et complètement continue.*

Etape 4 : *G est une contraction.*

Soient $u, v \in C$. *Alors, pour* $(t,x) \in \Delta$.
On obtient

$$\begin{aligned} \|(Gu)(t,x)-(Gv)(t,x)\|_E &\leq \int_0^t \|g(s,x,u(s,x))-g(s,x,v(s,x))\|_E ds \\ &\leq k\|u-v\|_\infty \int_0^t ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$\|G(u)-G(v)\|_\infty \leq ak\|u-v\|_\infty,$$

D'après (3.15), G est une contraction.

Etape 5 : *Maintenant il reste à montrer que l'ensemble*

$$\mathcal{E} = \{u \in C : u = \nu F(u) + \nu G(\frac{u}{\nu}), \quad pour\ 0 < \nu < 1\}$$

est borné. Soit $u \in \mathcal{E}$*, alors* $u = \nu F(u) + \nu G(\frac{u}{\nu})$ *pour* $0 < \nu < 1$*. Donc, pour* $(t,x) \in J$ *nous obtenons*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \nu\Psi(x) + \nu \int_0^t f(s,x,u(s,x))ds \\ &\quad + \nu \int_0^t g(s,x,\frac{u(s,x)}{\nu})ds. \end{aligned}$$

d'après (H_{02}) *et* (H_{03}) *on a pour* $(t,x) \in \Delta$,

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq \|\Psi(x)\|_E + \|p\|_\infty \int_0^t ds \\ &\quad + \|q\|_\infty \int_0^t \|u(s,x)\|_E ds \\ &\quad + \nu \int_0^t \|g(s,x,\frac{u(s,x)}{\nu}) - g(s,x,0)\|_E ds \\ &\quad + \nu \int_0^t \|g(s,x,0)\|_E ds \\ &\leq \|\Psi\|_\infty + \|p\|_\infty \int_0^t ds + \|q\|_\infty \int_0^t \|u(s,x)\|_E ds \\ &\quad + ak \int_0^t \|u(s,x)\|_\infty ds + g^*, \end{aligned}$$

où $g^* = \sup_{(t,x)\in\Delta} \|g(t,x,0)\|_E$*. Donc, pour* $(t,x) \in \Delta$*, on trouve*

$$\|u(t,x)\|_E \leq \|\Psi\|_\infty + \|p\|_\infty + g^* + (k + \|q\|_\infty) \int_0^t \int_0^x \|u(s,x)\|_E ds.$$

Le Lemme 1.4.5 implique qu'il existe une constante $\widetilde{k}$ *telle que*

$$\begin{aligned} \|u(t,x)\|_E &\leq [\|\Psi\|_\infty + \|p\|_\infty + g^*][1 + \widetilde{k}(k + \|q\|_\infty) \int_0^t \int_0^x dkds] \\ &\leq [\|\Psi\|_\infty + \|p\|_\infty + g^*][1 + \widetilde{k}(k + \|q\|_\infty)] := \widetilde{R}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|u\|_\infty \leq \widetilde{R}.$$

D'où ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est bornée. D'après le Théorème 1.4.3, $F+G$ admet un point fixe u qui représente une solution du problème (3.11)-(3.12).

Voici maintenant, le résultat d'existence pour le problème non-local (3.13)-(3.14).

Théorème 3.2.2. *Supposons que les hypothèses $(H_{01})-(H_{03})$ et la condition suivante sont satisfaites.*

(H''_{01}) *Il existe $\tilde{d} > 0$ telle que*

$$\|Q(u)\|_E \leq \tilde{d}\|u\|_\infty, \ pour \ u \in C(\Delta, E).$$

Si $ak < 1$, alors le problème (3.13)-(3.14) possède au moins une solution sur $[0,a]\times[0,b]$.

3.2.3 Exemple

Considérons le problème perturbé suivant

$$(D_t u)(t,x) = \frac{1+e^{t+x+1}(2+|u(t,x)|)}{e^{t+x+1}(1+|u(t,x)|)}; \quad si \ (t,x) \in [0,a]\times[0,b], \tag{3.16}$$

$$u(0,x) = 1+x^2, \ x \in [0,1]. \tag{3.17}$$

Posons

$$f(t,x,u(t,x)) = \frac{2+|u(t,x)|}{1+|u(t,x)|}, \ (t,x) \in [0,1]\times[0,1],$$

et

$$g(t,x,u(t,x)) = \frac{1}{e^{t+x+1}(1+|u(t,x)|)}, \;\; (t,x) \in [0,1] \times [0,1].$$

Pour $u, \; \overline{u} \in \mathbb{R}$ *et* $(t,x) \in [0,1] \times [0,1]$ *on obtient*

$$|g(t,x,u(t,x)) - g(t,x,\overline{u}(t,x))| \leq \frac{1}{e}\|u - \overline{u}\|_{\infty}.$$

Donc la condition (H_{02}) *est satisfaite avec* $k = \dfrac{1}{e}$*. La condition (3.15) est satisfaite. En effet* $ak = \dfrac{1}{e} < 1$*. aussi, la fonction* f *est continue sur* $[0,1]\times[0,1]\times[0,\infty)$ *et*

$$|f(t,x,u)| \leq 2 + |u|; \; \textit{for each } (t,x,u) \in [0,1] \times [0,1] \times [0,\infty).$$

Donc les conditions (H_{01}) *et* (H_{03}) *sont satisfaites. Le Théorème 3.2.1 implique que le problème (3.16)-(3.17) possède une solution sur* $[0,1] \times [0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons considéré l'existence et unicité des solutions de quelques problèmes de Cauhy d'équations différentielles fonctionnelles ordinaires et aux dérivées partielles. Des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité des solutions de nos problèmes ont été données.

Bibliographie

[1] *S. Abbas and M. Benchohra, Darboux problem for perturbed partial differential equations of fractional order with finite delay, Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* **3** *(2009), 597-604.*

[2] *S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, Topics in Fractional Differential Equations, Springer, New York, 2002.*

[3] *T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr.* **189** *(1998), 23-31.*

[4] *T.A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr.* **189** *(1998), 23-31.*

[5] *L. Byszewski, Theorem about existence and uniqueness of continuous solutions of nonlocal problem for nonlinear hyperbolic equation, Appl. Anal.,* **40** *(1991), 173-180.*

[6] *L. Byszewski, Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional differential evolution nonlocal Cauchy problem, Selected Problems in Mathematics, Cracow Univ. of Tech. Monographs, Anniversary Issue* **6** *(1995), 25-33.*

[7] M. Dawidowski and I. Kubiaczyk, *An existence theorem for the generalized hyperbolic equation $z''_{xy} \in F(x, y, z)$ in Banach space, Ann. Soc. Math. Pol. Ser. I, Comment. Math.,* **30** *(1) (1990), 41-49.*

[8] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.*

[9] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.*

[10] A. Heris, *Problème de Darboux pour des équations différentielles hyperboliques d'ordre fractionnaire Mémoire de Magister, Unversité de Tlemcen, Juin 2013.*

[11] Z. Kamont, *Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.*

[12] Z. Kamont, and K. Kropielnicka, *Differential difference inequalities related to hyperbolic functional differential systems and applications. Math. Inequal. Appl.* **8** *(4) (2005), 655-674.*